Московский государственный университет

имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Андреев Александр Андреевич

О сложности функций многозначной логики в некоторых неполных базисах

Специальность 01.01.09 — Дискретная математика
и математическая кибернетика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

В. В. Кочергин

Москва

2016

Оглавление

Введение

Данная работа является исследованием в области теории синтеза и сложности управляющих систем, одного из центральных и быстроразвивающихся разделов дискретной математики и математической кибернетики, получающей постановки задач и находящей многообразные применения в информатике, а также в вычислительной и телекоммуникационной технике.

В общих чертах задача синтеза может быть описана следующим образом. Имеется множество элементарных средств (базис), из которых по некоторым правилам строятся более сложные объекты — схемы (в широком смысле, например, формулы или схемы из функциональных элементов). По каждой схеме определяется функция, которую эта схема реализует. Задача синтеза заключается в построении по заданной функции реализующей её схемы.

Зачастую для заданной функции требуется построить не произвольную реализующую её схему, а в некотором смысле наилучшую, оптимальную по тем или иным параметрам. Для измерения «качества» схемы вводятся различные меры сложности, например, собственно сложность — количество элементов или, в общем виде, их вес (стоимость), глубина, объём или площадь схемы, мощность и т. д. (см., например, [34, 30, 70, 72, 14, 21, 92, 7, 11]).

Для конечных базисов, как правило, существует универсальный метод решения задачи нахождения оптимальной схемы — перебор всех схем со сложностью не более некоторой величины. Однако на практике воспользоваться таким способом обычно невозможно, так как с ростом числа элементов количество схем растёт очень быстро, и применение тривиального метода становится практически неосуществимым. На самом деле большая трудоёмкость решения задачи оптимального синтеза в общем виде, по-видимому, присуща всем алгоритмам, предназначенным для её решения, — к этому выводу одним из первых пришёл и доказал в рамках некоторой естественной формализации С. В. Яблонский [77]. С тех пор эта точка зрения стала общепринятой, получив много косвенных подтверждений своей справедливости.

Таким образом, задача построения наилучшей схемы может быть решена, как правило, только для тривиальных случаев. Поэтому часто приходится рассматривать некоторые ослабления данной задачи. В этом направлении одним из наиболее естественных подходов является поиск не оптимальных, а в том или ином смысле близких к оптимальным схем, например, асимптотически или по порядку наилучших. Сформулируем такую постановку задачи, скажем, для реализации булевых функций схемами из функциональных элементов и формулами. Для оценки качества схем и формул возьмём классические меры — сложность и глубину. Сложность тесно связана со стоимостью, площадью, объёмом и весом реальных интегральных схем, а глубина, также как и близкая к ней, но не совпадающая с ней, задержка [70], характеризует время их срабатывания.

Каждому элементу базиса $\mathfrak{B}$ сопоставляется неотрицательное число — вес элемента, и сложностью $L_{\mathfrak{B}}(S)$ схемы S над базисом $\mathfrak{B}$ называется сумма весов входящих в неё элементов. Глубина $D_{\mathfrak{B}}(S)$ схемы из функциональных элементов S над базисом $\mathfrak{B}$ определяется как количество элементов в самой длинной цепочке, соединяющей вход и выход схемы. Аналогичным образом можно определить понятие глубины формулы, однако глубина функции в случае реализации формулами оказывается равной глубине в случае реализации схемами (при некотором естественном сопоставлении формул и схем из функциональных элементов над одним и тем же базисом). Под сложностью формулы будем понимать количество входящих в неё символов переменных и констант. Стоит отметить, что в качестве меры сложности формулы также рассматривают сумму весов функциональных символов, но если вес базисной функции на единицу меньше количества её существенных переменных, то указанные меры сложности отличаются на единицу. Сложностью $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(f)$ ($L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(f)$) реализации функции f схемами из функциональных элементов (формулами) над базисом $\mathfrak{B}$ называется минимальная сложность схемы (формулы) над базисом $\mathfrak{B}$, реализующей данную функцию. Вводится функция $L_{\mathfrak{B}}(n)$ ($L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(n)$ для схем из функциональных элементов и $L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(n)$ для формул), значение которой равно сложности реализации самой сложной функции от n переменных. Аналогичным образом определяются величины $D_{\mathfrak{B}}(f)$ и $D_{\mathfrak{B}}(n)$. Требуется найти метод синтеза схем, позволяющий для каждой функции f от n переменных строить схему, реализующую эту функцию и имеющую сложность, не превосходящую или мало превосходящую величину $L_{\mathfrak{B}}(n)$ (соответственно $D_{\mathfrak{B}}(n)$). Такой подход был предложен К. Шенноном [101] в 1949 г. при исследовании контактных схем и впоследствии был перенесён на другие классы управляющих систем. Функцию $L_{\mathfrak{B}}(n)$ принято называть функцией Шеннона сложности, а функцию $D_{\mathfrak{B}}(n)$ — функцией Шеннона глубины.

Для почти всех основных модельных классов управляющих систем [78, 76, 29, 33] О. Б. Лупановым, а также его учениками и последователями была решена задача нахождения асимптотики роста соответствующих функций Шеннона сложности [25, 26, 27, 28, 29, 22, 38, 96]. В частности, для функций Шеннона сложности реализации булевых функций над произвольным конечным функционально полным базисом $\mathfrak{B}$ схемами из функциональных элементов и формулами, а также для функции Шеннона глубины имеют место следующие соотношения [27, 28, 30]:

$$L_{\mathfrak{B}}^{\text{СФЭ}}(n) \sim \rho\,\frac{2^n}{n}, \quad L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(n) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}, \quad D_{\mathfrak{B}}(n) \sim \tau n,$$

где ρ — константа (минимум приведённых весов элементов базиса), однозначно определяемая [34] по базису $\mathfrak{B}$, а $\tau = (\log_2 m)^{-1}$, где m — максимальное число существенных переменных у функций из базиса $\mathfrak{B}$ [30].

Отметим, что для большинства модельных классов управляющих систем, в том числе для схем из функциональных элементов и формул, имеет место так называемый «эффект Шеннона» — почти все функции от n переменных имеют сложность, асимптотически совпадающую со сложностью функции Шеннона (тем самым, методы, дающие верхние оценки сложности функций, асимптотически совпадающие со значением соответствующей функции Шеннона, позволяют для почти всех функций строить асимптотически оптимальные схемы). Тем не менее, предъявить достаточно сложные объекты в явном виде для большинства модельных классов управляющих систем, за исключением отдельных классов, например, вентильных схем [32, 19] и схем конкатенации [105, 85, 18, 20], не удаётся.

Каждая схема, реализующая функцию f, автоматически даёт верхнюю оценку сложности этой функции. Но, чтобы понять, насколько близко найденное решение к оптимальному, необходимо иметь хорошую нижнюю оценку сложности. Таким образом, возникает задача нахождения нижних оценок, которая состоит в доказательстве того, что ни одна схема, реализующая данную функцию, не может иметь сложность, меньшую заданной. Проблема нахождения нижних оценок сложности [41], имеющая внушительную историю, — одна из наиболее трудных и важных в дискретной математике и математической кибернетике.

В большинстве случаев имеющиеся высокие нижние оценки функций Шеннона не являются конструктивными [41, 82]. Они опираются на мощностные соображения (см., например, [99, 101]) — количество различных схем относительно невысокой сложности, на входы которых подаются переменные из фиксированного множества $x_1, \ldots, x_n$, не превосходит количество различных функций от этих переменных, а значит самая сложная функция заведомо реализуется с большей сложностью. Однако сложность схем для интересных с практической точки зрения функций, как правило, значительно ниже мощностных нижних оценок [41], что также указывает на важность задачи получения высоких конструктивных [41, 82] нижних оценок. Отметим, что есть примеры (см., например, [103, 75, 36, 42]) индивидуальных последовательностей функций с экспоненциальной сложностью, но при их построении применяются «сильные» средства, сравнимые по своей мощности с полным перебором, например, такие как нумерация примитивно-рекурсивных функций или формальная теория большой выразительно силы. В дальнейшем речь пойдёт только о конструктивно заданных [42, 41] последовательностях функций.

В прикладном плане получение результатов, касающихся проблематики нижних оценок сложности, способствовало бы разработке более эффективных алгоритмов и созданию методов оценки качества алгоритмов и программ [41].

Получение нижних оценок для конструктивно задаваемых последовательностей функций и для узких классов функций является одним из приоритетных направлений исследований в задачах теории синтеза и сложности управляющих систем. Несмотря на трудность этих задач, их важность неоднократно отмечалась С. В. Яблонским и О. Б. Лупановым (см., например, [31, 80, 79]).

Однако в случае реализации булевых функций схемами из функциональных элементов и формулами все известные нижние оценки для конструктивно задаваемых последовательностей функций принципиально ниже мощностных оценок. Более того, в случае схем из функциональных элементов такие оценки имеют рост не выше линейного от числа переменных.

В случае реализации булевых функций формулами известен ряд методов, позволяющих получать несколько более высокие нижние оценки для конструктивно задаваемых последовательностей функций. Первый метод получения нелинейных нижних оценок сложности формул в стандартном базисе $\{\vee, \&, \neg\}$ был предложен Б. А. Субботовской [50]. Этим методом для реализации последовательности линейных функций была установлена нижняя оценка сложности, имеющая порядок роста $n^{3/2}$ (здесь и далее в этом абзаце n — количество переменных у функции). В. М. Храпченко был предложен [68, 73] метод получения нижних оценок в классе П-схем (а также формул в базисе $\{\vee, \&, \neg\}$), применимый к целому ряду функций. Наибольшая оценка, получающаяся этим методом, достигается также на линейных функциях [67] и имеет вид n^2. Наилучшие известные конструктивные нижние оценки для формул в произвольном полном конечном базисе ($n^2/\log n$) даёт метод Нечипорука [37]. А. Е. Андреев на основе обобщения метода Субботовской с использованием универсальной функции Нечипорука из [37] построил [4] пример последовательности булевых функций, сложность реализации которых над базисом $\{\vee, \&, \neg\}$ растёт по порядку почти как $n^{5/2}$. В настоящее время самой высокой конструктивной нижней оценкой, по-видимому, является оценка Й. Хастада [88] для реализации явно заданной последовательности функций формулами над базисом $\{\vee, \&, \neg\}$, которая имеет порядок роста $\frac{n^3}{(\log n)^{7/2}(\log\log n)^3}$.

Таким образом, для классов формул и схем из функциональных элементов, как и для многих других модельных классов управляющих систем, несмотря на то, что для почти всех функций сложность асимптотически совпадает с величиной функции Шеннона, не удаётся привести высокие конструктивные нижние оценки. Трудности решения проблемы нижних оценок сложности в совокупности с важностью этой проблемы побуждают видоизменять исходную задачу, в частности, рассматривать более слабые модели вычислений, а именно схемы с различными ограничениями, и в первую очередь, схемы в неполных базисах [39, 1, 45]. Разработка методов получения высоких нижних оценок сложности в неполных базисах важна как сама по себе (например, при реализации монотонных функций в монотонном базисе [6, 1, 5]), так и для разработки методов получения высоких нижних оценок в полных базисах [43, 44].

В случае реализации функций в неполных базисах получены принципиально более высокие конструктивные нижние оценки, чем в полных базисах. Э. И. Нечипоруком для сколь угодно большого числа c приведён [39] пример неполного базиса и последовательности функций, сложность реализации которых формулами над этим базисом имеет сложность порядка n^c (здесь и далее в этом абзаце n — количество переменных у функции). А. А. Разборов получил [45] оценку вида $n^{c\log n}$ для сложности реализации монотонных функций специального вида схемами из функциональных элементов над монотонным базисом. Квазиэкспоненциальные нижние оценки сложности были получены А. Е. Андреевым. Им приведён [5] пример последовательности функций со сложностью реализации схемами из функциональных элементов в монотонном базисе вида $2^{n^{1/3-o(1)}}$.

Для глубины реализации булевых функций формулами или схемами из функциональных элементов также неизвестны конструктивные высокие нижние оценки. Это связано, в частности, с тем, что любая конечная система булевых функций «равномерна». Конечная система функций $\mathfrak{A}$ называется равномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие от системы $\mathfrak{A}$), что для любой функции $f \in [\mathfrak{A}]$ выполняется неравенство

$$D_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c \log L^{\Phi}_{\mathfrak{A}}(f) + d.$$

Равномерность систем булевых функций изучалась многими авторами — см., например, [83, 69, 97, 71, 102, 106]. Завершающие шаги по доказательству равномерности любой конечной (не обязательно полной) системы булевых функций были сделаны А. Б. Угольниковым [60, 61] (см. также [98]). Таким образом, если бы существовала система функций $\mathfrak{A}$, такая что порядок роста глубины реализации формулами над системой $\mathfrak{A}$ некоторой последовательности функций превосходил бы величину $\log n$, где n — количество переменных у функции, то из условия равномерности автоматически получалось бы, что сложность реализации этой последовательности функций росла бы быстрее любого полинома.

В отличие от случая функций двузначной логики, во множестве P_k ($k \geqslant 3$) функций многозначной логики существуют конечные системы функций, не являющиеся равномерными [61, 64]. Надо отметить, что изучение сложности реализации функций k-значной логики в связи с возрастающей ролью многозначной логики в информатике и математической кибернетике, а также в различных приложениях (см., например, [87, 95, 107, 91, 86]), становится важным направлением исследований. В частности, перспективным направлением разработки методов получения высоких конструктивных нижних оценок является исследование сложности реализации функций k-значной логики схемами и формулами в неполных базисах.

Своеобразие множества функций многозначной логики, имеющего ряд принципиальных отличий от множества булевых функций [84, 81], способствует получению высоких нижних оценок для конструктивно заданных последовательностей функций k-значной логики. Так для случая реализации функций 3-значной логики схемами из функциональных элементов Г. А. Ткачёвым приведён [54] пример неполного базиса и конструктивно заданной последовательности функций от n переменных, асимптотика сложности реализации которых имеет вид $2C_n^{[n/2]}$, что превосходит аналогичные результаты для булевого случая. В случае реализации функций формулами А. Б. Угольниковым были специальным образом подобраны [65, 64] неполный базис $\mathfrak{B}$ и последовательность $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ функций 4-значной логики (а также 5-значной, хотя оба результата тривиально переносятся на случай логик большей значности), для которых значение сложности определяется равенством

$$L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(f_n) = 2^{C_n^{[n/2]}}([n/2] + 1) - [n/2].$$

Конструкция из [65] также позволяет получить пример последовательности функций 3-значной логики, глубина которых растёт экспоненциально от числа переменных.

В настоящей работе также исследуются возможности получения высоких нижних оценок сложности реализации функций многозначной логики формулами и схемами из функциональных элементов над конечными и бесконечными неполными базисами.

Диссертация состоит из введения, трёх глав основного текста, заключения и списка литературы.

Во введении дан краткий обзор результатов, связанных с получением высоких конструктивных нижних оценок сложности функций k-значной ($k \geqslant 2$) логики, а также сформулированы основные результаты, представленные в диссертационной работе.

В главе 1 изложен метод получения нижней оценки сложности реализации одной конструктивно задаваемой последовательности функций формулами над некоторым конечным базисом, асимптотически превосходящей величину 2^{3^n}, где n — число переменных у функции.

В §1.1 введены необходимые определения и обозначения, используемые в дальнейшем. В §1.2 для полноты картины показано как посредством упрощения конструкции из результата А. Б. Угольникова [65] получить пример последовательности функций трёхзначной логики, глубина реализации которых над специально подобранным неполным базисом растёт экспоненциально (на защиту это утверждение не выносится). В §1.3 построен неполный базис $\mathfrak{B}$ функций десятизначной логики и последовательность f_n конструктивно заданных функций из множества $[\mathfrak{B}]$, сложность реализации которых формулами над этим базисом асимптотически превосходит величину 2^{3^n} (теорема 1.2). Пусть F_{n+1} — множество всех наборов из E_{10}^{n+1}, имеющих не менее n вхождений символов $3, 4, 5$, а функции $\mu(x, y, z)$, $\varphi_m(x, y)$ $(m \in \{3, 4, 5\})$ и $f_n(y_1, y_2, x_0, \ldots x_n)$ определены следующими соотношениями:

$$\lambda(x,y)=\begin{cases}6, & \text{если } x=6;\\ 9, & \text{если } x=9,\ y=2;\\ 8, & \text{если } x=8 \text{ или } x=7,\ y=1;\\ 7 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$\mu(x,y,z)=\begin{cases}\lambda(x,z), & \text{если } x=y;\\ 6 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$\varphi_m(x,y)=\begin{cases}2, & \text{если } x=2;\\ 1, & \text{если } x=1,\ y=m;\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$f_n(y_1,y_2,x_0,\ldots,x_n)=\begin{cases}6, & \text{если } y_1=6;\\ 9, & \text{если } y_1=9,\ y_2=2;\\ 8, & \text{если } y_1=8,\ \text{а } y_2,x_0,\ldots,x_n\in E,\\ & \text{или если } y_1=7,\ y_2=1,\ (x_0,\ldots x_n)\in F_{n+1};\\ 7 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Основным результатом главы 1 является

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathfrak{B}=\{\mu,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,6\}\subseteq P_{10}$. *Тогда при всех* $n\geqslant 1$ *выполняется равенство*

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(f_n)=(n+2)\cdot 2^{(n+1)\cdot 3^n}-n-1.$$

Доказательство этой теоремы опирается на ряд вспомогательных утверждений, которые сформулированы и доказаны в §1.4.

Для наглядности многие используемые для доказательства теоремы 1.2 утверждения формулируются с использованием языка раскрашенных графов: каждой формуле Φ над базисом $\mathfrak{A}$ (здесь $\mathfrak{A}$ — расширение базиса $\mathfrak{B}$: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \{\lambda\}$), ставится в соответствие дерево, рёбра и вершины которого раскрашены в три цвета. В §1.5 сформулирована и доказана лемма 1.2, дающая нижнюю оценку глубины и сложности для формулы Φ, реализующей функцию f_n и имеющей вид $\lambda(\lambda(\ldots\lambda(\lambda(y_1, Z_1), Z_2), \ldots), Z_N)$, где $Z_1, \ldots, Z_N$ — формулы над базисом $\mathfrak{A}$, N натуральное, y_1 — переменная. Оценки, доказываемые в лемме, имеют вид

$$N \geqslant (n+1)\, 3^n, \quad L(Z_i) \geqslant n+1.$$

В процессе непосредственного доказательства теоремы 1.2 построены две формулы специального вида, реализующие функцию f_n: формула Φ над системой $\mathfrak{B}$ и формула G над системой $\mathfrak{A}$. Эти формулы связаны следующим соотношением $D(\Phi) = D(G)$. Кроме того, эти формулы являются минимальными по сложности среди формул, реализующих функцию f_n над базисами $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно. Формула G при этом имеет вид, требующийся в формулировке леммы 1.2.

В процессе доказательства теоремы 1.2 также получена оценка на глубину.

Следствие 1.1. *Пусть* $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, 6\} \subseteq P_{10}$. *Тогда при всех* $n \geqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$D_{\mathfrak{B}}(f_n) \geqslant (n+1)3^n.$$

Таким образом, предложен метод получения нижних оценок сложности реализации функций формулами над некоторым неполным базисом, асимптотически превосходящих величину 2^{3^n}, где n — количество переменных у функции. Однако «значность» логики, для которой описывается метод и строится последовательность функций, оказывается значительно выше, чем в других известных высоких нижних оценках сложности. Эта особенность, связанная с относительной наглядностью рассуждений, не является обязательным условием для получения подобных оценок, и в главе 2 показано как уменьшить «значность» логики с качественным сохранением результатов, полученных в предыдущей главе. Подобное уменьшение значности приводит к серьёзному усложнению доказательств, и на примерах функций из данной главы менее наглядно (по сравнению с главой 1) видны идеи, позволяющие получить подобные оценки. В главе 2 для любого $r \geqslant 1$ при $k(r) = r + 3$ в явном виде предложены неполный базис и последовательность функций из $P_{k(r)}$, сложность которых превосходит 2^{r^n}.

Обозначим через Q_n множество всех наборов из E_k^n, состоящих только из символов $3, \ldots, k - 1$, причём символ тройки обязательно присутствует в наборе. Переопределим функции $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y, z)$, $\varphi_m(x, y)$, где $m \in \{3, \ldots, k - 1\}$, и $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащие P_k, таким образом:

$$\lambda(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } x=0,\ y=2;\\ 1, & \text{если } x=1, y\in E_k \text{ или если } x=0,\ y=3;\\ 2 & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$\mu(x,y,z)=\begin{cases}\lambda(x,z), & \text{если } x=y;\\ 2 & \text{в противном случае;}\end{cases}$$

$$\varphi_m(x,y)=\begin{cases}3, & \text{если } x=3,\ y=m;\\ 2 & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$f_n(y,x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}0, & \text{если } y=0,\ (x_1,\ldots,x_n)\notin Q_n;\\ 1, & \text{если } y=1, (x_1,\ldots,x_n)\in E_k^n\\ & \text{или если } y=0,\ (x_1,\ldots,x_n)\in Q_n;\\ 2 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Основным результатом главы 2 является

Теорема 2.1. *Пусть $k \geqslant 4$, $\mathfrak{B}=\{\mu,\varphi_3,\ldots,\varphi_{k-1},2\}\subseteq P_k$. Тогда при всех $n\geqslant 1$ для последовательности f_n функций k-значной логики справедливо равенство*

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(f_n)=(n+1)\cdot 2^{(k-3)^n-(k-4)^n}-n.$$

Доказательство этой теоремы опирается на ряд вспомогательных утверждений.

Для наглядности многие используемые для доказательства теоремы 2.1 утверждения формулируются, также как и при доказательстве теоремы 1.2, с использованием языка раскрашенных графов. В §2.3 сформулирована и доказана лемма 2.1, фактически дающую экспоненциальную нижнюю оценку на глубину произвольной формулы над базисом $\mathfrak{A}$, реализующей функцию из исследуемой последовательности. Лемма 2.1 утверждает, что для любой формулы над базисом $\mathfrak{A}$, реализующей функцию f_n и имеющей вид $\lambda(\lambda(\ldots\lambda(\lambda(y, Z_1), Z_2), \ldots), Z_N)$, где $Z_1, \ldots, Z_N$ — формулы над системой $\mathfrak{A}$, справедливы следующие оценки:

$$N \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n, \quad L(Z_i) \geqslant n.$$

В процессе доказательства теоремы 2.1 также получена оценка на глубину.

Следствие 2.1. *Пусть* $k \geqslant 4$, $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\} \subseteq P_k$. *Тогда при всех* $n \geqslant 1$ *для последовательности* f_n *функций* k*-значной логики справедливо неравенство*

$$D_{\mathfrak{B}}(f_n) \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n.$$

Частным случаем теоремы 2.1 с сопоставимым с теоремой 1.2 ростом сложности является следующее

Следствие 2.3. *Пусть* $\mathfrak{B} = \{\mu^6, \varphi_3^6, \ldots, \varphi_5^6, 2\} \subseteq P_6$. *Тогда при всех* $n \geqslant 1$ *для последовательности* f_n^6 *функций* 6*-значной логики верно равенство*

$$L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(f_n^6) = (n+1) \cdot 2^{3^n - 2^n} - n.$$

В §2.4, завершающем главу 2, показано как нужно видоизменить базис, чтобы нижняя оценка сложности функции f_n составила $(n+1) \cdot 2^{(k-3)^n} - n$.

Глава 3 посвящена получению высоких нижних оценок сложности и глубины реализации функций многозначной логики формулами и схемами из функциональных элементов над некоторыми бесконечными неполными базисами. Бесконечным называется базис, содержащий функции, существенно зависящие от сколь угодно большого числа переменных. Обычно при переходе от конечных базисов к бесконечным (например, в задачах о сложности и глубине булевых функций или в задаче о глубине функций многозначной логики над полными базисами) наблюдается снижение порядка роста функций Шеннона (см., например, [12, 13, 17, 16, 58]). В случае реализации функций многозначной логики наличие замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, создаёт предпосылку для исследования возможности получения более высоких нижних оценок сложности в бесконечных базисах по сравнению с оценками в конечных базисах.

