ФГБОУ ВО "ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи
УДК 512.543

АЗАРОВ Дмитрий Николаевич

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ И ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА И СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Специальность 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Иваново – 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Актуальность темы и степень ее разработанности

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению финитной аппроксимируемости, аппроксимируемости конечными p-группами и почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых классов групп и свободных конструкций. В работе продолжаются исследования аппроксимационных свойств групп, проводимые научным коллективом, созданным Д. И. Молдаванским и работающим под его руководством на кафедре алгебры и математической логики Ивановского государственного университета. Эти исследования были начаты на кафедре А. И. Мальцевым и Д. М. Смирновым более 60 лет тому назад. Становление и развитие научно-исследовательской работы в области теории групп в Ивановском государственном университете подробно описано Д. И. Молдаванским в обзорной статье [37].

Напомним, что если $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, то группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$, если она содержит $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Далее через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_p$ будем обозначать соответственно класс всех конечных групп и класс всех конечных p-групп. Заметим, что понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости.

В своем историческом обзоре [50] Б. Чандлер и В. Магнус свидетельствуют, что понятие финитно аппроксимируемой группы введено А. И. Мальцевым в 1940 году в его статье "Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами" [24]. Заметим, что в этой работе термин "аппроксимируемость" еще не использовался. Этот термин был введен А. И. Мальцевым в 1949 году в его работе [26], посвященной нильпотентным группам и алгебрам. На английском языке соответствующий термин был введен Ф. Холлом в 1955 году. В общем виде понятие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости было введено К. Грюнбергом в работе [70]. С тех пор свойство $\mathcal{K}$-аппроксимируемости интенсивно изучалось и обобщалось в различных направлениях.

Наряду со свойством $\mathcal{K}$-аппроксимируемости исследовались также и другие аппроксимационные свойства групп, например, $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы относительно сопряженности и $\mathcal{K}$-отделимость подгрупп. Напомним, что группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности, если для любых несопряженных элементов a и b группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу K из класса $\mathcal{K}$, при котором образы элементов a и b не сопряжены в K. Напомним также, что подгруппа H группы G называется $\mathcal{K}$-отделимой, если для любого элемента a группы G, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H. Заметим, что понятия $\mathcal{F}$-отделимости и $\mathcal{F}$-аппроксимируемости относительно сопряженности совпадают с классическими понятиями финитной отделимости и финитной аппроксимируемости относительно сопряженности. Другими модификациями понятия финитно аппроксимируемой группы являются понятие мощной группы и недавно введенное понятие сверхфинитно аппроксимируемой группы [66].

В 1940 году А. И. Мальцев [24] доказал $\mathcal{F}$-аппроксимируемость конечно порожденных линейных групп. Частными случаями этого результата являются теоремы К. Ивасавы [75] и К. Гирша [73], в которых устанавливается $\mathcal{F}$-аппроксимируемость для свободных групп и, соответственно, для полициклических групп. В 1969 году В. Н. Ремесленников [41] доказал, что полициклические группы финитно аппроксимируемы относительно сопряженности. Свойством $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полициклические группы, вообще говоря, не обладают, но любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p [51].

Как уже отмечалось выше, свободные группы финитно аппроксимируемы [75]. Кроме того, они финитно аппроксимируемы относительно сопряженности и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы для каждого простого числа p [21, с. 47].

Одним из основных направлений в исследованиях аппроксимационных свойств групп является изучение поведения этих свойств относительно свободных конструкций (свободных произведений, обобщенных свободных произведений и HNN-расширений). В настоящее время мы располагаем здесь большим количеством важных и интересных результатов, полученных алгебраистами в различных странах мира. По понятным причинам нет возможности перечислить все результаты, полученные в данном направлении. Некоторые из этих результатов рассмотрены в главах 2 и 3 настоящей диссертации.

Исследования финитной аппроксимируемости свободных конструкций групп были начаты в 1957 году К. Грюнбергом в работе [70], где он доказал, что свободное произведение любого семейства $\mathcal{F}$-аппроксимируемых ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых) групп само является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой) группой. Аналогичный результат доказан В. Н. Ремесленниковым и для финитной аппроксимируемости относительно сопряженности [42]. Кроме того, свободное произведение любого семейства групп, в каждой из которых все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, само обладает этим свойством. Это утверждение доказано Н. С. Романовским [45].

Следующим шагом в изучении аппроксимационных свойств свободных конструкций был переход от свободных произведений к обобщенным свободным произведениям, т. е. к свободным произведениям с объединенными подгруппами. Заметим, что обобщенное свободное произведение двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп может уже не быть $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. В 1963 году Г. Баумслаг в работе [58] доказал, что свободное произведение двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Для доказательства этого результата Г. Баумслаг сначала установил финитную аппроксимируемость обобщенного свободного произведения двух конечных групп. Позднее Б. Баумслагом и М. Треткоффом [56] (и независимо Д. Коэном [65]) была установлена финитная аппроксимируемость HNN-расширения конечной группы. Заметим здесь, что свойство финитной аппроксимируемости для обобщенного свободного произведения двух конечных групп и для HNN-расширения конечной группы обеспечивается тем обстоятельством, что каждая из этих конструкций содержит свободную подгруппу конечного индекса.

На основе этих результатов были доказаны "фильтрационные" теоремы общего характера для произвольных обобщенных свободных произведений и

HNN-расширений (в том числе знаменитая фильтрационная теорема Г. Баумслага [92]). Фильтрационные теоремы представляют собой достаточные (или необходимые) условия финитной аппроксимируемости, сформулированные на языке пересечений специально построенных бесконечных систем подгрупп конечного индекса в свободных множителях (или в базовой группе HNN-расширения). Такие фильтрационные теоремы имеют общий характер, и как правило они не дают ответов на вопрос о том, будет ли финитно аппроксимируемой группой то или иное конкретное обобщенное свободное произведение или HNN-расширение. Поэтому исследования финитной аппроксимируемости свободных конструкций проводятся при определенных дополнительных ограничениях. Такие ограничения накладываются на свободные множители и объединяемые подгруппы обобщенных свободных произведений, а также на базовые группы и связанные подгруппы HNN-расширений. Например, в работах [58] и [67] доказана $\mathcal{F}$-аппроксимируемость для свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением, для свободного произведения двух полициклических групп с циклическим объединением и для свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением. Существенные обобщения и усиления этих результатов доказаны в третьей главе диссертации.

Известные фильтрационные теоремы о финитной аппроксимируемости произвольных обобщенных свободных произведений и HNN-расширений не являются критериями. Они дают либо только необходимые, либо только достаточные условия финитной аппроксимируемости. Фильтрационные критерии такого рода известны только для некоторых частных случаев. Так, например, Д. И. Молдаванский в работе [30] получил фильтрационный критерий финитной аппроксимируемости для нисходящих HNN-расширений, с помощью которого может быть доказан ряд более конкретных результатов. Среди них — теорема Д. Вайза и Т. Су [74] о финитной аппроксимируемости произвольного нисходящего HNN-расширения полициклической группы, а также недавний более общий результат А. Ремтуллы и М. Ширвани о нисходящих HNN-расширениях разрешимых минимаксных групп [90]. Далеко идущие обобщения и модификации этих результатов доказаны во второй главе диссертации.

Наряду со свойством финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений интенсивно изучается свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости этих свободных конструкций (см., напр., [72], [34], [31], [76], [77]). В основе многих исследований, проводимых в этом направлении, лежит полученный Г. Хигманом [72] критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп и аналогичный критерий для HNN-расширения конечной p-группы, доказанный Д. И. Молдаванским в работе [31]. На основе этих результатов Д. И. Молдаванский получил p-аналоги общих фильтрационных теорем, доказанных ранее для финитной аппроксимируемости.

Коротко остановимся на свойстве финитной аппроксимируемости относительно сопряженности. Д. Дайер [68] доказала, что конечное расширение свободной группы обладает свойством $\mathcal{F}$-аппроксимируемости относительно сопряженности, и поэтому данным свойством обладает любое обобщенное свободное произведение двух конечных групп и любое HNN-расширение конечной группы [68]. На основе этого утверждения в дальнейшем был получен ряд достаточных условий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости относительно сопряженности для обобщенных свободных произведений и HNN-расширений. Большие сложности в изучении свойства $\mathcal{F}$-аппроксимируемости относительно сопряженности связаны с тем, что это свойство не переносится на подгруппы и на конечные расширения [17]. В работе [6] автор настоящей диссертации совместно с Е. А. Ивановой построил пример обобщенного свободного произведения двух групп, обладающих свойством $\mathcal{F}$-аппроксимируемости относительно сопряженности, которое уже не обладает данным свойством, но при этом является финитно аппроксимируемой группой.

В свой фундаментальной работе [70] Грюнберг предлагает при изучении свободных произведений наряду со свойствами $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости рассматривать более общее свойство $\mathcal{K}$-аппроксимируемости, где $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, т. е. нетривиальный класс групп, замкнутый относительно подгрупп и удовлетворяющий следующему условию: если в субнормальной последовательности подгрупп $C \leq B \leq A$ факторы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе C существует подгруппа D, нормальная в A и такая, что фактор-группа A/D принадлежит $\mathcal{K}$. Недавно Е. В. Соколов [93] получил характеризацию корневого класса в других терминах. Очевидно, что классы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_p$ являются корневыми. Еще одним примером корневого класса служит класс $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных π-групп, где π — некоторое множество простых чисел.

В монографии [23, п. 6.5] В. Магнус, А. Каррас и Д. Солитэр приводят следующий результат Грюнберга, доказанный в упомянутой выше работе [70].

Если все свободные группы аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, то свободное произведение любого числа $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп само является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

С другой стороны, в совместной работе Д. Н. Азарова и Д. Тьеджо [12] (вклад в которую первого автора более значителен) доказано следующее утверждение.

Произвольная свободная группа аппроксимируема любым корневым классом.

Очень простое доказательство этого утверждения основано на том, что с одной стороны любой корневой класс, как легко видеть, содержит в себе или класс $\mathcal{N}$ всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения, или класс $\mathcal{F}_p$ для некоторого простого p, а с другой стороны по хорошо известной теореме Магнуса любая свободная группа $\mathcal{N}$-аппроксимируема, а значит и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p. Таким образом, свободные группы аппроксимируемы любым корневым классом, и поэтому результат Грюнберга приобретает следующий более "законченный" вид.

Теорема (*). *Свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само аппроксимируемо классом $\mathcal{K}$.*

Данная теорема послужила основой для многочисленных исследований аппроксимируемости свободных конструкций корневыми классами групп. Возникшее в связи с этим научное направление в настоящее время представлено целым рядом публикаций, в которых теорема (*) используется для обобщения некоторых известных результатов об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных конструкций групп на случай аппроксимируемости произвольным корневым классом. Так, например, в работе [11] с помощью теоремы (*) получено обобщение на аппроксимируемость произвольным корневым классом одной известной теоремы Дж. Болера и Б. Эванса [61], которая утверждает, что свободное произведение двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Недавно Д. В. Гольцов [16] с помощью теоремы (*) доказал, что если группа G аппроксимируема корневым классом, замкнутым относительно факторизации, то этим свойством обладает и любое HNN-расширение группы G с конечными центральными связанными подгруппами, пересекающимися тривиально. Ранее такое утверждение для $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости было установлено Д. И. Молдаванским в работе [34].

Простые примеры показывают, что свободное произведение с конечным объединением двух групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, может уже не быть $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. То же самое можно сказать и об HNN-расширениях с конечными связанными подгруппами. Свойство почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости ведет себя более регулярно — в работах [15] и [4] с помощью теоремы (*) доказан следующий результат.

Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс, состоящий из конечных групп. Тогда любое свободное произведение двух почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами и любое HNN-расширение почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы с конечными связанными подгруппами являются почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемыми группами.

Частными случаями этого утверждения являются результаты Г. Баумслага, Б. Баумслага и М. Треткоффа, утверждающие $\mathcal{F}$-аппроксимируемость для свободного произведения двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп с конечным объединением и для HNN-расширения $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы с конечными связанными подгруппами. Действительно, свойства $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}$-аппроксимируемости, как легко видеть, равносильны между собой.

Все полученные в последнее время результаты об аппроксимируемости свободных конструкций корневыми классами групп (см., напр., [16], [49], [48], [93]) доказаны с использованием теоремы (*). Следует, однако, заметить, что большинство этих результатов получены по аналогии с уже известными результатами о финитной аппроксимируемости и аппроксимируемости конечными p-группами. С другой стороны, наиболее красивые и нетривиальные результаты об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости не верны для $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, и поэтому их нельзя обобщить на аппроксимируемость произвольным корневым классом.

Многие результаты об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости, которые не верны для $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, тем не менее, могут быть распространены на почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Такие результаты и их "почти $\mathcal{F}_p$-аналоги" как правило нетривиальны, им посвящена значительная часть настоящей диссертации.

Свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости является промежуточным между $\mathcal{F}$-аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью. Примером финитно аппроксимируемой группы, не являющейся почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни при каком p, является прямое произведение по всем простым p групп порядка p. Примеры такого рода существуют также и среди конечно порожденных групп, поскольку любая счетная финитно аппроксимируемая группа вложима в конечно порожденную финитно аппроксимируемую группу [95].

Одним из первых результатов о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости является следующая теорема А. Л. Шмелькина, доказанная им в 1969 году и опубликованная в работе [51].

Произвольная полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p.

Этот, ставший уже классическим, результат в дальнейшем в том или ином виде был распространен на некоторые другие классы групп. При этом выяснилось, что в ряде случаев свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости не имеет места для всех простых p, но выполняется для всех достаточно больших простых p.

Так Г. А. Носков [38] (см. также [80, п. 4.3.9]), отвечая на вопрос 4.52 из "Коуровской тетради", поставленный В. Н. Ремесленниковым, доказал, что свойством почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для всех достаточно больших p обладают все конечно порожденные группы без кручения, являющиеся расширениями абелевых групп с помощью нильпотентных групп. Заметим, что финитная аппроксимируемость таких групп (даже без требования об отсутствии кручения) ранее была доказана П. Холлом [80, п. 4.3.1]. В дальнейшем в теореме Холла требование нильпотентности удалось ослабить до требования полицикличности.

Еще одним важным и нетривиальным результатом о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости является следующая теорема Мальцева — Платонова — Мерзлякова (см., напр., [29, теор. 51.2.1], [24], [83], [39]): произвольная конечно порожденная линейная группа над полем нулевой характеристики почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p, произвольная конечно порожденная линейная группа над полем характеристики p почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Следует заметить, что свойство линейности тесно связано со свойством почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Эта связь была найдена А. Лубоцким [83], получившим характеризацию конечно порожденных линейных групп над полями нулевой характеристики в терминах близких к почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости.

Д. Робинсоном [80] сделано существенное продвижение в изучении аппроксимационных свойств некоторых классов разрешимых групп, содержащих все полициклические группы. В частности, им получен критерий финитной аппроксимируемости для разрешимых групп конечного ранга, являющийся далеко идущим обобщением результата Гирша о полициклических группах. Более того, в монографии [80, п. 5.3.9] доказана почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость при всех достаточно больших простых p для финитно аппроксимируемых разрешимых минимаксных групп, составляющих важный промежуточный подкласс между полициклическими группами и разрешимыми группами конечного ранга.

Этот результат, а также теорема Шмелькина о полициклических группах, являются частными случаями доказаного в диссертации критерия почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости (и даже почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — конечное множество простых чисел) разрешимой группы конечного ранга. В диссертации доказано также, что если разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то она почти аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами. В своей недавней работе [94] Б. Верфриц назвал эти результаты интересными и привел для них свои доказательства.

