Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Андреев Александр Андреевич

О сложности функций многозначной логики в некоторых неполных базисах

01.01.09 — Дискретная математика
и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2016

Работа выполнена на кафедре дискретной математики механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:	**Кочергин Вадим Васильевич,** доктор физико-математических наук
Официальные оппоненты:	**Косовский Николай Кириллович,** доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», математико-механический факультет, кафедра информатики, профессор
	Дагаев Дмитрий Александрович, кандидат физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», заместитель проректора, общеуниверситетская кафедра высшей математики, доцент
Ведущая организация:	**ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»**

Защита диссертации состоится 17 марта 2017 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, и на сайте http://istina.msu.ru/dissertations/39128562/.

Автореферат разослан 17 февраля 2017 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе
МГУ имени М. В. Ломоносова
чл.-корр. РАН

Шафаревич Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Данная работа является исследованием в области теории синтеза и сложности управляющих систем, одного из центральных и быстроразвивающихся разделов дискретной математики и математической кибернетики, получающего постановки задач и находящего многообразные применения в информатике, а также в вычислительной и телекоммуникационной технике.

В общих чертах задача синтеза может быть описана следующим образом. Имеется множество элементарных средств (базис), из которых по некоторым правилам строятся более сложные объекты — схемы (в широком смысле, например, формулы или схемы из функциональных элементов). По каждой схеме определяется функция, которую эта схема реализует. Задача синтеза заключается в построении по заданной функции реализующей её схемы.

Зачастую для заданной функции требуется построить не произвольную реализующую её схему, а в некотором смысле наилучшую, оптимальную по тем или иным параметрам. Для измерения «качества» схемы вводятся различные меры сложности[1], например, собственно сложность — количество элементов или, в общем виде, их вес (стоимость), глубина, объём или площадь схемы, мощность и т. д.

Для конечных базисов, как правило, существует универсальный метод решения задачи нахождения оптимальной схемы — перебор всех схем со сложностью не более некоторой величины. Однако на практике воспользоваться таким способом обычно невозможно, так как с ростом числа элементов количество схем растёт очень быстро, и применение тривиального метода становится практически неосуществимым. На самом деле большая трудоёмкость решения задачи оптимального синтеза в общем виде, по-видимому, присуща всем алгоритмам, предназначенным для её решения, — к этому выводу одним из первых пришёл и доказал в рамках некоторой естественной формализации С. В. Яблонский[2]. С тех пор эта точка зрения стала общепринятой, получив много косвенных подтверждений своей

[1]См., например: Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984; Лупанов О. Б. О схемах из функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики, вып. 23. М.: Наука, 1970. С. 43–81; Храпченко В. М. Принципиальное расхождение между глубиной и задержкой // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 51–72; Коршунов А. Д. Об оценках сложности схем из объёмных функциональных элементов // Проблемы кибернетики, вып. 19. М.: Наука, 1967. С. 275–284; Кравцов С. С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики, вып. 19. М.: Наука, 1967. С. 285–292; McColl W. F., Paterson M. S. The depth of all boolean functions // SIAM J. Comput. 1977. V. 6, № 2. P. 373–380; Вайнцвайг М. Н. О мощности схем из функциональных элементов // Доклады АН СССР. 1961. Т. 139, № 2. С. 320–323; Касим-Заде О. М. Об одной мере сложности схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики, вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 117–179.

[2]Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики, вып. 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 75–121.

справедливости.

Таким образом, задача построения наилучшей схемы может быть решена, как правило, только для тривиальных случаев. Поэтому часто приходится рассматривать некоторые ослабления данной задачи. В этом направлении одним из наиболее естественных подходов является поиск не оптимальных, а в том или ином смысле близких к оптимальным схем, например, асимптотически или по порядку наилучших. Сформулируем такую постановку задачи, скажем, для реализации булевых функций схемами из функциональных элементов и формулами. Для оценки качества схем и формул возьмём классические меры — сложность и глубину. Сложность тесно связана со стоимостью, площадью, объёмом и весом реальных интегральных схем, а глубина, также как и близкая к ней, но не совпадающая с ней, задержка[3], характеризует время их срабатывания.