В §3.1 приведены некоторые результаты, касающиеся сравнения сложности (и глубины) функций (как булевых, так и многозначной логики) над конечными и бесконечными базисами.

В §3.2 показано как для любого конечного базиса функций k-значной логики и произвольной последовательности функций, реализуемых над этим базисом, построить пример бесконечного базиса функций $(k+2)$-значной логики и предъявить последовательность функций с такой же сложностью (теорема 3.1). Стоит отметить, что этот пример искусственный и не очень содержательный, так как почти все функции из построенного бесконечного базиса не используются для реализации предъявленной последовательности функций.

В §3.3 приведён более интересный и содержательный пример конечного и бесконечного базисов со сверхэкспоненциальными оценками сложности. Он описан в следующей теореме.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\}$ — конечный базис функций k-значной логики ($k \geqslant 5$), а $\mathfrak{C}$ — бесконечный базис функций k-значной логики ($k \geqslant 5$), получающийся объединением базиса $\mathfrak{B}$ и множества всех функций, реализуемых формулами вида $\varphi_{m_1}(\ldots \varphi_{m_s}(x_{s+1}, x_s), \ldots, x_1)$ для всех натуральных значений числа s. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $[\mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}]$ *(и, следовательно, класс $[\mathfrak{C}]$ конечно порождён);*

2) *функции Шеннона глубины и сложности реализации формулами над этими базисами асимптотически равны (и растут не медленнее, чем*

экспоненциально и, соответственно, сверхэкспоненциально):

$$D_{\mathfrak{B}}(n) \sim D_{\mathfrak{C}}(n) \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n,$$

$$L^{\varPhi}_{\mathfrak{B}}(n) \sim L^{\varPhi}_{\mathfrak{C}}(n) \geqslant n2^{(k-3)^n-(k-4)^n};$$

3) *каждая функция базиса $\mathfrak{C}$ используется хотя бы в одной минимальной формуле, реализующей функцию, на которой достигается значение функции Шеннона (как сложности реализации формулами, так и глубины).*

При рассмотрении меры сложности формул, равной количеству функциональных символов в формуле, асимптотика функции Шеннона сложности при переходе от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{C}$ уменьшается в n раз, но её рост остаётся сверхэкспоненциальным.

Замкнутые классы, для которых формулируется теорема 3.4, конечно порождены. В §3.4 установлено, что для случая замкнутых классов, не являющихся конечно-порождёнными, также можно получать высокие нижние оценки роста функций Шеннона.

Пусть $\varphi(x)$ — функция трёхзначной логики, принимающая значение 1 при $x = 2$ и значение 0 в остальных случаях, $\Omega(\tilde{x})$ — отображение из E_3^n в E_2^n, сопоставляющее набору $(x_1, \ldots, x_n)$ набор $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$, $\tilde{\alpha}$ — набор из E_2^n. Определим функции $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}(y, x_1, \ldots, x_n)$ и $\zeta^3_n(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 1)$ из P_3 следующим образом:

$$\lambda^3_{\tilde{\alpha}}(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0 \text{ и } \Omega(\tilde{x}) \neq \tilde{\alpha}, \text{ или если } y = 2, \\ 1, & \text{если } y = 1, \text{ или если } y = 0 \text{ и } \Omega(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}; \end{cases}$$

$$\zeta^3_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если в наборе } (x_1, \ldots, x_n) \text{ чётное количество двоек}, \\ 1, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Пусть* $\mathfrak{A}_3 = \{0\} \cup \{\lambda^3_{\tilde\alpha} \mid \tilde\alpha \in R_2\}$, *где* $R_2 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_2^n$, *— неполный бесконечный базис функций трёхзначной логики. Тогда для функции трёхзначной логики* ζ^3_n, $n \geqslant 1$, *выполняется равенство*

$$D_{\mathfrak{A}_3}(\zeta^3_n) = 2^{n-1}.$$

Следствие 3.3. *Пусть* $\mathfrak{A}_3 = \{0\} \cup \{\lambda^3_{\tilde\alpha} \mid \tilde\alpha \in R_2\}$, *где* $R_2 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_2^n$, *— неполный бесконечный базис функций трёхзначной логики. Тогда для функций трёхзначной логики* $\zeta^3_n(x_1, \ldots, x_n)$ *при всех* $n \geqslant 1$ *выполняется равенство*

$$L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{A}_3}(\zeta^3_n) = 2^{n-1}.$$

В §3.5 на основе этого примера функций построен бесконечный базис и последовательность функций из P_4, сложность реализации которых формулами над этим базисом растёт сверхэкспоненциально от числа переменных.

Пусть $\varphi(x)$ — функция четырёхзначной логики, принимающая значение 1 при $x = 2$ и значение 0 в остальных случаях, $\Omega(\tilde x)$ — отображение из E_4^n в E_2^n, сопоставляющее набору $(x_1, \ldots, x_n)$ набор $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$, $\tilde\alpha$ — набор из E_2^n. Определим функции $\lambda^4_{\tilde\alpha}(y, x_1, \ldots, x_n)$, $\mu_{\tilde\alpha}(x_1, \ldots, x_{n+2})$ и $\zeta^4_n(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 1)$ из P_4 следующим образом:

$$\lambda^4_{\tilde{\alpha}}(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \lambda^3_{\tilde{\alpha}}(y, x_1, \ldots, x_n), & \text{если } (y, x_1, \ldots, x_n) \in E_3^n, \\ 3, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{\alpha}}(x_1, \ldots, x_{n+2}) = \begin{cases} 3, & \text{если } x_i = 3 \text{ для некоторого} \\ & i \in \{1, \ldots, n+2\}, \text{ или если } x_1 \neq x_2, \\ \lambda^4_{\tilde{\alpha}}(x_2, \ldots, x_{n+2}), & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\zeta^4_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 3, & \text{если в наборе } (x_1, \ldots, x_n) \text{ присутствует} \\ & \text{хотя бы один символ «3»}, \\ 0, & \text{если в наборе } (x_1, \ldots, x_n) \text{ нет символа «3»} \\ & \text{и чётное количество двоек}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.6. *Пусть* $\mathfrak{A}_4 = \{0\} \cup \{\mu_{\tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in R_2\}$, *где* $R_2 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_2^n$, *— неполный бесконечный базис функций четырёхзначной логики. Тогда для функции четырёхзначной логики* ζ^4_n, $n \geqslant 1$, *верно равенство*

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{A}_4}(\zeta^4_n) = n \cdot 2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}-1} - n.$$

Глубина и сложность реализации над бесконечными базисами функций, описанных в теоремах 3.5 и 3.6, превосходят известные нижние оценки глубины и сложности для реализации над конечными базисами функций логик такой же «значности».

В заключении сформулированы полученные в работе результаты, а также возможные направления дальнейших исследований.

Глава 1

Функции n переменных со сложностью не менее 2^{3^n}

1.1 Основные определения

Введём необходимые определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Все неопределённые понятия, как правило, общеизвестны, при необходимости их определения можно посмотреть в книге [81].

Обозначим через E_k, $k \geqslant 2$, множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Иногда, если из контекста понятно о каком значении k идёт речь, будем использовать обозначение E вместо E_k. Через E_k^n будем обозначать множество всех наборов $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ длины n, каждая компонента σ_i которых лежит во множестве E_k ($i \in \{1, \ldots, n\}$). Функция $f^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ называется (n-местной) функцией k-значной логики от переменных $x_1, \ldots, x_n$, если её областью определения является множество E_k^n, а областью значений — множество E_k. Будем указывать у функции верхний индекс, обозначающий количество её переменных, только в случае, когда его значение существенно, но неочевидно из контекста. Обозначим через P_k множество всех функций k-значной логики.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция k-значной логики. Переменная x_i называется существенной переменной для функции f, если существуют такие два набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ и $\tilde{\sigma}' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i', \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$, что $f(\tilde{\sigma}) \neq f(\tilde{\sigma}')$. Если таких наборов не существует, то переменная x_i называется несущественной (фиктивной) для функции f.

Будем говорить, что $(n+1)$-местная функция $g^{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1})$ получена из n-местной функции $f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ операцией добавления несущественной переменной x_{n+1}, если для всех наборов $\tilde{\sigma} \in E_k^{n+1}$ верно равенство $g^{(n+1)}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) = f^{(n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Функции $f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ и $g^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ из P_k будем называть равными, если для любого набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n$ верно равенство $f^{(n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = g^{(n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Пусть $f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, $g^{(m)}(x_1, \dots, x_m) \in P_k$, $m < n$, и пусть функция $h^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ получена из функции $g^{(m)}(x_1, \dots, x_m)$ операцией добавления фиктивных переменных $x_{m+1}, \dots, x_n$. Тогда функции $f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ и $g^{(m)}(x_1, \dots, x_m)$ называются равными, если равны функции $f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ и $h^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$. Аналогично определение равных функций можно распространить на случай двух функций, зависящих от произвольных переменных.

Определим понятие формулы. Пусть задано некоторое (конечное или счётное) множество $\mathfrak{A} = \{f_1^{(n_1)}(x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}), f_2^{(n_2)}(x_{2,1}, \dots, x_{2,n_2}), \dots\}$ функций k-значной логики, называемое базисом. Здесь и далее в работе под базисом будет пониматься система функций вне зависимости от полноты и минимальности по включению. Выражения вида x_i являются формулами над системой $\mathfrak{A}$. Если $\Phi_1, \dots, \Phi_{n_i}$ — формулы над базисом $\mathfrak{A}$, то выражение $f_i^{(n_i)}(\Phi_1, \dots, \Phi_{n_i})$ также является формулой над системой $\mathfrak{A}$. Других формул над базисом $\mathfrak{A}$ нет.

Формулы, представляющие из себя символ переменной или константы, будем называть тривиальными.

Формулу Φ, в которую из символов переменных входят только символы $x_1, \ldots, x_n$, будем обозначать $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$. Определим значение формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ на наборе $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ из E_k^n. Если формула Φ представляет собой переменную x_i, то её значение на наборе $\tilde{\sigma}$ определим как σ_i. Пусть формула Φ имеет вид $\Phi = f^{(m)}(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, и пусть известны значения формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ на наборе $\tilde{\sigma}$, и они равны $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ соответственно. Тогда положим $\Phi(\tilde{\sigma}) = f^{(m)}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$.

Таким образом, определено значение формулы на любом наборе, тем самым каждой формуле $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ сопоставлена некоторая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ реализуется формулой Φ. Если некоторая нетривиальная формула над системой $\mathfrak{A}$ реализует функцию f, то будем говорить, что функция f получена операцией суперпозиции из функций системы $\mathfrak{A}$.

Пусть $\Phi = f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ — формула. Определим понятие подформулы формулы Φ индуктивно. Формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ являются подформулами формулы Φ (эти подформулы называются главными). Подформулами формулы Φ являются также сама формула Φ и все подформулы формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Других подформул у формулы Φ нет.

Под тривиальной подформулой некоторой формулы Φ понимаем подформулу формулы Φ, которая является тривиальной формулой.

Под сложностью $L(\Phi)$ формулы Φ будем понимать количество символов переменных и констант, входящих в эту формулу. Кроме данного определения сложности в литературе распространено понятие сложности $L'(\Phi)$ формулы Φ как суммы весов входящих в формулу функциональных символов. Если за вес функционального символа принять величину, на единицу меньшую количества его переменных, то рассматриваемые меры сложности будут отличаться на единицу, а именно

$$L(\Phi) = L'(\Phi) + 1.$$

Таким образом, большую часть результатов, полученные в диссертации, можно интерпретировать и как релультаты для другой меры сложности. Понятие глубины $D(\Phi)$ формулы Φ определим индуктивно. Глубину тривиальной формулы будем считать равной нулю. Если формула имеет вид $\Phi = f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, то глубина $D(\Phi)$ формулы Φ определяется соотношением $D(\Phi) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} (D(\Phi_i)) + 1$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое множество функций из P_k. Будем обозначать через $[\mathfrak{A}]$ замкнутый класс, порождаемый функциями из $\mathfrak{A}$ при помощи операций суперпозиции и введения фиктивной переменной. Множество $\mathfrak{A}$ будем называть полным, если $[\mathfrak{A}] = P_k$.

Под графом будем понимать конечный граф без петель, но допускающий кратные рёбра (используемые определения графа и основных понятий, связанных с графами, соответствуют, например, книгам [35, 66]). При упоминании ориентированных графов также будем понимать, что они конечны, и что кратные рёбра допустимы, а петли — нет.

Пусть $X_0 = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счётное множество переменных, а $\mathfrak{B} = \{f_1, f_2, \ldots\}$ — произвольный базис функций k-значной логики. Пусть $m_1, m_2, \ldots$ — всевозможные значения количеств переменных у функций из базиса $\mathfrak{B}$. Схемой из функциональных элементов над базисом $\mathfrak{B}$ будем называть ориентированный граф без ориентированных циклов, удовлетворяющий следующим условиям:

- Количество входящих в каждую вершину рёбер принадлежит множеству $\{0, m_1, m_2, \ldots\}$.
- Каждой вершине, в которую не входит ни одно ребро, приписан символ переменной из множества X_0 (или константы, если она присутствует в базисе). Такие вершины будем называть входами схемы.

- Если в вершину входит m рёбер, то им приписаны различные натуральные числа от 1 до m (номера входов).
- Каждой вершине, в которую входит m рёбер, приписан символ некоторой функции из $\mathfrak{B}$, зависящей от m переменных (такие вершины будем называть функциональными элементами).
- Некоторые вершины помечены символом $*$ (такие вершины будем называть выходами схемы).

Поскольку в данной работе не рассматривается реализация одной схемой из функциональных элементов сразу нескольких функций, дальше будем считать, что только одной вершине приписан символ $*$.

Сформулируем известную (см., например, [35]) лемму о нумерации вершин.

Лемма 1.1 [35]. *В любом конечном ориентированном графе без ориентированных циклов можно занумеровать вершины первыми натуральными числами так, что каждое ребро будет направлено от вершины с меньшим номером к вершине с бóльшим номером.*

Пусть S — схема из функциональных элементов над базисом $\mathfrak{B}$, а $x_1, \ldots, x_n$ — все переменные, символы которых приписаны её входам. Сопоставим каждой вершине схемы S функцию k-значной логики следующим образом:

- Каждому входу схемы S сопоставим функцию, равную переменной (или константе), символ которой приписан к этому входу.
- Пусть всем вершинам, рёбра из которых направлены к вершине v, сопоставлены функции, а вершине v приписан функциональный символ $f^{(m)}$. Тогда вершине v сопоставим функцию $f^{(m)}(g_1, \ldots, g_m)$, где $g_1, \ldots, g_m$ — функции, сопоставленные вершинам, из которых к вершине v направлено

ребро, в порядке номеров, приписанных этим рёбрам.

Таким образом, в силу леммы 1.1 получаем, что каждой вершине схемы S сопоставлена некоторая функция. Будем говорить, что эта схема реализует функцию, сопоставленную её вершине, помеченной символом $*$.

Под сложностью схемы из функциональных элементов будем понимать количество функциональных элементов в ней. Глубиной схемы из функциональных элементов называется максимальная длина (количество рёбер) ориентированного пути, соединяющего какой-либо вход схемы с её выходом.

Сопоставим формуле схему из функциональных элементов над тем же базисом. Если формула тривиальна, то сопоставим ей схему из функциональных элементов, представляющую из себя ориентированный граф с одной вершиной, которой приписана эта формула. Если формула имеет вид $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, и формулам $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ сопоставлены ориентированные графы $G_1, \ldots, G_n$ с выходами $g_1, \ldots, g_n$, то сопоставим такой формуле ориентированный граф, представляющий из себя объединение ориентированных графов $G_1, \ldots, G_n$ и вершины с приписанным символом f, в которую входит n рёбер, выходящих из вершин $g_1, \ldots, g_n$ и занумерованных соответствующими числами. Очевидно, такой ориентированный граф задаёт схему из функциональных элементов над тем же базисом, что и исходная формула, эта схема имеет такую же глубину, что и исходная формула, и указанные схема и формула реализуют одну и ту же функцию. Аналогично можно сопоставить схеме из функциональных элементов формулу (возможно, при этом придётся «расклеить» некоторые вершины, продублировав подформулы). Таким образом мы показали, что, говоря о глубине реализации функции, мы можем не уточнять о каком модельном классе идёт речь — о формулах или о схемах из функциональных элементов.

Под сложностью $L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(f)$ реализации функции f формулами над базисом $\mathfrak{B}$ будем понимать минимальную сложность формулы над базисом $\mathfrak{B}$, реализующей эту функцию. Под сложностью $L_{\mathfrak{B}}^{\text{СФЭ}}(f)$ реализации функции f схемами из функциональных элементов над базисом $\mathfrak{B}$ будем понимать минимальную сложность схемы из функциональных элементов над базисом $\mathfrak{B}$, реализующей эту функцию. Глубиной $D_{\mathfrak{B}}(f)$ реализации функции f формулами или схемами из функциональных элементов над базисом $\mathfrak{B}$ будем называть минимальныую глубину формулы (схемы из функциональных элементов) над базисом $\mathfrak{B}$, реализующей эту функцию. Функцией Шеннона $L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(n)$ сложности реализации функций k-значной логики формулами над базисом $\mathfrak{B}$ назовём максимальную сложность реализации формулами над базисом $\mathfrak{B}$ функций от n переменных из замыкания $[\mathfrak{B}]$ базиса $\mathfrak{B}$. Функцией Шеннона $L_{\mathfrak{B}}^{\text{СФЭ}}(n)$ сложности реализации функций k-значной логики схемами из функциональных элементов над базисом $\mathfrak{B}$ назовём максимальную сложность реализации схемами из функциональных элементов над базисом $\mathfrak{B}$ функций от n переменных из замыкания $[\mathfrak{B}]$ базиса $\mathfrak{B}$. Функцией Шеннона $D_{\mathfrak{B}}(n)$ глубины реализации функций k-значной логики из класса $[\mathfrak{B}]$ над базисом $\mathfrak{B}$ назовём максимальную глубину реализации функции от n переменных из класса $[\mathfrak{B}]$ формулами над базисом $\mathfrak{B}$. Таким образом, имеют место следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(n) &= \max_{f \in P_k(n)} L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(f),\\
L_{\mathfrak{B}}^{\text{СФЭ}}(n) &= \max_{f \in P_k(n)} L_{\mathfrak{B}}^{\text{СФЭ}}(f),\\
D_{\mathfrak{B}}(n) &= \max_{f \in P_k(n)} D_{\mathfrak{B}}(f).
\end{aligned}
$$

Напомним также некоторые обозначения для сравнения асимптотического поведения числовых последовательностей. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — произвольные последовательности положительных чисел. В работе будут использоваться следующие обозначения:

- $a_n = o(b_n)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

- $a_n = O(b_n)$, если существует такая положительная константа c, что $a_n < cb_n$ при всех достаточно больших n.
- $a_n \sim b_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$
- $a_n \asymp b_n$, если одновременно $a_n = O(b_n)$ и $b_n = O(a_n)$.
- $a_n \gtrsim b_n$, если $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geqslant 1$.

1.2 Пример последовательности функций трёхзначной логики с экспоненциальной глубиной

Рассмотрим задачу получения высоких нижних оценок сложности реализации функций многозначной логики формулами и схемами над конечными неполными базисами. Для функций трёхзначной логики Г. А. Ткачёвым получены [54] нижние оценки вида $2\,C_n^{[n/2]}$ для сложности реализации индивидуальных последовательностей функций схемами (очевидно, для формул справедлив аналогичный результат) над некоторым неполным базисом. Отметим, что в случае реализации булевых функций наивысшие эффективные нижние оценки ниже этой величины и имеют порядок $2^{n^{1/3-o(1)}}$ [5]. Кроме того, для любой конечной системы $\mathfrak{A}$ булевых функций доказано [62, 57, 58], что сложность реализации любой последовательности функций схемами из функциональных элементов над системой $\mathfrak{A}$ не может расти быстрее, чем c^n, где c — константа, зависящая от системы $\mathfrak{A}$.

Для случая функций 4-значной логики А. Б. Угольниковым в 2004 году получены [65] существенно более высокие нижние оценки сложности реализации конкретной последовательности функций формулами над некоторым базисом, чем известные нижние оценки в случае трёхзначной логики. Сложность реализации конструктивно заданных функций $f_n^{(n)}$ 4-значной логики составляет

$$L_{\mathfrak{B}}(f_n^{(n)}) = 2^{C_n^{[n/2]}}([n/2]+1) - [n/2],$$

т. е. имеет рост «двойной экспоненты» от числа переменных, а глубина —

$$D_{\mathfrak{B}}(f_n^{(n)}) = C_n^{[n/2]} + [n/2].$$

Ранее А. Б. Угольниковым был получен аналогичный результат для последовательности функций 5-значной логики [64].

Известно, что экспоненциальная глубина реализации функций над конечным базисом достижима уже для функций 3-значной логики. Для полноты картины покажем как получить такой пример из результата А. Б. Угольникова [65] (на защиту это утверждение не выносится). В каком-то смысле эта конструкция, использующая аппарат раскрашенных деревьев, будет являться основой для большинства дальнейших построений.

Пусть F_n^3 — множество всех таких наборов из E_3^n, что более чем $n - [n/2]$ значений в наборе равно 2. Определим функции $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$ и $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$ из P_3 следующим образом:

$$\lambda(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \text{ а } y = 2; \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{если } x = 2 \text{ или } y = 2; \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$f_n(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0, \text{ а } (x_1, \ldots x_n) \in F_n^3; \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Имеет место

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{A} = \{\lambda, \mu, 1\}$. Тогда при всех $n \geqslant 3$ выполняется равенство*

$$D_{\mathfrak{A}}(f_n) \geqslant C_n^{[n/2]}.$$

Установим сначала некоторые свойства формул над системой $\mathfrak{A} = \{\lambda, \mu, 1\}$. Пусть $\Phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над системой $\mathfrak{A}$. Поставим в соответствие формуле Φ дерево $T = (V, E)$ с корнем v_* (где V — множество вершин, E — множество ребер, $v_* \in V$), в котором висячим вершинам приписаны символы из множества $\{y, x_1, \ldots, x_n\}$. Между вершинами дерева T и подформулами формулы Φ естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие, в частности корневой вершине v_* соответствует формула Φ, главным подформулам формулы Φ — вершины, смежные с корневой, и так далее, висячим вершинам — выражения вида x_i или y, $0 \leqslant i \leqslant n$. Если A — некоторая подформула формулы Φ, а v — некоторая вершина дерева T, то через v_A будем обозначать вершину дерева T, соответствующую подформуле A, а через A_v — подформулу формулы Φ, соответствующую вершине v.

Раскрасим ребра и вершины дерева T в белый и чёрный цвета следующим образом. Пусть A — некоторая нетривиальная подформула формулы Φ. Если она имеет вид $A = \lambda(B, C)$, где B, C — формулы над системой $\mathfrak{A}$, то раскрасим ребро $(v_A, v_B) \in E$ в белый цвет, а ребро $(v_A, v_C) \in E$ в чёрный. Если A — формула вида $A = \mu(B, C)$, где B, C — формулы, то раскрасим рёбра (v_A, v_B) и (v_A, v_C) в чёрный цвет. Корень v_* дерева T раскрашивается в белый цвет. Вершина $v \in V \setminus \{v_*\}$ раскрашивается в белый цвет, если все рёбра цепи, соединяющей корень v_* дерева T с вершиной v, раскрашены в белый цвет. В противном случае вершина v раскрашивается в чёрный цвет. Будем говорить, что подформула Φ белого (чёрного) цвета, если соответствующая ей вершина дерева T раскрашена в соответствующий цвет.