Цели работы и ее структура

Исследование свойства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости некоторых классов групп и свободных конструкций к настоящему времени сформировалось в отдельное научное направление. Развитие этого направления является одной из целей настоящей диссертационной работы. Кроме того, целью работы является дальнейшее изучение других аппроксимационных свойств — финитной аппроксимируемости групп и свободных конструкций, аппроксимируемости и почти аппроксимируемости некоторыми классами конечных групп (в частности, классом конечных π-групп и классом конечных нильпотентных π-групп, где π — множество простых чисел).

В первой главе диссертации перечисленные выше аппроксимационные свойства групп исследуются для некоторых классов групп, например, для разрешимых групп конечного ранга, для групп автоморфизмов и для расщепляемых расширений. Вторая и третья главы диссертации посвящены изучению этих свойств соответственно для HNN-расширений и для обобщенных свободных произведений.

Во введении (см. ниже) приведено подробное описание содержания каждой из трех глав диссертации, включая исторические обзоры соответствующих исследований, формулировки полученных результатов и их обсуждение. Сами же главы 1, 2 и 3 нацелены в первую очередь на доказательства этих результатов, но при этом они содержат ряд результатов автора, не упомянутых во введении. Каждая из глав представляет собой объединение нескольких параграфов (всего 11 параграфов), а каждый параграф посвящен определенной группе результатов автора. Для удобства чтения каждый параграф снабжен "вводной частью", где формулируются и обсуждаются доказываемые результаты, а также напоминается история соответствующего вопроса.

Основные результаты первой главы диссертации и их научная новизна

Первая глава диссертации посвящена результатам об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости некоторыми классами конечных групп, полученным для групп конечного ранга, разрешимых групп конечного ранга, групп автоморфизмов и расщепляемых расширений. Основные результаты первой главы сформулированы ниже в теоремах 1–8.

Начнем с трех классических теорем о конечно порожденных финитно аппроксимируемых группах. Первая из них принадлежит А. И. Мальцеву и утверждает, что любая конечно порожденная $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа является хопфовой [24]. Вторая теорема, доказанная Д. М. Смирновым [47] (и независимо Г. Баумслагом [57]), утверждает, что группа автоморфизмов конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы сама является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Третья теорема принадлежит А. И. Мальцеву [27] и формулируется следующим образом: расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы с помощью $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы само является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Во всех трех теоремах условие конечной порожденности существенно.

Одним из обобщений понятия конечно порожденной группы является понятие группы конечного общего ранга, введенное А. И. Мальцевым в работе [25]. Группа G называется группой конечного общего ранга, если существует число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе.

В первой главе диссертации доказано, что условие конечной порожденности, накладываемое в сформулированных выше классических теоремах Мальцева, Смирнова и Баумслага, может быть ослаблено до требования конечности общего ранга. В частности, результат Мальцева о хопфовости произвольной конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы допускает следующую более общую формулировку: *любая $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного общего ранга является хопфовой.* Это утверждение (в более сильном виде) доказано в §2 диссертации и в работе автора [110].

Рассмотрим теперь вопрос о $\mathcal{F}_p$-аналогах теорем Смирнова, Баумслага и Мальцева о группах автоморфизмах и расщепляемых расширениях. Простые примеры показывают, что эти теоремы не могут быть распространены с $\mathcal{F}$-аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Тем не менее, удается перенести эти теоремы на почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, и даже на почти π-примарную аппроксимируемость, где π — конечное множество простых чисел. Удобный термин "π-примарная аппроксимируемость" недавно предложен Д. И. Молдаванским и означает аппроксимируемость классом $\mathcal{K} = \bigcup_{p\in\pi} \mathcal{F}_p$. Это свойство равносильно аппроксимируемости конечными нильпотентными π-группами.

Подводя итоги сказанному выше, сформулируем результат автора, доказанный в работе [103].

Теорема 1. *Если группа G конечного общего ранга $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел), то $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми (почти π-*

примарно аппроксимируемыми) являются группа автоморфизмов группы G и любое расщепляемое расширение группы G с помощью $\mathcal{F}$-аппроксимируемой (почти π-примарно аппроксимируемой) группы.

Эта теорема используется в доказательствах многих результатов диссертации, относящихся к свободным конструкциям и к теории разрешимых групп.

Следствием теоремы 1 является недавний результат Л. Париза [88] о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы автоморфизмов конечно порожденной свободной группы, а также следующее более общее утверждение А. Любоцкого [82]: группа автоморфизмов конечно порожденной почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы сама почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Для расщепляемых расширений утверждение теоремы 1 является новым даже в случае, когда базовая группа расширения конечно порождена, а множество π состоит из одного простого числа p.

Теорема 1 не может быть распространена с почти π-примарной аппроксимируемости на π-примарную аппроксимируемость. Существует много примеров расщепляемых расширений, обладающих свойством π-примарной аппроксимируемости, но при этом мы не располагаем какими-либо "полезными" критериями π-примарной аппроксимируемости (и даже $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости) для расщепляемых расширений. Попытки получить такие критерии обычно приводят к тривиальным фильтрационным утверждениям и не дают конкретных содержательных результатов (см., напр., [18]). Тем не менее, для некоторых частных случаев критерии такого рода известны. Так, например, в [55] (см. также [107]) устанавливается критерий аппроксимируемости конечными p-группами расщепляемого расширения конечно порожденной свободной абелевой группы с помощью бесконечной циклической группы. Этот критерий формулируется на языке свойств характеристического многочлена автоморфизма базовой группы, задающего данное расширение. Для произвольных расщепляемых расширений удается получить также некоторые общие достаточные условия π-примарной аппроксимируемости, одно из которых сформулировано и доказано в §1 диссертации.

Рассмотренный выше класс групп конечного общего ранга содержит все конечно порожденные группы и поэтому является слишком широким для того, чтобы исследовать финитную аппроксимируемость и другие аппроксимационные свойства для групп этого класса. Гораздо лучше в этом отношении исследованы группы конечного специального ранга, введенные А. И. Мальцевым в работе [27]. Их называют также группами конечного ранга Прюфера, а чаще — просто группами конечного ранга. В этом есть определенная несправедливость, поскольку на самом деле несомненное первенство в формировании данного понятия принадлежит А. И. Мальцеву. Далее вместо терминов "специальный ранг" и "ранг Прюфера" используется термин "ранг".

Напомним, что группа G имеет конечный ранг, если существует число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Это требование является более жестким, чем конечность общего ранга. Примерами групп конечного ранга являются все разрешимые минимаксные группы и, в частности, все полициклические группы.

Аппроксимационные свойства групп конечного ранга в наибольшей степени исследованы для разрешимых групп конечного ранга, но мы остановимся сначала на некоторых результатах, относящихся к произвольным группам конечного ранга.

В 1989 году А. Лубоцкий и А. Манн в работе [84] доказали следующую теорему: *любая $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного ранга почти локально разрешима.* Эту важную и глубокую теорему дополняет следующий результат автора [101].

Теорема 2. *Пусть G — группа конечного ранга.*

Если для каждого множества π, состоящего из почти всех простых чисел, группа G π-примарно аппроксимируема, то она нильпотентна.

В частности, если группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна.

Эта теорема обобщает следующий результат К. Сексенбаева [46]: *если полициклическая группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна.* В дальнейшем Д. Робинсон [80, стр. 102] обобщил эту теорему на разрешимые группы конечного ранга. Сформулированная выше теорема 2 является еще более общим утверждением (в ней предполагается только конечность ранга группы, и отсутствует предположение о ее разрешимости).

Рассмотрим теперь нильпотентные группы конечного ранга (для нильпотентных групп конечность общего ранга равносильна конечности специального ранга). Для таких групп критерии $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости (где π — произвольное множество простых чисел) формулируются в терминах полноты элементов. Мы называем элемент a группы G π-полным, если для любого целого положительного π-числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Если множество π состоит из одного простого числа p (из всех простых чисел), то вместо термина "π-полный элемент" используется термин "p-полный элемент" ("полный элемент"). Еще А. И. Мальцев в работе [27] заметил, что абелева группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней нет полных неединичных элементов. В аналогичных терминах формулируется и следующий результат автора (см. [101] и [105]), дающий полную информацию об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для нильпотентных групп конечного ранга.

Теорема 3. *Нильпотентная группа G конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема (почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда множество всех ее π-полных элементов совпадает с единичной подгруппой (является конечным и совпадает с множеством всех элементов группы G, порядки которых конечны и взаимно просты с каждым числом из π).*

Конечность ранга в этой теореме существенна. Соответствующий пример был подсказан автору диссертации А. Л. Шмелькиным несколько лет тому назад. Для абелевых групп это ограничение не существенно — теорема 3 остается верной для произвольной абелевой группы G (без ограничений на ранг) [104].

Распространить теорему 3 на разрешимые группы конечного ранга не возможно. Однако, для случая финитной аппроксимируемости, т. е. для случая, когда π совпадает с множеством всех простых чисел, утверждение теоремы 3 является верным и для разрешимых групп конечного ранга. Нетривиальный критерий финитной аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга, полученный Д. Робинсоном [80, п. 5.3.2], формулируется следующим образом.

Для разрешимой группы G конечного ранга следующие три условия равносильны между собой.

1. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема.

2. Группа G не содержит неединичных полных элементов.

3. Группа G редуцирована.

Напомним, что группа называется редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп, т. е. таких неединичных подгрупп, в которых все элементы являются полными. Очевидно, что любая $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа не содержит неединичных полных элементов и поэтому является редуцированной.

Рассмотрим теперь свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для разрешимых групп конечного ранга. Особый интерес представляет случай, когда множество π конечно.

Очевидно, что если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел. Поэтому непосредственным следствием сформулированной выше теоремы А. Л. Шмелькина о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости произвольной полициклической группы является следующая теорема, доказанная А. Лернером [79]: *любая полициклическая группа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для подходящего конечного множества π простых чисел.*

Разрешимая группа конечного ранга может уже не быть $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой ни для какого конечного множества π простых чисел, даже если она финитно аппроксимируема. Соответствующим примером служит прямое произведение групп порядка p по всем простым p.

В связи с этим рассмотрим следующий вопрос: при каких обстоятельствах разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для подходящего конечного множества π простых чисел? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4. *Разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда она редуцирована и является FATR-группой.*

Следуя Д. Робинсону [80, п. 5.1.6], мы называем разрешимую группу FATR-группой (группой с конечными абелевыми тотальными рангами), если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого является или циклической группой, или квазициклической группой, или группой, вложимой в аддитивную группу рациональных чисел. Достаточность в теореме 4 доказывается нетривиально и установлена Д. Робинсоном (см., напр., [80, п. 5.3.8]). Необходимость в этой теореме является значительно более простым утверждением и доказана автором диссертации в работе [115]. Это доказательство приведено в диссертации в связи с тем, что в [80] теорема 4 сформулирована и доказана только "в одну сторону".

Заметим, что для фиксированного конечного множества π простых чисел мы не располагаем критерием $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга (такого критерия нет даже для полициклических групп). Тем не менее, в работе автора [115] доказан следующий критерий почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга, непосредственным следствием которого является сформулированный выше результат А. Л. Шмелькина о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости произвольной полициклической группы для каждого простого числа p.

Теорема 5. *Пусть π — фиксированное конечное множество простых чисел. Разрешимая группа конечного ранга почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она является редуцированной FATR-группой и не содержит π-полных элементов бесконечного порядка.*

Б. Верфриц в своей статье "Remarks on Azarov's work on soluble groups of finite rank" [94], посвященной работе автора [115], привел свое доказательство теоремы 5. Эта теорема является новой даже для случая, когда множество π состоит из одного простого числа p. В [94] Б. Верфриц заново доказал еще и следующий результат автора [115].

Теорема 6. *Если разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то она почти π-примарно аппроксимируема.*

В своей статье [94] Б. Верфриц заметил также, что требование конечности ранга разрешимой группы в теоремах 5 и 6 может быть в небольшой степени ослаблено (см. §3 диссертации).

Из теоремы 6 следует, что почти π-примарная аппроксимируемость разрешимой группы конечного ранга для фиксированного конечного множества π простых чисел равносильна ее почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости.

В §7 диссертации (лемма 7.3, см. также [106]) формулировка теоремы 6 существенно усилена следующим образом.

Пусть π — конечное множество простых чисел. И пусть G — разрешимая FATR-группа. Тогда в группе G существует подгруппа P конечного индекса такая, что любая конечная π-группа, являющаяся гомоморфным образом группы P, нильпотентна.

С другой стороны, Д. Робинсон [80, п. 5.3.12] доказал, что если редуцированная разрешимая минимаксная группа не является нильпотентной, то не будет нильпотентным и некоторый ее конечный гомоморфный образ. Разрешимые минимаксные группы имеют конечный ранг и составляют важный промежуточный подкласс между полициклическими группами и разрешимыми FATR-группами.

Вернемся теперь к теоремам 4 и 5. В этих теоремах для разрешимых групп конечного ранга указаны необходимые и достаточные условия $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для подходящего конечного множества π простых чисел и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для фиксированного конечного множества π простых чисел. Эти условия выглядят достаточно сложно и используют нетривиальное понятие FATR-группы. В следующей теореме указаны более простые эквивалентные условия.

Теорема 7. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга.*

1. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда все ее периодические подгруппы конечны, и группа G не содержит подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q рациональных чисел.

2. Пусть π — конечное множество простых чисел. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все ее периодические подгруппы конечны, и группа G не содержит подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q_π π-ичных дробей.

Эта теорема доказана в работе автора [100]. Непосредственным ее следствием являются теорема Шмелькина о полициклических группах, а также следующий классический результат [80, п. 5.3.9].

Если разрешимая минимаксная группа редуцирована, то она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

В самом деле, напомним, что минимаксные группы — это группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого удовлетворяет или условию минимальности, или условию максимальности для подгрупп. Разрешимые минимаксные группы являются FATR-группами и могут быть охарактеризованы как группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого либо циклический, либо квазициклический [80, п. 5.1.6]. Зафиксируем в разрешимой минимаксной группе G такой ряд. Если мы теперь выбросим все простые числа, соответствующие квазициклическим факторам этого ряда, то для каждого оставшегося простого p в группе G, очевидно, нет подгрупп, изоморфных группе p-ичных дробей. Кроме того, любая периодическая подгруппа группы G является черниковской группой, и поэтому она конечна в силу редуцированности группы G. Таким образом, в силу теоремы 7 группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для указанных выше простых p.

Примерами разрешимых минимаксных групп служат разрешимые группы Баумслага — Солитэра, т. е. группы вида:

$$G(1, n) = (a, b; b^{-1}ab = a^n),$$

где n — ненулевое целое число. Очевидно, что нормальное замыкание элемента a этой группы представляет собой группу n-ичных дробей, а фактор-группа группы $G(1, n)$ по нормальному замыканию элемента a является циклической. Поэтому если простое число p не делит n, то группа $G(1, n)$ не содержит подгрупп, изоморфных группе p-ичных дробей, и тогда по теореме 7 она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Это утверждение является частью результата автора, доказанного в [96] и относящегося к произвольной группе Баумслага — Солитэра. Формулировка этого результата приведена ниже.