Каждому элементу базиса $\mathfrak{B}$ сопоставляется неотрицательное число — вес элемента, и сложностью $L_{\mathfrak{B}}(S)$ схемы S над базисом $\mathfrak{B}$ называется сумма весов входящих в неё элементов. Глубина $D_{\mathfrak{B}}(S)$ схемы из функциональных элементов S над базисом $\mathfrak{B}$ определяется как количество элементов в самой длинной цепочке, соединяющей вход и выход схемы. Аналогичным образом можно определить понятие глубины формулы, однако глубина функции в случае реализации формулами оказывается равной глубине в случае реализации схемами (при некотором естественном сопоставлении формул и схем из функциональных элементов над одним и тем же базисом). Под сложностью формулы будем понимать количество входящих в неё символов переменных и констант. Стоит отметить, что в качестве меры сложности формулы также рассматривают сумму весов функциональных символов, но если вес базисной функции на единицу меньше количества её существенных переменных, то указанные меры сложности отличаются на единицу. Сложностью $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(f)$ ($L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(f)$) реализации функции f схемами из функциональных элементов (формулами) над базисом $\mathfrak{B}$ называется минимальная сложность схемы (формулы) над базисом $\mathfrak{B}$, реализующей данную функцию. Вводится функция $L_{\mathfrak{B}}(n)$ ($L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(n)$ для схем из функциональных элементов и $L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(n)$ для формул), значение которой равно сложности реализации самой сложной функции от n переменных. Аналогичным образом определяются величины $D_{\mathfrak{B}}(f)$ и $D_{\mathfrak{B}}(n)$. Требуется найти метод синтеза схем, позволяющий для каждой функции f от n переменных строить схему, реализующую эту функцию и имеющую сложность, не превосходящую или мало превосходящую величину $L_{\mathfrak{B}}(n)$ (соответственно $D_{\mathfrak{B}}(n)$). Такой подход был предложен К. Шенноном[4] в 1949 г. при исследовании

[3]Храпченко В. М. Различие и сходство между задержкой и глубиной // Проблемы кибернетики, вып. 35. М.: Наука, 1979. С. 141–168.

[4] Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28, № 1. P. 59–98.

контактных схем и впоследствии был перенесён на другие классы управляющих систем. Функцию $L_{\mathfrak{B}}(n)$ принято называть функцией Шеннона сложности, а функцию $D_{\mathfrak{B}}(n)$ — функцией Шеннона глубины.

Для почти всех основных модельных классов управляющих систем[5] О. Б. Лупановым, а также его учениками и последователями была решена задача нахождения асимптотики роста соответствующих функций Шеннона сложности[6]. В частности, для функций Шеннона сложности реализации булевых функций над произвольным конечным функционально полным базисом $\mathfrak{B}$ схемами из функциональных элементов и формулами, а также для функции Шеннона глубины имеют место следующие соотношения:

$$L_{\mathfrak{B}}^{\text{СФЭ}}(n) \sim \rho\,\frac{2^n}{n}, \quad L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(n) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}, \quad D_{\mathfrak{B}}(n) \sim \tau n,$$

где ρ — константа (минимум приведённых весов элементов базиса), однозначно определяемая[7] по базису $\mathfrak{B}$, а $\tau = (\log_2 m)^{-1}$, где m — максимальное число существенных переменных у функций из базиса $\mathfrak{B}$.

Отметим, что для большинства модельных классов управляющих систем, в том числе для схем из функциональных элементов и формул, имеет место так называемый «эффект Шеннона» — почти все функции от n переменных имеют сложность, асимптотически совпадающую со сложностью функции Шеннона (тем самым, методы, дающие верхние оценки сложности функций, асимптотически совпадающие со значением соответствующей функции Шеннона, позволяют для почти всех функций строить асимптотически оптимальные схемы). Тем не менее, предъявить достаточно сложные объекты в явном виде для большинства модельных классов управляющих систем, за исключением отдельных классов, например, вентильных схем[8] и схем конкатенации[9], не удаётся.

[5] См., например, Яблонский С. В. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики, вып. 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 7–38.

[6] См., в частности, Лупанов О. Б. О вентильных и контактно-вентильных схемах // ДАН СССР. 1956. Т. 111, № 6. С. 1171–1174; Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Известия вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1, № 1. С. 120–140; Лупанов О. Б. О синтезе контактных схем // ДАН СССР. 1958. Т. 119, № 1. С. 23–26; Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики, вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80; Кузьмин В. А. Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга // Проблемы кибернетики, вып. 13. 1965. С. 75–96; Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики, вып. 21. М.: Физматгиз, 1969. С. 5–102; Pippenger N. The minimum number of edges in graphs with prescribed paths // Math. Systems Theory. 1979. V. 12, № 4. P. 325–346.

[7] См., например, Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

[8] См., например, Лупанов О. Б. О вентильных схемах // Acta Cybernetica. 1980. Tom. 4, Fasc. 4. P. 311–315; Кочергин В. В. Теория вентильных схем (современное состояние) // Дискретная математика и ее приложения. Сборник лекций молодежных научных школ по дискретной математике и ее приложениям. Выпуск VII. М.: Изд-во ИПМ РАН, 2013. С. 23–40.

[9] Berstel J., Brlek S. On the lenght of word chains // Inform. Process. Lett. 1987. V. 26, № 1. P. 23–28; Кочергин В. В., Кочергин Д. В. Уточнение асимптотического поведения сложности сборки слов схемами конкатенации // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. № 2. С. 12–18.

Каждая схема, реализующая функцию f, автоматически даёт верхнюю оценку сложности этой функции. Но, чтобы понять, насколько близко найденное решение к оптимальному, необходимо иметь хорошую нижнюю оценку сложности. Таким образом, возникает задача нахождения нижних оценок, которая состоит в доказательстве того, что ни одна схема, реализующая данную функцию, не может иметь сложность, меньшую заданной. Проблема нахождения нижних оценок сложности[10], имеющая внушительную историю, — одна из наиболее трудных и важных в дискретной математике и математической кибернетике.