Пусть $\Phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная формула над системой $\mathfrak{A}$, а T — соответствующее этой формуле дерево с корнем v_*, в котором рёбра и вершины раскрашены в белый и чёрный цвета описанным выше способом. Установим следующие свойства формулы Φ.

Свойство 1.1. *Для любой белой подформулы A формулы Φ и любых наборов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E^{n+1}$, таких, что $A(\tilde{\alpha}) = 1$, $\Phi(\tilde{\beta}) = 0$, выполняются соотношения $\Phi(\tilde{\alpha}) = 1$, $A(\tilde{\beta}) = 0$.*

Доказательство. Пусть w — произвольная вершина цепи, соединяющей корень v_* с вершиной v_A, $w \neq v_A$. Поскольку вершина v_A дерева T белая, очевидно, что формула A_w имеет вид $A_w = \lambda(B, C)$, где B, C — формулы. Поэтому если $A(\tilde{\alpha}) = 1$, то в силу соотношения $\lambda(1, x) = 1$, где $x \in E_3$, выполняется равенство $A_w(\tilde{\alpha}) = 1$, в частности $\Phi(\tilde{\alpha}) = 1$; если же $\Phi(\tilde{\alpha}) = 0$, то, поскольку функция $\lambda(x, y)$ может принимать значение 0 только при $x = 0$, выполняется равенство $A_w(\tilde{\beta}) = 0$, и поэтому $A(\tilde{\beta}) = 0$. $\square$

Свойство 1.2. *Пусть формула Φ реализует функцию $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$, а $\tilde{\beta} \in E^{n+1}$ — произвольный набор, такой что $\Phi(\tilde{\beta}) = 0$. Тогда верны следующие утверждения:*

1) *у формулы Φ существует тривиальная белая подформула;*

2) *все нетривиальные белые подформулы формулы Φ имеют вид $\lambda(B, C)$, где B, C — формулы;*

3) *тривиальная белая подформула формулы Φ ровно одна;*

4) *тривиальной белой подформуле формулы Φ соответствует переменная y;*

5) *все чёрные подформулы формулы Φ, являющиеся главными подформулами некоторой белой подформулы формулы Φ, на наборе $\tilde{\beta}$ принимают значение 2.*

Доказательство. Предположим, что все тривиальные подформулы формулы Φ чёрные. Сама формула Φ белая, значит, существует белая подформула

A формулы Φ, такая что все её подформулы чёрные. Следовательно, формула A имеет вид $\mu(A_1, A_2)$, где A_1, A_2 — формулы. По свойству 1.1 $A(\tilde{\beta}) = 0$, что противоречит определению функции μ. Полученное противоречие доказывает первый пункт рассматриваемого свойства.

Из свойства 1.1 следует, что все белые подформулы формулы Φ на наборе $\tilde{\beta}$ принимают значение 0. Поскольку функция μ значения 0 принимать не может, второй пункт также считаем доказанным. А из него и определения функции λ следует последний пункт доказываемого свойства.

Утверждение из третьего пункта следует из первого утверждения и соображения, что формула в базисе $\mathfrak{A}$ не может иметь больше одной тривиальной белой подформулы (у каждой формулы не более одной белой подформулы).

Пусть $\tilde{\gamma} = (0, 2, \ldots, 2) \in E_{n+1}$, тогда верно равенство

$$\Phi(\tilde{\gamma}) = f(\tilde{\gamma}) = 0,$$

из свойства 1.1 следует, что тривиальная белая подформула формулы Φ на этом наборе принимает значение 0, что окончательно доказывает свойство. □

Доказательство теоремы 1.1. По свойству 1.2, любая формула Φ над системой $\mathfrak{A}$, реализующая функцию $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 3)$, имеет вид

$$\Phi = \lambda(\lambda(\ldots\lambda(\lambda(y, Z_1), Z_2), \ldots), Z_N), \tag{1.1}$$

где $Z_1, \ldots, Z_N$ — формулы над системой $\mathfrak{A}$, N натуральное.

Рассмотрим произвольную подформулу Z_i формулы Φ. Предположим, что она тривиальна. Если она представляет собой переменную y или константу 1, то на наборе $(0, 2, \ldots, 2)$ она не принимает значение 2, а значит формула $\lambda(A, Z_i)$ принимает значение 1 вне зависимости от значения формулы A, и по свойству 1.1 формула Φ принимает значение 1, что противоречит определению функции f_n. Если же она представляет собой переменную x_j, то на наборе, получающимся из набора $(0, 2, \ldots, 2)$ заменой $(j+1)-$ой компоненты на 0, формула $\lambda(A, Z_i)$ принимает значение 1, а по свойству 1.1 формула Φ также принимает значение 1, что противоречит определению функции f_n. Следовательно, каждая формула Z_i нетривиальна. А поскольку функция λ не принимает значения 2, а формула Z_i, согласно свойству 1.2, принимает, то каждая формула Z_i имеет вид

$$Z_i = \mu(A, B),$$

где A, B — некоторые формулы (не обязательно одни и те же для всех значений i).

Из определения функций λ и μ следует тождество

$$\mu(\lambda(A, B), C) = \mu(C, \lambda(A, B)) = \mu(1, C),$$

где A, B, C — произвольные формулы. Это значит, что в формуле Z_i можно заменить все подформулы вида $\lambda(A, B)$ на константу 1 без изменения значения формулы Z_i, при этом не увеличив глубину формулы. Действительно, если это не так, то найдётся формула вида $\mu(\lambda(A, B), C)$ или $\mu(C, \lambda(A, B))$, такая что при замене её на формулу $\mu(1, C)$ или $\mu(C, 1)$ её значение поменялось, что противоречит вышеуказанному тождеству. Таким образом, среди минимальных по глубине формул над базисом $\mathfrak{A}$ найдётся такая, что все подформулы Z_i являются формулами над системой $\{\mu, 1\}$. При дальнейшем доказательстве под Φ будем понимать только эту формулу.

Рассмотрим произвольную подформулу Z_i формулы Φ, $1 \leqslant i \leqslant N$. Пусть в неё входит ровно r переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, например, $x_1, \ldots, x_r$. Предположим, что $r < [n/2]$. Тогда для набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$, $\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_n = 2$, выполняется соотношение

$Z_i(\tilde{\alpha}) = 1$. Тогда для любой формулы A на наборе $\tilde{\alpha}$ формула $\lambda(A, Z_i)$ также принимает значение 1, а по свойству 1.1 имеем $\Phi(\tilde{\alpha}) = 1$. Однако, $\tilde{\alpha} \in F_n^3$, и $f_n(\tilde{\alpha}) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $r \geqslant [n/2]$.

Рассмотрим произвольную совокупность $[n/2]$ различных переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, например, $x_1, \ldots, x_{[n/2]}$. Допустим, что среди формул Z_i не найдется такой, в которую из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ входят только эти переменные. Тогда рассмотрим набор $\tilde{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_n)$, где $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \ldots = \beta_{[n/2]} = 1$, $\beta_{[n/2]+1} = \ldots = \beta_n = 2$. Этот набор не лежит во множестве F_n^3. Однако в каждой из подформул Z_i найдётся переменная из множества $\{x_{[n/2]+1}, \ldots, x_n\}$. Из определения функции λ следует, что $\Phi(\tilde{\beta}) = 0$, что противоречит определению функции f_n. Полученное противоречие показывает, что число N подформул Z_i не меньше, чем число способов выбрать $[n/2]$ переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, т.е. выполняется соотношение

$$N \geqslant C_n^{[n/2]}.$$

Следовательно, автоматически получается необходимое соотношение на глубину формулы Φ.

В качестве примера формулы, реализующей функцию f_n формулами над базисом $\mathfrak{A}$, можно привести формулу вида (1.1), в которой формулы Z_i представляют собой формулы над системой $\{\mu\}$ от всевозможных подмножеств множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ мощности $[n/2]$. $\square$

Стоит отметить, что система базисных функций и функций f_n получается из аналогичных функций из работы [65] посредством отождествления и переименования значений из E_4 и отбрасывания одной из базисных функций. Так, чтобы получить необходимые функции, нужно применить отображение

$\Omega(x) : E_4 \to E_3$, задающееся следующим образом:

$$\Omega(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 1; \\ 1, & \text{если } x = 0 \text{ или } x = 2; \\ 2, & \text{если } x = 3. \end{cases}$$

При таком отображении пропадают некоторые свойства формул над рассматриваемым базисом, и результата для сложности реализации функций формулами, аналогичного [65], получить таким методом не удаётся, однако, некоторые свойства формул сохраняются, что позволяет доказать нижнюю оценку глубины, растущую экспоненциально. Более точно, порядок роста глубины в доказанной выше теореме равен $2^n/\sqrt{n}$.

1.3 Формулировка основного результата главы

В 2004 году А. Б. Угольниковым для некоторой явно заданной последовательности функций 4-значной логики и некоторого неполного базиса была получена [65] сверхэкспоненциальная нижняя оценка сложности реализации функций формулами над этим базисом. Эта сложность для функции от n переменных составляет

$$2^{C_n^{[n/2]}}([n/2]+1) - [n/2],$$

или, что по порядку роста то же самое,

$$n \cdot 2^{\gamma(n)}, \text{ где } \gamma(n) \asymp 2^n/\sqrt{n}.$$

Ранее им же был получен аналогичный результат для последовательности функций 5-значной логики [64]. Для получения подобных результатов их автору пришлось довольно точно установить строение минимальных формул, реализующих упомянутые функции.

Вышеупомянутые результаты А. Б. Угольникова базируются на похожих друг на друга идеях. В случае 5-значной логики идеи представлены довольно выпукло, а в результате про функции 4-значной логики их пришлось более тесно переплести, что отразилось на существенном усложнении доказательства. Небольшой модификацией можно было улучшить асимптотику результатов с $[n/2] \cdot 2^{C_n^{[n/2]}}$ до $[n/2] \cdot m^{C_n^{[n/2]}}$ для произвольного натурального m. Однако, предложенных соображений, по-видимому, не хватало для того, чтобы получить более высокие оценки, например оценки, логарифм которых растёт по порядку не медленнее, чем 2^n. Упомянутые идеи были взяты за основу, были модифицированы и дополнены новыми идеями для получения более высоких эффективных нижних оценок.

Стоит отметить, что зачастую не представляет труда доопределить функции k_1-значной логики и построить пример последовательности функций k_2-значной ($k_2 > k_1$) логики и базиса, для которых будут справедливы такие же оценки для сложности и глубины, что и для исходного примера. В частности, примеры Г. А. Ткачёва функций трёхзначной логики и А. Б. Угольникова функций 4-значной и 5-значной логик тривиально переносятся на случай логик большей значности.

Покажем, как для любых натуральных m и r для некоторого $k(r)$ построить последовательность $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ функций из $P_{k(r)}$, сложность которых в классе формул над некоторой конечной системой асимптотически превосходит m^{r^n}. Метод построения демонстрируется на примере последовательности функций 10-значной логики, сложность которых асимптотически превосходит 2^{3^n}.

Обозначим через F_{n+1} множество всех наборов из E^{n+1}, имеющих не менее n вхождений символов $3, 4, 5$. Определим функции $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y, z)$, $\varphi_m(x, y)$, где $m \in \{3, 4, 5\}$, и $f_n(y_1, y_2, x_0, \ldots x_n)$ из P_{10} следующим образом:

$$\lambda(x,y) = \begin{cases} 6, & \text{если } x = 6; \\ 9, & \text{если } x = 9,\ y = 2; \\ 8, & \text{если } x = 8 \text{ или } x = 7,\ y = 1; \\ 7 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\mu(x,y,z) = \begin{cases} \lambda(x,z), & \text{если } x = y; \\ 6 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\varphi_m(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{если } x = 2; \\ 1, & \text{если } x = 1,\ y = m; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$f_n(y_1,y_2,x_0,\ldots,x_n) = \begin{cases} 6, & \text{если } y_1 = 6; \\ 9, & \text{если } y_1 = 9,\ y_2 = 2; \\ 8, & \text{если } y_1 = 8, \text{ а } y_2,x_0,\ldots,x_n \in E, \\ & \text{или если } y_1 = 7,\ y_2 = 1,\ (x_0,\ldots x_n) \in F_{n+1}; \\ 7 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Имеет место

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, 6\} \subseteq P_{10}$. *Тогда при всех* $n \geqslant 1$ *выполняется равенство*

$$L^{\varPhi}_{\mathfrak{B}}(f_n) = (n+2) \cdot 2^{(n+1)\cdot 3^n} - n - 1.$$

1.4 Доказательство вспомогательных утверждений

Установим сначала некоторые свойства формул над системой

$$\mathfrak{A} = \{\lambda\} \cup \mathfrak{B} = \{\lambda, \mu, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, 6\}.$$

Пусть $\Phi(y_1, y_2, x_0, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\mathfrak{A}$. Поставим в соответствие формуле Φ дерево $T = (V, E)$ с корнем v_* (где V — множество вершин, E — множество рёбер, $v_* \in V$), в котором висячим вершинам приписаны символы из множества $\{x_0, \ldots, x_n, y_1, y_2, 6\}$. Между вершинами дерева T и подформулами формулы Φ естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие, в частности корневой вершине v_* соответствует формула Φ, главным подформулам формулы Φ — вершины, смежные с корневой, и так далее, висячим вершинам — выражения вида x_i, y_1, y_2 или 6, $0 \leqslant i \leqslant n$. Если A — некоторая подформула формулы Φ, а v — некоторая вершина дерева T, то через v_A будем обозначать вершину дерева T, соответствующую подформуле A, а через A_v — подформулу формулы Φ, соответствующую вершине v.

Раскрасим рёбра и вершины дерева T в белый, чёрный и зелёный цвета следующим образом. Пусть A — некоторая нетривиальная подформула формулы Φ. Если она имеет вид $A = \lambda(B, C)$, где B, C — формулы над базисом $\mathfrak{A}$, то раскрасим ребро $(v_A, v_B) \in E$ в белый цвет, а ребро $(v_A, v_C) \in E$ в чёрный. Если A — формула вида $A = \mu(B, C, D)$, где B, C, D — формулы, то раскрасим рёбра $(v_A, v_B), (v_A, v_C)$ в белый цвет, а ребро (v_A, v_D) в чёрный. И, наконец, если A — формула вида $\varphi_3(B, C)$, $\varphi_4(B, C)$ или $\varphi_5(B, C)$, где B, C — формулы, то раскрасим ребро (v_A, v_B) в чёрный цвет, а ребро (v_A, v_C) в зелёный. Корень v_* дерева T раскрашивается в белый цвет. Вершина $v \in V \setminus \{v_*\}$ раскрашивается в белый цвет, если все рёбра цепи, соединяющей корень v_* дерева T с вершиной v, раскрашены в белый цвет. Вершина v раскрашивается в чёрный цвет, если все рёбра цепи, соединяющей корень v_* дерева T с вершиной v, раскрашены в белый или чёрный цвет, причем чёрные ребра есть обязательно. Все остальные вершины раскрашиваются в зелёный цвет. Будем говорить, что подформула формулы Φ белого (чёрного, зелёного) цвета, если соответствующая ей вершина дерева T раскрашена в соответствующий цвет. Обозначим через X множество $\{x_0, \dots, x_n\}$, через $V(\Phi)$ множество всех белых висячих вершин дерева T, через $W(\Phi)$ множество всех чёрных висячих вершин дерева T, через $Y(\Phi)$ множество символов, соответствующих вершинам из $V(\Phi)$, а через $Z(\Phi)$ множество символов, соответствующих вершинам из множества $W(\Phi)$. Очевидно,

$$Y(\Phi), Z(\Phi) \subseteq X \cup \{y_1, y_2, 6\}.$$

Пусть $\Phi(y_1, y_2, x_0, \dots, x_n)$ — произвольная формула над базисом $\mathfrak{A}$, а T — соответствующее этой формуле дерево с корнем v_*, в котором рёбра и вершины раскрашены в белый, чёрный и зелёный цвета описанным выше способом. Установим следующие свойства формулы Φ.

Свойство 1.3. *Для любой белой подформулы A формулы Φ и любых наборов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E_{10}^{n+3}$, таких, что $A(\tilde{\alpha}) = 6$, $\Phi(\tilde{\beta}) = 9$, выполняются соотношения $\Phi(\alpha) = 6$, $A(\beta) = 9$.*

Доказательство. Пусть вершина v_A дерева T белая, а w — произвольная вершина цепи, соединяющей v_* с вершиной v_A, $w \neq v_A$. Очевидно, что формула A_w имеет вид либо $A_w = \lambda(B, C)$, либо $A_w = \mu(B, C, D)$, где B, C, D — формулы. Поэтому если $A(\tilde{\alpha}) = 6$, то в силу соотношений

$$\lambda(6, x) = \mu(6, y, z) = \mu(x, 6, z) = 6,$$

где $x, y, z \in E_{10}$, выполняется равенство $A_w(\alpha) = 6$, в частности $\Phi(\alpha) = 6$; если же $\Phi(\alpha) = 9$, то, поскольку функции $\lambda(x, z)$ и $\mu(x, y, z)$ могут принимать значение 9 только при $x = y = 9$, выполняется равенство $A_w(\beta) = 9$, и поэтому $A(\beta) = 9$. □

Свойство 1.4. *Если формула Φ реализует функцию $f_n(y_1, y_2, x_0, \dots, x_n)$, то выполняется соотношение $Y(\Phi) = \{y_1\}$, и для любой белой подформулы A*

формулы Φ *и любых наборов* $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+2})$, $\tilde{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_{n+2})$ *из* E_{10}^{n+3}, *таких, что* $\alpha_0 = 6$, $A(\beta) = 9$, *выполняются соотношения* $A(\alpha) = 6$, $\beta_0 = 9$.

Доказательство. Предположим, что найдется переменная $x_i \in X$, такая, что $x_i \in Y(\Phi)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, или выполняется одно из соотношений $y_2 \in Y(\Phi)$, $6 \in Y(\Phi)$. Рассмотрим набор $\tilde{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n+2})$, такой, что $\gamma_0 = 8$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n+2} = 6$. Тогда в силу свойства 1.3 выполняется равенство $\Phi(\gamma) = 6$, что противоречит определению функции f_n.

Пусть A — произвольная белая подформула формулы Φ. Рассмотрим произвольные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+2})$, $\tilde{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_{n+2}) \in E_{10}^{n+3}$, такие, что $\alpha_0 = 6$, $A(\tilde{\beta}) = 9$. Предположим, что у формулы A нет белых подформул, соответствующих висячим вершинам. Тогда найдется белая подформула W формулы A, имеющая вид $W = \varphi_m(B, C)$, где B, C — формулы, $m \in \{3, 4, 5\}$. Так как $A(\beta) = 9$, в силу свойства 1.3 выполняется равенство $W(\beta) = 9$, что противоречит определению функций φ_m. Таким образом, у формулы A есть подформула, соответствующая некоторой вершине из $V(\Phi)$. Легко видеть, что этой вершине соответствует переменная y_1. Поэтому $Y(\Phi) = \{y_1\}$. Нетрудно показать (в силу свойства 1.3), что верны равенства

$$A(\tilde{\alpha}) = 6, \quad \beta_0 = 9.$$

$\square$

Свойство 1.5. *Если формула* Φ *реализует функцию* $f_n(y_1, y_2, x_0, \ldots, x_n)$, *то любая нетривиальная черная подформула имеет вид*

$$\varphi_m(\widetilde{C}, \widetilde{D}),$$

где $\widetilde{C}, \widetilde{D}$ *— формулы,* $m \in \{3, 4, 5\}$. *Если, кроме того,* B *— чёрная подформула формулы* Φ, *а* A *— чёрная подформула формулы* B *и* $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\delta}$ *— наборы из* E_{10}^{n+3}, *такие, что*

$$A(\tilde{\alpha}) = 2, \quad B(\tilde{\beta}) = 1, \quad B(\tilde{\delta}) = 2,$$

то выполняются соотношения

$$B(\tilde{\alpha}) = 2, \quad A(\tilde{\beta}) = 1, \quad A(\tilde{\delta}) = 2.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор $\tilde{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n+2})$, такой, что $\gamma_0 = 9$, $\gamma_1 = 2$. По определению функции f_n получаем $\Phi(\gamma) = 9$. Тогда из свойства 1.3 следует, что любая белая подформула принимает на этом наборе значение 9, т.е. имеет вид $\lambda(B, C)$ или $\mu(B, C, D)$, где B, C, D — формулы. Из определения функций λ и μ получаем, что любая чёрная главная подформула белой формулы на наборе $\tilde{\gamma}$ принимает значение 2, т.е. имеет вид $\varphi_m(B, C)$, где $m \in \{3, 4, 5\}$, B, C — формулы. Так как $\varphi_m(x, y) = 2$ только при $x = 2$, на наборе $\tilde{\gamma}$ любая черная подформула формулы Φ принимает значение 2. Если она при этом нетривиальна, то она имеет вид $\varphi_m(\widetilde{C}, \widetilde{D})$, где $\widetilde{C}, \widetilde{D}$ — формулы, $m \in \{3, 4, 5\}$.

Из утверждения, что равенство $\varphi_m(x, y) = 2$ выполняется только при $x = 2$, также следует, что $A(\tilde{\delta}) = 2$. А из утверждения, что соотношение $\varphi_m(x, y) = 1$ верно только если $x = 1$, следует, что $A(\tilde{\beta}) = 1$. Из равенства $\varphi_m(2, y) = 2$ следует, что $B(\tilde{\alpha}) = 2$. $\square$

Свойство 1.6. *Если формула Φ реализует функцию $f_n(y_1, y_2, x_0, \ldots, x_n)$, то выполняется соотношение*

$$Z(\Phi) = \{y_2\}.$$

При этом для любого набора $\tilde{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n+2})$ из E_{10}^{n+3} и любой белой подформулы A формулы Φ такой, что $A(\tilde{\gamma}) = 9$, выполняется равенство $\gamma_1 = 2$.

Доказательство. У любой нетривиальной подформулы A формулы Φ над базисом $\mathfrak{A}$ есть главная подформула B, такая, что ребро (v_A, v_B) раскрашено в чёрный цвет, т.е. выполняется соотношение

$$Z(\Phi) \neq \varnothing,$$

и у любой чёрной подформулы есть чёрная тривиальная подформула. Далее, рассуждая, как при доказательстве свойства 1.5 получим, что на наборе $\tilde{\gamma} = (9, 2, 3, \ldots, 3)$ любая чёрная подформула формулы Φ принимает значение 2, следовательно,

$$Z(\Phi) = \{y_2\}.$$

Применив это рассуждение к произвольной белой подформуле A формулы Φ и набору $\tilde{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n+2})$, такому, что $A(\tilde{\gamma}) = 9$, получим равенство $\gamma_1 = 2$.

□

1.5 Доказательство основной теоремы главы

Лемма 1.2. *Пусть Φ — произвольная формула над системой $\mathfrak{A}$, реализующая функцию $f_n(y_1, y_2, x_0, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, и имеющая вид*

$$\Phi = \lambda(\lambda(\ldots\lambda(\lambda(y_1, Z_1), Z_2), \ldots), Z_N),$$

где $Z_1, \ldots, Z_N$ — формулы над $\mathfrak{A}$, N натуральное. Тогда выполняются неравенства

$$N \geqslant (n+1)3^n, \quad L(Z_i) \geqslant n+1$$

для всех $i = 1, \ldots, N$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную нетривиальную подформулу Z_i формулы Φ, $1 \leqslant i \leqslant N$. Она окрашена в чёрный цвет. Из свойств 1.5 и 1.6 следует, что формула Z_i имеет вид

$$\varphi_{m_1}(\varphi_{m_2}(\ldots\varphi_{m_{t-1}}(\varphi_{m_t}(y_2, H_{l_t}), H_{l_{t-1}}), \ldots, H_{l_2}), H_{l_1}),$$

где $m_p \in \{3, 4, 5\}$ для любого $p = 1, 2, \ldots, t$, а $H_{l_1}, \ldots, H_{l_t}$ — формулы над системой $\mathfrak{A}$, $t \geqslant 1$.