Разрешимые группы Баумслага — Солитера являются примерами конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп конечного ранга. Заметим, что любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга почти разрешима и минимаксна [84], и поэтому она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Вопрос об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы G конечного ранга не исследован даже в простейшем случае — когда множество π состоит из одного простого числа p, а группа G является полициклической. Свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полициклических групп полностью исследовано только для некоторых классов полициклических групп, например, для класса конечно порожденных нильпотентных групп и для более широкого класса сверхразрешимых групп. Для конечно порожденных нильпотентных групп соответствующий критерий хорошо известен, является следствием теоремы 3 и формулируется следующим образом.

Конечно порожденная нильпотентная группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все ее элементы конечного порядка являются p-элементами. В частности, любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p (теорема Грюнберга).

Вопрос об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости сверхразрешимых групп сводится к аналогичному вопросу для конечно порожденных нильпотентных групп следующим образом. *Если сверхразрешимая группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для нечетного простого числа p, то она нильпотентна. Сверхразрешимая группа $\mathcal{F}_2$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все ее элементы конечного порядка являются 2-элементами.* Этот результат и другие теоремы о сверхразрешимых группах (в том числе критерий их $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности) получены в серии совместных работ Д. И. Молдаванского и автора диссертации (см. [8], [9] и [3]).

Для полициклических групп имеется три результата общего характера об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Это — сформулированные выше результаты Шмелькина и Сексенбаева, а также доказанная автором диссертации теорема 8 (см. ниже). Для ее формулировки обозначим через π_G множество всех простых чисел p, для которых группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Из сформулированных выше результатов Сексенбаева и Грюнберга непосредственно вытекает следующее утверждение: *для полициклической группы G множество π_G либо конечно, либо совпадает с множеством всех простых чисел.* С другой стороны, автором получен следующий результат [107].

Теорема 8. *Для произвольного конечного множества π простых чисел существует полициклическая группа G такая, что $\pi_G = \pi$.*

Основные результаты второй главы диссертации и их научная новизна

Во второй главе диссертации доказаны результаты об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости HNN-расширений некоторыми классами конечных групп. Эти результаты сформулированы ниже в теоремах 9–14.

Важными примерами HNN-расширений являются группы Баумслага — Солитэра, т. е. группы

$$G(m,n) = (a, b; b^{-1}a^m b = a^n),$$

где m и n — ненулевые целые числа.

Среди групп Баумслага — Солитэра в свое время были найдены первые примеры групп с одним определяющим соотношением, не являющихся финитно аппроксимируемыми.

Так как $G(m,n) \cong G(n,m) \cong G(-m,-n)$, то при изучении аппроксимационных свойств группы $G(m,n)$ можно считать, что $1 \leq m \leq |n|$. При этом условии критерий финитной аппроксимируемости группы $G(m,n)$, полученный С. Мескиным в работе [86], формулируется следующим образом.

Группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$, или $m = |n|$.

Заметим, что попытка указать достаточное условие финитной аппроксимируемости группы $G(m,n)$ была предпринята Г. Баумслагом и Д. Солитэром в их знаменитой статье [60], где было введено семейство групп $G(m,n)$ и доказана нехопфовость группы $G(2,3)$.

Вопрос о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы Баумслага — Солитэра для фиксированного простого числа p решается следующей теоремой автора [96].

Теорема 9. *Пусть m и n — ненулевые целые числа и $1 \leq m \leq |n|$. Группа Баумслага — Солитэра $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и p не делит n, или $m = |n|$.*

Если $m = 1$ и p не делит n, то нормальное замыкание элементов a и b^{p-1} группы $G(m,n)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой подгруппой индекса $p-1$. Если же $m = |n|$, то нормальное замыкание элементов b^2, a^m и $b^{-1}a^{-1}ba$ имеет в группе $G(m,n)$ индекс $2m$ и является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой для каждого простого p.

Из результата Мескина и теоремы 9 вытекает следующее утверждение.

Для группы Баумслага — Солитэра $G(m,n)$ следующие три условия равносильны между собой.

1. Группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема.

2. Группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

3. Группа $G(m,n)$ почти аппроксимируема классом всех нильпотентных групп.

Исследованиям аппроксимационных свойств групп Баумслага — Солитэра посвящены обзорные статьи [36] и [87] Д. И. Молдаванского, получившего много важных и интересных результатов в этом направлении. В серии работ [31], [14], [19] Д. И. Молдаванский получил для групп Баумслага — Солитэра необходимые и достаточные условия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где p — простое число, π — множество простых чисел. Его результаты при условии $1 \leq m \leq |n|$ формулируются следующим образом.

Группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и $n \equiv 1(mod\, p)$, или $m = |n| = p^r$ для некоторого $r \geq 0$, причем если $m = -n$, то $p = 2$.

Группа $G(1,n)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует π-число $l > 1$ такое, что l взаимно просто с n и порядок числа n по модулю l также является π-числом.

Группа $G(m,m)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда число m является π-числом.

Группа $G(m,-m)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда число m является π-числом и множество π содержит число 2.

Если теперь вместо $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы Баумслага — Солитэра рассмотреть свойство почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости этой группы, то соответствующий критерий имеет следующую очень простую формулировку.

Теорема 10. *Пусть π — произвольное множество простых чисел. Группа Баумслага — Солитэра $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p из множества π.*

Заметим, что здесь множество π не обязано быть конечным. В силу теоремы 10 для группы Баумслага — Солитэра свойство почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости равносильно свойству почти π-примарной аппроксимируемости.

Теоремы 9 и 10 доказаны в работе автора [96]. Формулировки этих теорем приведены также в обзорной статье [87] Д. И. Молдаванского, посвященной аппроксимационным свойствам групп Баумслага — Солитэра.

Перейдем теперь к HNN-расширениям групп. Напомним, что если G — группа, H и K — подгруппы группы G и $\varphi : H \longrightarrow K$ — изоморфизм, то можно рассматривать HNN-расширение

$$G^* = (G, t;\ t^{-1}ht = h\varphi, h \in H)$$

группы G с подгруппами H и K, связанными относительно φ. Напомним, что группа G^* порождается всеми порождающими базовой группы G, а также проходной буквой t, и определяется всеми определяющими соотношениями группы G, а также всевозможными соотношениями $t^{-1}ht = h\varphi$, где $h \in H$. Напомним еще, что HNN-расширение называется нисходящим, если одна из его связанных подгрупп, например H, совпадает с базовой группой G. В этом случае изоморфизм φ представляет собой инъективный эндоморфизм группы G, а группа G^* называется нисходящим HNN-расширением группы G, соответствующим эндоморфизму φ, и обозначается через $G(\varphi)$. При этом подгруппу V группы G будем называть φ-совместимой, если $V\varphi = V \cap G\varphi$.

В 1992 году Д. И. Молдаванский в работе [30] получил следующий критерий финитной аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения.

Группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда пересечение всех нормальных φ-совместимых подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой.

Этот критерий является фильтрационным, и он не дает ответа на вопрос о том, будет ли то или иное конкретное нисходящее HNN-расширение финитно аппроксимируемой группой. Тем не менее, с помощью этого критерия могут быть доказаны некоторые известные к настоящему времени теоремы, утверждающие финитную аппроксимируемость того или иного нисходящего HNN-расширения, например, следующий хорошо известный результат Д. Вайза и Т. Су [74].

Нисходящее HNN-расширение полициклической группы финитно аппроксимируемо.

Один из возможных путей обобщения теоремы Д. Вайза и Т. Су связан с упомянутой выше теоремой А. Л. Шмелькина о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полициклической группы. Ослабляя требование полицикличности базовой группы HNN-расширения до требования ее почти аппроксимируемости в некоторых классах конечных групп, удалось получить ряд обобщений некоторых известных теорем о финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений.

Так, например, с помощью сформулированного выше фильтрационного критерия Д. И. Молдаванского автором диссертации доказан следующий результат [102].

Теорема 11. *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G, $G(\varphi)$ — соответствующее нисходящее HNN-расширение группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n. Если группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого множества π простых чисел, не делящих n, то группа $G(\varphi)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема.*

Если в теореме 11 требование почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G заменить на требование почти π-примарной аппроксимируемости для некоторого конечного множества π простых чисел, взаимно простых с n, то помимо $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы $G(\varphi)$ удается доказать еще и ее почти π-примарную аппроксимируемость. Соответствующий результат, полученный автором в работе [113], формулируется следующим образом.

Теорема 12. *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G, $G(\varphi)$ — соответствующее нисходящее HNN-расширение группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n.*

Если для некоторого конечного множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G почти π-примарно аппроксимируема, то и группа $G(\varphi)$ почти π-примарно аппроксимируема.

В частности, если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p, то и группа $G(\varphi)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Эта теорема может быть применена к произвольному нисходящему HNN-расширению редуцированной разрешимой минимаксной группы. Действительно, как уже отмечалось выше, редуцированная разрешимая минимаксная группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p, и, кроме того, легко видеть, что любая подгруппа разрешимой минимаксной группы G, изоморфная этой группе, имеет в группе G конечный индекс. Поэтому частным случаем теоремы 12 является следующий недавний результат А. Ремтулы и М. Ширвани [90].

Нисходящее HNN-расширение редуцированной разрешимой минимаксной группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Еще более частным случаем теоремы 12 является упомянутый выше результат Д. Вайза и Т. Су о $\mathcal{F}$-аппроксимируемости произвольного нисходящего HNN-расширения полициклической группы [74]. Теорема 12 позволяет усилить результат Д. Вайза и Т. Су следующим образом.

Нисходящее HNN-расширение $G(\varphi)$ полициклической группы G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемо для каждого простого числа p, не делящего индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G.

Доказательство результата Д. Вайза и Т. Су, приведенное в [74], нетривиально. То же самое можно сказать о доказательстве теоремы Ремтулы и Ширвани, приведенном в работе [90]. Оно использует теорию разрешимых групп конечного ранга [80]. В связи с этим следует заметить, что сформулированная выше теорема 7 о разрешимых группах конечного ранга позволяет доказать теорему 12 в частном случае, когда требование конечности общего ранга базы HNN-расширения заменяется требованием ее разрешимости и конечности специального ранга (см. работу автора [100]). Даже в этом частном случае теорема 12 перекрывает результат Ремтулы и Ширвани.

Изложенные в диссертации доказательства теорем 11 и 12 проведены в достаточно общей ситуации, но, тем не менее, они оказались значительно проще доказательств частных случаев этих теорем, опубликованных Вайзом, Су, Ремтуллой и Ширвани в работах [74] и [90].

Заметим еще, что в силу упомянутого выше результата о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости конечно порожденных линейных групп теорема 12 является частичным обобщением следующего нетривиального (и, по-видимому не достаточно подробно доказанного) результата А. Борисова и М. Сапира [62].

Произвольное нисходящее HNN-расширение $G(\varphi)$ конечно порожденной линейной группы G является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

В этой теореме не предполагается конечность индекса подгруппы $G\varphi$ в группе G, и поэтому данная теорема не является следствием теоремы 12.

Заметим еще, что даже в ситуации, когда индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен, остается ряд нерешенных вопросов о финитной аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения $G(\varphi)$. Так, например, остается открытым следующий вопрос Д. И. Молдаванского: будет ли группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируемой, если G является конечно порожденной финитно аппроксимируемой группой и индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен?

Рассмотрим теперь случай, когда HNN-расширение не является нисходящим, а связанные подгруппы имеют конечные индексы в базовой группе. Для такого HNN-расширения имеет место следующий результат автора [99].

Теорема 13. *Пусть G — $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного общего ранга с нетривиальным тождеством. И пусть G^* — HNN-расширение группы G с собственными связанными подгруппами H и K, имеющими конечные индексы в группе G.*

1. Группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*.

2. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то и группа G^* почти π-примарно аппроксимируема. В частности, имеют место следующие три утверждения.

3. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти разрешимой FATR-группой, то группа G^* почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел.

4. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти разрешимой минимаксной группой, то группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

5. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти полициклической, то группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p.

Первое утверждение этой теоремы обобщает аналогичный критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы, доказанный Андреадакисом, Раптисом и Варсосом в работе [54].

Как уже отмечалось выше, конечно порожденная $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного ранга является почти разрешимой минимаксной группой, и следовательно, она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p. Поэтому, если рассмотреть HNN-расширение такой группы со связанными подгруппами конечных индексов, то к этому HNN-расширению можно применить как теорему 13, так и теорему 12. Комбинация этих теорем дает следующий результат.

Пусть G — конечно порожденная $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного ранга. И пусть G^* — HNN-расширение группы G со связанными подгруппами H и K, имеющими конечные индексы в группе G.

Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:

(1) группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема;

(2) или $H = G$, или $K = G$, или в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*;

(3) группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Так как группа Баумслага — Солитэра $G(m,n)$ представляет собой HNN-расширение бесконечной циклической группы $G = (a)$ со связанными подгруппами $H = (a^m)$ и $K = (a^n)$, то, как легко видеть, частным случаем последнего утверждения является следующий уже упомянутый выше результат Баумслага — Солитэра — Мескина.

Группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $|m| = 1$, или $|n| = 1$, или $|m| = |n|$.

Наряду с теоремой 13 в настоящее время доказаны несколько других результатов общего характера о финитной аппроксимируемости HNN-расширений, не являющихся нисходящими (см., напр., работу Д. И. Молдаванского [33]).

Для обобщенных свободных произведений автором в работе [99] получен следующий аналог теоремы 13.

Теорема 14. *Пусть A и B — $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы конечного общего ранга с нетривиальными тождествами. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, причем H является собственной подгруппой конечного индекса в группах A и B.*

1. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G.

2. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B почти π-примарно аппроксимируемы для некоторого конечного множества π простых чисел, то и группа G почти π-примарно аппроксимируема. В частности, имеют место следующие три утверждения.

3. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти разрешимыми FATR-группами, то группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел.

4. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти разрешимыми минимаксными группами, то группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

5. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти полициклическими, то группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p.

В связи с пунктом 1 теоремы 14 заметим, что свободное произведение $G = (A * B, H)$ двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп A и B с объединенной подгруппой H, имеющей конечные индексы в группах A и B, не обязано быть $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой даже в простейшем случае, когда A и B — полициклические группы. Соответствующий пример построен в работе автора [97].

Непосредственным следствием теоремы 14 является следующее утверждение, доказанное автором в работе [97].

Пусть A и B — конечно порожденные $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы конечного ранга. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, причем H является собственной подгруппой конечного индекса в группах A и B.

Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:

(1) группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема;

(2) в группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G;

(3) группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Основные результаты третьей главы диссертации и их научная новизна

Третья глава диссертации посвящена результатам об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений некоторыми классами конечных групп. Основные результаты третьей главы сформулированы ниже в теоремах 15–22.

Напомним, что если A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K, то свободным произведением групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ, называется группа

$$G = (A * B; H = K, \varphi),$$

порождаемая всеми порождающими групп A и B и определяемая всеми определяющими соотношениями этих групп, а также всевозможными соотношениями $h = h\varphi$, где $h \in H$. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому далее будем считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее для группы G будем использовать более компактное обозначение $G = (A * B, H)$ и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы $G = (A * B, H)$ является финитная аппроксимируемость групп A и B. Несложные примеры показывают, что это условие не является достаточным.

Еще одно необходимое условие финитной аппроксимируемости группы $G = (A * B, H)$ получено М. Ширвани в работе [92] для случая, когда свободные множители A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству. Этот результат формулируется следующим образом.

Пусть A и B — группы с нетривиальными тождествами. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, причем H является собственной подгруппой в каждой из групп

A и B. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то подгруппа H $\mathcal{F}$-отделима в группах A и B.