В большинстве случаев имеющиеся высокие нижние оценки функций Шеннона не являются конструктивными. Они опираются на мощностные соображения[11] — количество различных схем относительно невысокой сложности, на входы которых подаются переменные из фиксированного множества $x_1, \ldots, x_n$, не превосходит количество различных функций от этих переменных, а значит самая сложная функция заведомо реализуется с большей сложностью. Однако сложность схем для интересных с практической точки зрения функций, как правило, значительно ниже мощностных нижних оценок, что также указывает на важность задачи получения высоких конструктивных нижних оценок. Отметим, что есть примеры[12] индивидуальных последовательностей функций с экспоненциальной сложностью, но при их построении применяются «сильные» средства, сравнимые по своей мощности с полным перебором, например, такие как нумерация примитивно-рекурсивных функций или формальная теория большой выразительно силы. В дальнейшем речь пойдёт только о конструктивно заданных[13] последовательностях функций.

В прикладном плане получение результатов, касающихся проблематики нижних оценок сложности, способствовало бы разработке более эффективных алгоритмов и созданию методов оценки качества алгоритмов и программ.

Получение нижних оценок для конструктивно задаваемых последовательностей функций и для узких классов функций является одним из приоритетных направлений исследований в задачах теории синтеза и сложности управляющих систем. Несмотря на трудность этих задач, их важность неоднократно отмечалась С. В. Яблонским и О. Б. Лупановым[14].

---

[10]См., например, Нигматулин Р. Г. Нижние оценки сложности и сложность универсальных схем // Казань: Изд-во казанского ун-та, 1990.

[11]См., например, Riordan J., Shannon C. E. The number of two-terminal series-parallel networks // J. Math. and Phys. 1942. V. 21, № 2. P. 83–93.

[12]См., например, Stockmeyer L. J. The complexity of decision problems in automata theory and logic // MAC Techn. Rep. 133, M.I.T., 1974; Шоломов Л. А. Об одной последовательности сложно реализуемых функций // Математические заметки. 1975. Т. 17, вып. 6. С. 957–966; Марченков С. С. О сложности вычисления экспоненты // Математические заметки. 1982. Т. 31, вып. 3. С. 457–463.

[13]См., например, Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций // М.: Наука, 1991.

[14]См., например, Лупанов О. Б. Об асимптотических оценках сложности управляющих систем // Международный конгресс математиков в Ницце, 1970. Доклады советстких математиков. М.: Наука,

Однако в случае реализации булевых функций схемами из функциональных элементов и формулами все известные нижние оценки для конструктивно задаваемых последовательностей функций принципиально ниже мощностных оценок. Более того, в случае схем из функциональных элементов такие оценки имеют рост не выше линейного от числа переменных.

В случае реализации булевых функций формулами известен ряд методов, позволяющих получать несколько более высокие нижние оценки для конструктивно задаваемых последовательностей функций. Первый метод получения нелинейных нижних оценок сложности формул в стандартном базисе $\{\vee, \&, \neg\}$ был предложен Б. А. Субботовской[15]. Этим методом для реализации последовательности линейных функций была установлена нижняя оценка сложности, имеющая порядок роста $n^{3/2}$ (здесь и далее в этом абзаце n — количество переменных у функции). В. М. Храпченко был предложен[16] метод получения нижних оценок в классе П-схем (а также формул в базисе $\{\vee, \&, \neg\}$), применимый к целому ряду функций. Наибольшая оценка, получающаяся этим методом, достигается также на линейных функциях и имеет вид n^2. Наилучшие известные конструктивные нижние оценки для формул в произвольном полном конечном базисе ($n^2/\log n$) даёт метод Нечипорука[17]. А. Е. Андреев на основе обобщения метода Субботовской с использованием универсальной функции Нечипорука построил[18] пример последовательности булевых функций, сложность реализации которых над базисом $\{\vee, \&, \neg\}$ растёт по порядку почти как $n^{5/2}$. В настоящее время самой высокой конструктивной нижней оценкой, по-видимому, является оценка Й. Хастада[19] для реализации явно заданной последовательности функций формулами над базисом $\{\vee, \&, \neg\}$, которая имеет порядок роста $\frac{n^3}{(\log n)^{7/2}(\log\log n)^3}$.

Таким образом, для классов формул и схем из функциональных элементов, как и для многих других модельных классов управляющих систем, несмотря на то, что для почти всех функций сложность асимптотически совпадает с величиной функции Шеннона, не удаётся привести высокие конструктивные нижние оценки. Трудности решения проблемы нижних

1972. С. 162–167; Яблонский С. В. Обзор некоторых результатов в области дискретной математики // Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики (Новосибирск, июнь 1969). Инф. мат-лы Научного совета АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика». 1970. Вып. 5 (42). С. 5–15.

[15] Субботовская Б. А. О реализации линейных функций формулами в базисе $\vee, \&, \neg$ // ДАН СССР. 1961. Т. 136, № 3. С. 553–555.

[16] Храпченко В. М. Об одном методе получения нижних оценок сложности П-схем // Математические заметки. 1971. Т. 10, вып. 1. С. 83–92.

