ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

на диссертационную работу
Андреева Александра Андреевича
«О сложности функций многозначной логики
в некоторых неполных базисах»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.09 —
дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация А. А. Андреева «О сложности функций многозначной логики в некоторых неполных базисах» относится к одному из важнейших разделов дискретной математики и математической кибернетики — синтезу и сложности управляющих систем (теории сложности).

Несомненно, наиболее острой открытой проблемой в теории сложности является проблема нижних оценок. Многочисленные попытки получить высокие нижние оценки сложности для конструктивно задаваемых (индивидуальных) последовательностей функций наталкиваются на принципиальные трудности. Для всех основных модельных классов такие нижние оценки на порядок меньше неконструктивных нижних оценок, устанавливаемых для почти всех функций мощностным методом. Так, для рассматриваемых в диссертации моделях — формул и схем из функциональных элементов — в случае реализации булевых функций от n переменных над конечными базисами сложность реализации почти всех функций имеет порядок роста $2^n/\log_2 n$ и $2^n/n$ соответственно, а глубина — линейный порядок роста, в то время как для индивидуальных последовательностей функций не удается поднять нижние оценки сложности выше n^3 при реализации формулами и выше линейных при реализации схемами, а для глубины не удается поднять оценки выше логарифмических. Принципиальные трудности получения высоких нижних оценок индивидуальных функций вынудили многих авторов для разработки новых методов и получения существенно более высоких нижних оценок рассматривать схемы (в широком смысле) с ограничениями на базис или структуру. Так, усилиями А. А Разборова, А. Е. Андреева, Н. Алона и Р. Боппаны, К. Амано и А. Маруоки, для сложности реализации схемами в неполном базисе, содержащем только конъюнкцию и дизъюнкцию, некоторых конкретных последовательностей монотонных функций установлены почти экспоненциальные нижние оценки вида $2^{n^{1/3-o(1)}}$.

В случае реализации функций многозначной логики в неполных базисах получены еще более высокие нижние оценки сложности индивидуальных функций (в некоторых случаях даже превосходящие максимально возможные мощностные нижние оценки). Г. А. Ткачёвым приведён пример неполного базиса и конструктивно заданной последовательности функций трёхзначной логики от n переменных, асимптотика сложности реализации которых схемами из функциональных элементов имеет вид $2C_n^{[\frac{n}{2}]}$. Для задачи получения высоких нижних оценок при реализации формулами А. Б. Угольниковым были предложены неполный базис и конструктивно заданная последовательность функций четырёхзначной логики от n переменных, порядок сложности которых имеет вид $n2^{C_n^{[\frac{n}{2}]}}$. Небольшой модификацией последней конструкции получается также пример неполного базиса и последовательности функций трехзначной логики, имеющих над этим базисом глубину $C_n^{[\frac{n}{2}]}$. Целью диссертационной работы является качественное усиление указанных результатов в области получения нижних оценок сложности и глубины индивидуальных последовательностей функций многозначной логики.

Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста, заключения и раздела библиографии.

Во введении дан краткий обзор результатов, связанных с получением высоких конструктивных нижних оценок сложности функций k-значной ($k \geq 2$) логики, а также сформулированы основные результаты, представленные в диссертационной работе.

В первой главе предложена конкретная неполная система и построена последовательность функций многозначной логики от n переменных, для которой установлена нижняя оценка сложности реализации формулами над этим базисом, асимптотически превосходящая величину 2^{3^n}. Стоит отметить, что эта оценка существенно превышает приведенную оценку Угольникова — выше даже асимптотика роста повторного (!) логарифма. Для большей наглядности и прозрачности отнюдь не простых рассуждений в первой главе рассматриваемые функции имеют значность 10, что значительно выше, чем в других известных высоких нижних оценках сложности функций многозначной логики. Во второй главе показано как уменьшить значность логики с качественным сохранением результатов, полученных в предыдущей главе, при этом уменьшение значности естественным образом приводит к серьёзному усложнению доказательств. Для любых $r \geq 1$ и $m \geq 2$ при $k(r) = r + 3$ в явном виде предложены неполный базис и последовательность функций из $P_{k(r)}$, сложность реализации которых формулами в этом базисе превосходит m^{r^n}.

Третья глава посвящена получению высоких нижних оценок сложности и глубины реализации функций многозначной логики формулами и схемами над бесконечными неполными базисами. Обычно при переходе от конечных базисов к бесконечным (например, в задачах о сложности и глубине булевых функций или в задаче о глубине функций многозначной логики над полными базисами) наблюдается снижение порядка роста сложности функций Шеннона. связанное с заведомой избыточностью бесконечных базисов. Поэтому получение высоких нижних оценок в бесконечных базисах вызывает особый интерес, дополнительным побудительным мотивом к которому при изучении сложности и глубины функций k-значной логики является наличие при $k \geq 3$ замкнутых классов, не иеющих конечного базиса. В третьей главе для всех $k \geq 5$ предложен метод явного построения конечного и бесконечного базисов, порождающих один и тот же замкнутый класс (естественно, имеющий конечную порождающую систему) функций k-значной логики и последовательности функций, для которой и в конечном, и в бесконечном базисах для сложности реализации формулами и для глубины справедливы такие же высокие нижние оценки, как и установленные во второй главе. При этом функции Шеннона сложности и глубины для этих двух базисов попарно асимптотически совпадают, а бесконечный базис обладает тем свойством, что каждая входящая в него функция входит хотя бы в одну минимальную формулу для функции, сложность которой совпадает с соответствующим значением функции Шеннона.

Во второй части третьей главы исследуется возможность получения высоких нижних оценок сложности и глубины для функций многозначной логики из замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. Приведен пример явно заданных бесконечного базиса, порождающего класс без конечного базиса, и последовательности функций трехзначной логики, глубина которых над этим базисом растет как 2^{n-1}. Этот пример в силу того, что сложность реализации функции схемами не меньше глубины этой функции, усиливает упомянутый выше результат Ткачёва. Также приведен пример явно заданных бесконечного базиса, порождающего класс без конечного базиса, и последовательности функций четырехзначной логики, для которых сложность реализации формулами над этим базисом растет быстрее чем $n2^{2^{n-1}}$. Этот пример, соответственно, усиливает рекордный результат Угольникова для функций четырехзначной логики. В конце главы эти примеры обобщаются на случай логик большей значности.

Таким образом, в диссертационной работе достигнуты поставленные цели.

Результаты диссертации являются новыми и интересными, они четко сформулированы, оформлены в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно. При работе над диссертацией автор проявил себя как сложившийся математик и талантливый исследователь, продемонстрировав при преодолении ряда серьезных трудностей как владение классическими методами и приемами так и умение разрабатывать оригинальные. Полученные результаты являются значительным продвижением в тематике получения высоких конструктивных нижних оценок сложности. По теме диссертации опубликовано 7 печатных работ, в том числе три в журналах из списка ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет. Результаты диссертации докладывались на многих семинарах и конференциях.

Считаю, что диссертация А. А. Андреева «О сложности функций многозначной логики в некоторых неполных базисах» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к кандидатским диссертациям, и А. А. Андреев заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 (дискретная математика и математическая кибернетика).

Научный руководитель:
профессор
кафедры дискретной математики
Механико-математического ф-та
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук

В. В. Кочергин
18.10.16г

Подпись В. В. Кочергина удостоверяю.

И.о. декана
Механико-математического ф-та
МГУ имени М. В. Ломоносова,
профессор

В. Н. Чубариков