Заметим, что в общем случае из финитной аппроксимируемости свободного произведения $G = (A * B, H)$ групп A и B с собственной объединенной подгруппой H не следует финитная отделимость подгруппы H в группах A и B. Соответствующие примеры хорошо известны (см., напр., [92]). Наиболее простой пример такого рода, недавно предложенный Д. И. Молдаванским, представляет собой свободное произведение $G = (A * B, H)$ финитно аппроксимируемой группы A и нециклической свободной группы B с объединенной циклической подгруппой H, которая не финитно отделима в A и выделяется свободным множителем в B. Любая такая группа $G = (A * B, H)$ раскладывается в обычное свободное произведение группы A и свободной группы, и поэтому является финитно аппроксимируемой группой.

В ряде случаев финитная отделимость подгруппы H в группах A и B оказывается не только необходимым, но и достаточным условием для $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы $G = (A*B, H)$. В диссертации доказано несколько общих результатов такого рода, обобщающих известные классические теоремы, доказанные при различных ограничениях на свободные множители A и B.

При изучении финитной аппроксимируемости группы $G = (A * B, H)$ дополнительные ограничения как правило накладываются не только на свободные множители A и B, но и на объединенную подгруппу H. Примером таких ограничений может служить конечность подгруппы H, ее цикличность, конечность индексов подгруппы H в группах A и B, а также нормальность подгруппы H. Здесь и далее требование нормальности объединенной подгруппы H означает, что подгруппа H нормальна в группах A и B (или, что равносильно, H нормальна в G).

Систематическое изучение финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп было начато Г. Баумслагом в 60-е годы прошлого века. В его статье [58] получен целый ряд фундаментальных результатов в этом направлении, а также намечен путь для дальнейших исследований. Сначала Баумслаг доказал, что если группы A и B конечны, то группа $G = (A*B, H)$ финитно аппроксимируема. На основе этого результата он разработал методику исследования финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений бесконечных групп. Одним из первых результатов, полученных Баумслагом в этом направлении, является следующее утверждение [58].

Свободное произведение $G = (A * B, H)$ *полициклических групп* A *и* B *с нормальной объединенной подгруппой* H *является финитно аппроксимируемой группой.*

Недавно для такого свободного произведения А. В. Розовым в работе [44] установлено следующее более тонкое и нетривиальное утверждение.

Свободное произведение $G = (A * B, H)$ *полициклических групп* A *и* B *с нормальной объединенной подгруппой* H *почти* $\mathcal{F}_p$*-аппроксимируемо для каждого простого числа* p.

До сих пор не известно, будет ли свободное произведение двух полициклических групп с нормальным объединением линейной группой (см. вопрос 8.2 из "Коуровской тетради", поставленный Б. Верфрицем). Сформулированный выше результат Розова дает надежду на положительное решение этого вопроса.

Рассмотрим теперь обобщения результатов Баумслага и Розова о свободном произведении двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой на случай свободного произведения $G = (A * B, H)$ разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H.

Вопрос о финитной аппроксимируемости такого свободного произведения решается в [106] следующим образом.

Теорема 15. *Пусть* $G = (A * B, H)$ *— свободное произведение почти разрешимых групп* A *и* B *конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой* H*, причем* $H \neq A$ *и* $H \neq B$*. Группа* G $\mathcal{F}$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы* A*,* B*,* A/H *и* B/H *редуцированы.*

Так как для разрешимой группы конечного ранга условие редуцированности равносильно финитной аппроксимируемости, то редуцированность групп A, B, A/H и B/H из теоремы 15 равносильна тому, что свободные множители A и B финитно аппроксимируемы, а объединенная подгруппа H финитно отделима в каждом из свободных множителей.

Заметим, что конечность ранга групп A и B существенна в теореме 15. Действительно, свободное произведение G финитно аппроксимируемых абелевых групп A и B с объединенными циклическими финитно отделимыми подгруппами H и K не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Для построения соответствующего примера разобьем множество всех простых чисел на два непустых непересекающихся подмножества π_1 и π_2. Пусть A — обобщенное прямое произведение бесконечного семейства бесконечных циклических групп A_i с одной объединенной подгруппой H, причем индексы подгруппы H в группах A_i "пробегают" множество всех π_1-чисел. Аналогично, пусть B — обобщенное прямое произведение бесконечных циклических групп B_j с одной объединенной подгруппой K, причем индексы подгруппы K в группах B_j "пробегают" множество всех π_2-чисел. Очевидно, что A и B — финитно аппроксимируемые абелевы группы, а их подгруппы H и K финитно отделимы. При этом группа $G = (A * B; H = K)$ не является финитно аппроксимируемой, так как в ней из порождающего элемента объединенной подгруппы извлекаются корни любой π_1-степени и любой π_2-степени, и поэтому данный элемент переходит в 1 при любом гомоморфизме группы G на конечную группу.

Так как любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга почти разрешима [84], то частным случаем теоремы 15 является следующий более ранний результат автора [97].

Пусть $G = (A * B, H)$ *— свободное произведение конечно порожденных* $\mathcal{F}$*-аппроксимируемых групп* A *и* B *конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой* H*, причем* $H \neq A$ *и* $H \neq B$*. Группа* G $\mathcal{F}$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа* H *финитно отделима в группах* A *и* B*.*

Так как в полициклической группе все подгруппы финитно отделимы, то непосредственным следствием этого результата является упомянутая выше теорема Баумслага о финитной аппроксимируемости любого свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением. Существуют достаточно тонкие примеры конечно порожденных $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп конечного ранга, в которых не все нормальные подгруппы финитно отделимы [80, п. 11.1.4]. Поэтому свободное произведение двух конечно порожденных $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп конечного ранга с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Теперь выясним, при каких обстоятельствах свободное произведение двух почти разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой для подходящего конечного множества π простых чисел. Ответ на этот вопрос дает следующий результат автора [106].

Теорема 16. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H редуцированы и являются почти FATR-группами.*

С помощью теоремы 4 легко видеть, что группы A, B, A/H и B/H из теоремы 16 являются редуцированными почти FATR-группами тогда и только тогда, когда они $\mathcal{F}_{\pi_1}$-аппроксимируемы для подходящего конечного множества π_1 простых чисел. Поэтому теорема 16 может быть переформулирована следующим образом.

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H $\mathcal{F}_{\pi_1}$-аппроксимируемы для подходящего конечного множества π_1 простых чисел.

Так как свободное произведение двух конечных p-групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, то для фиксированного конечного множества π простых чисел $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость обобщенного свободного произведения G из теоремы 16 не равносильна $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости групп A, B, A/H и B/H. Однако, если вместо свойства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости рассмотреть свойство почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — фиксированное конечное множество простых чисел, то удается получить следующий результат.

Теорема 17. *Пусть π — конечное множество простых чисел. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы.*

Утверждение теоремы 17 является новым даже для почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Частным случаем этой теоремы является уже упомянутый выше нетривиальный результат А. В. Розова [44], утверждающий почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением для любого простого p. Другим частным случаем теоремы 17 является полученный А. В. Розовым [43] критерий почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения двух нильпотентных групп конечного ранга с нормальным объединением.

Заметим еще, что теорема 16 является следствием теорем 17 и 4. Действительно, пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $A \neq H \neq B$. Предположим сначала, что группы A, B, A/H и B/H редуцированы и являются почти FATR-группами. Тогда по теореме 4 существует конечное множество π простых чисел такое, что группы A, B, A/H и B/H почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы. Отсюда по теореме 17 следует, что группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Поэтому существует конечное множество Π простых чисел, содержащее π и такое, что группа G $\mathcal{F}_\Pi$-аппроксимируема. Таким образом, достаточность в теореме 16 обеспечивается теоремами 4 и 17. Аналогично, применяя сначала теорему 17, а затем теорему 4, можно легко доказать и необходимость в теореме 16.

Нетривиальному доказательству теоремы 17 почти полностью посвящена работа автора [106]. Там же приводится очень простое доказательство теоремы 15.

Как уже отмечалось выше, конечно порожденная $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного ранга является почти разрешимой минимаксной группой и обладает свойством почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для всех достаточно больших простых p. Поэтому непосредственным следствием теорем 15 и 17 является следующее утверждение, частично доказанное автором в работе [97].

Пусть A и B — конечно порожденные $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы конечного ранга. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с A и B.

Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:

(1) группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема;

(2) подгруппа H финитно отделима в группах A и B;

(3) группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Аналогичный критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости имеет место и для случая, когда объединенная подгруппа является циклической. Этот критерий получен автором в работе [97] и формулируется следующим образом.

Пусть A и B — конечно порожденные $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы конечного ранга. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с циклической объединенной подгруппой H, не совпадающей с A и B.

Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.

Данное утверждение является частным случаем следующей более общей теоремы, полученной автором в работе [98].

Теорема 18. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение редуцированных почти разрешимых FATR-групп A и B с циклической объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.*

Примером обобщенного свободного произведения, удовлетворяющего всем условиям теоремы 18 и не являющегося финитно аппроксимируемым, может служить группа Хигмана [71]

$$(a, b, c;\ b^{-1}ab = a^2,\ c^{-1}ac = a^2),$$

представляющая собой свободное произведение двух разрешимых групп Баумслага — Солитэра $(a, b;\ b^{-1}ab = a^2)$ и $(a, c;\ c^{-1}ac = a^2)$ с объединенной подгруппой (a). Легко видеть, что эта подгруппа не является финитно отделимой в свободных множителях, и поэтому данное обобщенное свободное произведение не обладает свойством финитной аппроксимируемости.

Так как в почти полициклических группах все подгруппы финитно отделимы, то непосредственным следствием теоремы 18 является следующий результат Д. Дайер, доказанный в работе [67].

Свободное произведение двух почти полициклических групп с циклическим объединением является финитно аппроксимируемой группой.

Пока не удается ослабить условие FATR в теореме 18 до требования конечности ранга. Значительно проще дело обстоит в случае, когда A и B — нильпотентные группы конечного ранга. В этом случае наряду с финитной аппроксимируемостью для свободного произведения $G = (A * B, H)$ с циклическим объединением H удается также исследовать и более тонкое свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости. Соответствующий критерий получен автором в работе [108] и формулируется следующим образом.

Теорема 19. *Пусть π — непустое множество простых чисел, $G = (A * B, H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с объединенной циклической подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в каждой из групп A и B.*

Приведенный выше пример показывает, что свободное произведение $G = (A * B, H)$ финитно аппроксимируемых абелевых групп A и B с объединенной циклической финитно отделимой подгруппой H не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Поэтому условие конечности ранга, накладываемое в теоремах 18 и 19 на группы A и B, существенно.

Так как конечно порожденная нильпотентная группа финитно аппроксимируема, имеет конечный ранг, и в ней все подгруппы финитно отделимы, то непосредственным следствием теоремы 19 является классический результат Г. Баумслага [58], утверждающий финитную аппроксимируемость свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением.

Пусть теперь A — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $H = (h)$ — ее неединичная циклическая подгруппа, m — наибольшее целое положительное число такое, что уравнение $x^m = h$ разрешимо в группе A. Легко видеть, что подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в A тогда и только тогда, когда m — π-число. Поэтому из теоремы 19 вытекает следующее очень простое утверждение, которое обобщает некоторые известные результаты, доказанные в работах [76] и [77].

Пусть π *— непустое множество простых чисел,* A *и* B *— конечно порожденные нильпотентные группы без кручения,* $G = (A * B, H)$ *— свободное произведение групп* A *и* B *с объединенной неединичной циклической подгруппой* $H = (h)$*, причем* $H \neq A$ *и* $H \neq B$*. И пусть* m *и* n *— наибольшие целые положительные числа такие, что уравнения* $x^m = h$ *и* $y^n = h$ *разрешимы в группах* A *и* B *соответственно. Группа* G $\mathcal{F}_\pi$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда числа* m *и* n *являются* π*-числами.*

Вернемся снова к результату Дайер о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух почти полициклических групп с циклическим объединением. Одно из обобщений этого результата, полученное автором в работе [114], формулируется следующим образом.

Теорема 20. *Пусть* $G = (A * B, H)$ *— свободное произведение* $\mathcal{F}$*-аппроксимируемых групп* A *и* B *с циклической объединенной подгруппой* H*. Если существуют гомоморфизмы групп* A *и* B *на почти полициклические группы, инъективные на подгруппе* H*, то группа* G $\mathcal{F}$*-аппроксимируема.*

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Пусть $G = (A*B, H)$ *— свободное произведение групп* A *и* B *с циклической объединенной подгруппой* H*. Если группы* A *и* B *аппроксимируемы полициклическими группами без кручения, то группа* G $\mathcal{F}$*-аппроксимируема.*

Если в этом утверждении условие аппроксимируемости полициклическими группами без кручения заменить более сильным условием аппроксимируемости конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то удается доказать почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы $G = (A * B, H)$ для каждого простого p. В действительности при этих ограничениях имеет место следующий более сильный результат, доказанный автором в работе [111].

Теорема 21. *Пусть* $G = (A * B, H)$ *— свободное произведение групп* A *и* B *с циклической объединенной подгруппой* H*. И пусть группы* A *и* B *аппроксимируемы конечно порожденными нильпотентными группами* *без кручения. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа M такая, что фактор-группа G/M является конечной нильпотентной группой, и группа M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p. В частности, имеют место следующие утверждения.*

1. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, и более того, она аппроксимируема конечными разрешимыми π-группами для некоторого конечного множества π простых чисел.

2. Группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p, и, в частности, она почти аппроксимируема нильпотентными группами.

В силу хорошо известной теоремы Магнуса любая свободная группа аппроксимируема конечно порожденными нильпотентными группами без кручения. Поэтому следующее утверждение является частным случаем теоремы 21.

Пусть A и B — свободные группы или конечно порожденные нильпотентные группы без кручения. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной циклической подгруппой H. Тогда группа G аппроксимируема конечными разрешимыми группами и почти аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p.

Заметим, что частным случаем этого утверждения является следующий результат Г. Баумслага, доказанный в его фундаментальной работе [58].

Свободное произведение двух свободных групп с циклическим объединением является финитно аппроксимируемой группой.

Заметим еще, что для свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением известен также и следующий критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, доказанный автором в работе [2].

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение свободных групп A и B с объединенной неединичной циклической подгруппой $H = (h)$. И пусть m и n — наибольшие целые положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = h$ разрешимы в группах A и B соответственно.

1. Если одно из чисел m или n равно 1, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.

2. Если же $m > 1$ и $n > 1$, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда m и n являются степенями числа p.

3. Группа G аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p.

Этот результат автора, опубликованный в работе [2], послужил отправной точкой для поиска нетривиальных достаточных условий аппроксимируемости нильпотентными группами без кручения свободного произведения свободных групп с циклическим объединением (см. работу Лабута [78]). Он используется также в работе [63, Theorem 8].

Заметим еще, что утверждения 1 и 2 независимо от работы автора [2] были получены Кимом и Тангом в [77].

Как показывают утверждения 1, 2 и 3, свободное произведение двух свободных групп с циклическим объединением не обязано быть аппроксимируемым нильпотентными группами. Тем не менее, оно обладает этим свойством почти в силу теоремы 21. Заметим еще, что свободное произведение двух свободных групп с циклическим объединением финитно аппроксимируемо относительно сопряженности [68], и в нем все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы [64]. Свойством финитной аппроксимируемости относительно сопряженности обладает также и свободное произведение двух конечно порожденных нильпотентных групп (и даже свободное произведение двух почти полициклических групп) с циклическим объединением (см. [68] и вопрос 8.70 из "Коуровской тетради"). Заметим также, что в [89] найдены необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости для произвольных обобщенных свободных произведений и HNN-расширений конечно порожденных нильпотентных групп.