[17] Нечипорук Э. И. Об одной булевой функции // ДАН СССР. 1966. Т. 169, № 4. С. 765–766.

[18] Андреев А. Е. Об одном методе получения более чем квадратичных эффективных нижних оценок сложности π-схем // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1987. № 1. С. 70–73.

[19] Hastad J. The Shrinkage Exponent of De Morgan Formulae is 2 // SIAM J Comput. 1998. V. 27, № 1. P. 48–64.

оценок сложности в совокупности с важностью этой проблемы побуждают видоизменять исходную задачу, в частности, рассматривать более слабые модели вычислений, а именно схемы с различными ограничениями, и в первую очередь, схемы в неполных базисах. Разработка методов получения высоких нижних оценок сложности в неполных базисах важна как сама по себе (например, при реализации монотонных функций в монотонном базисе[20]), так и для разработки методов получения высоких нижних оценок в полных базисах[21].

В случае реализации функций в неполных базисах получены принципиально более высокие конструктивные нижние оценки, чем в полных базисах. Э. И. Нечипоруком для сколь угодно большого числа c приведён[22] пример неполного базиса и последовательности функций, сложность реализации которых формулами над этим базисом имеет сложность порядка n^c (здесь и далее в этом абзаце n — количество переменных у функции). А. А. Разборов получил[23] оценку вида $n^{c\log n}$ для сложности реализации монотонных функций специального вида схемами из функциональных элементов над монотонным базисом. Квазиэкспоненциальные нижние оценки сложности были получены А. Е. Андреевым. Им приведён[24] пример последовательности функций со сложностью реализации схемами из функциональных элементов в монотонном базисе вида $2^{n^{1/3-o(1)}}$.

Для глубины реализации булевых функций формулами или схемами из функциональных элементов также неизвестны конструктивные высокие нижние оценки. Это связано, в частности, с тем, что любая конечная система булевых функций «равномерна». Конечная система функций $\mathfrak{A}$ называется равномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие от системы $\mathfrak{A}$), что для любой функции $f \in [\mathfrak{A}]$ выполняется неравенство

$$D_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c \log L^{\Phi}_{\mathfrak{A}}(f) + d.$$

Равномерность систем булевых функций изучалась многими авторами[25].

[20]См., например, Андреев А. Е. О синтезе схем из функциональных элементов в полных монотонных базисах // Математические вопросы кибернетики, вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 114–139.

[21]См., например, Окольнишникова Е. А. О сведении оценок сложности в полном базисе к оценкам сложности в неполном базисе // Методы дискретного анализа в теории графов и схем, вып. 42. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1985. С. 80–90.

[22]Нечипорук Э. И. О реализации дизъюнкции и конъюнкции в некоторых монотонных базисах // Проблемы кибернетики, вып. 23. М.: Наука, 1970. С. 291–293.

[23]Разборов А. А. Нижние оценки монотонной сложности некоторых булевых функций // ДАН СССР. 1985. Т. 281, № 4. С. 798–801.

[24]Андреев А. Е. Об одном методе получения эффективных нижних оценок монотонной сложности // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 1. С. 3–26.

[25]См., например, Яблонский С. В., Козырев В. П. Математические вопросы кибернетики // Информационные материалы, вып. 19а. М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1968. С. 3–15; Храпченко В. М. О соотношении между сложностью и глубиной формул // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем, вып. 32. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1978. С. 76–94; Pratt V. R. The effect of basis on size of Boolean expressions // 16th Ann. Symp. Found. Comput. Sci. 1975. New York. N. Y. , 1975. P. 119–121; Spira P. M. On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // Proc. 4th Hawai Symposium on System Sciences. North Hollywood:

Завершающие шаги по доказательству равномерности любой конечной (не обязательно полной) системы булевых функций были сделаны А. Б. Угольниковым[26]. Таким образом, если бы существовала система функций $\mathfrak{A}$, такая что порядок роста глубины реализации формулами над системой $\mathfrak{A}$ некоторой последовательности функций превосходил бы величину $\log n$, где n — количество переменных у функции, то из условия равномерности автоматически получалось бы, что сложность реализации этой последовательности функций росла бы быстрее любого полинома.

В отличие от случая функций двузначной логики, во множестве P_k ($k \geqslant 3$) функций многозначной логики существуют конечные системы функций, не являющиеся равномерными[27]. Надо отметить, что изучение сложности реализации функций k-значной логики в связи с возрастающей ролью многозначной логики в информатике и математической кибернетике, а также в различных приложениях, становится важным направлением исследований. В частности, перспективным направлением разработки методов получения высоких конструктивных нижних оценок является исследование сложности реализации функций k-значной логики схемами и формулами в неполных базисах.