Обозначим через P множество всех наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+2})$ из E_{10}^{n+3}, таких, что $\alpha_0 = 7, \alpha_1 = 1$. Докажем, что если для произвольного набора

$\tilde{\alpha} \in P$ и некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant N$, выполняется соотношение $Z_i(\alpha) \neq 1$, то функция, реализуемая формулой Φ, не изменится, если в ней заменить формулу $\lambda(\lambda(B, C), Z_i)$ на формулу $\lambda(B, C)$ (т.е. убрать Z_i из формулы). Действительно, из определения функции λ и равенства $Y(\Phi) = \{y_1\}$ следует, что на рассматриваемых наборах любая белая подформула принимает значение 7 или 8. Пусть $\alpha_0 = 7$, $\alpha_1 = 1$, $(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+2}) \in F_{n+1}$. Если $\lambda(B, C) = 8$, то и

$$\lambda(\lambda(B, C), Z_i) = 8$$

по определению функции λ. Если $\lambda(B, C) = 7$, то по нашему предположению $Z_i(\alpha) \neq 1$, и, следовательно,

$$\lambda(\lambda(B, C), Z_i) = 7.$$

А если $\alpha_0 = 7$, $\alpha_1 = 1$, $(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+2}) \notin F_{n+1}$, то любая белая подформула принимает на этом наборе значение 7.

Пусть $\tilde{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n+2})$ — произвольный набор из E_{10}^{n+3}, $1 \leqslant i \leqslant N$. Рассмотрим формулу $Z_i(y_1, y_2, x_0, \ldots, x_n)$. Как показано выше, она имеет вид

$$\varphi_{m_1}(\varphi_{m_2}(\ldots \varphi_{m_{t-1}}(\varphi_{m_t}(y_2, H_{l_t}), H_{l_{t-1}}), \ldots, H_{l_2}), H_{l_1}).$$

Покажем, что $Z_i(\tilde{\gamma}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1 = 1$ и для всех $p = 1, \ldots, t$ верно равенство

$$H_{l_p}(\tilde{\gamma}) = m_p.$$

Действительно, равенство $\gamma_1 = 1$ следует из свойства 1.5. Из него же следует, что все нетривиальные чёрные подформулы формулы Z_i имеют вид

$$\varphi_{m_s}(\varphi_{m_{s+1}}(\ldots \varphi_{m_{t-1}}(\varphi_{m_t}(y_2, H_{l_t}), H_{l_{t-1}}), \ldots, H_{l_{s+1}}), H_{l_s}),$$

и на наборе γ принимают значение 1. А по определению функции φ_m ($m \in \{3, 4, 5\}$) имеем

$$H_{l_s}(\gamma) = m_s.$$

В обратную сторону доказательство очевидно и следует из определения функций φ_m, $m \in \{3, 4, 5\}$.

Предположим, что найдется число $p \in \{1, \ldots, t\}$, такое, что формула H_{l_p} не является переменной из множества X. Тогда при $\tilde{\gamma} \in P$ не может выполняться равенство

$$H_{l_p}(\tilde{\gamma}) = m_p,$$

$m_p \in \{3, 4, 5\}$ (ни одна функция из $\mathfrak{A}$ не принимает значений 3, 4 и 5, и при этом $\gamma_0, \gamma_1 \notin \{3, 4, 5\}$). Следовательно, $Z_i(\gamma) \neq 1$ при всех $\gamma \in P$ и Z_i можно убрать из формулы без увеличения сложности. Предположим, что найдутся такие $p, q \in \{1, \ldots, t\}$, $p \neq q$, что $H_{l_p} = H_{l_q}$, но $m_p \neq m_q$. Тогда не могут одновременно выполняться соотношения

$$H_{l_p}(\gamma) = m_p, \quad H_{l_q}(\gamma) = m_q.$$

Следовательно, $Z_i(\gamma) \neq 1$ при всех $\gamma \in P$, и Z_i также можно убрать из формулы без увеличения сложности. А если найдутся такие $p, q \in \{1, \ldots, t\}$, $p \neq q$, что $H_{l_p} = H_{l_q}$ и $m_p = m_q$ $(p > q)$, то можно заменить формулу

$$\varphi_{m_{p-1}}(\varphi_{m_p}(B, H_{l_p}), H_{l_{p-1}})$$

на формулу

$$\varphi_{m_{p-1}}(B, H_{l_{p-1}})$$

без увеличения сложности формулы Φ (т.е. убрать из цепи φ_{m_p}). Значение формулы Φ при таком преобразовании не изменится. Будем проделывать такие преобразования в формуле Z_i до тех пор, пока это возможно. Преобразуем таким образом все подформулы Z_i формулы Φ. В результате получим эквивалентную формулу меньшей сложности (и не большей глубины), у которой для любой подформулы Z_i среди подформул H_{l_p} встречаются только переменные из множества X, причем каждая не более одного раза.

Рассмотрим формулу Z_i, $1 \leqslant i \leqslant N$. Пусть в нее входит r переменных из множества X, например, $x_0, \ldots, x_{r-1}$, причем без ограничения общности переменная x_p подается на вход функции φ_{m_p}. Предположим, что $r < n$. Тогда для набора $\tilde{\alpha} = (\gamma_1, \gamma_2, \alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, где $\gamma_1 = 7$, $\gamma_2 = 1$, $\alpha_0 = m_0, \ldots,$ $\alpha_{r-1} = m_{r-1}$, $\alpha_r = \ldots = \alpha_n = 2$, выполняются соотношения

$$Z_i(\alpha) = 1, \quad \Phi(\alpha) = 8,$$

что противоречит определению функции f_n. Таким образом, $r \geqslant n$, т.е.

$$L(Z_i) \geqslant n + 1.$$

Рассмотрим произвольное r, $0 \leqslant r \leqslant n$, и произвольный набор $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, состоящий только из троек, черверок и пятерок. Допустим, что среди подформул Z_i не найдется такой, что переменная x_0 подаётся на вход функции φ_{β_1}, x_1 подаётся на вход φ_{β_2}, … , x_{r-1} подаётся на вход φ_{β_r}, x_{r+1} подаётся на вход $\varphi_{\beta_{r+1}}$, и т. д., x_n подаётся на вход φ_{β_n}, а переменная x_r не входит в Z_i. Тогда рассмотрим набор $\tilde{\alpha} = (\gamma_1, \gamma_2, \alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, где $\gamma_1 = 7$, $\gamma_2 = 1$, $\alpha_0 = \beta_1, \ldots, \alpha_{r-1} = \beta_r$, $\alpha_r = 2, \alpha_{r+1} = \beta_{r+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. На этом наборе ни одна из подформул Z_i не обратится в 1, и, значит, $\Phi(\alpha) = 7$, что противоречит определению функции f_n. Полученное противоречие показывает, что N не меньше, чем число способов выбрать r и $\tilde{\beta}$, т.е.

$$N \geqslant (n + 1)3^n.$$

□

Доказательство теоремы 1.2. Нижняя оценка. Пусть Φ — произвольная минимальная формула над $\mathfrak{B}$, реализующая функцию f_n; T — соответствующее этой формуле корневое дерево, раскрашенное описанным выше способом; v_* — корень дерева T. Из свойств 1.4 и 1.6 следует, что

$$Y(\Phi) = \{y_1\}, \quad Z(\Phi) = \{y_2\}.$$

Рассмотрим произвольную раскрашенную в белый цвет невисячую вершину v. Если формула A_v имеет вид $A_v = \varphi_m(B, C)$, где B, C — формулы, то в силу определения функций φ_m для любого набора $\alpha \in E^{n+3}$ выполняется неравенство $A_v(\alpha) \neq 9$, что противоречит свойству 1.3. Пусть формула A_v имеет вид $A_v = \mu(B, C, D)$, где B, C, D — формулы над базисом $\mathfrak{B}$ (вершины v_B и v_C раскрашены в белый цвет). Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+2})$ — произвольный набор из E_{10}^{n+3}. Если $\alpha_0 = 6$, то в силу свойства 1.4 выполняются равенства

$$B(\tilde{\alpha}) = C(\tilde{\alpha}) = 6.$$

Пусть $\alpha_0 \neq 6$. Предположим, что выполняется неравенство $B(\tilde{\alpha}) \neq C(\tilde{\alpha})$. Тогда

$$A_v(\tilde{\alpha}) = \mu(B(\tilde{\alpha}), C(\tilde{\alpha}), D(\tilde{\alpha})) = 6.$$

Поэтому в силу свойства 1.3 имеем $\Phi(\tilde{\alpha}) = 6$, что противоречит определению функции f_n. Таким образом, $B(\tilde{\alpha}) = C(\tilde{\alpha})$ для любого набора $\tilde{\alpha} \in E_{10}^{n+3}$.

Будем преобразовывать формулу Φ без увеличения сложности и одновременно строить формулу G специального вида над системой $\mathfrak{A}$, реализующую функцию f_n. Пусть Φ имеет вид $\Phi = \mu(A_1, B_1, C_1)$, где A_1, B_1, C_1 — формулы, и пусть (без ограничения общности) $L(A_1) \leqslant L(B_1)$. Положим $\Phi_1 = \mu(A_1, A_1, C_1)$, $G_1 = \lambda(A_1, C_1)$. Очевидно, что формулы Φ_1 и G_1 реализуют функцию f_n, и выполняется неравенство $L(\Phi_1) \leqslant L(\Phi)$. Легко видеть, что A_1 — либо тривиальная формула, либо формула вида $A_1 = \mu(A_2, B_2, C_2)$, где A_2, B_2, C_2 — формулы. Во втором случае (пусть, например, $L(A_2) \leqslant L(B_2)$) положим

$$A_1^1 = \mu(A_2, A_2, C_2), \quad A_1^2 = \lambda(A_2, C_2),$$

$$\Phi_2 = \mu(A_1^1, A_1^1, C_1) = \mu(\mu(A_2, A_2, C_2), \mu(A_2, A_2, C_2), C_1),$$

$$G_2 = \lambda(A_1^2, C_1) = \lambda(\lambda(A_2, C_2), C_1).$$

Выполним над формулами A_2 аналогичные преобразования, и т. д. В конце концов после некоторого числа N преобразований мы получим формулы Φ_N над базисом $\mathfrak{B}$ и G_N над базисом $\mathfrak{A}$, реализующие функцию f_n, такие, что сложность формулы Φ_N удовлетворяет неравенству

$$L(\Phi_N) \leqslant L(\Phi),$$

а глубина — соотношению

$$D(\Phi_N) = D(G_N).$$

При этом формула G_N имеет вид

$$G_N = \lambda(\lambda(\ldots\lambda(\lambda(y_1, Z_1), Z_2), \ldots), Z_N),$$

где $Z_1, \ldots, Z_N$ — формулы над системой $\mathfrak{B}$, N натуральное, а всякая нетривиальная белая подформула формулы Φ_N имеет вид $\mu(A, A, B)$, где A, B — формулы.

Легко видеть, что формула Φ_N содержит $2^N - 1$ символов μ, а её сложность удовлетворяет неравенству

$$L(\Phi_N) \geqslant M(2^N - 1) + 2 \cdot 2^{N-1} = M(2^N - 1) + 2^N,$$

где $M = \min L(Z_i)$ (минимум берётся по всем значениям i от 1 до N). Из леммы следует, что

$$N \geqslant (n+1)3^n, \quad M \geqslant n + 1.$$

Поэтому

$$L(\Phi) \geqslant L(\Phi_N) \geqslant (n+2) \cdot 2^{(n+1)\cdot 3^n} - n - 1.$$

Соответствующая верхняя оценка очевидна. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что в процессе доказательства также получена оценка на глубину минимальной формулы над базисом $\mathfrak{B}$, реализующей функцию f_n.

Следствие 1.1. *Пусть* $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, 6\} \subseteq P_{10}$. *Тогда при всех* $n \geqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$D_{\mathfrak{B}}(f_n) \geqslant (n+1)3^n.$$

Аналогично доказанной теореме можно доказать более общее утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть* m *и* r *— произвольные натуральные числа, такие, что* $m, r \geqslant 2$. *Тогда существуют натуральное* $k = k(r)$, *конечная система* $\mathfrak{A} \subseteq P_k$, *последовательность* $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ *функций из* $[\mathfrak{A}]$ *и константа* $c > 0$, *такие, что при всех* $n \geqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$L_{\mathfrak{A}}(f_n) \geqslant cm^{r^n}.$$

Чтобы доказать это утверждение, достаточно, помимо уже доказанных свойств функций из теоремы 1.2, использовать ряд следующих соображений. Чтобы вместо нижней оценки вида $c2^{3^n}$ получить оценкку вида cm^{3^n}, достаточно вместо функции $\mu(x, y, z)$ использовать функцию $\mu'(x_1, \ldots, x_m, z)$, определённую следующим равенством:

$$\mu'(x_1, \ldots, x_m, z) = \begin{cases} \lambda(x_1, z), & \text{если } x_1 = \ldots = x_m; \\ 6, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Чтобы вместо нижней оценки вида cm^{3^n} получить оценку вида cm^{r^n}, можно перейти в логику бо̀льшей значности и добавить в базис дополнительные функции, аналогичные функциям $\varphi_m(x, y)$, где индекс m, помимо значений 3, 4 и 5, также может принимать добавленные в процессе увеличения значности логики значения. В рамках данной главы эти идеи подробно описаны не будут, поскольку данная глава была направлена на наглядную демонстрацию идей метода, позволяющего добиться указанных высоких конструктивных нижних оценок сложности. В следующей главе будет показано как модифицировать имеющиеся методики, чтобы добиться аналогичных результатов в логиках меньшей значности.

Глава 2

Понижение значности логики с качественным сохранением нижней оценки

2.1 Формулировка основного результата главы

В данной главе будет продолжено исследование задачи о получении высоких нижних оценок сложности и глубины реализации функций многозначной логики формулами над конечными системами [81, 28, 34]. В предыдущей главе были продемонстрированы методы, позволяющие получать высокие эффективные нижние оценки сложности для реализации конкретных последовательностей функций (с порядком роста, превосходящим 2^{3^n} для случая функций 10-значной логики). Однако аналогичные результаты достижимы и для некоторых последовательностей функций в логиках меньшей значности, чем были рассмотрены в предыдущей главе. Подобное уменьшение значности рассматриваемой логики приводит к существенному усложнению доказательств и уменьшению наглядности.

В данной главе описан метод, позволяющий для любого $r \geqslant 1$ при $k(r) = r + 3$ строить последовательность функций из $P_{k(r)}$, сложность которых превосходит 2^{r^n}. В частности, указана последовательность функций из

P_6, порядок роста сложности которых в классе формул над некоторой конечной системой превосходит 2^{3^n}, и приведена точная формула для сложности функций из этой последовательности.

Обозначим через Q_n множество всех наборов из E_k^n, состоящих только из символов $3, \ldots, k-1$, причём символ тройки обязательно присутствует в наборе. Определим функции $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y, z)$, $\varphi_m(x, y)$, где $m \in \{3, \ldots, k - 1\}$, и $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащие P_k, следующим образом. Положим

$$\lambda(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0,\ y = 2; \\ 1, & \text{если } x = 1, y \in E_k \text{ или если } x = 0,\ y = 3; \\ 2 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\mu(x,y,z) = \begin{cases} \lambda(x,z), & \text{если } x = y; \\ 2 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\varphi_m(x,y) = \begin{cases} 3, & \text{если } x = 3,\ y = m; \\ 2 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$f_n(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0,\ (x_1, \ldots, x_n) \notin Q_n; \\ 1, & \text{если } y = 1, (x_1, \ldots, x_n) \in E_k^n \\ & \text{или если } y = 0,\ (x_1, \ldots, x_n) \in Q_n; \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Имеет место

Теорема 2.1. *Пусть $k \geqslant 4$, $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\} \subseteq P_k$. Тогда при всех $n \geqslant 1$ для последовательности f_n функций k-значной логики справедливо равенство*

$$L_{\mathfrak{B}}^{\varPhi}(f_n) = (n+1) \cdot 2^{(k-3)^n - (k-4)^n} - n.$$

2.2 Доказательство вспомогательных утверждений

Установим сначала некоторые свойства формул над системой

$$\mathfrak{A} = \{\lambda\} \cup \mathfrak{B} = \{\lambda, \mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\}.$$

Пусть $\Phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над системой $\mathfrak{A}$. Поставим в соответствие формуле Φ дерево T с корнем v_*, в котором висячим вершинам приписаны символы из множества $X \cup \{y, 2\}$, где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Между вершинами дерева T и подформулами формулы Φ естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие, в частности корневой вершине v_* соответствует формула Φ, главным подформулам формулы Φ — вершины, смежные с корневой, и так далее, висячим вершинам — выражения вида x_i, y или 2, $1 \leqslant i \leqslant n$. Если A — некоторая подформула формулы Φ, а v — некоторая вершина дерева T, то через v_A будем обозначать вершину дерева T, соответствующую подформуле A, а через A_v — подформулу формулы Φ, соответствующую вершине v.

Раскрасим рёбра и вершины дерева T в белый, чёрный и зелёный цвета следующим образом. Пусть A — некоторая нетривиальная подформула формулы Φ. Если она имеет вид $A = \lambda(B, C)$, где B, C — формулы над системой $\mathfrak{A}$, то раскрасим ребро (v_A, v_B) в белый цвет, а ребро (v_A, v_C) в чёрный. Если A — формула вида $A = \mu(B, C, D)$, где B, C, D — формулы, то раскрасим рёбра $(v_A, v_B), (v_A, v_C)$ в белый цвет, а ребро (v_A, v_D) в чёрный. И, наконец, если A — формула вида $\varphi_m(B, C)$, где B, C — формулы, $m \in \{3, \ldots, k-1\}$, то раскрасим ребро (v_A, v_B) в чёрный цвет, а ребро (v_A, v_C) в зелёный. Корень v_* дерева T раскрашивается в белый цвет. Вершина v, отличная от корня, раскрашивается в белый цвет, если все рёбра цепи, соединяющей корень v_* дерева T с вершиной v, раскрашены в белый цвет. Вершина v раскрашивается в чёрный цвет, если все рёбра цепи, соединяющей корень v_* дерева T с вершиной v, раскрашены в белый или чёрный цвет, причём чёрные рёбра есть обязательно. Все остальные вершины раскрашиваются в зелёный цвет. Будем говорить, что подформула формулы Φ белого, чёрного или зелёного цвета, если сопоставленная ей вершина дерева T раскрашена в белый, чёрный или зелёный цвет соответственно. Обозначим через $V(\Phi)$ множество всех висячих вершин дерева T, раскрашенных в белый цвет, а через $Y(\Phi)$ множество символов, соответствующих вершинам из $V(\Phi)$. Очевидно, что имеет место соотношение

$$Y(\Phi) \subseteq X \cup \{y, 2\}.$$

Пусть $\Phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная формула над системой $\mathfrak{A}$, а T — соответствующее этой формуле дерево с корнем v_*, в котором рёбра и вершины раскрашены в белый, чёрный и зелёный цвета описанным выше способом. Сформулируем и докажем некоторые свойства формулы Φ.

Свойство 2.1. *Для любой белой подформулы A формулы Φ и любых наборов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E_k^{n+1}$, таких, что*

$$\Phi(\tilde{\alpha}) = 0, \quad A(\tilde{\beta}) = 2,$$

выполняются соотношения

$$A(\tilde{\alpha}) = 0, \quad \Phi(\tilde{\beta}) = 2.$$

Доказательство. Пусть вершина v_A дерева T белая, а w — произвольная вершина цепи, соединяющей корень v_* с вершиной v_A, $w \neq v_A$. Очевидно, что A_w имеет вид либо $A_w = \lambda(B, C)$, либо $A_w = \mu(B, C, D)$, где B, C, D — формулы. Поэтому если $A(\tilde{\beta}) = 2$, то в силу соотношений

$$\lambda(2, x) = \mu(2, y, z) = \mu(x, 2, z) = 2,$$

где $x, y, z \in E_k$, выполняется равенство $A_w(\tilde{\beta}) = 2$, в частности $\Phi(\tilde{\beta}) = 2$; если же $\Phi(\tilde{\alpha}) = 0$, то, поскольку функции $\lambda(x, z)$ и $\mu(x, y, z)$ могут принимать значение 0 только при $x = y = 0$, выполняется равенство $A_w(\tilde{\alpha}) = 0$, и поэтому $A(\tilde{\alpha}) = 0$. $\square$

Свойство 2.2. *Если B — чёрная подформула формулы Φ, а A — чёрная подформула формулы B, и набор $\tilde{\alpha} \in E_k^{n+1}$ таков, что верно равенство $B(\tilde{\alpha}) = 3$, то выполняется соотношение $A(\tilde{\alpha}) = 3$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда в цепи, соединяющей вершину v_B с вершиной v_A, найдётся такая чёрная вершина w, что $A_w(\tilde{\alpha}) = 3$, а для главной чёрной подформулы C формулы A_w (соответствующей вершине цепи, соединяющей вершину w с вершиной v_A) верно равенство $C(\tilde{\alpha}) \neq 3$. Но в базисе $\mathfrak{A}$ нет ни одной функции, которая бы принимала значение 3 при условии, что значение её аргумента, ребро к вершине которого раскрашивалось бы в белый или чёрный цвет, не равняется 3. Таким образом, мы пришли к противоречию, и свойство доказано. $\square$

Свойство 2.3. *Пусть A, B и C — формулы над $\mathfrak{A}$, и пусть формулы B и C могут принимать только значение 2 или 3. Тогда формулы $\lambda(\lambda(A, B), C)$ и $\lambda(\lambda(A, C), B)$ реализуют равные функции.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha}$ — произвольный набор. Если формула A на наборе $\tilde{\alpha}$ принимает значение, отличное от нуля и единицы, то по определению функции λ обе рассматриваемые в формулировке свойства формулы принимают значение 2. Если формула A на наборе $\tilde{\alpha}$ принимает значение 1, то обе рассматриваемые формулы также принимают на этом наборе значение 1. А если $A(\tilde{\alpha}) = 0$, то обе формулы принимают значение 1, если верно одно из равенств

$$B(\tilde{\alpha}) = 3, \quad C(\tilde{\alpha}) = 3,$$

и значение 0, если

$$B(\tilde{\alpha}) = C(\tilde{\alpha}) = 2.$$

$\square$

Свойство 2.4. *Пусть формула A имеет вид*

$$\varphi_{m_1}(\varphi_{m_2}(\ldots\varphi_{m_{s-1}}(\varphi_{m_s}(H_{s+1}, H_s), H_{s-1}), \ldots, H_2), H_1),$$

где $m_p \in \{3, \ldots, k-1\}$ для всех $p = 1, 2, \ldots, s$, а $H_1, \ldots, H_{s+1}$ — формулы над базисом $\mathfrak{A}$, $s \geqslant 1$. Пусть также $m_{s+1} = 3$. Тогда формула A на произвольном наборе $\tilde{\gamma}$ из E_k^{n+1} принимает значение 3 тогда и только тогда, когда для всех $p = 1, \ldots, s+1$ выполняется соотношение

$$H_p(\tilde{\gamma}) = m_p,$$

и значение 2 в остальных случаях.