Как уже отмечалось выше, большинство результатов о $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений получены с помощью доказанного Г. Хигманом критерия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп. Для формулировки этого критерия нам потребуется несколько дополнительных понятий и обозначений.

Напомним прежде всего, что нормальным рядом группы A называется конечный ряд $\mathcal{R}_A$ вида:

$$1 = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_n = A,$$

состоящий из нормальных подгрупп группы A. Если $\mathcal{R}_A$ — нормальный ряд группы A, имеющий указанный выше вид, и H — подгруппа группы A, то через $\mathcal{R}_A(H)$ будем обозначать нормальный ряд группы H, который получается удалением повторяющихся членов из ряда

$$1 = A_0 \cap H \leq A_1 \cap H \leq \ldots \leq A_n \cap H = H.$$

Нормальный ряд $\mathcal{R}_A$ группы A называется главным, если в нем нет повторяющихся членов, и его нельзя уплотнить никаким другим нормальным рядом группы A (без повторяющихся членов). Очевидно, что нормальный ряд конечной p-группы является главным тогда и только тогда, когда все его факторы имеют порядок p.

Упомянутый выше фундаментальный результат Г. Хигмана [72] формулируется следующим образом.

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение конечных p-групп A и B с объединенной подгруппой H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах A и B существуют главные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ такие, что $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$.

Условие $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$, найденное Хигманом, естественно называть H-совместимостью рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$. Оно фактически означает, что множество всех пересечений подгруппы H с членами ряда $\mathcal{R}_A$ совпадает с множеством всех пересечений подгруппы H с членами ряда $\mathcal{R}_B$.

В теореме Хигмана предполагается, что свободные множители A и B являются конечными p-группами. Ослабляя это ограничение до требования $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных множителей и конечности объединяемой подгруппы, мы доказываем следующий результат [109].

Теорема 22. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной p-подгруппой H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах A и B существуют нормальные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) в каждом из рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ все факторы, кроме быть может одного, являются конечными группами порядка p;

(ii) $\mathcal{R}_A(H)$ и $\mathcal{R}_B(H)$ — главные ряды группы H;

(iii) $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$.

Еще одно обобщение результата Хигмана, вытекающее из теоремы 22 при более жестких ограничениях на A и B, формулируется следующим образом.

Пусть $G = (A*B, H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной p-подгруппой H. И пусть в группах A и B существуют конечные нормальные p-подгруппы S и T, содержащие подгруппу H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах S и T существуют главные ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ такие, что $\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_T(H)$ и все члены рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ нормальны в группах A и B соответственно.

Аналоги этого результата и теоремы Г. Хигмана доказаны Д. И. Молдаванским для HNN-расширений в работах [35] и [31]. Другие обобщения теоремы Хигмана получены в [1].

Методы, используемые в работе

Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Большинство результатов о $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы G получено с использованием методики Г. Баумслага [58], основанной на его фундаментальной теореме о $\mathcal{F}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп. Данная методика состоит в нахождении достаточного числа гомоморфных образов группы G, являющихся обобщенными свободными произведениями конечных групп. В качестве таких гомоморфных образов используются свободные произведения $G_{MN} = (A/M * B/N; HM/M = KN/N, \varphi_{MN})$ конечных фактор-групп A/M и B/N с подгруппами HM/M и KN/N, объединенными относительно изоморфизма φ_{MN}, индуцированного изоморфизмом φ. Для того, чтобы такой индуцированный изоморфизм существовал, на подгруппы M и N накладывается очевидное условие φ-совместимости: $(H \cap M)\varphi = K \cap N$. Если M и N — пара нормальных φ-совместимых подгрупп групп A и B, то можно рассматривать свободное произведение $G_{MN} = (A/M * B/N; HM/M = KN/N, \varphi_{MN})$ и гомоморфизм ρ_{MN} группы G на группу G_{MN}, продолжающий естественные гомоморфизмы групп A и B на фактор-группы A/M и B/N. Методика доказательства

$\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы $G = (A * B; H = K, \varphi)$, разработанная Г. Баумслагом, основана на том, что для каждого неединичного элемента g группы G в группах A и B строятся нормальные φ-совместимые подгруппы M и N конечных индексов такие, что образ элемента g относительно гомоморфизма ρ_{MN} отличен от 1. Способ построения таких подгрупп M и N зависит от элемента g и как правило нетривиален.

На этом пути за последние пять десятков лет получено большое количество результатов, утверждающих $\mathcal{F}$-аппроксимируемость группы $G = (A * B; H = K, \varphi)$ (или дающих ее критерий) при дополнительных ограничениях на A, B, H и K. Интерес к таким частным результатам объясняется отсутствием общих критериев $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы G, а также тем обстоятельством, что известные общие условия $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы G имеют "фильтрационный характер", и они как правило не дают ответа на вопрос о том, будет ли то или иное конкретное обобщенное свободное произведение $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Так, например, знаменитая фильтрационная теорема Г. Баумслага [58] утверждает следующее.

Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. И пусть $(A_i)_{i \in I}$ и $(B_j)_{j \in J}$ — семейства всех нормальных подгрупп конечного индекса в группах A и B, у которых есть φ-совместимые нормальные "напарники" конечных индексов в группах B и A соответственно. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то $\bigcap_{i \in I} A_i = 1$ и $\bigcap_{j \in J} B_j = 1$. Если выполняются два последние равенства, а также равенства $\bigcap_{i \in I} A_i H = H$ и $\bigcap_{j \in J} B_j K = K$, то группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема.

Существенное расхождение между необходимым и достаточным условиями $\mathcal{F}$-аппроксимируемости в этой теореме является причиной значительных сложностей, возникающих при изучении $\mathcal{F}$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений. В некоторых случаях, достаточное условие из фильтрационной теоремы Баумслага оказывается также и необходимым [92], но его фильтрационный характер оставляет без ответа вопрос о $\mathcal{F}$-аппроксимируемости конкретных обобщенных свободных произведений.

Перейдем теперь к HNN-расширениям групп. Для них (как и для обобщенных свободных произведений) все известные общие теоремы о $\mathcal{F}$-аппроксимируемости имеют фильтрационный характер, общие критерии финитной аппроксимируемости отсутствуют, и при этом имеется существенное расхождение между необходимым и достаточным условиями $\mathcal{F}$-аппроксимируемости в теореме, аналогичной фильтрационной теореме Г. Баумслага. Эти три причины приводят к большому количеству проблем и результатов, относящихся к $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширений при определенных дополнительных ограничениях на базовые группы и связанные подгруппы.

Исследования $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширений были начаты в работах [65] и [56], в которых почти одновременно была установлена финитная аппроксимируемость HNN-расширения конечной группы. Более того, в работе [56] фактически было сформулировано понятие совместимой подгруппы в базе HNN-расширения, явившееся аналогом понятия пары совместимых подгрупп для обобщенного свободного произведения. Уточнения некоторых формулировок из [56] привели к созданию методики, аналогичной той, которая введена Г. Баумслагом для обобщенных свободных произведений. Эта методика позволяет выразить условия $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения как определенные свойства семейства всех нормальных совместимых подгрупп конечного индекса базовой группы. Так необходимое условие финитной аппроксимируемости HNN-расширения состоит в том, что его базовая группа является не просто $\mathcal{F}$-аппроксимируемой, а аппроксимируемой фактор-группами по нормальным совместимым подгруппам конечного индекса базовой группы, а достаточное условие получается, если к этому добавить требование отделимости в классе таких фактор-групп каждой из связанных подгрупп. Для нисходящих HNN-расширений приведенное необходимое условие является также и достаточным (результат Д. И. Молдаванского [30]).

Д. И. Молдаванский распространил описанные выше методики исследования $\mathcal{F}$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. При этом за основу были взяты известные критерии $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп и для HNN-расширения конечной p-группы, полученные соответственно Г. Хигманом [72] и Д. И. Молдаванским [31].

Отсутствие аналогичных критереив $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для обобщенного свободного произведения двух конечных π-групп и для HNN-расширения конечной π-группы в значительной степени ограничивает исследования свойства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для свободных конструкций. Аналогичные трудности возникают и при исследовании аппроксимируемости свободных конструкций другими классами групп. Тем не менее, доказанная автором диссертации теорема об аппроксимируемости корневым классом свободного произведения любого семейства групп, аппроксимируемых этим классом, позволяет в какой-то мере распространить описанные выше методики исследования финитной аппроксимируемости свободных конструкций на аппроксимируемость некоторыми другими классами групп.

Для исследования свойств почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости и почти π-примарной аппроксимируемости в диссертации разработаны более специальные комбинированные методы, которые наряду с идеей факторизации по надлежащим образом подобранным совместимым подгруппам используют также подходы, связанные с внутренней структурой исследуемых групп и свободных конструкций. При этом важную роль играют доказанные автором результаты о финитной и почти π-примарной аппроксимируемости расщепляемых расширений. Эти результаты используются в диссертации при исследовании финитной и почти π-примарной аппроксимируемости свободных конструкций. Возможность использования расщепляемых расширений при исследовании свободных конструкций связана с тем, что любое расширение с помощью свободной группы расщепляемо, а любое нисходящее HNN-расширение является расщепляемым расширением нормального замыкания базовой группы с помощью бесконечной циклической группы. Заметим здесь, что если база нисходящего HNN-расширения конечно порождена, то ее нормальное замыкание может уже не быть конечно порожденной группой, но оно имеет конечный общий ранг. Поэтому полученные в диссертации результаты о расщепляемых расширениях групп конечного общего ранга оказываются полезными при исследованиях некоторых конечно порожденных групп. Еще одна причина, оправдывающая появление в диссертации результатов о группах конечного общего ранга, состоит в возможности их применения для доказательств тех результатов диссертации, которые относятся к теории разрешимых групп конечного специального ранга. При этом используются также подходы к изучению разрешимых групп, заложенные в свое время А. И. Мальцевым и К. Грюнбергом и развитые в дальнейшем Д. Робинсоном [80]. Заметим еще, что используемые в диссертации подходы к исследованию свойств π-примарной аппроксимируемости и почти π-примарной аппроксимируемости позволяют, в частности, устанавливать нильпотентную аппроксимируемость, а также почти аппроксимируемость нильпотентными группами для некоторых групп и свободных консрукций.

Научная значимость работы

Результаты и методы работы используются рядом авторов, занимающихся вопросами аппроксимируемости и почти аппроксимируемости свободных конструкций различными корневыми классами групп. В связи с этим сформировалось научное направление, представителями которого являются Д. В. Гольцов, Е. А. Иванова, А. В. Розов, Е. В. Соколов, Е. А. Туманова, Д. Тьеджо и др. Соответствующие публикации этих авторов частично приведены в списке литературы. Результаты, полученные автором диссертации, используются также зарубежными алгебраистами (см., напр., [78], [63], а также упомянутую выше статью Б. Верфрица "Remarks on Azarov's work on soluble groups of finite rank" [94]).

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся основные результаты диссертации, сформулированные в теоремах 1–22.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов подтверждается подробными и аккуратно изложенными доказательствами.

Результаты работы докладывались на научно-исследовательском семинаре по алгебре (МГУ, 2016 г.); на семинаре "Теория групп" под руководством А. Л. Шмелькина, А. Ю. Ольшанского и А. А. Клячко (МГУ, неоднократно); на семинаре по теории групп под руководством Д. И. Молдаванского (ИвГУ, неоднократно); на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (МГУ, 2008 г.); на научной конференции "Мальцевские чтения", посвященной 100-летию со дня рождения академика А. И. Мальцева (ИвГУ, 2009 г.); на Международной алгебраической конференции, посвященной памяти Д. К. Фаддеева (Санкт-

Петербургский государственный университет); на XIII Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения", посвященной 80-летию со дня рождения профессора С. С. Рышкова (Тула, 2015 г.); на Международной конференции "Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости", посвященной 75-летию Д. И. Молдаванского (ИвГУ, 2015 г.).

Публикации автора по теме диссертации

Работы автора по теме диссертации опубликованы в "Сибирском математическом журнале" (см. [97], [99], [106], [108]), в журнале "Математические заметки" (см. [98], [102], [110]), в журнале "Известия ВУЗов. Математика" (см. [100], [103], [109]), в журнале "Communications in Algebra" (см. [111]), во "Владикавказском математическом журнале" (см. [107]), в "Вестнике Томского государственного университета. Математика и механика" (см. [104]), в журнале "Моделирование и анализ информационных систем" (см. [96], [101], [105]), в "Чебышевском сборнике" (см. [112], [113], [114], [115]). По теме диссертации опубликовано 20 работ, из них 16 — в журналах, рекомендованных ВАК.

ГЛАВА 1

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ И ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА

Глава посвящена результатам об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости некоторыми классами конечных групп, полученным для групп конечного ранга, разрешимых групп конечного ранга, групп автоморфизмов и расщепляемых расширений.

Глава состоит из трех параграфов. В §1 получены обобщения классических результатов об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости групп автоморфизмов и расщепляемых расширений, а также нетривиальные аналоги этих результатов для свойства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Эти результаты используются в §2, посвященном группам конечного ранга, а также в §3, который посвящен разрешимым группам конечного ранга. В §3 доказан, в частности, критерий почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга, обобщающий известные теоремы и являющийся аналогом критерия $\mathcal{F}$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга, доказанного Д. Робинсоном.

§1. О группах автоморфизмов и расщепляемых расширениях

Основные результаты параграфа

Здесь рассматриваются свойства $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости групп, где $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп. Для каждого множества π простых чисел рассматривается также свойство π-примарной аппроксимируемости, т. е. аппроксимируемости классом $\mathcal{K} = \bigcup_{p\in\pi} \mathcal{F}_p$. Это свойство равносильно аппроксимируемости конечными нильпотентными π-группами. Если множество π состоит из одного простого числа p, то понятие π-примарной аппроксимируемости совпадает с понятием $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости.

А. И. Мальцев [24] доказал $\mathcal{F}$-аппроксимируемость произвольной конечно порожденной линейной группы. Следствием этого результата является теорема К. Гирша о $\mathcal{F}$-аппроксимируемости произвольной полициклической группы [73]. Свойством $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полициклические группы, вообще говоря, не обладают, но для них имеет место следующая классическая теорема А. Л. Шмелькина [51].

Любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.

Для конечно порожденных линейных групп свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости может уже не выполняться для каждого простого числа p, но тем не менее, хорошо известна следующая классическая теорема Мальцева (см., напр., [29, теор. 51.2.1], [24]).

Любая конечно порожденная линейная группа над полем нулевой характеристики почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Эта теорема является следствием нетривиальной характеризации конечно порожденных линейных групп над полями нулевой характеристики, полученной А. Лубоцким [83] в терминах близких к почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости.

В [27] А. И. Мальцев доказал $\mathcal{F}$-аппроксимируемость произвольного расщепляемого расширения конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы с помощью $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы. Напомним, что группа P называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, если A — нормальная подгруппа группы P, B — подгруппа группы P, $P = AB$ и $A \cap B = 1$.

Д. М. Смирнов [47] и Г. Баумслаг [57] независимо друг от друга доказали, что группа автоморфизмов конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы сама является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Из сформулированных выше результатов Мальцева и Смирнова — Баумслага следует, что голоморф конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы сам является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Напомним, что голоморфом группы G называется расщепляемое расширение H группы G с помощью группы автоморфизмов группы G такое, что каждый автоморфизм φ группы G совпадает с ограничением на G внутреннего автоморфизма группы H, производимого ее элементом φ.