Своеобразие множества функций многозначной логики, имеющего ряд принципиальных отличий от множества булевых функций[28], способствует получению высоких нижних оценок для конструктивно заданных последовательностей функций k-значной логики. Так для случая реализации функций 3-значной логики схемами из функциональных элементов Г. А. Ткачёвым приведён[29] пример неполного базиса и конструктивно заданной последовательности функций от n переменных, асимптотика сложности реализации которых имеет вид $2C_n^{[n/2]}$, что превосходит аналогичные результаты для булевого случая. В случае реализации функций формулами А. Б. Угольниковым были специальным образом подобраны[30] неполный базис $\mathfrak{B}$ и последовательность $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ функций 4-значной логики, для

Western Periodicals Company, 1971. P. 525–527; Wegener I. Relating Monotone Formula Size and Monotone Depth of Boolean Functions // Information Processing Letters, 16. 1983. P. 41–42.

[26] Угольников А. Б. О полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // VII Всесоюзная конференция «Проблемы теоретической кибернетики»: тезисы докладов. Часть 1. Иркутск: Изд-во Иркутского государственного университета, 1985. С. 194–195. (см. также Ragaz M. E. Parallelizable algebras. Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung 26 (1986/7). P. 77–99).

[27] Угольников А. Б. О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // Математические заметки. 1987. Т. 42, вып. 4. С. 603–612.

[28] См., например, Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46; Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2003.

[29] Ткачёв Г. А. О сложности реализации одной последовательности функций k-значной логики // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1977. № 1. С. 45–57.

[30] Угольников А. Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций 4-значной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. № 3. С. 52–55.

которых значение сложности определяется равенством

$$L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(f_n) = 2^{C_n^{[n/2]}}([n/2]+1) - [n/2].$$

Подобная конструкция также позволяет получить пример последовательности функций 3-значной логики, глубина которых растёт экспоненциально от числа переменных.

Цель работы

Целью диссертационной работы является разработка новых методов получения высоких нижних оценок сложности и глубины реализации функций многозначной логики формулами и схемами из функциональных элементов над неполными системами.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, в частности, методы теории синтеза и сложности управляющих систем, теории функциональных систем и теории графов, а также методы математического анализа.

Научная новизна

Все основные результаты работы являются новыми, получены автором самостоятельно. Основные положения диссертации, выносимые на защиту, следующие:

1. Для заданных в явном виде неполных базисов и функций шести- и более значной логики получены нижние оценки сложности реализации формулами, растущие асимптотически быстрее, чем 2^{3^n}, где n — число переменных у функции.

2. Для заданных в явном виде неполных базисов и функций шести- и более значной логики получены нижние оценки глубины, имеющие порядок роста 3^n, где n — число переменных у функции.

3. Приведён пример конечного и бесконечного базисов функций k-значной логики ($k \geqslant 5$), таких, что они порождают один и тот же замкнутый класс, функции Шеннона глубины и сложности реализации формулами над этими базисами попарно асимптотически равны (и при этом растут не медленнее, чем экспоненциально и, соответственно, сверхэкспоненциально), причём каждая функция бесконечного базиса используется хотя бы в одной минимальной формуле, реализующей функцию, на которой достигается значение функции Шеннона.

4. Построен бесконечный базис функций трёхзначной логики и предъявлена конкретная последовательность функций, такая, что глубина (а, следовательно, и сложность реализации схемами из функциональных элементов) функций из этой последовательности ограничена снизу величиной 2^{n-1}, где n — число переменных у функции.

5. Построен бесконечный базис функций четырёхзначной логики и предъявлена конкретная последовательность функций, такая, что асимптотика роста сложности реализации формулами над этим базисом функций данной последовательности превосходит $n \cdot 2^{2^{n-1}}$, где n — число переменных у функции.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по теории синтеза и сложности управляющих систем. Некоторые разделы диссертации могут быть использованы в спецкурсах для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности «Математика».

Апробация работы

Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре «Функции многозначной логики и смежные вопросы» под руководством проф. А. Б. Угольникова, проф. Р. М. Колпакова и проф. С. Б. Гашкова (2010–2012 гг.), на семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» под руководством проф. О. М. Касим-Заде (2014 г.), на семинаре «Математические вопросы кибернетики» под руководством проф. О. М. Касим-Заде (2016 г.), на XIX международной конференции «Ломоносов 2012» (Москва, 2012 г.), на XI международном семинаре «Дискретная математика и её приложения», посвящённом 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, 2012 г.), на IX молодёжной научной школе по дискретной математике и её приложениям (Москва, 2013 г.), на IX международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 2015 г.), на X молодёжной научной школе по дискретной математике и её приложениям (Москва, 2015 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, 3 из которых — в журналах, рекомендованных ВАК РФ. Список публикаций приведён в конце автореферата [1–7].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 110 страниц. Список литературы содержит 114 наименований.

Краткое содержание работы

В диссертации исследуются возможности получения высоких нижних оценок сложности реализации функций многозначной логики формулами и схемами из функциональных элементов над конечными и бесконечными неполными базисами.

Во введении дан краткий обзор результатов, связанных с получением высоких конструктивных нижних оценок сложности функций k-значной ($k \geq 2$) логики, а также сформулированы основные результаты, представленные в диссертационной работе.

В главе 1 изложен метод получения нижней оценки сложности реализации конструктивно заданной последовательности функций формулами над некоторым неполным конечным базисом, асимптотически превосходящей величину 2^{3^n}, где n — число переменных у функции. Это сделано на примере последовательности функций десятизначной логики.