Доказательство. Будем доказывать свойство индукцией по s. При $s = 1$ доказываемое свойство представляет из себя определение функции φ_{m_1}. Пусть рассматриваемое утверждение доказано для всех значений $s < s_0$, докажем его для $s = s_0$. Пусть $A(\tilde{\gamma}) = 3$. Тогда по определению функции φ_{m_1} имеем соотношения

$$H_p(\tilde{\gamma}) = m_p,$$

$$\varphi_{m_2}(\ldots\varphi_{m_{s-1}}(\varphi_{m_s}(H_{s+1}, H_s), H_{s-1}), \ldots, H_2)(\tilde{\gamma}) = 3.$$

Тогда из предпололжения индукции следует, что критерий равенства формулы A тройке доказан. А, поскольку функция φ_{m_1} не может принимать значений, отличных от значений 2 и 3, свойство доказано. $\square$

Далее сформулируем и докажем ряд нетривиальных утверждений, касающихся реализации функции $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$ формулами над базисом $\mathfrak{A}$. Эти утверждения будут в дальнейшем использоваться при доказательстве теоремы.

Утверждение 2.1. *Пусть формула Φ над системой $\mathfrak{A}$ реализует функцию $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$, и этой формуле описанным выше способом сопоставлено* *раскрашенное дерево. Пусть A — произвольная нетривиальная белая подформула формулы Φ, $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_n)$ — произвольные наборы из E_k^{n+1}. Тогда выполняются следующие соотношения:*

1) $Y(\Phi) = \{y\}$*;*

2) *если* $A(\tilde{\alpha}) = 0$*, то* $\alpha_0 = 0$*;*

3) *если* $\beta_0 = 1$*, то* $A(\tilde{\beta}) = 1$*;*

4) *формула A имеет вид $\lambda(B, C)$ или $\mu(B, C, D)$, где B, C, D — формулы.*

Доказательство. Предположим, что найдётся переменная $x_i \in X$, такая, что $x_i \in Y(\Phi)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, или выполняется соотношение $2 \in Y(\Phi)$. Рассмотрим набор $\tilde{\gamma} = (0, 1, \ldots, 1)$. Тогда $\Phi(\tilde{\gamma}) = f_n(\tilde{\gamma}) = 0$, а из свойства 2.1 следует, что на этом наборе любой символ из множества $Y(\Phi)$ равен нулю. Полученное противоречие доказывает первый пункт утверждения.

Доказательство второго пункта вытекает из первого пункта и свойства 2.1. Доказательство последнего пункта вытекает из свойства 2.1 и утверждения, что функции φ_m не принимают значения 0 ни на каком наборе.

Предположим, что третий пункт доказываемого утверждения ложен. Тогда найдётся белая подформула E формулы Φ, такая что на наборе $\tilde{\beta}$ её первый аргумент (в случае, когда формула E имеет вид $\lambda(B, C)$, в случае вида $\mu(B, C, D)$ первые два аргумента) принимает значение 1, а сама она на этом наборе принимает значение, отличное от 1. Тогда мы получаем противоречие с определением функций λ или μ, что и завершает доказательство утверждения. □

Утверждение 2.2. *Пусть формула Φ над системой $\mathfrak{A}$ реализует функцию $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$, и этой формуле описанным выше способом сопоставлено раскрашенное дерево. Пусть C — чёрная главная подформула белой формулы B, а A — чёрная подформула формулы C. Пусть формула A не принима-*

ет значения 3 *на всех наборах* $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ *из* E_k^{n+1}*, таких, что* $\alpha_0 = 0$. *Пусть* Φ' *— формула, получающаяся из формулы* Φ *заменой подформулы* C *на константу* 2. *Тогда формула* Φ' *также реализует функцию* f_n.

Доказательство. Пусть C — чёрная главная подформула белой формулы B, а A — чёрная подформула формулы C, формула A не принимает значения 3 на наборах $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ из E_k^{n+1}, таких, что $\alpha_0 = 0$, $\tilde{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$ — произвольный набор из E_k^{n+1}, B' — формула, получающаяся из формулы B заменой подформулы C на константу 2. Согласно утверждению 2.1, формула B имеет вид $\mu(D, F, C)$ или $\lambda(D, C)$, где D, F, C — белые формулы. Далее считаем, что формула B имеет вид $\mu(D, F, C)$, второй случай рассматривается аналогично. Пусть $C(\gamma) = 3$. Согласно свойству 2.2, имеем $A(\gamma) = 3$. Значит, формула C не принимает значения 3 на всех наборах $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ из E_k^{n+1}, таких, что $\alpha_0 = 0$. Рассмотрим следующие случаи.

Пусть $\gamma_0 = 1$. Из утверждения 2.1 следует, что $D(\gamma) = F(\gamma) = 1$. В силу соотношений

$$\mu(1, 1, C) = \mu(1, 1, 2) = 1$$

верны равенства

$$B(\gamma) = B'(\gamma) = 1, \quad \Phi(\gamma) = \Phi'(\gamma) = 1.$$

Пусть $\gamma_0 = 0$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \notin Q_n$. Тогда по определению функции f_n имеем $\Phi(\gamma) = 0$. Согласно свойству 2.1, $B(\gamma) = 0$. Из определения функции μ следует, что $C(\gamma) = 2$, и на рассматриваемых наборах формулы Φ и Φ' принимают одинаковые значения.

Пусть $\gamma_0 = 0$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in Q_n$. Тогда по определению функции f_n имеем $\Phi(\gamma) = 1$. Если $D(\gamma) = F(\gamma) = 1$, то $B(\gamma) = 1$ вне зависимости от значения, принимаемого формулой C, поэтому $B(\gamma) = B'(\gamma) = 1$. Если $D(\gamma) = F(\gamma) = 0$, то $C(\gamma) \in \{2, 3\}$, так как в противном случае $B(\gamma) = 2$, и по свойству 2.1 имеем $\Phi(\gamma) = 2$, а это неверно. Но по условию $C(\gamma) \neq 3$, следовательно, $C(\gamma) = 2$, и можно заменить формулу C на константу 2 без изменения реализуемой функции. В остальных случаях (т.е. при $D(\gamma) = F(\gamma) \neq 0, 1$ или при $D(\gamma) \neq F(\gamma)$) получаем $B(\gamma) = B'(\gamma) = 2$.

Пусть $\gamma_0 \notin \{0, 1\}$. Согласно утверждению 2.1 каждая белая подформула формулы Φ имеет вид или $\mu(D, F, J)$, или $\lambda(D, J)$, где D, F, J — формулы; D, F — белые формулы. Это означает, что для любой белой подформулы формулы Φ найдётся цепь, у которой все вершины и рёбра белые, и которая соединяет вершину, соответствующую этой подформуле, и некоторую висячую белую вершину. Возьмем произвольную белую подформулу G формулы Φ и вершину вышеописанной цепи, соседнюю с висячей. Соответствующая ей формула, очевидно, имеет вид $\mu(y, K, F)$, $\mu(K, y, F)$ или $\lambda(y, F)$, где K, F — формулы. Поэтому такая формула на наборе $\tilde{\gamma}$ принимает значение 2 при любых значениях формулы F. А из свойства 2.1 следует равенство $G(\gamma) = 2$. Тогда из равенств $\mu(2, 2, C) = \mu(2, 2, 2) = 2$ получаем, что формулы Φ и Φ' на рассматриваемых наборах принимают одинаковые значения.

Таким образом, формулы Φ и Φ' реализуют равные функции. Утверждение доказано. □

Утверждение 2.3. *Пусть формула Φ над системой $\mathfrak{A}$ реализует функцию $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$ и этой формуле описанным выше способом сопоставлено раскрашенное дерево. Если $L(\Phi) = L_{\mathfrak{A}}(f_n)$, то каждая нетривиальная чёрная подформула формулы Φ на некотором наборе принимает значение 3 и имеет вид $\varphi_m(F, G)$, где $m \in \{3, \ldots, k-1\}$; F, G — формулы.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную нетривиальную чёрную подформулу A формулы Φ. Очевидно, что в цепи, соединяющей корень дерева с вершиной A, все вершины чёрные или белые. Корень дерева белый, A — чёрная формула, значит, в рассматриваемой цепи найдётся некоторая белая формула с главной чёрной подформулой. Пусть C — чёрная главная подформула белой формулы B, а A — чёрная подформула формулы C. Допустим, что формула A ни на одном наборе не принимает значения 3. Тогда, заменив формулу C на константу 2, получим формулу Φ'. В результате этой операции уменьшится сложность формулы. Кроме того, согласно утверждению 2.2, формулы Φ и Φ' реализуют равные функции. Следовательно, формула Φ не является минимальной, что противоречит условию. То есть в формуле Φ каждая нетривиальная чёрная подформула принимает значение 3 на некотором наборе. Так как функции μ и λ не принимают значения 3 ни при каких значениях аргументов, каждая нетривиальная чёрная подформула формулы Φ имеет вид $\varphi_m(F, G)$, где F, G — формулы, а $m \in \{3, \ldots, k-1\}$. Утверждение доказано. □

2.3 Доказательство основной теоремы главы

Сформулируем и докажем лемму, при этом в процессе доказательства проделаем основные шаги, необходимые при доказательстве теоремы 2.1. Эта лемма фактически даст экспоненциальную нижнюю оценку на глубину произвольной формулы над базисом $\mathfrak{A}$, реализующей функцию $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$. В дальнейшем (при доказательстве теоремы 2.1) станет понятно, что эта лемма даёт также экспоненциальную нижнюю оценку на глубину произвольной формулы над базисом $\mathfrak{B}$, реализующей функцию $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$.

Лемма 2.1. *Пусть Φ — произвольная формула над системой $\mathfrak{A}$, реализующая функцию $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$ из P_k и имеющая вид*

$$\Phi = \lambda(\lambda(\ldots\lambda(\lambda(y, Z_1), Z_2), \ldots), Z_N),$$

где $Z_1, \ldots, Z_N$ — формулы над системой $\mathfrak{A}$, $k \geqslant 4$, n и N — натуральные *числа. Пусть* $L(\Phi) = L_{\mathfrak{A}}(f_n)$*. Тогда*

$$N \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n$$

и для всех $i = 1, \ldots, N$ *выполняются неравенства*

$$L(Z_i) \geqslant n.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную нетривиальную подформулу Z_i формулы Φ над системой $\mathfrak{A}$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Она раскрашена в чёрный цвет. По утверждению 2.3 формула Z_i имеет вид

$$\varphi_{m_1}(\varphi_{m_2}(\ldots\varphi_{m_{s-1}}(\varphi_{m_s}(H_{s+1}, H_s), H_{s-1}), \ldots, H_2), H_1),$$

где $m_p \in \{3, \ldots, k-1\}$ для любого $p = 1, 2, \ldots, s$, а $H_1, \ldots, H_{s+1}$ — формулы над $\mathfrak{A}$, $s \geqslant 1$, причём H_{s+1} тривиальна. Заметим также, что формулы $H_1, \ldots, H_s$ и их подформулы зелёные, а все остальные подформулы формулы Z_i чёрные. Для удобства положим $m_{s+1} = 3$. Из утверждения 2.3 следует, что существует набор $\tilde{\gamma}$ из E_k^{n+1}, такой, что $Z_i(\gamma) = 3$.

Рассмотрим все формулы, реализующие функцию f_n. Покажем, что среди формул минимальной сложности найдётся формула, у которой все зелёные подформулы тривиальны.

Предположим, что найдётся число $p \in \{1, \ldots, s\}$, такое, что формула H_p имеет вид $\lambda(A, C)$ или $\mu(A, B, C)$, где A, B, C — формулы. Согласно определению функций λ и μ, выполняется соотношение

$$H_p(\gamma) \in \{0, 1, 2\}.$$

Тогда равенство $Z_i(\gamma) = 3$ противоречит свойству 2.4.

Предположим, что найдётся число $p \in \{1, \ldots, s\}$, такое, что формула H_p имеет вид $\varphi_h(A, C)$ для некоторого $h \in \{3, \ldots, k-1\}$, а соответствующий индекс m_p не равен 3 (т.е. у формулы Z_i есть чёрная подформула вида

$\varphi_{m_p}(B, \varphi_h(A, C))$, A, B, C — формулы). Согласно определению функции φ_h выполняется соотношение

$$H_p(\gamma) \in \{2, 3\}.$$

Но, согласно предположению, $m_p \in \{4, \ldots, k-1\}$. Тогда равенство $Z_i(\gamma) = 3$ противоречит свойству 2.4.

Предположим, что найдётся число $p \in \{1, \ldots, s\}$ такое, что формула H_p имеет вид $\varphi_h(A, C)$ для некоторого $h \in \{3, \ldots, k-1\}$, а соответствующий индекс m_p равен 3 (т.е. у формулы Z_i есть чёрная подформула вида $\varphi_3(B, \varphi_h(A, C))$, A, B, C — формулы). Заменим формулу $\varphi_{m_p}(B, \varphi_h(A, C))$ на формулу $\varphi_{m_p}(\varphi_h(B, C), A)$ и построим аналогичным образом раскрашенное дерево, соответствующее новой формуле. Заметим, что в результате этой операции общее количество зелёных вершин в дереве уменьшится, а сложность формулы не изменится. Покажем, что формулы, которые мы меняем друг на друга, реализуют одну и ту же функцию. Действительно, обе они принимают значение 3 на наборах $\tilde{\alpha}$ из E_k^{n+1}, таких что

$$A(\tilde{\alpha}) = 3, \quad B(\tilde{\alpha}) = 3, \quad C(\tilde{\alpha}) = h$$

(что следует из определения функций φ_{m_p} и φ_h), и значение 2 на всех остальных наборах. Применяя такую операцию замены подформулы к различным зелёным подформулам формулы Φ, пока это возможно, получим некоторую формулу минимальной сложности, которая реализует фунцию f_n, и у которой все зелёные подформулы тривиальны. В дальнейшем будем говорить только о таких формулах.

Покажем, что среди подформул H_p формулы Z_i встречаются только переменные из множества X, причём каждая ровно по одному разу.

Предположим, что для некоторого $p \in \{1, \ldots, s+1\}$ формула H_p имеет вид y. Рассмотрим набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, такой, что $\alpha_0 = 0$. Для этого набора имеем $H_p(\tilde{\alpha}) = 0$. Тогда из свойства 2.4 следует, что на этом наборе формула Z_i не обращается в 3. Тогда, согласно утверждению 2.2, можно заменить формулу Z_i на константу 2, причём функция, реализуемая формулой Φ не изменится. Произведём такую замену для всех подформул Z_i формулы Φ, у которых есть подформула вида y.

Если среди подформул формулы Z_j есть константа 2, то в силу равенств

$$\varphi_m(2, A) = \varphi_m(A, 2) = 2,$$

где $m \in \{3, \ldots, k-1\}$, а A — формула, получим, что формула Z_j реализует константу 2. Это значит, что либо Z_j тривиальна и равна 2, либо Φ не минимальна. Второй случай невозможен по условию леммы. Таким образом, если формула Z_j нетривиальна, то среди ее тривиальных подформул (т.е. подформул H_p) могут встречаться только переменные из множества X.

Предположим, что среди подформул формулы Z_i найдутся две одинаковые переменные из множества X, например H_p и H_q, но при этом соответствующие им индексы m_p и m_q не равны (p, $q \in \{1, \ldots, s+1\}$, $p \neq q$). Тогда ни для какого набора $\tilde{\beta}$ из E_k^{n+1} не могут одновременно выполняться соотношения

$$H_p(\tilde{\beta}) = m_p, \quad H_q(\tilde{\beta}) = m_q.$$

По свойству 2.4 при всех $\tilde{\beta} \in E^{n+1}$ имеет место соотношение $Z_i(\tilde{\beta}) = 2$. Тогда из равенства $L(\Phi) = L_{\mathfrak{A}}(f_n)$ следует, что формула Z_i тривиальна и равна 2, что неверно.

Предположим, что среди подформул формулы Z_i найдутся две одинаковые переменные из множества X, например H_p и H_q (p, $q \in \{1, \ldots, s+1\}$, $p < q$). Тогда соответствующие индексы m_p и m_q равны (другой случай уже рассмотрен). Заменим формулу $\varphi_{m_p}(B, H_p)$ на формулу B, формулу, получившуюся при такой замене из формулы Z_i, обозначим $Z_i{}'$. Покажем, что формулы Z_i и Z_i' реализуют равные функции. По свойству 2.4 формулы Z_i и Z_i' принимают значение 3 на произвольном наборе $\tilde{\beta}$, если при каждом $r = 1, \ldots, s+1$ для формулы Z_i (соответственно при каждом $r = 1, \ldots, s+1$, $r \neq p$ для формулы Z_i') верно равенство

$$H_r(\tilde{\beta}) = m_r. \tag{2.1}$$

Формулы H_p и H_q — это одна и та же переменная, индексы m_p и m_q равны. Тогда в наборе равенств (2.1) для формулы Z_i есть два одинаковых ($H_p(\tilde{\beta}) = m_p$ и $H_q(\tilde{\beta}) = m_q$), а набор равенств (2.1) для формулы Z_i' составляют те же равенства, за исключением равенства $H_p(\tilde{\beta}) = m_p$. Значит, формулы Z_i и Z_i' равны 3 на одних и тех же наборах. Согласно свойству 2.4, рассматриваемые формулы могут принимать только значения 2 и 3, следовательно, формулы Z_i и Z_i' реализуют равные функции. При этом сложность формулы Z_i' меньше, чем сложность формулы Z_i. Поскольку формула Φ минимальна, рассматриваемый случай невозможен.

Таким образом, для любой нетривиальной подформулы Z_i среди H_p встречаются только переменные из множества X, причём каждая не более одного раза.

Допустим, что найдётся тривиальная подформула Z_i формулы Φ, которая представляет собой переменную y. Тогда формула Z_i не принимает значения 3 на всех наборах $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ из E_k^{n+1}, таких, что $\alpha_0 = 0$. Следовательно, согласно свойству 2.4, можно заменить формулу Z_i на константу 2. Произведём такую замену для всех подформул Z_i формулы Φ, для которых это возможно. В результате получим, что переменная y может встречаться в формуле Φ только в качестве белой подформулы.

Тривиальная подформула Z_i формулы Φ может быть константой 2 или переменной из множества X. То есть либо все тривиальные подформулы формулы Z_i принадлежат множеству X, либо формула Z_i есть константа 2.

Покажем, что если формула Z_i не представляет собой константу 2, то в неё входят все переменные из множества X и верно неравенство $L(Z_i) \geqslant n$.

Рассмотрим произвольную формулу Z_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, содержащую хотя бы одну переменную из множества X. Пусть в неё входит $s+1$ переменная из множества X, например, $x_1, \ldots, x_{s+1}$, причём без ограничения общности для всех $1 \leqslant p \leqslant s+1$ формула H_p — это переменная x_p. Предположим, что $s+1 < n$. Тогда для набора $\tilde{\delta} = (\delta_0, \ldots, \delta_n)$, где

$$\delta_0 = 0,$$

$$\delta_1 = m_1, \ldots, \delta_{s+1} = m_{s+1},$$

$$\delta_{s+2} = \ldots = \delta_n = 2$$

(m_k — соответствующие индексы из представления формулы Z_i, $k = 1, \ldots, s+1$), согласно свойству 2.4, выполняется соотношение $Z_i(\tilde{\delta}) = 3$. По определению $f_n(\tilde{\delta}) = 0$, тогда $\Phi(\tilde{\delta}) = 0$. В соответствии со свойством 2.1 каждая белая подформула формулы Φ на этом наборе принимает значение 0. Формула Z_i является главной подформулой некоторой белой формулы $\lambda(A, Z_i)$, где A — формула. Тогда из определения функции λ верно равенство $Z_i(\delta) = 2$. Мы получили противоречие. Таким образом, в каждую из подформул Z_i, не представляющую собой константу 2, входит не менее n переменных из множества X.

Покажем, что константа 2 не может встречаться в формуле Φ.

Возьмем произвольную подформулу Z_i формулы Φ, $1 \leqslant i \leqslant N$. Если она нетривиальна, то, согласно свойству 2.4, она может принимать только значение 2 или 3. Если же она тривиальна и верно неравенство $n \geqslant 2$, то она может принимать только значение 2. Тогда из свойства 2.3 следует, что в формуле Φ можно менять местами подформулы Z_i и Z_j для произвольных i, $j \in \{1, \ldots, N\}$. Если же $n = 1$, то в минимальной формуле Φ всего одна подформула Z_i, и утверждение о возможности менять местами формулы Z_i и Z_j остаётся в силе.

Допустим, что все формулы Z_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, представляют собой константу 2. Тогда для набора $(0, 3, \ldots, 3) \in E_k^{n+1}$ из равенства $\lambda(0, 2) = 0$ получим соотношение $\Phi(0, 3, \ldots, 3) = 0$, что неверно. Значит, в формуле Φ найдётся нетривиальная подформула Z_i. Поменяем местами Z_i и Z_1 $(i \geqslant 2)$. Далее будем считать, что подформула Z_1 нетривиальна.

Пусть A — нетривиальная белая формула. Покажем, что формулы $\lambda(A, 2)$ и A реализуют одинаковые функции. Пусть $\tilde{\alpha}$ — произвольный набор из E_k^{n+1}. Если $A(\tilde{\alpha}) = 0$, то и

$$\lambda(A(\tilde{\alpha}), 2) = 0.$$

Если $A(\tilde{\alpha}) = 1$, то и

$$\lambda(A(\tilde{\alpha}), 2) = 1.$$

А если $A(\tilde{\alpha}) = 2$, то

$$\lambda(A(\tilde{\alpha}), 2) = 2.$$

Поскольку Z_1 нетривиальна, можно заменить $\lambda(A, 2)$ на A для всех подформул Z_i формулы Φ, представляющих собой константу 2. Следовательно, константа 2 не будет встречаться в качестве подформул минимальной формулы Φ.

Таким образом, показано, что среди подформул Z_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ формулы Φ нет тривиальных. Нетривиальные же содержат по крайней мере n переменных из множества X. То есть мы доказали соотношение $L(Z_i) \geqslant n$ для произвольного i, $1 \leqslant i \leqslant N$. Кроме того, поскольку во множестве X присутствуют ровно n переменных, то в каждую формулу Z_i входят все переменные из множества X.

Резюмировав доказанное, рассмотрим подформулу Z_i формулы Φ,

$1 \leqslant i \leqslant N$. Она имеет вид

$$\varphi_{m_1}(\ldots \varphi_{m_s}(H_{s+1}, H_s), \ldots, H_1).$$

Каждая формула Z_i содержит n переменных из множества X, они входят в формулу без повторений, в формулу Z_i не входят переменная y и константа 2.

Построим по формуле Z_i набор $\tilde{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Если для некоторого числа k у формулы Z_i есть подформула вида $\varphi_{m_p}(A, x_k)$, где A — формула, то положим $\theta_k = m_p$. Если для некоторого числа k у формулы Z_i есть подформула вида $\varphi_{m_s}(x_k, H_s)$, то положим $\theta_k = 3$. Так как в формуле Z_i встречаются все переменные из множества X ровно по одному разу, то такой набор по формуле Z_i определяется однозначно. Будем называть его набором, соответствующим формуле Z_i. Заметим, что он будет лежать в множестве Q_n. Из свойства 2.4 следует, что для набора $\tilde{\theta}$ выполняется равенство

$$Z_i(0, \theta_1, \ldots, \theta_n) = 3,$$

и что ни для какого другого набора из множества Q_n такое равенство выполняться не может.

Рассмотрим произвольный набор $\tilde{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ из множества Q_n. Допустим, что среди подформул Z_i не найдётся формулы, соответствующей этому набору. Тогда на наборе $\tilde{\theta}$ ни одна из подформул Z_i не обратится в 3, и, значит, в силу равенства $\lambda(0, 2) = 0$ выполняется соотношение

$$\Phi(0, \theta_1, \ldots, \theta_n) = 0,$$

что противоречит определению функции f_n. Полученное противоречие показывает, что число N не меньше, чем число способов выбрать набор $\tilde{\theta}$. Множество всех наборов длины n, состоящих из цифр $3, \ldots, k-1$, имеет мощность $(k-3)^n$. Множество всех наборов длины n, состоящих из цифр $4, \ldots, k-1$, имеет мощность $(k-4)^n$. Множество Q_n представляет собой разность этих множеств, т.е.

$$N \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n.$$

Лемма доказана. $\square$

Основная идея доказательства теоремы 2.1 в целом та же, что и в доказательстве теоремы 1.2, но имеются отличия в деталях.