Простые примеры показывают, что приведенные выше результаты Мальцева и Смирнова — Баумслага о расщепляемых расширениях и группах автоморфизмов не могут быть распространены с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Тем не менее, имеют место аналоги этих результатов для свойства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Для теоремы Мальцева такой аналог формулируется следующим образом.

Если конечно порожденная группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p, то любое расщепляемое расширение группы G с помощью почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы само является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Этот результат доказан ниже. Аналог теоремы Смирнова — Баумслага для почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости установлен А. Лубоцким [82]. В §1 все упомянутые выше результаты об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости групп автоморфизмов и расщепляемых расширений будут существенно обобщены и дополнены. Первый основной результат параграфа формулируется следующим образом.

Теорема 1.1. *Пусть группа G удовлетворяет следующему условию: для каждого целого положительного числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно.*

1. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то голоморф группы G является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

2. Если группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то голоморф группы G является почти π-примарно аппроксимируемой группой.

Приведем пример, иллюстрирующий эту теорему. Так как по теореме А. Л. Шмелькина любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p, то в силу теоремы 1.1. этим свойством обладает и голоморф полициклической группы. В действительности имеет место следующее более сильное утверждение: голоморф полициклической группы представим целочисленными матрицами [28].

Еще один доказанный здесь результат относится к расщепляемым расширениям групп и формулируется следующим образом.

Теорема 1.2. *Пусть группа G удовлетворяет следующему условию: для каждого целого положительного числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно.*

1. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то любое расщепляемое расширение группы G с помощью $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

2. Если группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то любое расщепляемое расширение группы G с помощью почти π-примарно аппроксимируемой группы является почти π-примарно аппроксимируемой группой.

Эта теорема оказывается весьма полезной при изучении финитной аппроксимируемости и других аппроксимационнх свойств некоторых классов групп и свободных конструкций. Она используются в доказательствах ряда результатов настоящей диссертации. В качестве совсем простой иллюстрации рассмотрим ее применение к полициклическим группам. Хорошо известно и легко проверяется, что любое расширение с помощью бесконечной циклической группы расщепляемо. Поэтому если в полициклической группе G рассмотреть субнормальный ряд

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

с циклическими факторами, то для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ группа G_k является либо конечным расширением группы G_{k-1}, либо расщепляемым расширением группы G_{k-1} с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому сформулированные выше результаты Гирша и Шмелькина о полициклических группах могут быть легко доказаны индукцией по n с помощью теоремы 1.2.

Рассмотрим теперь несколько следствий из теорем 1.1 и 1.2.

Хорошо известная теорема М. Холла утверждает, что если G — конечно порожденная группа и n — целое положительное число, то число всех подгрупп группы G индекса n конечно. Поэтому непосредственными следствиями теорем 1.1 и 1.2 являются упомянутые выше теоремы Смирнова — Баумслага и Мальцева о финитной аппроксимируемости групп автоморфизмов и расщепляемых расширений, а также следующий результат.

Следствие 1.1. *Если группа G конечно порождена и почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то голоморф группы G и любое расщепляемое расширение группы G с помощью почти π-примарно аппроксимируемой группы являются почти π-примарно аппроксимируемыми группами.*

Частным случаем этого утверждения является упомянутый выше результат А. Лубоцкого [82] о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы автоморфизмов конечно порожденной почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы. Доказательство этого результата, приведенное в работе [82], основано на использовании топологических методов. Здесь мы используем элементарные методы теории групп для доказательства теорем 1.1 и 1.2.

Из теоремы Лубоцкого вытекает, что группа автоморфизмов конечно порожденной свободной группы почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p. Недавно это утверждение было заново доказано Л. Паризом в [88].

Так как любая конечно порожденная линейная группа над полем нулевой характеристики почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p, то частным случаем следствия 1.1 является следующее утверждение.

Следствие 1.2. *Пусть G — конечно порожденная линейная группа над полем нулевой характеристики. Тогда голоморф группы G является по-*

чти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой для всех достаточно больших простых p.

В связи с этим утверждением заметим, что группа автоморфизмов и голоморф конечно порожденной линейной группы уже не обязаны быть линейными группами. Соответствующими примерами являются группы автоморфизмов конечно порожденных свободных групп ранга ≥ 3 [69].

Примеры бесконечно порожденных групп, к которым применимы теоремы 1.1 и 1.2, можно найти среди разрешимых минимаксных групп. В самом деле, легко видеть, что в разрешимой минимаксной группе G все степенные подгруппы имеют конечные индексы, и поэтому для каждого натурального числа n число всех подгрупп индекса n группы G конечно. Кроме того, если разрешимая минимаксная группа редуцирована, то она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p (см. [80], п. 5.3.9). В силу последних двух обстоятельств следующее утверждение является частным случаем теоремы 1.1.

Следствие 1.3. *Если разрешимая минимаксная группа G редуцирована, то голоморф группы G является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой для всех достаточно больших простых p.*

Остановимся теперь на вопросе о π-примарной аппроксимируемости расщепляемых расширений. Заметим, что второе утверждение теоремы 1.2 не может быть распространено с почти π-примарной аппроксимируемости на случай π-примарной аппроксимируемости, но, тем не менее, здесь доказано следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть группа G удовлетворяет следующему условию: для каждого целого положительного числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно. И пусть P — расщепляемое расширение группы G с помощью группы F.*

Если группы G и F π-примарно аппроксимируемы для некоторого множества π простых чисел, и для каждого числа $p \in \pi$ взаимный коммутант $[F, G]$ подгрупп F и G содержится в произведении $G'G^p$ коммутанта G' группы G и степенной подгруппы G^p, то группа P π-примарно аппроксимируема.

Здесь и далее через G^p обозначается подгруппа группы G, порожденная p-ми степенями всех элементов группы G.

В теоремах 1.1, 1.2 и 1.3 предполагается, что для каждого целого положительного числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно. Этому требованию удовлетворяют все конечно порожденные группы и все разрешимые минимаксные группы. В §2 диссертации доказано, что этому требованию удовлетворяет и значительно более широкий класс групп — класс всех групп конечного общего ранга, введенный А. И. Мальцевым [25]. Он содержит в себе все конечно порожденные группы и все разрешимые минимаксные группы.

Поиск необходимого и достаточного условия π-примарной аппроксимируемости (и, в частности, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости) расщепляемых расширений по-видимому является трудной задачей. Об этом свидетельствует тот факт, что соответствующие критерии, полученные для самых простых частных случаев, формулируются и доказываются нетривиально.

Так, например, в работе [55] получен критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости расщепляемого расширения свободной абелевой группы конечного ранга с помощью бесконечной циклической группы. Для его формулировки введем следующие обозначения. Пусть G — свободная абелева группа конечного ранга, φ — автоморфизм группы G. И пусть P — соответствующее автоморфизму φ полупрямое произведение группы G и бесконечной циклической группы $T = (t)$. Это означает, что группа P представляет собой расщепляемое расширение группы G с помощью группы T, и для каждого элемента $g \in G$ имеет место равенство $t^{-1}gt = g\varphi$. Обозначим через $h(x)$ характеристический многочлен автоморфизма φ. В [55] доказано, что группа P является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда число p делит $f(1)$ для любого неприводимого делителя $f(x) \in Z[x]$ многочлена $h(x)$. Еще до появления этого результата автором диссертации в работе [13] был найден соответствующий критерий для случая, когда ранг свободной абелевой группы G равен 2. Этот критерий имеет следующую более простую формулировку.

Теорема 1.4. *Пусть G — свободная абелева группа ранга 2, φ — автоморфизм группы G, P — соответствующее автоморфизму φ полупрямое произведение группы G и бесконечной циклической группы T. И пусть A — матрица автоморфизма φ в некотором базисе группы G, E — единичная*

2×2-матрица. Если $\det(A+E)\neq 0$, *то группа P является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда число p делит* $\det(A-E)$. *Если же* $\det(A+E)=0$, *то группа P является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $p=2$.*

Эта теорема может быть доказана с помощью сформулированного выше критерия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полупрямого произведения свободной абелевой группы конечного ранга и бесконечной циклической группы. Независимое доказательство теоремы 1.4 приведено в работе автора [107].

Рассмотрим теперь одно применение теоремы 1.4 к теории полициклических групп. Пусть X — произвольная группа. Обозначим через π_X множество всех простых чисел p таких, что группа X аппроксимируема конечными p-группами. Если X — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, то по хорошо известной теореме К. Грюнберга [70] множество π_X совпадает с множеством всех простых чисел. С другой стороны, хорошо известная теорема Сексенбаева [46] утверждает, что если полициклическая группа аппроксимируема конечными p-группами для каждого p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна и, следовательно, аппроксимируема конечными p-группами для любого простого p. Таким образом, для полициклической группы X множество π_X либо конечно, либо совпадает с множеством всех простых чисел. С другой стороны, для каждого конечного множества π простых чисел мы укажем полициклическую группу X, для которой $\pi_X=\pi$. Соответствующий пример построен в следующем утверждении, которое является непосредственным следствием теоремы 1.4.

Теорема 1.5. *Для любого конечного множества π простых чисел существует полициклическая группа P такая, что $\pi_P=\pi$.*

Более подробно, пусть π — произвольное конечное множество простых чисел, и m — произведение всех чисел из π. Если расщепляемое расширение P свободной абелевой группы G ранга 2 с помощью бесконечной циклической группы T задается с помощью автоморфизма φ группы G, имеющего в некотором базисе группы G матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & m+2\end{pmatrix},$$

то $\pi_{_P} = \pi$.

Приступим к доказательствам теорем 1.1 — 1.4. Эти теоремы опубликованы в работах автора [103] и [107].

Доказательство теоремы 1.1

Для доказательства теоремы 1.1 нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть A — произвольная группа, p — простое число. Рассмотрим подгруппу $A'A^p$, где A' — коммутант группы A, A^p — степенная подгруппа. Если A — конечная p-группа, то подгруппа $A'A^p$, очевидно, совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы A.

Лемма 1.1. *Если A — конечная p-группа, то группа Γ всех автоморфизмов группы A, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, является p-группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (см., напр., [40], с. 562). Нам потребуется следующая модификация этого результата.

Лемма 1.2. *Пусть G — группа, $Aut\, G$ — группа автоморфизмов группы G, Φ — подгруппа группы $Aut\, G$. И пусть A — конечная нормальная Φ-допустимая p-подгруппа группы G. Если все автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то Φ — p-группа.*

Доказательство леммы. Так как подгруппа A группы G Φ–допустима, то ограничение любого автоморфизма из Φ на подгруппу A является автоморфизмом группы A. Поэтому можно рассмотреть гомоморфизм $\alpha : \Phi \to Aut\, A$, сопоставляющий каждому автоморфизму φ из Φ его ограничение на A. Обозначим через Ω ядро гомоморфизма α. Так как фактор-группа Φ/Ω изоморфна подгруппе $\Phi\alpha$ группы $Aut\, A$, то для доказательства леммы нужно проверить, что $\Phi\alpha$ и Ω — p-группы.

В силу отмеченного выше результата Ф. Холла группа Γ всех автоморфизмов группы A, действующих тождественно по модулю $A'A^p$, является p-группой. Так как все автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю $A'A^p$, то их ограничения на подгруппу A тоже действуют тождественно по модулю $A'A^p$, и поэтому $\Phi\alpha \subseteq \Gamma$. Отсюда и из того, что Γ — p-группа, следует, что и $\Phi\alpha$ является p-группой.

Покажем теперь,что Ω — p–группа. Пусть $\varphi \in \Omega$. Так как $\Omega \subseteq \Phi$, то φ действует тождественно по модулю $A'A^p$ и, в частности, по модулю A. Поэтому если $x \in G$, то $x\varphi = xa$, где $a \in A$. Так как $\varphi \in \Omega$, то ограничение автоморфизма φ на подгруппу A является тождественным автоморфизмом группы A, и поэтому $a\varphi = a$. Отсюда и из того, что $x\varphi = xa$ следует, что $x\varphi^n = xa^n$ для любого натурального n. Беря здесь в качестве n порядок p^k группы A, будем иметь: $a^{p^k} = 1$, $x\varphi^{p^k} = x$. Поэтому $\varphi^{p^k} = 1$ и, следовательно, Ω — p-группа. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.1.

Далее в этом разделе будем предполагать, что группа G обладает следующим свойством: для каждого целого положительного числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно. Очевидно, что этим свойством обладают и все подгруппы конечного ннденкса группы G.

Так как пересечение всех подгрупп фиксированного конечного индекса n группы G является характеристической подгруппой группы G, и так как число всех подгрупп группы G индекса n конечно, то каждая подгруппа конечного индекса группы G содержит в себе характеристическую подгруппу группы G конечного индекса.

Напомним еще, что если N — характеристическая подгруппа группы G, то можно рассматривать гомоморфизм индуцирования, то есть гомоморфизм $\rho_{_N} : Aut\, G \to Aut\, G/N$, сопоставляющий каждому автоморфизму φ группы G автоморфизм $\varphi_{_N}$ группы G/N, действующий по правилу: $(xN)\varphi_{_N} = x\varphi N$. Введенные здесь обозначения будут далее использоваться без дополнительных пояснений.

Докажем сначала первое утверждение теоремы 1.1. Пусть, как и выше, группа G может содержать только конечное число подгрупп каждого конечного индекса. Предположим, что группа G финитно аппроксимируема. Покажем, что ее группа автоморфизмов $Aut\, G$ и голоморф $Hol\, G$ финитно аппроксимируемы.

Пусть $\varphi \in Aut\, G$ и $\varphi \neq 1$. Тогда $a^{-1} \cdot a\varphi \neq 1$ для некоторого элемента a группы G. Так как группа G финитно аппроксимируема, то в ней существует нормальная подгруппа M конечного индекса, не содержащая элемент $a^{-1} \cdot a\varphi$. Обозначим через N характеристическую подгруппу группы G конечного индекса, содержащуюся в M. Очевидно, что подгруппа N не содержит элемент $a^{-1} \cdot a\varphi$. Характеристичность подгруппы N позволяет рассмотреть гомоморфизм индуцирования $\rho_{_N} : Aut\, G \to Aut\, G/N$. Так как $a^{-1} \cdot a\varphi \notin N$, то $aN \neq a\varphi N$, т. е. $aN \neq (aN)\varphi_{_N}$. Поэтому $\varphi_{_N} \neq 1$. Таким образом, $\rho_{_N}$ — гомоморфизм группы $Aut\, G$ в группу $Aut\, G/N$, переводящий φ в неединичный элемент $\varphi_{_N}$, причем группа $Aut\, G/N$ конечна, так как конечен индекс подгруппы N в группе G. Следовательно группа $Aut\, G$ финитно аппроксимируема.

Докажем теперь финитную аппроксимируемость группы $Hol\, G$. Напомним, что группа $Hol\, G$ представляет собой расщепляемое расширение группы G с помощью группы $Aut\, G$. Так как группа G финитно аппроксимируема, то пересечение всех ее подгрупп конечного индекса тривиально. Отсюда и из упомянутого выше свойства группы G следует, что пересечение всех ее характеристических подгрупп конечного индекса тривиально, причем все они нормальны в $Hol\, G$. Поэтому для доказательства финитной аппроксимируемости группы $Hol\, G$ нам достаточно доказать финитную аппроксимируемость произвольной фактор-группы группы $Hol\, G$ по характеристической подгруппе N группы G, имеющей в G конечный индекс. Эта фактор-группа представляет собой расщепляемое расширение конечной группы G/N с помощью финитно аппроксимируемой группы, изоморфной $Aut\, G$, и поэтому она финитно аппроксимируема в силу отмеченного выше результата Мальцева, который утверждает, что расщепляемое расширение конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы с помощью финитно аппроксимируемой группы само является финитно аппроксимируемой группой. Первое утверждение теоремы 1.1 доказано.