Пусть $E_{10} = \{0, \ldots, 9\}$, F_{n+1} — множество всех наборов из E_{10}^{n+1}, имеющих не менее n вхождений символов $3, 4, 5$, а функции $\mu(x, y, z)$, $\varphi_m(x, y)$ ($m \in \{3, 4, 5\}$) и $f_n(y_1, y_2, x_0, \ldots x_n)$ определены следующим образом:

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 6, & \text{если } x = 6; \\ 9, & \text{если } x = 9,\ y = 2; \\ 8, & \text{если } x = 8 \text{ или } x = 7,\ y = 1; \\ 7 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} \lambda(x, z), & \text{если } x = y; \\ 6 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\varphi_m(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{если } x = 2; \\ 1, & \text{если } x = 1,\ y = m; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$f_n(y_1, y_2, x_0, \ldots, x_n) = \begin{cases} 6, & \text{если } y_1 = 6; \\ 9, & \text{если } y_1 = 9,\ y_2 = 2; \\ 8, & \text{если } y_1 = 8, \text{ а } y_2, x_0, \ldots, x_n \in E_{10}, \\ & \text{или если } y_1 = 7,\ y_2 = 1,\ (x_0, \ldots x_n) \in F_{n+1}; \\ 7 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Основным результатом главы 1 является

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, 6\} \subseteq P_{10}$. *Тогда при всех* $n \geqslant 1$ *выполняется равенство*

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(f_n) = (n+2)\cdot 2^{(n+1)\cdot 3^n} - n - 1.$$

В процессе доказательства теоремы 1.2 также получена оценка на глубину исследуемых функций.

Следствие 1.1. *Пусть* $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, 6\} \subseteq P_{10}$. *Тогда при всех* $n \geqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$D_{\mathfrak{B}}(f_n) \geqslant (n+1)3^n.$$

В главе 2 показано как уменьшить «значность» логики с качественным сохранением результатов, полученных в предыдущей главе. Подобное уменьшение значности приводит к серьёзному усложнению доказательств, и на примерах функций из данной главы менее наглядно (по сравнению с главой 1) видны идеи, позволяющие получить подобные оценки. В главе 2 для любого $r \geqslant 1$ при $k(r) = r+3$ в явном виде предложены неполный базис и последовательность функций из $P_{k(r)}$, сложность которых превосходит 2^{r^n}.

Обозначим через Q_n множество всех наборов из E_k^n, состоящих только из символов $3, \ldots, k-1$, причём символ тройки обязательно присутствует в наборе. Переопределим функции $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y,z)$, $\varphi_m(x,y)$, где $m \in \{3, \ldots, k-1\}$, и $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащие P_k, таким образом:

$$\lambda(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0,\ y = 2; \\ 1, & \text{если } x = 1, y \in E_k \text{ или если } x = 0,\ y = 3; \\ 2 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\mu(x,y,z) = \begin{cases} \lambda(x,z), & \text{если } x = y; \\ 2 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\varphi_m(x,y) = \begin{cases} 3, & \text{если } x = 3,\ y = m; \\ 2 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$f_n(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0,\ (x_1, \ldots, x_n) \notin Q_n; \\ 1, & \text{если } y = 1, (x_1, \ldots, x_n) \in E_k^n \\ & \text{или если } y = 0,\ (x_1, \ldots, x_n) \in Q_n; \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Основным результатом главы 2 является

Теорема 2.1. *Пусть $k \geqslant 4$, $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\} \subseteq P_k$. Тогда при всех $n \geqslant 1$ для последовательности f_n функций k-значной логики справедливо равенство*

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(f_n) = (n+1) \cdot 2^{(k-3)^n-(k-4)^n} - n.$$

В процессе доказательства теоремы 2.1 также получена оценка на глубину исследуемых функций.

Следствие 2.1. *Пусть $k \geqslant 4$, $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\} \subseteq P_k$. Тогда при всех $n \geqslant 1$ для последовательности f_n функций k-значной логики справедливо неравенство*

$$D_{\mathfrak{B}}(f_n) \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n.$$

Частным случаем теоремы 2.1 с сопоставимым с теоремой 1.2 ростом сложности является следующее

Следствие 2.3. *Пусть $\mathfrak{B} = \{\mu^6, \varphi^6_3, \ldots, \varphi^6_5, 2\} \subseteq P_6$. Тогда при всех $n \geqslant 1$ для последовательности f^6_n функций 6-значной логики верно равенство*

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(f^6_n) = (n+1) \cdot 2^{3^n-2^n} - n.$$

В §2.4, завершающем главу 2, показано как нужно видоизменить базис, чтобы нижняя оценка сложности функции f_n составила $(n+1) \cdot 2^{(k-3)^n} - n$.