Доказательство теоремы 2.1. Нижняя оценка. Пусть Φ — произвольная минимальная формула над $\mathfrak{B}$, реализующая функцию $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$; T — соответствующее этой формуле раскрашенное дерево; v_* — корень дерева T. Из утверждения 2.1 следует, что

$$Y(\Phi) = \{y\}.$$

Рассмотрим произвольную раскрашенную в белый цвет невисячую вершину v. Согласно утверждению 2.1, формула A_v имеет вид $A_v = \mu(B, C, D)$, где B, C, D — формулы. Вершины v_B и v_C раскрашены в белый цвет. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ — произвольный набор из E_k^{n+1}. Если $\alpha_0 = 2$, то в силу свойства 2.1 выполняются равенства

$$B(\tilde{\alpha}) = C(\tilde{\alpha}) = 2.$$

Пусть $\alpha_0 \neq 2$. Предположим, что выполняется неравенство $B(\tilde{\alpha}) \neq C(\tilde{\alpha})$. Тогда

$$A_v(\tilde{\alpha}) = \mu(B(\tilde{\alpha}), C(\tilde{\alpha}), D(\tilde{\alpha})) = 2.$$

Поэтому в силу свойства 2.1 имеем $\Phi(\tilde{\alpha}) = 2$, что противоречит определению функции f_n. Таким образом, $B(\tilde{\alpha}) = C(\tilde{\alpha})$ для любого набора $\tilde{\alpha} \in E_k^{n+1}$.

Будем преобразовывать формулу Φ без увеличения сложности и одновременно строить формулу G специального вида над системой $\mathfrak{A}$, реализующую функцию f_n. Пусть Φ имеет вид $\Phi = \mu(A_1, B_1, C_1)$, где A_1, B_1, C_1 —

формулы, и пусть (без ограничения общности) $L(A_1) \leqslant L(B_1)$. Положим

$$\Phi_1 = \mu(A_1, A_1, C_1),$$

$$G_1 = \lambda(A_1, C_1).$$

Очевидно, что формулы Φ_1 и G_1 реализуют функцию f_n, и выполняется неравенство $L(\Phi_1) \leqslant L(\Phi)$. Легко видеть, что A_1 — либо тривиальная формула, либо формула вида $A_1 = \mu(A_2, B_2, C_2)$, где A_2, B_2, C_2 — формулы. Во втором случае (пусть, например, $L(A_2) \leqslant L(B_2)$) положим

$$A_1^1 = \mu(A_2, A_2, C_2), \quad A_1^2 = \lambda(A_2, C_2),$$

$$\Phi_2 = \mu(A_1^1, A_1^1, C_1) = \mu(\mu(A_2, A_2, C_2), \mu(A_2, A_2, C_2), C_1),$$

$$G_2 = \lambda(A_1^2, C_1) = \lambda(\lambda(A_2, C_2), C_1).$$

Выполним над формулами A_2 аналогичные преобразования, и т. д. В конце концов после некоторого числа N преобразований мы получим формулы Φ_N над базисом $\mathfrak{B}$ и G_N над базисом $\mathfrak{A}$, реализующие функцию f_n, такие, что сложность формулы Φ_N удовлетворяет неравенству

$$L(\Phi_N) \leqslant L(\Phi),$$

а глубина — соотношению

$$D(\Phi_N) = D(G_N).$$

При этом формула G_N имеет вид

$$G_N = \lambda(\lambda(\ldots\lambda(\lambda(y_1, Z_1), Z_2), \ldots), Z_N),$$

где $Z_1, \ldots, Z_N$ — формулы над системой $\mathfrak{B}$, N натуральное, а всякая нетривиальная белая подформула формулы Φ_N имеет вид $\mu(A, A, B)$, где A, B — формулы.

Легко видеть, что формула Φ_N содержит $2^N - 1$ символов μ, а её сложность удовлетворяет неравенству

$$L(\Phi_N) \geqslant M(2^N - 1) + 2 \cdot 2^{N-1} = M(2^N - 1) + 2^N,$$

где $M = \min L(Z_i)$ (минимум берётся по всем значениям i от 1 до N). Из леммы 2.1 следует, что

$$N \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n,$$

$$M \geqslant n.$$

Поэтому

$$L(\Phi) \geqslant L(\Phi_N) \geqslant (n+1) \cdot 2^{(k-3)^n-(k-4)^n} - n.$$

Соответствующая верхняя оценка очевидна. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что в процессе доказательства также получена оценка на глубину минимальной формулы над базисом $\mathfrak{B}$, реализующей функцию f_n.

Следствие 2.1. *Пусть $k \geqslant 4$, $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\} \subseteq P_k$. Тогда при всех $n \geqslant 1$ для последовательности f_n функций k-значной логики справедливо неравенство*

$$D_{\mathfrak{B}}(f_n) \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n.$$

Для частных случаев параметра k можно сформулировать следующие следствия (упомянутые в теореме 2.1 функции переобозначены с указанием значности логики, например, функция μ в случае 5-значной логики обозначена μ^5).

Следствие 2.2. *Пусть $\mathfrak{B} = \{\mu^5, \varphi_3^5, \ldots, \varphi_{k-1}^5, 2\} \subseteq P_5$. Тогда при всех $n \geqslant 1$ для последовательности f_n^5 функций 5-значной логики верно равенство*

$$L_{\mathfrak{B}}(f_n^5) = (n+1) \cdot 2^{2^n-1} - n.$$

Следствие 2.3. *Пусть $\mathfrak{B} = \{\mu^6, \varphi_3^6, \ldots, \varphi_{k-1}^6, 2\} \subseteq P_6$. Тогда при всех $n \geqslant 1$ для последовательности f_n^6 функций 6-значной логики верно равенство*

$$L_{\mathfrak{B}}(f_n^6) = (n+1) \cdot 2^{3^n-2^n} - n.$$

2.4 Уточнение нижней оценки

Теорема 2.1 при $k \geqslant 6$ не даёт обещанной оценки на порядок роста сложности вида $2^{(k-3)^n}$, хотя и для сколь угодно малого положительного числа ε установленная величина сложности растёт быстрее, чем $2^{(k-3-\varepsilon)^n}$. Тем не менее, можно видоизменить базис $\mathfrak{B}$ таким образом, чтобы необходимая оценка была получена.

Покажем каким образом необходимо видоизменить базис и реализуемую последовательность функций, чтобы получить желаемую сложность. Для этого добавим в базис константу 3. Помимо этого, изменим последовательность реализуемых функций, заменив в определении функции f_n множество Q_n на множество $\{3, \ldots, k-1\}^n$ (изменённые функции будем называть f'_n). Заметим, что если добавить константу 3 во множество X, то все доказательства останутся истинными (кроме последнего абзаца доказательства леммы 2.1, где считается мощность множества Q_n). В формулировке же леммы 2.1 также изменится (из-за изменения множества Q_n) доказываемое равенство; изменённое равенство будет выглядеть следующим образом:

$$N \geqslant (k-3)^n.$$

Легко видеть, что при внесении в определения функций вышеописанных изменений сложность реализации последовательности функций f'_n доставит необходимую оценку.

Таким образом, получены нижние оценки порядка роста сложности вида $n2^{(k-3)^n}$ при реализации некоторой конструктивно заданной последовательности функций k-значной логики формулами над некоторым конечным неполным базисом. Воспользовавшись соображениями, описанными в конце §1.5 и нацеленными на изменение основания экспоненты, мы можем получить следующий факт.

Утверждение 2.4. *Пусть m — произвольное натуральное число. Тогда при всех $n \geqslant 1$, $k \geqslant 4$ существуют конечная система $\mathfrak{B} \subseteq P_k$ и функция k-значной логики $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$ из множества $[\mathfrak{B}]$, такие, что верно равенство*

$$L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(f_n) = (n+1) \cdot m^{(k-3)^n} - n.$$

Приняв во внимание равенство $m^{r^{n-1}} = (m^{1/r})^{r^n}$, имеем

Следствие 2.4. *Пусть m, r — произвольные натуральные числа. Тогда при всех $k \geqslant r+3$ существуют конечная система $\mathfrak{B} \subseteq P_k$ и последовательность $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ функций k-значной логики из множества $[\mathfrak{B}]$, такие, что при $n \to \infty$ выполняется соотношение*

$$L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(f_n) \gtrsim n \cdot m^{r^n}.$$

Следствие 2.5. *Пусть r — произвольное натуральное число. Тогда при всех $k \geqslant r+3$ существуют положительная константа c, конечная система $\mathfrak{B} \subseteq P_k$ и последовательность $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ функций k-значной логики из множества $[\mathfrak{B}]$, такие, что при $n \to \infty$ выполняется соотношение*

$$D_{\mathfrak{B}}(f_n) \gtrsim cr^n.$$

Глава 3

Высокие оценки сложности в бесконечных базисах

3.1 Сравнение роста сложности в конечных и бесконечных базисах для различных моделей

В данной главе исследуется задача получения высоких нижних оценок различных мер сложности реализации функций многозначной логики из замкнутых классов над бесконечными базисами, порождающими эти классы. Бесконечным базисом называется базис, содержащий функции, существенно зависящие от сколь угодно большого числа переменных.

В случае конечного полного базиса $\mathfrak{B}$ булевых функций асимптотика роста функций Шеннона $L_{\mathfrak{B}}^{\text{СФЭ}}(n)$, $L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(n)$ и $D_{\mathfrak{B}}(n)$ установлена О. Б. Лупановым [27, 28, 30]. Для всякого конечного полного базиса $\mathfrak{B}$ функция Шеннона $L_{\mathfrak{B}}^{\text{СФЭ}}(n)$ сложности реализации булевых функций схемами над этим базисом при $n \to \infty$ растёт по порядку как $2^n/n$, сложности реализации формулами $L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(n)$ — как $2^n/\log n$, а функция Шеннона глубины $D_{\mathfrak{B}}(n)$ — как n.

При переходе от конечного полного базиса к бесконечному полному базису булевых функций порядки роста введённых функций Шеннона понижаются. Из результатов О. Б. Лупанова непосредственно следует, что для любых полных базисов $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$, где $\mathfrak{B}_1$ — конечный, а $\mathfrak{B}_2$ — бесконечный, справедливы соотношения

$$L_{\mathfrak{B}_2}^{\text{СФЭ}}(n) = o(L_{\mathfrak{B}_1}^{\text{СФЭ}}(n)),$$

$$L_{\mathfrak{B}_2}^{\Phi}(n) = o(L_{\mathfrak{B}_1}^{\Phi}(n)),$$

$$D_{\mathfrak{B}_2}(n) = o(D_{\mathfrak{B}_1}(n)).$$

На самом деле О. М. Касим-Заде установлено [12, 13], что при переходе от конечных к бесконечным полным базисам булевых функций порядок роста функций Шеннона $L_{\mathfrak{B}}^{\text{СФЭ}}(n)$ и $D_{\mathfrak{B}}(n)$ меняется качественно: в случае бесконечных базисов $L_{\mathfrak{B}}^{\text{СФЭ}}(n)$ растёт по порядку как $2^{n/2}$ или медленнее, а $D_{\mathfrak{B}}(n)$ имеет порядок роста не больше $\log n$. В случае реализации функций k-значной логики при $k \geqslant 3$ для функции Шеннона глубины при переходе от конечных полных к бесконечным полным базисам имеет место аналогичное понижение порядка роста. Для любого конечного базиса $\mathfrak{B}$ функций k-значной логики ($k \geqslant 3$) функция Шеннона глубины $D_{\mathfrak{B}}(n)$ при $n \to \infty$ растёт по порядку как линейная функция (для этого случая также известна асимптотика [17]). Для бесконечных базисов многозначной логики известно [16], что функция Шеннона глубины $D_{\mathfrak{B}}(n)$ растёт по порядку не быстрее, чем $\log n$. Стоит отметить, что также известно много примеров аналогичного эффекта понижения порядков роста соответствующих функций Шеннона при переходе от конечных базисов, порождающих замкнутые классы булевых функций, к бесконечным (см., например, [58]). В принципе, есть примеры классов, в которых подобный эффект не наблюдается, например, для класса линейных функций и в случае конечного, и в случае бесконечного базиса, порождающего этот класс, функция Шеннона сложности реализации формулами растёт по порядку как n. Однако данный пример специфичен и может быть объяснён выбором функции сложности — при рассмотрении более естественной для реализации функций над бесконечными базисами меры сложности, равной количеству использований функциональных символов в формуле, сложность при переходе от конечного базиса к бесконечному также качественно уменьшается.

В связи с этим возникает вопрос о возможности получения высоких нижних оценок сложности (для всех трёх мер) над бесконечными базисами, аналогичных известным [54, 65, 109] высоким нижним оценкам сложности в конечных неполных базисах функций k-значной логики, $k \geqslant 3$.

Стоит отметить, что в случае булевых функций все замкнутые классы конечно-порождённые. Это значит, что любой бесконечный базис будет избыточным, и из него можно выделить конечную подсистему, порождающую тот же замкнутый класс. Следовательно, порядок роста при переходе от конечного базиса булевых функций к бесконечному не может увеличиться. В случае же функций многозначной логики ситуация иная. Существуют примеры замкнутых классов, не имеющих конечного базиса [84], что даёт дополнительные возможности для получения высоких нижних оценок в бесконечных базисах по сравнению с оценками в конечных базисах.

3.2 Простой пример высокой нижней оценки в бесконечном базисе

Покажем как для произвольного конечного множества функций k-значной логики и произвольной последовательности функций построить бесконечный базис функций $(k+2)$-значной логики и предъявить последовательность функций с таким же порядком роста сложности.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное конечное множество функций k-значной логики, а $\{\zeta_n\}$ — произвольная последовательность функций из класса $[\mathfrak{A}]$. Тогда существует бесконечный базис $\mathfrak{B}$ функций $(k+2)$-значной логики и последовательность функций $\{\eta_n\}$ из класса $[\mathfrak{B}]$, для которых справедливы равенства*

$$L_{\mathfrak{A}}^{\text{СФЭ}}(\zeta_n) = L_{\mathfrak{B}}^{\text{СФЭ}}(\eta_n),$$

$$L_{\mathfrak{A}}^{\Phi}(\zeta_n) = L_{\mathfrak{B}}^{\Phi}(\eta_n),$$

$$D_{\mathfrak{A}}(\zeta_n) = D_{\mathfrak{B}}(\eta_n).$$

Доказательство. Пусть $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$;

$$\mathfrak{A} = \{\varphi_1(x_1, \ldots, x_{i_1}), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_{i_m})\}$$

конечная система функций k-значной логики, а

$$\zeta_1(x_1), \zeta_2(x_1, x_2), \ldots, \zeta_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$

последовательность функций k-значной логики. Рассмотрим следующие функции $(k+2)$-значной логики:

$$\psi_i(x_1, \ldots, x_{l_i}) = \begin{cases} \varphi_i(x_1, \ldots, x_{l_i}), & \text{если } x_1, \ldots, x_{l_i} \in E_k, \\ k, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\eta_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \zeta_n(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } x_1, \ldots, x_n \in E_k, \\ k, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\mu_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} k, & \text{если } x_1 = k+1, \ldots, x_n = k+1, \\ k+1, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $i \in \{1, \ldots, m\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть

$$\mathfrak{B} = \{\psi_1, \ldots, \psi_m, \mu_1, \mu_2, \ldots\},$$

$$\mathfrak{B}' = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}.$$

Покажем, что все рассматриваемые меры сложности реализации функций ζ_n над базисом $\mathfrak{A}$ будут равны соответствующим мерам сложности реализации функций η_n над базисом $\mathfrak{B}$.

Если в некоторой формуле над системой $\mathfrak{B}$ для некоторого n есть хотя бы один элемент вида μ_n, то очевидно, что такая формула на всех наборах переменных может принимать только значения k и $k+1$. В то же время, функции η_n при некоторых значениях переменных принимают значения, отличные от этих двух. Значит, сложность реализации функций η_n над системой $\mathfrak{B}$ не изменится, если из этой системы убрать функции μ_n (тем самым получив систему $\mathfrak{B}'$).

Возьмем формулу над системой $\mathfrak{A}$, реализующую функцию $\zeta_n(x_1, \ldots, x_n)$, и для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ заменим в ней все вхождения функций $\varphi_i(A_1, \ldots, A_{l_i})$ на функции $\psi_i(A_1, \ldots, A_{l_i})$ ($A_1, \ldots, A_{l_i}$ — формулы). Очевидно, что мы получим формулу над системой $\mathfrak{B}'$, реализующую функцию $\eta_n(x_1, \ldots, x_n)$. И наоборот, если заменить все функции $\psi_1, \ldots, \psi_m$ на функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, то из формулы, реализующей функцию η_n, получим формулу, реализующую функцию ζ_n. Таким образом, доказаны следующие соотношения:

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{A}}(\zeta_n) = L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(\eta_n),$$

$$D_{\mathfrak{A}}(\zeta_n) = D_{\mathfrak{B}}(\eta_n).$$

Аналогичным рассуждением получаем, что

$$L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{A}}(\zeta_n) = L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(\eta_n).$$

□

Стоит отметить, что класс, порождённый построенным базисом $\mathfrak{B}$, является конечно-порождённым. Однако не представляет особой трудности привести аналогичный пример класса, не имеющего конечного базиса (возможно с увеличением значности логики ещё на единицу). Для этого достаточно в качестве функций μ_n взять аналог функций из примера Мучника [84].

Если в качестве $\mathfrak{A}$ взять систему функций k-значной логики из теоремы 2.1, то приведённым способом будет построен бесконечный базис, сложность реализации некоторой последовательности функций над которым растёт сверхэкспоненциальным образом. Более точно, для соответствующей последовательности $\{\eta_n\}$ функций $(k+2)$-значной логики можно привести аналогичные формулы для сложности и глубины (определения функций $\mu(x, y, z)$, $\varphi_m(x, y)$, где $m \in \{3, \ldots, k - 1\}$, и $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$, по которым определяются функции $\{\eta_n\}$, описаны в §2.1).

Следствие 3.1. *Пусть $k \geqslant 4$, $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\} \subseteq P_k$ — конечный базис, $\mathfrak{B}^{k+2} \subseteq P_{k+2}$ — соответствующий ему конечный базис функций $(k+2)$-значной логики, $\mathfrak{B}^{\infty} = \mathfrak{B}^{k+2} \cup \{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ — бесконечный базис. Тогда при всех $n \geqslant 1$ для последовательности $\{\eta_n\}$ функций $n+1$ переменной*

$(k+2)$*-значной логики справедливы равенства:*

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}^\infty}(\eta_n) = (n+1)\cdot 2^{(k-3)^n-(k-4)^n} - n,$$

$$D_{\mathfrak{B}^\infty}(\eta_n) = (k-3)^n - (k-4)^n + n - 1,$$

Если же взять в качестве $\mathfrak{A}$ систему функций трёхзначной логики из [54], то для сложности соответствующей функции пятизначной логики η_n в соответствующем бесконечном базисе $\mathfrak{B}$ можно также записать следствие.

Следствие 3.2. *Для бесконечного базиса* $\mathfrak{B}$ *и последовательности* $\{\eta_n\}$ *функций пятизначной логики справедливо равенство*

$$L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(\eta_n) = 2C_n^{[n/2]} - 1.$$

Недостаток приведённого метода состоит в том, что порождающую систему можно разделить на две практически не связанные части: одна доставляет нам необходимую оценку, а вторая обеспечивает бесконечность системы. Это делает систему сильно искусственной. Поэтому в следующем параграфе будет построен пример бесконечной системы функций с высокими нижними оценками сложности, лишённый этого и некоторых других недостатков.

3.3 Построение класса с одинаковой сверхэкспоненциальной асимптотикой сложности в конечном и бесконечном базисах

В данном параграфе будет показано как построить более интересный и содержательный пример конечного и бесконечного базисов со сверхэкспоненциальными оценками сложности. Для этого определим два базиса функций k-значной логики ($k \geqslant 5$): конечный $\mathfrak{B}$ и бесконечный $\mathfrak{C}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $[\mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}]$ (и, следовательно, класс $[\mathfrak{C}]$ конечно порождён);

2) функции Шеннона глубины и сложности реализации формулами над этими базисами асимптотически равны (и растут не медленнее, чем экспоненциально и, соответственно, сверхэкспоненциально);

3) каждая функция базиса $\mathfrak{C}$ используется хотя бы в одной минимальной формуле, реализующей функцию, на которой достигается значение функций Шеннона.

Вышеописанный пример будет основываться на примере из теоремы 2.1. Напомним, что через Q_n обозначается множество всех наборов из E_k^n, состоящих только из символов $3, \ldots, k-1$, причем хотя бы один символ тройки должен быть обязательно. Также напомним определения функций $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y, z)$, $\varphi_m(x, y)$, где $m \in \{3, \ldots, k-1\}$, а также функции f_n, которую для удобства переобозначим в $\zeta_n(y, x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0,\ y = 2; \\ 1, & \text{если } x = 0,\ y = 3,\ \text{или если } x = 1; \\ 2, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} \lambda(x, z), & \text{если } x = y; \\ 2, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\varphi_m(x, y) = \begin{cases} 3, & \text{если } x = 3,\ y = m; \\ 2, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\zeta_n(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0,\ (x_1, \ldots, x_n) \notin Q_n; \\ 1, & \text{если } y = 0,\ (x_1, \ldots, x_n) \in Q_n,\ \text{или если } y = 1; \\ 2, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Согласно теореме 2.1, для сложности реализации функции k-значной логики ζ_n ($n \geqslant 1$, $k \geqslant 4$) формулами над базисом

$$\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\}$$

выполняется равенство

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(\zeta_n) = (n+1) \cdot 2^{(k-3)^n - (k-4)^n} - n.$$

Именно базис $\mathfrak{B}$ будет взят в качестве конечного в доказываемом утверждении, а последовательность функций ζ_n даст необходимую оценку функций Шеннона сложности и глубины.