Докажем теперь второе утверждение теоремы 1.1. Пусть, как и выше, группа G может содержать только конечное число подгрупп каждого конечного индекса. Предположим, что группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел. Покажем, что этим свойством обладает и голоморф группы G. Конечность множества π нам потребуется только в конце нашего доказательства, и мы ее пока не предполагаем.

Далее в этом разделе будем обозначать через A какую-нибудь π-примарно аппроксимируемую подгруппу конечного индекса группы G. Мы можем без потери общности считать, что A — характеристическая подгруппа группы G (так как любая подгруппа конечного индекса группы G содержит в себе характеристическую подгруппу группы G конечного индекса).

Для каждого числа $p \in \pi$ рассмотрим подгруппу $A'A^p$, где A' — коммутант группы A, A^p — степенная подгруппа. Очевидно, что подгруппа $A'A^p$ является характеристической в A и даже в G. Далее через Γ будем обозначать подгруппу группы $Aut\,G$, состоящую из всех автоморфизмов группы G, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$ для всех $p \in \pi$.

Доказанная ниже лемма 1.3 в частности утверждает, что подгруппа $A\Gamma$ группы $Hol\,G$ является π-примарно аппроксимируемой, и что при условии конечности множества π подгруппа $A\Gamma$ имеет конечный индекс в группе $Hol\,G$. Поэтому доказательство второго утверждения теоремы 1.1 сводится к доказательству следующей леммы.

Лемма 1.3. *Пусть, как и выше, группа G обладает следующим свойством: для каждого целого положительного числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно. И пусть A — π-примарно аппроксимируемая характеристическая подгруппа конечного индекса группы G, где π — некоторое множество простых чисел. Пусть далее Γ — подгруппа группы $Aut\,G$, состоящая из всех автоморфизмов группы G, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$ для всех $p \in \pi$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Для каждого неединичного элемента a подгруппы A существуют простое число $p \in \pi$ и подгруппа N конечного p-индекса группы A, которая не содержит элемент a и является характеристической подгруппой группы G.

2. Пусть $p \in \pi$ и N — подгруппа конечного p-индекса группы A, характеристичная в G. Пусть далее $\rho_{_N} : Aut\,G \to Aut\,G/N$ — гомоморфизм индуцирования. Тогда подгруппа $\Phi = \Gamma\rho_{_N}$ группы $Aut\,G/N$ является p-группой.

3. Подгруппа Γ группы $Aut\,G$ является π-примарно аппроксимируемой.

4. Подгруппа $A\Gamma$ группы $Hol\,G$ является π-примарно аппроксимируемой.

5. Если множество π конечно, то подгруппа Γ имеет конечный индекс в группе $Aut\,G$, а подгруппа $A\Gamma$ имеет конечный индекс в группе $Hol\,G$.

Доказательство леммы.

1. Так как A — π-примарно аппроксимируемая подгруппа группы G, то для каждого неединичного элемента a подгруппы A существуют простое число $p \in \pi$ и нормальная подгруппа M конечного p-индекса группы A, не содержащая элемент a. Обозначим через N пересечение всех нормальных подгрупп группы A, индекс которых совпадает с $[A : M]$. Так как число таких подгрупп конечно, то N — подгруппа конечного p-индекса группы A. Очевидно, что N не содержит элемент a и является характеристической подгруппой в группе A. А поскольку A характеристична в G, то и N характеристична в G. Утверждение 1 доказано.

2. Пусть $p \in \pi$ и N — подгруппа конечного p-индекса группы A, характеристичная в G. Пусть далее $\rho_{_N} : Aut\,G \to Aut\,G/N$ — гомоморфизм индуцирования. Покажем, что подгруппа $\Phi = \Gamma\rho_{_N}$ группы $Aut\,G/N$ является p-группой. Так как A — нормальная подгруппа группы G и N — подгруппа конечного p-индекса группы A, то A/N — конечная нормальная p-подгруппа группы G/N. Поскольку A характеристична в G, и так как автоморфизмы группы G/N, принадлежащие Φ, индуцируются некоторыми автоморфизмами группы G, то подгруппа A/N Φ-допустима в G/N. Так как автоморфизмы из Φ индуцируются автоморфизмами из Γ, действующими тождественно по модулю $A'A^p$, то автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^pN/N = (A/N)'(A/N)^p$. Таким образом, A/N — конечная нормальная p-подгруппа группы G/N, $\Phi \leq Aut\,G/N$, A/N Φ-допустима в G/N, и все автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю подгруппы $(A/N)'(A/N)^p$. Поэтому в силу леммы 1.2 Φ — p-группа. Утверждение 2 доказано.

3. Покажем, что группа Γ является π-примарно аппроксимируемой. Пусть $\gamma \in \Gamma$ и $\gamma \neq 1$. Тогда $x^{-1} \cdot x\gamma \neq 1$ для некоторого элемента x группы G. Так как автоморфизмы из Γ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то $x^{-1} \cdot x\gamma \in A'A^p$ и, в частности $x^{-1} \cdot x\gamma \in A$. Таким образом, $x^{-1} \cdot x\gamma$ — неединичный элемент группы A. Поэтому в силу уже доказанного утверждения 1 леммы 1.3 существуют простое число $p \in \pi$ и подгруппа N

конечного p-индекса группы A, не содержая элемент $x^{-1} \cdot x\gamma$ и характеристичная в G. Характеристичность подгруппы N группы G позволяет рассмотреть гомоморфизм индуцирования $\rho_{_N}$ группы $Aut\, G$ в конечную группу $Aut\, G/N$. Поскольку $x^{-1} \cdot x\gamma \notin N$, то образ $\gamma_{_N}$ автоморфизма γ относительно гомоморфизма $\rho_{_N}$ является неединичным элементом группы $\Gamma\rho_{_N}$, причем группа $\Gamma\rho_{_N}$ конечна как подгруппа конечной группы $Aut\, G/N$. Поэтому для завершения доказательства π-примарной аппроксимируемости группы Γ нам остается только заметить, что в силу уже доказанного утверждения 2 леммы 1.3 подгруппа $\Phi = \Gamma\rho_{_N}$ группы $Aut\, G/N$ является p-группой. Утверждение 3 доказано.

4. Покажем, что подгруппа $A\Gamma$ группы $Hol\, G$ является π-примарно аппроксимируемой. Пусть $h \in A\Gamma$ и $h \neq 1$. Покажем, что существуют число $p \in \pi$ и гомоморфизм группы $A\Gamma$ на конечную p-группу, переводящий элемент h в неединичный элемент. Существование такого гомоморфизма очевидно в случае, если $h \notin A$, так как фактор-группа $A\Gamma/A \cong \Gamma$ π-примарно аппроксимируема в силу уже доказанного утверждения 3 леммы 1.3. Будем теперь считать, что $h \in A$. По утверждению 1 леммы 1.3 существуют простое число $p \in \pi$ и подгруппа N конечного p-индекса группы A, не содержащая элемент h и характеристичная в G. Пусть как и выше $\rho_{_N} : Aut\, G \longrightarrow Aut\, G/N$ — гомоморфизм индуцирования. По доказанному утверждению 2 леммы 1.3 подгруппа $\Gamma\rho_{_N}$ группы $Aut\, G/N$ является p-группой. Рассмотрим теперь отображение $\omega_{_N} : Hol\, G \longrightarrow Hol\, G/N$, определенное по правилу: для любых элементов $x \in G$ и $\varphi \in Aut\, G$

$$(x \cdot \varphi)\omega_{_N} = xN \cdot \varphi_{_N}.$$

Согласно определения голоморфа для любых элементов $x, y \in G$ и $\varphi, \psi \in Aut\, G$ выполняется равенство

$$(x \cdot \varphi) \cdot (y \cdot \psi) = x \cdot y\varphi \cdot \varphi \cdot \psi.$$

Здесь и далее символ "$\cdot$" означает умножение в голоморфе, а отсутствие этого символа между знаком элемента группы и знаком отображения означает образ этого элемента. Из последнего равенства получаем:

$$(x \cdot \varphi \cdot y \cdot \psi)\omega_{_N} = (x \cdot y\varphi)N \cdot (\varphi \cdot \psi)_{_N} = xN \cdot (y\varphi)N \cdot \varphi_{_N} \cdot \psi_{_N} =$$

$$= xN \cdot (yN)\varphi_{_N} \cdot \varphi_{_N} \cdot \psi_{_N} = xN \cdot \varphi_{_N} \cdot yN \cdot \psi_{_N} = (x \cdot \varphi)\omega_{_N} \cdot (y \cdot \psi)\omega_{_N}.$$

Таким образом, отображение $\omega_{_N} : Hol\, G \longrightarrow Hol\, G/N$ является гомоморфизмом. Так как A/N и $\Gamma\rho_{_N}$ — конечные p-группы, и так как $(A\Gamma)\omega_{_N} = A/N \cdot \Gamma\rho_{_N}$, то $(A\Gamma)\omega_{_N}$ — конечная p-группа. Таким образом, гомоморфизм $\omega_{_N}$ отображает группу $A\Gamma$ на конечную p-группу, причем $p \in \pi$ и $h\omega_{_N} = hN \neq 1$. Это завершает доказательство π-примарной аппроксимируемости группы $A\Gamma$. Утверждение 4 доказано.

5. Пусть множество π конечно. Покажем, что подгруппа Γ имеет конечный индекс в группе $Aut\, G$, а подгруппа $A\Gamma$ имеет конечный индекс в группе $Hol\, G$. Для каждого числа $p \in \pi$ рассмотрим фактор-группу $A/A'A^p$. Так как $A/A'A^p$ — абелева p-группа периода p, то по теореме Прюфера она раскладывается в прямое произведение циклических групп порядка p. Поэтому если предположить, что группа $A/A'A^p$ бесконечна, то она содержит бесконечно много подгрупп индекса p. Но тогда этим свойством обладает группа A, а значит и группа G содержит бесконечно много подгрупп индекса $p \cdot [G : A]$, что не возможно. Таким образом, $A/A'A^p$ — конечная группа. Поэтому $A'A^p$ — подгруппа конечного индекса группы A, причем, очевидно, она является характеристической подгруппой в A. Отсюда и из того, что A — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G следует, что $A'A^p$ — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G. Характеристичность подгруппы $A'A^p$ группы G позволяет рассмотреть гомоморфизм индуцирования $\sigma_p : Aut\, G \rightarrow Aut\, G/A'A^p$, сопоставляющий каждому автоморфизму φ группы G автоморфизм $\bar{\varphi}$ группы $G/A'A^p$, действующий по правилу: $(xA'A^p)\bar{\varphi} = x\varphi A'A^p$. Ядро Γ_p гомоморфизма σ_p состоит из всех автоморфизмов группы G, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$. Так как $A'A^p$ — подгруппа конечного индекса группы G, то группа $Aut\, G/A'A^p$ конечна. Поэтому Γ_p — подгруппа конечного индекса группы $Aut\, G$. Отсюда и из того, что множество π конечно, следует, что подгруппа $\bigcap_{p\in\pi} \Gamma_p$ является подгруппой конечного индекса группы $Aut\, G$. Очевидно

также, что

$$\Gamma = \bigcap_{p \in \pi} \Gamma_p.$$

Таким образом, подгруппа Γ имеет конечный индекс в группе $Aut\,G$. Отсюда и из того, что A имеет конечный индекс в G, следует, что подгруппа $A\Gamma$ имеет конечный индекс в группе $Hol\,G$. Утверждение 5 доказано.

Лемма 1.3 полностью доказана.

Как уже отмечалось выше, справедливость второго утверждения теоремы 1.1 обеспечивается утверждениями 4 и 5 леммы 1.3. Таким образом, теорема 1.1 полностью доказана.

Здесь представляется удобным сделать следующее замечание, которое потребуется для дальнейших доказательств. Если в формулировке леммы 1.3 вместо почти π-примарной аппроксимируемости группы G потребовать, чтобы она была π-примарно аппроксимируемой, то мы можем в качестве подгруппы A взать саму группу G. В этом случае утверждение 4 леммы 1.3 принимает следующий вид.

Лемма 1.4. *Пусть, как и выше, группа G обладает следующим свойством: для каждого целого положительного числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно. И пусть для некоторого множества π простых чисел группа G π-примарно аппроксимируема. Пусть далее Γ — подгруппа группы $Aut\,G$, состоящая из всех автоморфизмов группы G, действующих тождественно по модулю подгруппы $G'G^p$ для каждого $p \in \pi$. Тогда подгруппа $G\Gamma$ группы $Hol\,G$ является π-примарно аппроксимируемой.*

Доказательство теорем 1.2 и 1.3

Лемма 1.5. *Пусть P — расщепляемое расширение группы G с помощью группы F. Пусть далее $\rho : F \longrightarrow Aut\,G$ — сопровождающий гомоморфизм, т. е. гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу u из F автоморфизм φ_u группы G, представляющий собой ограничение на G внутреннего автоморфизма группы P, производимого элементом u. И пусть группа F и подгруппа $G \cdot F\rho$ группы $Hol\,G$ являются $\mathcal{K}$-аппроксимируемыми (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемыми) группами, где $\mathcal{K}$ — некото-*

рый класс групп, замкнутый относительно подгрупп. Тогда и группа P является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой).

Доказательство леммы. Рассмотрим отображение $\omega : P \longrightarrow G \cdot F\rho$, определенное по правилу: для любых элементов $x \in G$ и $u \in F$

$$(x \cdot u)\omega = x \cdot \varphi_u.$$

Так как для любых элементов $x, y \in G$ и $u, v \in F$ выполняется равенство

$$(x \cdot u) \cdot (y \cdot v) = x \cdot y\varphi_u \cdot u \cdot v,$$

то

$$(x \cdot u \cdot y \cdot v)\omega = x \cdot y\varphi_u \cdot \varphi_{uv} = x \cdot y\varphi_u \cdot \varphi_u \cdot \varphi_v = x \cdot \varphi_u \cdot y \cdot \varphi_v = (x \cdot u)\omega \cdot (y \cdot v)\omega.$$

Таким образом, отображение $\omega : P \longrightarrow G \cdot F\rho$ является гомоморфизмом и даже эпиморфизмом. Поэтому если через C обозначить ядро гомоморфизма ω, то $P/C \cong G \cdot F\rho$. А так как $G \cap C = 1$, то группа P вложима в прямое произведение $P/G \times P/C \cong F \times G \cdot F\rho$. Отсюда и из того, что группы F и $G \cdot F\rho$ $\mathcal{K}$-аппроксимируемы (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемы), а класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно подгрупп, следует, что и группа P $\mathcal{K}$-аппроксимируема (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема). Лемма доказана.

Из леммы 1.5 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.6. *Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, замкнутый относительно подгрупп. И пусть голоморф $Hol\, G$ группы G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой) группой. Тогда любое расщепляемое расширение P группы G с помощью $\mathcal{K}$-аппроксимируемой (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой) группы F само является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой) группой.*

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теорем 1.2 и 1.3.

Пусть группа G удовлетворяет следующему условию: для каждого целого положительного числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно. И пусть P — расщепляемое расширение группы G с помощью группы F.