Глава 3 посвящена получению высоких нижних оценок сложности и глубины реализации функций многозначной логики формулами и схемами из функциональных элементов над некоторыми бесконечными неполными базисами. Бесконечным называется базис, содержащий функции, существенно зависящие от сколь угодно большого числа переменных. Обычно при переходе от конечных базисов к бесконечным (например, в задачах о сложности и глубине булевых функций или в задаче о глубине функций многозначной логики над полными базисами) наблюдается снижение порядка роста функций Шеннона[31]. В случае реализации функций многозначной логики наличие замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, создаёт предпосылку для исследования возможности получения более высоких нижних оценок сложности в бесконечных базисах по сравнению с оценками в конечных базисах.

[31] См., например, Касим-Заде О. М. Общая верхняя оценка сложности схем в произвольном бесконечном полном базисе // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1997. №4. С. 59–61; Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным базисом // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. №1. С. 18–21; Кочергин А. В. О глубине функций k-значной логики в конечных базисах // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. №1. С. 56–59; Кочергин А. В. О глубине функций k-значной логики в бесконечных базисах // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. №1. С. 22–26; Угольников А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах // Препринт ИПМ АН СССР, №112. М.: Изд-во ИПМ АН СССР, 1980.

В §3.1 приведены некоторые результаты, касающиеся сравнения сложности (и глубины) функций (как булевых, так и многозначной логики) над конечными и бесконечными базисами.

В §3.2 показано как для любого конечного базиса функций k-значной логики и произвольной последовательности функций, реализуемых над этим базисом, построить пример бесконечного базиса функций $(k+2)$-значной логики и предъявить последовательность функций с такой же сложностью (теорема 3.1). Стоит отметить, что этот пример искусственный и не очень содержательный, так как почти все функции из построенного бесконечного базиса не используются для реализации предъявленной последовательности функций.

В §3.3 приведён более интересный и содержательный пример конечного и бесконечного базисов со сверхэкспоненциальными оценками сложности. Он описан в следующей теореме.

Теорема 3.4. *Пусть* $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\}$ *— конечный базис функций k-значной логики ($k \geqslant 5$), а $\mathfrak{C}$ — бесконечный базис функций k-значной логики ($k \geqslant 5$), получающийся объединением базиса $\mathfrak{B}$ и множества всех функций, реализуемых формулами вида $\varphi_{m_1}(\ldots \varphi_{m_s}(x_{s+1}, x_s), \ldots, x_1)$ для всех натуральных значений числа s. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $[\mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}]$ *(и, следовательно, класс $[\mathfrak{C}]$ конечно порождён);*

2) *функции Шеннона глубины и сложности реализации формулами над этими базисами асимптотически равны (и растут не медленнее, чем экспоненциально и, соответственно, сверхэкспоненциально):*

$$D_{\mathfrak{B}}(n) \sim D_{\mathfrak{C}}(n) \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n,$$
$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(n) \sim L^{\Phi}_{\mathfrak{C}}(n) \geqslant n2^{(k-3)^n-(k-4)^n};$$

3) *каждая функция базиса $\mathfrak{C}$ используется хотя бы в одной минимальной формуле, реализующей функцию, на которой достигается значение функции Шеннона (как сложности реализации формулами, так и глубины).*

При рассмотрении меры сложности формул, равной количеству функциональных символов в формуле, асимптотика функции Шеннона сложности при переходе от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{C}$ уменьшается в n раз, но её рост остаётся сверхэкспоненциальным.

Замкнутые классы, для которых формулируется теорема 3.4, конечно порождены. В §3.4 установлено, что для случая замкнутых классов, не являющихся конечно-порождёнными, также можно получать высокие нижние оценки роста функций Шеннона.

Пусть $\varphi(x)$ — функция трёхзначной логики, принимающая значение 1 при $x = 2$ и значение 0 в остальных случаях, $\Omega(\tilde{x})$ — отображение из E_3^n

в E_2^n, сопоставляющее набору $(x_1, \ldots, x_n)$ набор $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$, $\tilde{\alpha}$ — набор из E_2^n. Определим функции $\lambda_{\tilde{\alpha}}^3(y, x_1, \ldots, x_n)$ и $\zeta_n^3(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 1)$ из P_3 следующим образом:

$$\lambda_{\tilde{\alpha}}^3(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0 \text{ и } \Omega(\tilde{x}) \neq \tilde{\alpha}, \text{ или если } y = 2, \\ 1, & \text{если } y = 1, \text{ или если } y = 0 \text{ и } \Omega(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}; \end{cases}$$

$$\zeta_n^3(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если в наборе } (x_1, \ldots, x_n) \text{ чётное количество двоек}, \\ 1, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Пусть* $\mathfrak{A}_3 = \{0\} \cup \{\lambda_{\tilde{\alpha}}^3 \mid \tilde{\alpha} \in R_2\}$, *где* $R_2 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_2^n$, *— неполный бесконечный базис функций трёхзначной логики. Тогда для функции трёхзначной логики* ζ_n^3, $n \geqslant 1$, *выполняется равенство*

$$D_{\mathfrak{A}_3}(\zeta_n^3) = 2^{n-1}.$$

Следствие 3.3. *Пусть* $\mathfrak{A}_3 = \{0\} \cup \{\lambda_{\tilde{\alpha}}^3 \mid \tilde{\alpha} \in R_2\}$, *где* $R_2 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_2^n$, *— неполный бесконечный базис функций трёхзначной логики. Тогда для функций трёхзначной логики* $\zeta_n^3(x_1, \ldots, x_n)$ *при всех* $n \geqslant 1$ *выполняется равенство*

$$L_{\mathfrak{A}_3}^{\text{СФЭ}}(\zeta_n^3) = 2^{n-1}.$$

В §3.5 на основе этого примера функций построен бесконечный базис и последовательность функций из P_4, сложность реализации которых формулами над этим базисом растёт сверхэкспоненциально от числа переменных.