При доказательстве теоремы 2.1 установлено, что любая формула F, реализующая функцию ζ_n, устроена строго определённым образом. А именно, формула F получается из некоторой формулы

$$G = \lambda(\lambda(\ldots\lambda(\lambda(y, Z_1), Z_2), \ldots), Z_N), \tag{$*$}$$

где $Z_1, \ldots, Z_N$ — формулы над базисом $\mathfrak{B}$, N — натуральное, заменой всех подформул вида $\lambda(A, B)$ формулами $\mu(A, A, B)$. Во всех минимальных формулах над базисом $\mathfrak{B}$, реализующих функцию ζ_n, подформулы Z_i также устроены строго определённым образом: они все имеют вид

$$\varphi_{m_1}(\ldots\varphi_{m_s}(H_{s+1}, H_s), \ldots, H_1),$$

где $H_1, \ldots, H_{s+1}$ — различные переменные из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$; каждая переменная из этого множества встречается в формуле Z_i как минимум один раз. Кроме того, установлено, что количество N таких подформул Z_i в формуле, реализующей функцию ζ_n, удовлетворяет соотношению

$$N \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n.$$

Теперь зафиксируем некоторое k и построим базис $\mathfrak{C} \subseteq P_k$ (где P_k — множество функций k-значной логики). Для этого возьмём базис $\mathfrak{B} \subseteq P_k$

и для всех натуральных n для всех минимальных формул над системой $\mathfrak{B}$ для функций ζ_n для всех подформул Z_i из $(*)$ добавим в базис функции, реализуемые формулами Z_i (то есть все функции вида

$$\varphi_{m_1}(\ldots\varphi_{m_s}(H_{s+1},H_s),\ldots,H_1),$$

где $H_1,\ldots,H_{s+1}$ — различные переменные из множества $x_1,\ldots,x_n$). Получается, что бесконечный базис $\mathfrak{C}$ порождает тот же замкнутый класс, что и базис $\mathfrak{B}$, и при реализации функций ζ_n каждая функция базиса используется хотя бы в одной минимальной формуле (минимальные формулы в базисе $\mathfrak{C}$ — это те же самые формулы, которые являются минимальными в базисе $\mathfrak{B}$, с возможной заменой подформул над $\{\varphi_3,\ldots,\varphi_{k-1}\}$ имеющейся в базисе функцией их суперпозиции). При сопоставлении формуле над базисом $\mathfrak{C}$ рёбра и вершины раскрасим естественным способом. Для вершин, соответствующих формулам вида $\lambda(B,C)$, $\mu(B',C',D')$ или $\varphi_m(B'',C'')$, где B,C,B',C',D',B'',C'' — формулы, рёбра к вершинам, соответствующим их главным подформулам, раскрасим так же, как и в предыдущей главе: рёбра к вершинам $v_B,v_{B'},v_{C'}$ в белый цвет, к вершинам $v_C,v_{D'},v_{B''}$ в чёрный цвет, а к вершине $v_{C''}$ — в зелёный. Если же вершина v соответствует формуле, имеющей вид $\Psi(B_1,\ldots,B_t)$, где $B_1,\ldots,B_t$ — формулы, а Ψ — суперпозиция функций φ_m вышеописанного вида, то ребро (v,v_{B_1}) раскрасим в чёрный цвет, а рёбра $(v,v_{B_2}),\ldots,(v,v_{B_t})$ — в зелёный. Принцип раскраски вершин оставим без изменения. Корень v_* раскрашивается в белый цвет, вершины, отличные от корня, раскрашиваются в белый цвет, если все рёбра цепи, соединяющей их с корнем, раскрашены в белый цвет, в чёрный, если все рёбра цепи, соединяющей их с корнем, раскрашены в белый или чёрный цвет, причём чёрные рёбра есть обязательно, а все остальные вершины раскрашиваются в зелёный цвет.

Заметим, что свойства 2.1, и 2.3, а также утверждение 2.1, остаются верны даже после замены базиса $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{C}$ (эти утверждения формулировались для формул над базисом $\mathfrak{A}$, но, очевидно, верны и для формул над базисом $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$). В свойстве 2.4 и утверждении 2.2 фактически никакого значения не имеет формулы над каким базисом рассматриваются, а важен лишь описанный в формулировке вид формулы, так что эти факты также без изменений переносятся на случай формул над базисом $\mathfrak{C}$. Кроме того, руководствуясь свойством 2.4, становится понятно, что доказательство аналога свойства 2.2 будет также верно. Утверждение 2.3 же при переходе к формулам над базисом $\mathfrak{C}$ незначительно изменит формулировку: из приведённого доказательства следует, что каждая нетривиальная чёрная подформула формулы Φ имеет вид либо $\varphi_m(F, G)$, либо $\Psi(F_1, \ldots, F_t)$, где $m \in \{3, \ldots, k-1\}$; $F, G, F_1, \ldots, F_t$ — формулы, а Ψ — суперпозиция функций φ_m, присутствующая в $\mathfrak{C}$ в качестве базисной функции.

Таким образом, формулы над базисом $\mathfrak{C}$ будут всё так же иметь особенности строения, доказанные для формул над базисом $\mathfrak{B}$. Это значит, что справедливо следующее утверждение (определения функций $\mu(x, y, z)$, $\varphi_m(x, y)$, где $m \in \{3, \ldots, k - 1\}$, и $\zeta_n(y, x_1, \ldots, x_n)$ описаны в начале данного параграфа).

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\}$ *— конечный базис функций k-значной логики ($k \geqslant 5$), а $\mathfrak{C}$ — бесконечный базис функций k-значной логики ($k \geqslant 5$), получающийся объединением базиса $\mathfrak{B}$ и множества всех функций, реализуемых формулами вида $\varphi_{m_1}(\ldots \varphi_{m_s}(x_{s+1}, x_s), \ldots, x_1)$ для всех натуральных значений числа s. Тогда для любого $n \geqslant 1$ для функции k-значной логики ζ_n от $n+1$ переменной справедливо равенство*

$$L_{\mathfrak{C}}^{\Phi}(\zeta_n) = (n+1) \cdot 2^{(k-3)^n - (k-4)^n} - n.$$

Отметим, что для глубины рассматриваемых функций можно записать соответствующие соотношения:

$$D_{\mathfrak{B}}(\zeta_n) = (k-3)^n - (k-4)^n + n - 1,$$

$$D_{\mathfrak{C}}(\zeta_n) = (k-3)^n - (k-4)^n + 1.$$

Кроме того, в замкнутом классе $[\mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}]$ функции Шеннона глубины и сложности реализации формулами над базисом $\mathfrak{B}$ асимптотически равны соответствующим функциям Шеннона для формул над базисом $\mathfrak{C}$.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\}$ — конечный базис функций k-значной логики ($k \geqslant 5$), а $\mathfrak{C}$ — бесконечный базис функций k-значной логики ($k \geqslant 5$), получающийся объединением базиса $\mathfrak{B}$ и множества всех функций, реализуемых формулами вида $\varphi_{m_1}(\ldots \varphi_{m_s}(x_{s+1}, x_s), \ldots, x_1)$ для всех натуральных значений числа s. Тогда имеют место следующие равенства:*

$$D_{\mathfrak{B}}(n) \sim D_{\mathfrak{C}}(n),$$

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(n) \sim L^{\Phi}_{\mathfrak{C}}(n).$$

Для начала отметим несколько очевидных свойств формул над базисом $\mathfrak{B}$.

Свойство 3.1. *Если в некоторой формуле функция μ подаётся на вход функции φ_m для некоторого m, то при замене этой функции μ константой 2 реализуемая формулой функция не изменится.*

Свойство 3.2. *Если в некоторой формуле функция φ_m для некоторого m подаётся на вход функции μ не в качестве последнего аргумента, то при замене этой функции φ_m константой 2 реализуемая формулой функция не изменится.*

Свойство 3.3. *Для произвольных формул A и B справедливы равенства:*

$$\varphi_m(A, 2) = \varphi_m(2, A) = 2,$$

$$\mu(2, A, B) = \mu(A, 2, B) = 2,$$

Доказательство. Действительно, вышеописанные свойства напрямую следуют из определений функций μ и φ_m, $m \in \{3, \ldots, k-1\}$. $\square$

Доказательство теоремы. Таким образом, для всех функций из класса $[\mathfrak{B}]$ минимальные формулы могут иметь один из следующих видов:

- формула, представляющая собой константу 2;
- формула над системой $\{\varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}\}$;
- формула, в которых все чёрные подформулы имеют один из двух предыдущих видов, а каждая белая подформула либо имеет вид $\mu(A, B, C)$ (где A, B, C — формулы), либо является переменной.

Очевидно также, что минимальная формула второго вида имеет сложность, не превышающую количество существенных переменных реализуемой функции. Также из теоремы 2.1 следует, что для некоторых функций существуют минимальные формулы третьего вида, сложность которых растёт сверхэкспоненциальным образом от числа переменных.

Аналогичные свойства будут справедливы и для базиса $\mathfrak{C}$ (мы добавили в базис только комбинации уже имеющихся функций), и минимальные формулы также будут иметь один из вышеперечисленных видов (с поправкой на то, что наряду с функциями $\{\varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}\}$ присутствуют и их суперпозиции). А это значит, что для любой функции из класса $[\mathfrak{B}]$ по любой её минимальной формуле над базисом $\mathfrak{C}$ очевидным образом получается минимальная формула для этой же функции над базисом $\mathfrak{B}$. А, поскольку с точки зрения функции Шеннона нас, очевидно, интересуют функции третьего вида, можно сделать вывод, что асимптотика функций Шеннона в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ будет одинаковой. $\square$

Рассуждение из доказательства теоремы 3.3 в совокупности с построением базиса $\mathfrak{C}$ и утверждением теоремы 3.2 доказывают утверждение, анонсированное в начале данного параграфа, формулирующееся следующим образом (определения функций $\mu(x, y, z)$ и $\varphi_m(x, y)$, где $m \in \{3, \dots, k - 1\}$, описаны в начале данного параграфа).

Теорема 3.4. *Пусть $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \dots, \varphi_{k-1}, 2\}$ — конечный базис функций k-значной логики ($k \geqslant 5$), а $\mathfrak{C}$ — бесконечный базис функций k-значной логики ($k \geqslant 5$), получающийся объединением базиса $\mathfrak{B}$ и множества всех функций, реализуемых формулами вида $\varphi_{m_1}(\dots \varphi_{m_s}(x_{s+1}, x_s), \dots, x_1)$ для всех натуральных значений числа s. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $[\mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}]$ *(и, следовательно, класс $[\mathfrak{C}]$ конечно порождён);*

2) *функции Шеннона глубины и сложности реализации формулами над этими базисами асимптотически равны (и растут не медленнее, чем экспоненциально и, соответственно, сверхэкспоненциально):*

$$D_{\mathfrak{B}}(n) \sim D_{\mathfrak{C}}(n) \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n,$$

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(n) \sim L^{\Phi}_{\mathfrak{C}}(n) \geqslant n 2^{(k-3)^n - (k-4)^n};$$

3) *каждая функция базиса $\mathfrak{C}$ используется хотя бы в одной минимальной формуле, реализующей функцию, на которой достигается значение функции Шеннона (как сложности реализации формулами, так и глубины).*

Таким образом, приведён пример конечно-порождённого класса, а также конечного и бесконечного базисов, его порождающих, для которых совпадают асимптотики роста функций Шеннона глубины и сложности реализации формулами.

Отметим, что при рассмотрении меры сложности $L'(\Phi)$ формулы Φ, равной количеству функциональных символов в формуле, асимптотика функции Шеннона сложности при переходе от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{C}$ уменьшится в n раз, но всё ещё будет расти сверхэкспоненциальным образом. Асимптотика функции Шеннона глубины не изменится при рассмотрении другой меры сложности.

Приведённый пример показывает, что даже для замкнутых классов с таким высоким порядком роста сложности функций Шеннона удаётся сохранить асимптотику при переходе к бесконечному базису. Полученные классы, очевидно, являются конечно-порождёнными. Однако для случая замкнутых классов, не являющихся конечно-порождёнными, можно достичь даже более высоких асимптотик роста функций Шеннона, чем у известных [54, 65, 109] соответствующих нижних оценок в случае конечно-порождённых классов. В следующих параграфах пример таких классов будет приведён.

3.4 Высокие оценки глубины функций трёхзначной логики из классов, не имеющих конечного базиса

Построим замкнутые классы функций многозначной логики, не являющиеся конечно-порождёнными, в которых для всех типов рассматриваемых функций Шеннона при соответствующем выборе базиса (очевидно, бесконечного) будут справедливы нижние оценки с более высоким порядком роста, чем у известных [54, 65, 109] соответствующих нижних оценок в случае конечно-порождённых классов.

Пусть $\varphi(x)$ — функция трёхзначной логики, принимающая значение 1 при $x = 2$ и значение 0 в остальных случаях. Пусть $\Omega(\tilde{x})$ — отображение из E_3^n в E_2^n, которое набору $(x_1, \ldots, x_n)$ сопоставляет набор $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$. Пусть $\tilde{\alpha}$ — набор из E_2^n. Определим функцию $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}(y, x_1, \ldots, x_n)$ из P_3 следующим образом.

$$\lambda^3_{\tilde\alpha}(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0 \text{ и } \Omega(\tilde x) \neq \tilde\alpha, \text{ или если } y = 2, \\ 1, & \text{если } y = 1, \text{ или если } y = 0 \text{ и } \Omega(\tilde x) = \tilde\alpha; \end{cases}$$

Покажем, что для формул специального вида справедливы определённые свойства.

Свойство 3.4. *Пусть формула F выглядит следующим образом:*

$$F = \lambda^3_{\tilde\alpha}(A_0, \ldots, A_n),$$

где $A_0, \ldots, A_n$ — формулы, и для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ формула A_i имеет вид

$$A_i = \lambda^3_{\tilde\beta}(B_0, \ldots, B_l).$$

Тогда при замене формулы A_i на константу 0 функция, реализуемая формулой F, не изменится.

Доказательство. Действительно, формула A_i принимает значения 0 и 1. При этом равенство $\varphi(x_i) = \alpha_i$ выполняется при $x_i = 1$ тогда и только тогда, когда оно выполняется и при $x_i = 0$. А, значит, при замене формулы A_i константой 0 значение формулы F не изменится. □

Свойство 3.5. *Пусть формула*

$$F = \lambda^3_{\tilde\alpha}(0, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}),$$

где $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$, реализует константу 0. Тогда верно равенство

$$\lambda^3_{\tilde\alpha}(\lambda^3_{\tilde\beta}(A_0, \ldots, A_l), x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) = \lambda^3_{\tilde\beta}(A_0, \ldots, A_l)$$

(где $A_0, \ldots, A_l$ — формулы).

Доказательство. Действительно, если на некотором наборе формула $\lambda^3_{\tilde\beta}(A_0, \ldots, A_l)$ принимает значение 1, то и формула

$$\lambda^3_{\tilde\alpha}(\lambda^3_{\tilde\beta}(A_0, \ldots, A_l), x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$$

также принимает значение 1. А если на этом наборе формула $\lambda^3_{\tilde{\beta}}(A_0, \ldots, A_l)$ равна нулю, то в силу тождества $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}(0, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \equiv 0$ имеем

$$\lambda^3_{\tilde{\alpha}}(\lambda^3_{\tilde{\beta}}(A_0, \ldots, A_l), x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) = 0$$

на этом наборе. Значение 2 ни одна из этих формул принимать не может. $\square$

Пусть

$$R_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_2^n.$$

Из свойства 3.4 следует, что в семействе формул над базисом, состоящим из константы 0 и функций $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}$, где $\tilde{\alpha} \in R_2$, в минимальных по сложности фомулах все подформулы могут иметь нетривиальные подформулы только в качестве первого аргумента. То есть в таких базисах все минимальные формулы «вытянуты в цепочку».

Определим функции трёхзначной логики $\zeta^3_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, следующим образом. Функция ζ^3_n принимает значение 0, если среди её аргументов чётное количество двоек, и значение 1, если нечётное. Докажем следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathfrak{A}_3$ — неполный бесконечный базис функций трёхзначной логики, определяемый следующим соотношением:*

$$\mathfrak{A}_3 = \{0\} \cup \{\lambda^3_{\tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in R_2\},$$

где $R_2 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_2^n$. Тогда для функции трёхзначной логики ζ^3_n, $n \geqslant 1$, выполняется равенство

$$D_{\mathfrak{A}_3}(\zeta^3_n) = 2^{n-1}.$$

Доказательство. Для начала отметим, что $\zeta^3_n \in [\mathfrak{A}_3]$. В процессе доказательства формула над $\mathfrak{A}_3$, реализующая указанную функцию, будет естественным образом получена.

Пусть формула F реализует функцию ζ_n^3. Если у некоторой её подформулы есть нетривиальные подформулы не в качестве первого аргумента, то заменим их на константу 0. Согласно свойству 3.4, реализуемая формулой функция от этого не поменяется, а глубина и сложность не увеличатся. В дальнейшем считаем, что у всех подформул все аргументы, кроме первого, тривиальны.

Итак, формула F имеет вид

$$\begin{aligned} F &= \lambda^3_{\tilde{\alpha}_1}(A_{1,0}, A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}), \\ A_{1,0} &= \lambda^3_{\tilde{\alpha}_2}(A_{2,0}, A_{2,1}, \ldots, A_{2,m_2}), \\ &\ldots \\ A_{d-1,0} &= \lambda^3_{\tilde{\alpha}_d}(A_{d,0}, A_{d,1}, \ldots, A_{d,m_d}), \end{aligned} \tag{$**$}$$

где $A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}, \ldots, A_{d,1}, \ldots, A_{d,m_d}$ и $A_{d,0}$ — тривиальные формулы.

Из определения функций $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}$ следует, что если на некотором наборе формула $A_{i,0}$ ($i \in \{1, \ldots, d\}$) принимает значение 1, то и формула F на нём также принимает значение 1. Также из определения следует, что если на некотором наборе формула F принимает значение 0, то и для всех $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ формулы $A_{i,0}$ также принимают значение 0.

Пусть формула $A_{d,0}$ имеет вид x_i для некоторого i. Тогда на наборе $(1, 1, \ldots, 1)$ функция $\zeta_n^3(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 0, а формула F — значение 1. Следовательно, $A_{d,0}$ представляет из себя константу 0.

Рассмотрим формулы

$$B_1 = \lambda^3_{\tilde{\alpha}_1}(0, A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}),$$

$$\ldots$$

$$B_d = \lambda^3_{\tilde{\alpha}_d}(0, A_{d,1}, \ldots, A_{d,m_d}).$$

Если какая-нибудь из них реализует константу 0, то, согласно свойству 3.5, можно выкинуть соответствующую ей подформулу из соответствующей «цепочки» (**). При этом реализуемая функция не изменится, глубина формулы не увеличится, а сложность уменьшится. Проделаем такую операцию со всеми подформулами, реализующими ноль. Далее будем считать, что все формулы B_i не реализуют константу 0, а, значит, равны единице на некотором наборе (значения 2 они принимать не могут). Для формулы B_i обозначим такой набор $\tilde{\sigma}_i$. Заметим, что в силу показанных ранее соотношений формула F на всех наборах $\tilde{\sigma}_i$ $(i = 1, \ldots, d)$, принимает значение 1.

Пусть найдутся такие числа i и j, что в формулу B_i не входит переменная x_j $(i \in \{1, \ldots, d\},\ j \in \{1, \ldots, n\})$. Тогда в наборе $\tilde{\sigma}_i$ заменим j-ю компоненту: если она равнялась двум, то заменим её нулём, а если нет, то заменим её двойкой. В результате получим набор $\tilde{\sigma}_i'$. С одной стороны, у этого набора и у набора $\tilde{\sigma}_i$ разная чётность количества двоек, и, следовательно, функция ζ_n^3 принимает на них разные значения. С другой стороны, эти наборы отличаются только в j-й компоненте. А так как переменная x_j не входит в формулу B_i, то $B_i(\tilde{\sigma}_i) = B_i(\tilde{\sigma}_i')$. Значит, $B_i(\tilde{\sigma}_i') = 1$ и $F(\tilde{\sigma}_i') = 1$. Полученное противоречие показывает, что во всех формулах B_i присутствуют все переменные $x_1, \ldots, x_n$ в качестве подформул.

Согласно определению функции $\lambda_{\tilde{\alpha}}^3$, все наборы, на которых формула B_i принимает значение 1, отображением Ω переводятся в один и тот же набор из P_2 (если переменные упорядочены и встречаются по одному разу, то этот набор — $\tilde{\alpha}$). Рассмотрим все наборы, на которых функция ζ_n^3 принимает значение 1. При отображении Ω эти наборы перейдут в 2^{n-1} наборов из P_2. Принимая во внимание то, что для равенства формулы F единице на некотором наборе необходимо, чтобы на этом наборе хотя бы одна из формул B_i принимала значение 1, получаем, что количество d формул B_i удовлетворяет неравенству $d \geqslant 2^{n-1}$.

В качестве примера формулы глубины 2^{n-1}, реализующей функцию ζ_n^3, можно привести следующую: $m_1 = \ldots = m_d = n$, $A_{i,j} = x_j$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, а $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_d$ — это все наборы длины n с чётным количеством единиц. $\square$

Заметим также, что сложность реализации функции схемами над некоторым базисом не меньше глубины этой функции над этим базисом. Поэтому приведённая выше формула доставляет пример минимальной схемы над базисом $\mathfrak{A}_3$ для функции ζ_n^3, т. е. справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.3. *Пусть $\mathfrak{A}_3$ — неполный бесконечный базис функций трёхзначной логики, определяемый следующим соотношением:*

$$\mathfrak{A}_3 = \{0\} \cup \{\lambda_{\tilde{\alpha}}^3 \mid \tilde{\alpha} \in R_2\},$$

где $R_2 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_2^n$. Тогда для функций трёхзначной логики $\zeta_n^3(x_1, \ldots, x_n)$ при всех $n \geqslant 1$ выполняется равенство

$$L_{\mathfrak{A}_3}^{СФЭ}(\zeta_n^3) = 2^{n-1}.$$

Полученное значение сложности превосходит максимальные известные конструктивные нижние оценки, известные [54] для случая конечных базисов и имеющие порядок роста вида $2^n/\sqrt{n}$.

3.5 Высокие оценки сложности функций четырёхзначной логики из классов, не имеющих конечного базиса

Покажем как на основе примера функций из теоремы 3.5 построить бесконечный базис в P_4 и последовательность функций, сложность реализации которых формулами над этим базисом растёт сверхэкспоненциально (и быстрее известной рекордно высокой нижней оценки А. Б. Угольникова из [65] для реализации функций 4-значной логики из конечно-порождённых классов).

Пусть $\varphi(x)$ — функция четырёхзначной логики, принимающая значение 1 при $x = 2$ и значение 0 в остальных случаях. Пусть $\Omega(\tilde{x})$ — отображение из E_4^n в E_2^n, которое набору $(x_1, \ldots, x_n)$ сопоставляет набор $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$. Пусть $\tilde{\alpha}$ — набор из E_2^n. Определим функции $\lambda_{\tilde{\alpha}}^4(y, x_1, \ldots, x_n)$ и $\mu_{\tilde{\alpha}}(x_1, \ldots, x_{n+2})$ из P_4 следующим образом:

$$\lambda_{\tilde{\alpha}}^4(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \lambda_{\tilde{\alpha}}^3(y, x_1, \ldots, x_n), & \text{если } (y, x_1, \ldots, x_n) \in E_3^n, \\ 3, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{\alpha}}(x_1, \ldots, x_{n+2}) = \begin{cases} 3, & \text{если } x_i = 3 \text{ для некоторого} \\ & i \in \{1, \ldots, n+2\}, \text{ или если } x_1 \neq x_2, \\ \lambda_{\tilde{\alpha}}^4(x_2, \ldots, x_{n+2}), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определим последовательность функций четырёхзначной логики $\zeta_n^4(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, следующим образом. Если среди аргументов функции есть хотя бы одна тройка, то она принимает значение 3. Если же нет, то функция ζ_n^4 принимает значение 0, если среди её аргументов чётное количество двоек, и значение 1, если нечётное. Рассмотрим неполный бесконечный базис

$$\mathfrak{A}_4 = \{0\} \cup \{\mu_{\tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in R_2\}.$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 3.6. *Пусть $\mathfrak{A}_4$ — неполный бесконечный базис функций четырёхзначной логики, определяемый следующим соотношением:*

$$\mathfrak{A}_4 = \{0\} \cup \{\mu_{\tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in R_2\},$$

где $R_2 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_2^n$. Тогда для функции четырёхзначной логики ζ_n^4, $n \geqslant 1$, верно равенство

$$L_{\mathfrak{A}_4}^{\Phi}(\zeta_n^4) = n \cdot 2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}-1} - n.$$

Доказательство. Отметим, что функция ζ_n^4 лежит в замыкании системы $\mathfrak{A}_4$, и соответствующая формула для неё будет построена в процессе доказательства.

Очевидно, что если каждая переменная участвует в построении формулы, то условие равенства формулы тройке на всех наборах, содержащих тройку, выполняется всегда. Заметим также, что если какая-то подформула на некотором наборе принимает значение 3, то и вся формула на этом наборе также принимает значение 3. Это следует из определения функций $\mu_{\tilde{\alpha}}$.

Пусть F — формула над системой $\mathfrak{A}_4$, реализующая функцию $\zeta_n^4(x_1, \ldots, x_n)$. Преобразуем формулу F без увеличения её сложности и глубины, и одновременно построим по формуле F формулу G специального вида. Изначально возьмём $G = F$. Пусть формула F имеет вид

$$A = \mu_{\tilde{\alpha}}(A_1, \ldots, A_{n+2})$$

(для некоторого $\tilde{\alpha}$). На всех наборах, не содержащих троек, формулы A_1 и A_2 принимают одинаковые значения. Пусть без ограничения общности

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{A}_4}(A_1) \geqslant L^{\Phi}_{\mathfrak{A}_4}(A_2).$$

Тогда в формуле F заменим A выражением

$$\mu_{\tilde{\alpha}}(A_2, A_2, \ldots, A_{n+2}),$$

а в формуле G выражением

$$\lambda^4_{\tilde{\alpha}}(A_2, \ldots, A_{n+2}).$$

На наборах, не содержащих троек, значение формул от такой замены не поменяется. Далее проведём подобную замену для всех подформул формулы F (и, соответственно, G), затем для всех их подформул, и так далее, пока формула G не перестанет содержать функции вида $\mu_{\tilde{\alpha}}$ (для всех возможных наборов $\tilde{\alpha}$).

Теперь заметим, что поскольку получившиеся формулы на всех наборах, не содержащих троек, принимают значения, равные значениям ζ_n^4 на этих же наборах, и притом значения на этих наборах зависят от всех переменных, то в формулы F и G каждая переменная входит в качестве подформулы. А это значит, что и на всех наборах, содержащих тройки, значения получившихся формул и функции ζ_n^4 также равны. Теперь заметим, что при ограничении на наборы без троек формула G реализует ранее определённую функцию трёхзначной логики, и, следовательно, её глубина не меньше, чем 2^{n-1}. Очевидно, что у формулы F глубина будет такой же, а сложность будет удовлетворять соотношению

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{A}_4}(F) = n(2^{D_{\mathfrak{A}_4}(F)} - 1) + 2^{D_{\mathfrak{A}_4}(F)-1} = n \cdot 2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}-1} - n.$$

Пример формулы G, для которой полученная оценка достигается, такой же, как и в теореме 3.5. Формула F получается из неё тривиальной заменой $\lambda^4_{\tilde{\alpha}}(A_1, \ldots, A_{n+1})$ на $\mu_{\tilde{\alpha}}(A_1, A_1, A_2, \ldots, A_{n+1})$. Легко видеть, что построенная таким образом формула реализует функцию ζ_n^4 $\square$

Отметим, что установленный в теореме 3.6 рост сложности реализации последовательности функций ζ_n^4 формулами над бесконечным базисом $\mathfrak{A}_4$, порождающий замкнутый класс в P_4, не имеющий конечного базиса, превосходит известную [65] рекордную оценку сложности реализации последовательности функций над конечным базисом в P_4, имеющую вид

$$2^{C_n^{[n/2]}}([n/2] + 1) - [n/2].$$

Также отметим, что при рассмотрении меры сложности $L'(\Phi)$ формулы Φ, равной количеству функциональных символов в формуле, сложность реализации функции ζ_n^4 составит $2^{2^{n-1}} - 1$:

$$L'^{\Phi}_{\mathfrak{A}_4}(\zeta_n^4) = 2^{2^{n-1}} - 1.$$

Конструкции из доказательств теоремы 3.5 (для функций трёхзначной логики) и теоремы 3.6 (для функций четырёхзначной логики) могут быть естественным образом обобщены на случай функций k-значной логики для бо́льших значений k.

Утверждение 3.1. *Для произвольных чисел k и n, таких что $k > 3$, $n \geqslant 1$, существует пример замкнутого класса функций k-значной логики, не имеющего конечного базиса, и последовательности лежащих в нём функций ϑ_3 от n переменных, глубина и сложность реализации схемами которых над некоторым бесконечным базисом $\mathfrak{B}_3$, порождающим этот класс, удовлетворяют следующим равенствам.*

$$D_{\mathfrak{B}_3}(\vartheta_3^{(n)}) = (k-1)^{n-1},$$

$$L_{\mathfrak{B}_3}^{\text{СФЭ}}(\vartheta_3^{(n)}) = (k-1)^{n-1}.$$

Утверждение 3.2. *Для произвольных чисел k и n, таких что $k > 4$, $n \geqslant 1$, существует пример замкнутого класса функций k-значной логики, не имеющего конечного базиса, и последовательности лежащих в нём функций ϑ_4 от n переменных, сложность реализации которых формулами над некоторым бесконечным базисом $\mathfrak{B}_4$, порождающим этот класс, удовлетворяет следующему равенству.*

$$L_{\mathfrak{B}_4}^{\Phi}(\vartheta_4^{(n)}) = n \cdot 2^{(k-2)^{n-1}} + 2^{(k-2)^{n-1}-1} - n.$$

Заключение

Кратко сформулируем полученные в настоящей работе результаты.

В главе 1 предложен метод получения нижних оценок сложности реализации конструктивно заданных функций десятизначной логики формулами над некоторым неполным базисом, превосходящих величину 2^{3^n}, где n — число переменных у функции (**теорема 1.2**).

В главе 2 для любого $r \geqslant 1$ при $k(r) = r + 3$ в явном виде построен неполный базис и последовательность $f_n(y, x_1, \ldots, x_n)$ функций из $P_{k(r)}$, сложность которых превосходит 2^{r^n} (**теорема 2.1**). В обоих вышеупомянутых результатах приведена также точная формула для сложности указанных функций.

В главе 3 показано как для любого конечного базиса функций k-значной логики и произвольной последовательности функций, реализуемых над этим базисом, построить пример бесконечного базиса функций $(k + 2)$-значной логики и предъявить последовательность функций с такой же глубиной и сложностью реализации (как формулами, так и схемами из функциональных элементов) над этим базисом (**теорема 3.1**). Также в этой главе приведён пример двух базисов функций k-значной логики ($k \geqslant 5$): конечного $\mathfrak{B}$ и бесконечного $\mathfrak{C}$, и доказано, что для них справедливы следующие условия (**теорема 3.4**):

1) $[\mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}]$ (и, следовательно, класс $[\mathfrak{C}]$ конечно порождён);

2) функции Шеннона глубины и сложности реализации формулами над этими базисами асимптотически равны (и растут не медленнее, чем экспоненциально и, соответственно, сверхэкспоненциально):

$$D_{\mathfrak{B}}(n) \sim D_{\mathfrak{C}}(n) \gtrsim (k-3)^n - (k-4)^n,$$

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(n) \sim L^{\Phi}_{\mathfrak{C}}(n) \gtrsim n2^{(k-3)^n-(k-4)^n};$$

3) каждая функция базиса $\mathfrak{C}$ используется хотя бы в одной минимальной формуле, реализующей функцию, на которой достигается значение функций Шеннона.

Помимо этого в главе построен пример бесконечного базиса и последовательности функций трёхзначной логики, глубина (и сложность в классе схем из функциональных элементов) реализации которых над этим базисом растёт как 2^{n-1} (**теорема 3.5**, **следствие 3.3**). После этого построен бесконечный базис и последовательность функции четырёхзначной логики, сложность реализации которой формулами над этим базисом равняется $n\cdot 2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}-1} - n$ (**теорема 3.6**).

Дальнейшие исследования могут проходить в следующих направлениях.

- Распространение продемонстрированных методов получения нижних оценок сложности на случай функций k-значной логики ($k \geqslant 3$) для меньших значений k.
- Исследование возможности существования конечной системы $\mathfrak{A}$ функций из P_3 и последовательности функций $f_n(x_1, \ldots, x_n)$, таких, что сложность реализации функций f_n над системой $\mathfrak{A}$ растёт сверхэкспоненциальным образом.
- Изучение возможности существования для некоторого k конечной системы $\mathfrak{A}$ функций из P_k и последовательности функций $f_n(x_1, \ldots, x_n)$, таких,

что сложность реализации функций f_n над системой $\mathfrak{A}$ растёт быстрее «двойной экспоненты» от числа переменных (т.е. быстрее m^{r^n} для всех значений m и r).

– Исследование существования для некоторого k конечной системы $\mathfrak{A}$ функций из P_k и последовательности функций $f_n(x_1, \ldots, x_n)$, таких, что минимальная глубина формулы над $\mathfrak{A}$, реализующей функцию f_n, растёт сверхэкспоненциально, т.е. $\log D(f_n)/n \to \infty$.

Литература

[1] Андреев А. Е. Об одном методе получения нижних оценок сложности индивидуальных монотонных функций // ДАН СССР. 1985. Т. 282, № 5. С. 1033–1037.

[2] Андреев А. Е. Метод бесповторной редукции синтеза самокорректирующихся схем // ДАН СССР. 1985. Т. 283, № 2. С. 265–269.

[3] Андреев А. Е. О сложности монотонных функций // Вестник Московского университета. 1985. № 4. С. 83–87.

[4] Андреев А. Е. Об одном методе получения более чем квадратичных эффективных нижних оценок сложности π-схем // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1987. № 1. С. 70–73.

[5] Андреев А. Е. Об одном методе получения эффективных нижних оценок монотонной сложности // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 1. С. 3–26.

[6] Андреев А. Е. О синтезе схем из функциональных элементов в полных монотонных базисах // Математические вопросы кибернетики, вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 114–139.

[7] Вайнцвайг М. Н. О мощности схем из функциональных элементов // Доклады АН СССР. 1961. Т. 139, № 2. С. 320–323.

[8] Дагаев Д. А. О сложности функций из некоторых классов трехзначной логики // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2011. Т. 66, № 3. С. 60–63.

[9] Дагаев Д. А. О поведении функций Шеннона для некоторых семейств классов функций трехзначной логики // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2012. Т. 67, № 4. С. 58–61.

[10] Дагаев Д. А. О сложности функций трехзначной логики, принимающих два значения // Математические вопросы кибернетики, вып. 18. М.: Физматлит, 2013. С. 35–122.

[11] Касим-Заде О. М. Об одной мере сложности схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики, вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 117–179.

[12] Касим-Заде О. М. Общая верхняя оценка сложности схем в произвольном бесконечном полном базисе // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1997. № 4. С. 59–61.

[13] Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным базисом // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 1. С. 18–21.

[14] Коршунов А. Д. Об оценках сложности схем из объёмных функциональных элементов // Проблемы кибернетики, вып. 19. М.: Наука, 1967. С. 275–284.

[15] Коршунов А. Д. Сложность вычисления булевых функций // УМН. 2012. Т. 67, вып. 1(403). С. 97–168.

[16] Кочергин А. В. О глубине функций k-значной логики в бесконечных базисах // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 1. С. 22–26.

[17] Кочергин А. В. О глубине функций k-значной логики в конечных базисах // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 1. С. 56–59.

[18] Кочергин В. В. О мультипликативной сложности двоичных слов с заданным числом единиц // Математические вопросы кибернетики, вып. 8. М.: Наука, 1999. С. 63–76.

[19] Кочергин В. В. Теория вентильных схем (современное состояние) // Дискретная математика и ее приложения. Сборник лекций молодежных научных школ по дискретной математике и ее приложениям. Выпуск VII. М.: Изд-во ИПМ РАН, 2013. С. 23–40.

[20] Кочергин В. В., Кочергин Д. В. Уточнение асимптотического поведения сложности сборки слов схемами конкатенации // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. № 2. С. 12–18.

[21] Кравцов С. С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики, вып. 19. М.: Наука, 1967. С. 285–292.

[22] Кузьмин В. А. Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга // Проблемы кибернетики, вып. 13. 1965. С. 75–96.

[23] Ложкин С. А. Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики, вып. 6. М.: Наука, 1966. С. 190–214.

[24] Ложкин С. А. Новые, более точные оценки функций Шеннона для сложности управляющих систем // Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 77–78.

[25] Лупанов О. Б. О вентильных и контактно-вентильных схемах // ДАН СССР. 1956. Т. 111, № 6. С. 1171–1174.

[26] Лупанов О. Б. О синтезе контактных схем // ДАН СССР. 1958. Т. 119, № 1. С. 23–26.

[27] Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Известия вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1, № 1. С. 120–140.

[28] Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики, вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.

[29] Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики, вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 63–97.

[30] Лупанов О. Б. О схемах из функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики, вып. 23. М.: Наука, 1970. С. 43–81.

[31] Лупанов О. Б. Об асимптотических оценках сложности управляющих систем // Международный конгресс математиков в Ницце, 1970. Доклады советстких математиков. М.: Наука, 1972. С. 162–167.

[32] Лупанов О. Б. О вентильных схемах // Acta Cybernetica. 1980. Tom. 4, Fasc. 4. P. 311–315.

[33] Лупанов О. Б. Об асимптотических оценках сложности управляющих систем // Acta Cybernetica. 1980. Tom. 4, Fasc. 4. P. 317–323.

[34] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

[35] Лупанов О. Б. Конспект лекций по курсу «Введение в математическую логику» / Под редакцией А. Б. Угольникова. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007.

[36] Марченков С. С. О сложности вычисления экспоненты // Математические заметки. 1982. Т. 31, вып. 3. С. 457–463.

[37] Нечипорук Э. И. Об одной булевой функции // ДАН СССР. 1966. Т. 169, № 4. С. 765–766.

[38] Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики, вып. 21. М.: Физматгиз, 1969. С. 5–102.

[39] Нечипорук Э. И. О реализации дизъюнкции и конъюнкции в некоторых монотонных базисах // Проблемы кибернетики, вып. 23. М.: Наука, 1970. С. 291–293.

[40] Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций // Казань: Изд-во казанского ун-та, 1983.

[41] Нигматулин Р. Г. Нижние оценки сложности и сложность универсальных схем // Казань: Изд-во казанского ун-та, 1990.

[42] Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций // М.: Наука, 1991.

[43] Окольнишникова Е. А. О сведении оценок сложности в полном базисе к оценкам сложности в неполном базисе // Методы дискретного анализа в теории графов и схем, вып. 42. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1985. С. 80–90.

[44] Окольнишникова Е. А. Об одном методе получения нижних оценок сложности реализации булевых функций недетерминированными ветвящимися программами // Дискретный анализ и исследование операций, сер. 1. 2001. Т. 8, № 4. С. 76-–102.

[45] Разборов А. А. Нижние оценки монотонной сложности некоторых булевых функций // ДАН СССР. 1985. Т. 281, № 4. С. 798–801.

[46] Разборов А. А. Нижние оценки монотонной сложности логического перманента // Математические заметки. 1985. Т. 37, вып. 6. С. 887–900.

[47] Razborov A. A. On the method of approximations // Proc. of 21st ACM STOC. ACM Press, 1989. P. 167–176.

[48] Сафин Р. Ф. О равномерности систем монотонных функций // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2003. № 2. С. 15–20.

[49] Сафин Р. Ф. О соотношении между глубиной и сложностью формул для предполных классов k-значной логики // Математические вопросы кибернетики, вып. 13. М.: Физматлит, 2004. С. 223–278.

[50] Субботовская Б. А. О реализации линейных функций формулами в базисе $\vee, \&, \neg$ // ДАН СССР. 1961. Т. 136, № 3. С. 553–555.

[51] Тарасов П. Б. О равномерности некоторых систем функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2013. № 2. С. 61–64.

[52] Тарасов П. Б. О некоторых достаточных условиях равномерности систем функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2013. № 5. С. 41–46.

[53] Тарасов П. Б. Некоторые условия равномерности монотонных функций k-значной логики, принимающих значения 0 и 1 // Ученые записки Казанского университета. 2014. № 3. С. 123-–131.

[54] Ткачёв Г. А. О сложности реализации одной последовательности функций k-значной логики // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1977. № 1. С. 45–57.

[55] Трущин Д. В. О глубине α-пополнений систем булевых функций // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2009. № 2. С. 72–75.

[56] Трущин Д. В. О сложности реализации функций из одного класса трехзначной логики формулами специального вида // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2012. № 4. С. 20–26.

[57] Угольников А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах // ДАН СССР. 1979. Т. 249, № 1, С. 60–63.

[58] Угольников А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах // Препринт ИПМ АН СССР, № 112. М.: Изд-во ИПМ АН СССР, 1980.

[59] Угольников А. Б. О реализации функций из замкнутых классов схемами из функциональных элементов в полном базисе // ДАН СССР. 1983. Т. 271, № 1, С. 49–51.

[60] Угольников А. Б. О полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // VII Всесоюзная конференция «Проблемы теоретической кибернетики»: тезисы докладов. Часть 1. Иркутск: Изд-во Иркутского государственного университета, 1985. С. 194–195.

[61] Угольников А. Б. О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // Математические заметки. 1987. Т. 42, вып. 4. С. 603–612.

[62] Угольников А. Б. О глубине формул в неполных базисах // Математические вопросы кибернетики, вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 242–245.

[63] Угольников А. Б. О глубине и сложности формул, реализующих функции из замкнутых классов // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 6. С. 1341–1344.

[64] Угольников А. Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики, вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 174–176.

[65] Угольников А. Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций 4-значной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. № 3. С. 52–55.

[66] Харари Ф. Теория графов // Перевод с английского и предисловие В. П. Козырева. Под ред. Г. П. Гаврилова. Изд. 2-е. М.:Едиториал УРСС, 2003.

[67] Храпченко В. М. О сложности реализации линейной функции в классе П-схем // Математические заметки. 1971. Т. 9, вып. 1. С. 35–40.

[68] Храпченко В. М. Об одном методе получения нижних оценок сложности П-схем // Математические заметки. 1971. Т. 10, вып. 1. С. 83–92.

[69] Храпченко В. М. О соотношении между сложностью и глубиной формул // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем, вып. 32. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1978. С. 76–94.

[70] Храпченко В. М. Различие и сходство между задержкой и глубиной // Проблемы кибернетики, вып. 35. М.: Наука, 1979. С. 141–168.

[71] Храпченко В. М. О соотношении между сложностью и глубиной формул в базисе, содержащем медиану // Методы дискретного анализа в изучении функций и графов, вып. 37. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. С. 77–84.

[72] Храпченко В. М. Принципиальное расхождение между глубиной и задержкой // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 51–72.

[73] Храпченко В. М. Упрощенное доказательство одной нижней оценки сложности // Дискретная математика. 2013. Т. 25, вып. 2. С. 82–84.

[74] Шоломов Л. А. Об информационной сложности задач, связанных с минимальной реализацией булевых функций схемами // Проблемы кибернетики, вып. 26. М.: Наука, 1973. С. 207–256.

[75] Шоломов Л. А. Об одной последовательности сложно реализуемых функций // Математические заметки. 1975. Т. 17, вып. 6. С. 957–966.

[76] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

[77] Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики, вып. 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 75–121.

[78] Яблонский С. В. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики, вып. 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 7–38.

[79] Yablonski S. V. A survey of some results in the field of discrete mathematics // Proc. Int. Federation for Information Processing Cong., 1968, Edinburgh. Amsterdam: North-Holland, 1969. P. 266–270.

[80] Яблонский С. В. Обзор некоторых результатов в области дискретной математики // Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики (Новосибирск, июнь 1969). Доклады (пленарные и секционные). Информационные материалы Научного совета АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика». 1970. Вып. 5 (42). С. 5–15.

[81] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2003.

[82] Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.

[83] Яблонский С. В., Козырев В. П. Математические вопросы кибернетики // Информационные материалы, вып. 19а. М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1968. С. 3–15.

[84] Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.

[85] Berstel J., Brlek S. On the lenght of word chains // Inform. Process. Lett. 1987. V. 26, № 1. P. 23–28.

[86] Dubrova E. Multiple-valued logic in VLSI: challenges and opportunities // http://citeseerx.ist.psu.edu URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.323.5814 (date of the application: 05.06.2016).

[87] Files C., Perkowski M. Multi-valued functional decomposition as a machine learning method // Proceedings. 28th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, 1998. P. 173–178.

[88] Hastad J. The Shrinkage Exponent of De Morgan Formulae is 2 // SIAM J Comput. 1998. V. 27, № 1. P. 48–64.

[89] Hunt H. B. On the time and tape complexity of languages // Proc. 5th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, 1973. P. 10–19.

[90] Lau D. Function Algebras on Finite Sets. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.

[91] Lazzari C., Flores P., Monteiro J., Carro L. A new quaternary FPGA based on a voltage-mode multi-valued circuit // http://citeseerx.ist.psu.edu URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.100.1809 (date of the application: 05.06.2016).

[92] McColl W. F., Paterson M. S. The depth of all boolean functions // SIAM J. Comput. 1977. V. 6, № 2. P. 373–380.

[93] Meyer A. R., Stockmeyer L. J. The equivalence problem for regular expressions with squaring requires exponential space // Proc. 13th Ann. IEEE Symp. on Switching and Automata Theory, 1972. P. 125–129.

[94] Meyer A. R. Weak monadic second order theory of successor is not elementary recursive // Proc. Symp. on Logic, Boston, 1972. Lecture Notes in Mathematics. V. 453. Berlin: Springer, 1975. P. 132–154. [Рус. пер. в кн.: Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 12. М.: Мир, 1975. С. 62–77.]

[95] Morana C., Trillas E., Guadarrama S. Multiple-valued logic and artificial intelligence fundamentals of fuzzy control revisited // Artificial Intelligence Review. 2003. V. 20, iss. 3–4. P. 169–197.

[96] Pippenger N. The minimum number of edges in graphs with prescribed paths // Math. Systems Theory. 1979. V. 12, № 4. P. 325–346.

[97] Pratt V. R. The effect of basis on size of Boolean expressions // 16th Ann. Symp. Found. Comput. Sci. 1975. New York. N. Y. , 1975. P. 119–121. (Русский перевод: Пратт В. П. Влияние базиса на сложность булевых формул // Кибернетический сб., новая серия, вып. 17. М.: Мир, 1980. С. 114—123).

[98] Ragaz M. E. Parallelizable algebras. Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung 26 (1986/7). P. 77–99.

[99] Riordan J., Shannon C. E. The number of two-terminal series-parallel networks // J. Math. and Phys. 1942. V. 21, № 2. P. 83–93.

[100] Savage J. E. The Complexity of Computing // John Wiley & Sons Inc, 1977.

[101] Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28, № 1. P. 59–98.

[102] Spira P. M. On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // Proc. 4th Hawai Symposium on System Sciences. North Hollywood: Western Periodicals Company, 1971. P. 525–527.

[103] Stockmeyer L. J. The complexity of decision problems in automata theory and logic // MAC Techn. Rep. 133, M.I.T., 1974.

[104] Stockmeyer L. J., Meyer A. R. Inherent computational complexity of decision problems in logic and automata theory // Preprint, 1977.

[105] Strassen V. Berechnungen in partiellen Algebren endlichen Typs // Computing. 1973. V. 11. P. 181–196.

[106] Wegener I. Relating Monotone Formula Size and Monotone Depth of Boolean Functions // Information Processing Letters, 16. 1983. P. 41–42.

[107] Zilic Z., Vranesic Z. G. Multiple-Valued Logic in FPGAs // http://citeseerx.ist.psu.edu URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.53.9829 (date of the application: 05.06.2016).

Публикации автора по теме диссертации

[108] Андреев А. А. Об одной последовательности функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 52–57.

[109] Андреев А. А. О нижних оценках сложности для некоторых последовательностей функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2013. № 6. С. 25–30.

[110] Андреев А. А. О нижних оценках сложности функций многозначной логики над бесконечными базисами // Прикладная дискретная математика. 2015. № 3. С. 5–16.

[111] Андреев А. А. Об одной последовательности функций многозначной логики // Мат-лы XI Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения». М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2012. С. 88–90.

[112] Андреев А. А. Точная сверхэкспоненциальная оценка сложности для одной последовательности функций многозначной логики // Мат-лы IX Молодёжной научной школы по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013. С. 15–17.

[113] Андреев А. А. О нижних оценках сложности функций многозначной логики в бесконечных базисах // Труды IX Междунар. конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». М.: Изд-во «МАКС Пресс», 2015. С. 19–22.

[114] Андреев А. А. О сложности функций многозначной логики в бесконечно-порождённых классах // Мат-лы X Молодёжной научной школы по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015. С. 5–9.