Пусть $\varphi(x)$ — функция четырёхзначной логики, принимающая значение 1 при $x = 2$ и значение 0 в остальных случаях, $\Omega(\tilde{x})$ — отображение из E_4^n в E_2^n, сопоставляющее набору $(x_1, \ldots, x_n)$ набор $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$, $\tilde{\alpha}$ — набор из E_2^n. Определим функции $\mu_{\tilde{\alpha}}(x_1, \ldots, x_{n+2})$ и $\zeta_n^4(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 1)$ из P_4 следующим образом:

$$\mu_{\tilde{\alpha}}(x_1, \ldots, x_{n+2}) = \begin{cases} 3, & \text{если } (x_1, \ldots, x_{n+2}) \notin E_3^{n+2}, \\ & \text{или если } x_1 \neq x_2, \\ \lambda_{\tilde{\alpha}}^3(x_2, \ldots, x_{n+2}), & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$\zeta_n^4(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 3, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \notin E_3^n, \\ 0, & \text{если в наборе } (x_1, \ldots, x_n) \text{ нет символа «3»} \\ & \text{и чётное количество двоек}, \\ 1, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.6. *Пусть* $\mathfrak{A}_4 = \{0\} \cup \{\mu_{\tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in R_2\}$, *где* $R_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_2^n$, *— неполный бесконечный базис функций четырёхзначной логики. Тогда для функции четырёхзначной логики* ζ_n^4, $n \geqslant 1$, *верно равенство*

$$L_{\mathfrak{A}_4}^{\varPhi}(\zeta_n^4) = n \cdot 2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}-1} - n.$$

Глубина и сложность реализации над бесконечными базисами функций, описанных в теоремах 3.5 и 3.6, превосходят известные нижние оценки глубины и сложности для реализации над конечными базисами функций логик такой же «значности».

Заключение

В диссертационной работе получены новые высокие нижние оценки сложности (растущие как «двойная экспонента» от числа переменных) и глубины (растущие экспоненциально от числа переменных) реализации формулами над специально подобранными неполными конечными и бесконечными базисами явным образом заданных последовательностей функций многозначной логики. Дальнейшие исследования могут проходить в следующих направлениях:

– Распространение продемонстрированных методов получения нижних оценок сложности на случай функций k-значной логики ($k \geqslant 3$) для меньших значений k.

– Исследование возможности существования конечного базиса и последовательности функций трёхзначной логики, сложность реализации которых над этим базисом растёт сверхэкспоненциальным образом от числа переменных.

– Изучение возможности существования для некоторого k конечного базиса и последовательности функций k-значной логики, сложность реализации которых над этим базисом растёт быстрее «двойной экспоненты» от числа переменных (т.е. быстрее m^{r^n} для всех значений m и r).

– Исследование существования для некоторого k конечного базиса и последовательности функций k-значной логики, глубина реализации которых над этим базисом растёт сверхэкспоненциально от числа переменных.

Благодарности

Автор глубоко благодарен доктору физико-математических наук Угольникову Александру Борисовичу, под чьим руководством были получены первые результаты данной диссертационной работы, за постановку задачи, научное руководство и постоянное внимание к исследованиям автора. Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук Кочергину Вадиму Васильевичу за научное руководство, помощь при выборе темы исследований, тщательное выверение написанных автором текстов и внимание к работе. Автор также благодарит сотрудников кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ за поддержку и доброжелательное отношение.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Андреев А. А. Об одной последовательности функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 52–57.

[2] Андреев А. А. О нижних оценках сложности для некоторых последовательностей функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2013. № 6. С. 25–30.

[3] Андреев А. А. О нижних оценках сложности функций многозначной логики над бесконечными базисами // Прикладная дискретная математика. 2015. № 3. С. 5–16.

[4] Андреев А. А. Об одной последовательности функций многозначной логики // Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2012. С. 88–90.

[5] Андреев А. А. Точная сверхэкспоненциальная оценка сложности для одной последовательности функций многозначной логики // Материалы IX молодёжной научной школы по дискретной математике и её приложениям. М.: Издательство ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013. С. 15–17.

[6] Андреев А. А. О нижних оценках сложности функций многозначной логики в бесконечных базисах // Труды IX Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». М.: Издательство «МАКС Пресс», 2015. С. 19–22.

[7] Андреев А. А. О сложности функций многозначной логики в бесконечно-порождённых классах // Материалы X молодёжной научной школы по дискретной математике и её приложениям. М.: Издательство ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015. С. 5–9.