1. Предположим, что группы G и F $\mathcal{F}$-аппроксимируемы (почти π-примарно аппроксимируемы для некоторого конечного множества π простых чисел). Тогда по теореме 1.1 группа $Hol\,G$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема). Отсюда по лемме 1.6 следует, что и группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема). Теорема 1.2 доказана.

2. Предположим теперь, что группы G и F π-примарно аппроксимируемы для некоторого множества π простых чисел, и что для каждого $p \in \pi$ имеет место включение $[F, G] \subseteq G'G^p$. Как и в лемме 1.5 рассмотрим сопровождающий гомоморфизм $\rho : F \longrightarrow Aut\,G$, т. е. гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу u из F автоморфизм φ_u группы G, представляющий собой ограничение на G внутреннего автоморфизма группы P, производимого элементом u. Так как для каждого $p \in \pi$ имеет место включение $[F, G] \subseteq G'G^p$, то для любого элемента u из F автоморфизм φ_u действует тождественно по модулю подгруппы $G'G^p$. Поэтому $F\rho \subseteq \Gamma$, где Γ — множество всех автоморфизмов группы G, действующих тождественно по модулю подгруппы $G'G^p$ для каждого $p \in \pi$. Так как группа G π-примарно аппроксимируема, то по лемме 1.4 подгруппа $G\Gamma$ группы $Hol\,G$ также является π-примарно аппроксимируемой. Тем же свойством обладает и ее подгруппа $G \cdot F\rho$. Отсюда и из того, что F π-примарно аппроксимируема, по лемме 1.5 следует, что и P π-примарно аппроксимируема. Теорема 1.3 доказана.

Доказательство теоремы 1.4.

Пусть P — расщепляемое расширение свободной абелевой группы G ранга 2 с помощью бесконечной циклической группы T, порожденной элементом t. И пусть φ — автоморфизм группы G, сопоставляющий каждому элементу $g \in G$ элемент $t^{-1}gt$. Обозначим через A матрицу автоморфизма φ в некотором базисе группы G, а через E — единичную 2×2-матрицу. Докажем теорему 1.4, то есть следующие два утверждения.

1. Если $\det(A + E) \neq 0$*, то группа P $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда число p делит* $\det(A - E)$.

2. Если $\det(A + E) = 0$*, то группа P $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $p = 2$.*

Пусть $\gamma_n(P)$ — n-й член нижнего центрального ряда группы P (где, напомним, $\gamma_1(P) = P$ и $\gamma_{n+1}(P)$ — взаимный коммутант $\gamma_n(P)$ и P).

Покажем, что для любого $n \geq 2$ подгруппа $\gamma_n(P)$ совпадает с подгруппой $G(\varphi - id)^{n-1}$, т. е. с образом группы G относительно ее эндоморфизма $(\varphi - id)^{n-1}$, где id — тождественный эндоморфизм группы G. Сразу заметим, что это утверждение мы докажем без предположения о двупорожденности группы G. Для нас здесь существенна только ее коммутативность, которая позволяет использовать стандартные операции сложения и умножения в кольце эндоморфизмов группы G.

Пусть $n \geq 2$. Тогда, как легко видеть, $\gamma_n(P) \leq G$ и произвольный элемент из подгруппы $\gamma_n(P)(\varphi - id)$ имеет вид

$$a(\varphi - id) = t^{-1}ata^{-1},$$

где $a \in \gamma_n(P)$. Поэтому $\gamma_n(P)(\varphi - id) \subseteq \gamma_{n+1}(P)$. Верно и обратное включение. В самом деле, $\gamma_{n+1}(P)$ порождается элементами вида

$$t^{-k}at^ka^{-1} \quad (a \in \gamma_n(G),\ k \in \mathbb{Z}),$$

и эти элементы принадлежат $\gamma_n(P)(\varphi - id)$, так как для любого элемента $a \in \gamma_n(P)$ и для любого целого положительного числа l

$$t^{-l}at^la^{-1} = a(\varphi^l - id) = a(id + \varphi + \varphi^2 + \ldots +$$

$$+\varphi^{l-1})(\varphi - id) \in \gamma_n(P)(\varphi - id);$$

$$t^lat^{-l}a^{-1} = a(\varphi^{-l} - id) = a(-\varphi^{-l})(\varphi^l - id) =$$

$$= a(-\varphi^{-l})(id + \varphi + \varphi^2 + \ldots + \varphi^{l-1})(\varphi - id) \in \gamma_n(P)(\varphi - id).$$

Таким образом, $\gamma_{n+1}(P) = \gamma_n(P)(\varphi - id)$ при всех $n \geq 2$. Аналогично проверяется, что $\gamma_2(P) = G(\varphi - id)$. Из последних двух обстоятельств следует, что для каждого $n \geqslant 2$

$$\gamma_n(P) = G(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}. \tag{1.1}$$

Хорошо известно, что если эндоморфизм ψ свободной абелевой группы V конечного ранга инъективен, то индекс $[V : V\psi]$ совпадает с модулем определителя матрицы эндоморфизма ψ. Отсюда и из того, что матрица эндоморфизма $(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}$ совпадает с матрицей $(A - E)^{n-1}$, следует, что если число $d = \det{(A - E)}$ отлично от 0, то

$$\left[G : G(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}\right] = |\det{(A - E)}|^{n-1} = |d|^{n-1},$$

и тогда в силу (1.1) для каждого $n \geqslant 2$

$$[G : \gamma_n(P)] = |d|^{n-1}. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\pi(d)$ множество всех простых делителей числа d, а через $\pi_{_P}$ множество всех простых чисел p, для которых группа P $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Эти обозначения позволяют переформулировать теорему 1.4 следующим образом.

1. Если $\det{(A + E)} \neq 0$, *то* $\pi_{_P} = \pi(d)$.
2. Если $\det{(A + E)} = 0$, *то* $\pi_{_P} = \{2\}$.

Для доказательства первой части теоремы проверим сначала, что

$$\det{(A + E)} \neq 0 \,\wedge\, d \neq 0 \Longrightarrow \pi_{_P} = \pi(d). \tag{1.3}$$

В самом деле, пусть $\det{(A + E)} \neq 0$ и $d \neq 0$. Так как $\det{(A \pm E)} \neq 0$, то для любого неединичного элемента $h \in G$ имеем: $h(\varphi \pm \mathrm{id}) \neq 1$, т. е. $t^{-1}ht \neq h^{\pm 1}$. Поэтому в G нет неединичных циклических подгрупп, инвариантных в P.

Покажем сначала, что $\pi(d) \subseteq \pi_{_P}$. Пусть $p \in \pi(d)$. Так как $d \neq 0$, то в силу (1.2) для каждого $n \geqslant 2$ группа $G_n = G/\gamma_n(P)$ является конечной абелевой группой порядка $|d|^{n-1}$. Отсюда и из того, что $p \in \pi(d)$, следует, что p^{n-1} делит порядок группы G_n. Поэтому если F_n — p-компонента группы G_n, то $|F_n| \geqslant p^{n-1}$. Пусть Q_n — произведение всех примарных компонент группы G_n, отличных от F_n. Тогда $G_n/Q_n \simeq F_n$ — конечная p-группа. Так как $Q_n \leqslant G_n = G/\gamma_n(P)$, то $Q_n = L_n/\gamma_n(P)$, где L_n — подгруппа группы G, содержащая $\gamma_n(P)$. Поскольку Q_n характеристична в G_n и G_n инвариантна в $P_n = P/\gamma_n(P)$, то Q_n инвариантна в P_n. Отсюда следует, что L_n инвариантна в P. Так как $\gamma_n(P)$ содержится в L_n, то фактор-группа P/L_n нильпотентна и, кроме того, она является расширением конечной p-группы

$$G/L_n \simeq (G/\gamma_n(P)) \,/\, (L_n/\gamma_n(P)) = G_n/Q_n \simeq F_n$$

с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому группа P/L_n $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Так как $|G/L_n| = |F_n| \geqslant p^{n-1}$, то индексы подгрупп L_n в группе G не ограничены. Поэтому подгруппа

$$L = \bigcap_{n=2}^{\infty} L_n$$

имеет в G бесконечный индекс. Отсюда и из того, что G — свободная абелева группа ранга 2, следует, что L — циклическая группа, являющаяся, к тому же, инвариантной подгруппой группы P. Но выше отмечалось, что G не содержит неединичных циклических подгрупп инвариантных в P. Поэтому $L = 1$, т. е. P аппроксимируема фактор-группами P/L_n, которые, в свою очередь, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы. Отсюда следует, что P $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, т. е. $p \in \pi_{_P}$.

Покажем теперь, что $\pi_{_P} \subseteq \pi(d)$. Предположим, что $p \in \pi_{_P}$, и покажем, что тогда $p \in \pi(d)$. Допустим противное, т. е. допустим, что p взаимно просто с d. Пусть ρ — гомоморфизм группы P на конечную p-группу. Так как любая конечная p-группа нильпотентна, то гомоморфизм ρ проходит через естественный гомоморфизм $P \to P/\gamma_n(P)$ для достаточно большого n. Отсюда и из того, что порядок группы $G/\gamma_n(P)$ в силу (1.2) совпадает с числом $|d|^{n-1}$, взаимно простым с p, следует, что $G\rho = 1$. Это противоречит тому, что $p \in \pi_{_P}$. Таким образом, $\pi_{_P} \subseteq \pi(d)$, и утверждение (1.3) доказано.

Теперь для доказательства первой части теоремы нам остается проверить, что

$$\det (A + E) \neq 0 \,\wedge\, d = 0 \Longrightarrow \pi_{_P} = \pi(d). \tag{1.4}$$

Пусть $\det (A + E) \neq 0$ и $d = 0$. Покажем, что $\pi_{_P} = \pi(d)$. Так как $d = 0$, то множество $\pi(d)$ совпадает с множеством всех простых чисел. По хорошо известной теореме Грюнберга [70] конечно порожденная нильпотентная группа без кручения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для любого простого числа p. Поэтому доказательство равенства $\pi_{_P} = \pi(d)$ сводится к доказательству нильпотентности группы P. Так как $d = 0$, то эндоморфизм $\varphi - \mathrm{id}$ не инъективен.

Отсюда и из того, что $\varphi - \mathrm{id}$ — эндоморфизм свободной абелевой группы G ранга 2 следует, что $G(\varphi - \mathrm{id})$ — циклическая группа. Но в силу (1.1) $G(\varphi - \mathrm{id}) = \gamma_2(P)$. Поэтому $\gamma_2(P)$ порождается некоторым элементом $h \in G$. Так как $\gamma_2(P)$ нормальна в P, то $t^{-1}ht = h^{\pm 1}$. Покажем, что $t^{-1}ht = h$. Допустим противное. Тогда $t^{-1}ht = h^{-1}$ и $h \neq 1$. Отсюда следует, что эндоморфизм $\varphi + \mathrm{id}$ не инъективен. Но это невозможно, поскольку $\det(A+E) \neq 0$. Таким образом, $t^{-1}ht = h$. Поэтому $\gamma_2(P)$ — центральная подгруппа группы P, и, следовательно, группа P нильпотентна. Утверждение (1.4) доказано.

Докажем теперь вторую часть теоремы, т. е. следующее утверждение:

$$\det(A + E) = 0 \Longrightarrow \pi_{_P} = \{2\}. \tag{1.5}$$

Пусть $\det(A + E) = 0$. Покажем, что $\pi_{_P} = \{2\}$. Так как $\det(A + E) = 0$, то в G существует неединичный элемент h такой, что $t^{-1}ht = h^{-1}$. Обозначим через x элемент группы G, являющийся корнем из h максимальной возможной степени. Так как извлечение корня в G обладает свойством однозначности и $t^{-1}ht = h^{-1}$, то $t^{-1}xt = x^{-1}$. Поэтому циклическая подгруппа X группы G, порожденная элементом x, инвариантна в G. В силу выбора элемента x подгруппа X изолирована в G. Таким образом, X — бесконечная циклическая изолированная подгруппа свободной абелевой группы G ранга 2. Поэтому G/X — бесконечная циклическая группа причем, как отмечалось выше, X инвариантна в P. Мы получаем, таким образом, в группе P нормальный ряд $1 \leqslant X \leqslant G \leqslant P$ с циклическими факторами. Следовательно, группа P сверхразрешима, причем она не является нильпотентной, поскольку $t^{-1}ht = h^{-1}$. Поэтому требуемое равенство $\pi_{_G} = \{2\}$ вытекает из следующих двух результатов, доказанных Д. И. Молдаванским и а автором диссертации в работе [8].

Любая сверхразрешимая группа без кручения $\mathcal{F}_2$-аппроксимируема.

Если сверхразрешимая группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для нечетного простого числа p, то она нильпотентна.

Утверждение (1.5) доказано.

§2. О группах конечного ранга

Основные результаты параграфа

В работе [25] А. И. Мальцев ввел следующие два понятия.

Группа G называется группой конечного общего ранга, если существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе.

Группа G называется группой конечного специального ранга (или, в другой терминологии, группой конечного ранга Прюфера), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами.

Очевидно, что любая группа конечного специального ранга имеет конечный общий ранг. Класс всех групп конечного общего ранга значительно шире, чем класс всех групп конечного специального ранга, поскольку все конечно порожденные группы, очевидно, имеют конечный общий ранг.

А. И. Мальцев [25] заметил, что для абелевых групп конечность общего ранга равносильна конечности специального ранга. На самом деле это верно и для нильпотентных групп. Действительно, пусть G – нильпотентная группа конечного общего ранга. Тогда существует число r такое, что любое конечное подмножество M группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе. Обозначим через F свободную нильпотентную группу с r свободными образующими, ступень нильпотентности которой совпадает со ступенью нильпотентности группы G (обозначим эту ступень через c). Хорошо известно, что конечно порожденные нильпотентные группы являются полициклическими. Обозначим через ρ длину какого-нибудь полициклического ряда группы F. Пусть H – конечно порожденная подгруппа группы G. Покажем, что она порождается не более чем ρ элементами. Пусть M – конечное множество, порождающее H. Тогда M (а значит и H) содержится в некоторой r-порожденной подгруппе P группы G, причем ступень нильпотентности группы P не превосходит c. Поэтому P изоморфна некоторой фактор-группе группы F. Отсюда и из того, что в F существует полициклический ряд длины ρ, следует, что и в группе P существует такой ряд. А поскольку H – подгруппа группы P, то и в H существует полициклический ряд длины ρ.

Поэтому H порождается не более чем ρ элементами. Таким образом, G – группа конечного специального ранга.

Для разрешимых групп конечность общего ранга уже не равносильна конечности специального ранга. Важными примерами групп конечного специального ранга являются разрешимые минимаксные группы, и в частности, полициклические группы. Класс разрешимых групп конечного специального ранга изучен уже достаточно глубоко [80]. Аппроксимируемость разрешимых и нильпотентных групп конечного специального ранга некоторыми классами конечных групп будет рассмотрена в §3.

Лубоцкий и Манн [84] доказали, что финитно аппроксимируемая группа конечного специального ранга содержит локально разрешимую подгруппу конечного индекса. В связи с этой важной и глубокой теоремой мы докажем здесь следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть G — группа конечного специального ранга. Если для каждого множества π, состоящего из почти всех простых чисел, группа G π-примарно аппроксимируема, то она нильпотентна. В частности, если группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна.*

Второе утверждение этой теоремы является частным случаем первого утверждения. Действительно, предположим, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p из некоторого бесконечного множества π_0 простых чисел. Так как множество π_0 бесконечно, то каждое множество π, состоящее из почти всех простых чисел, содержит в себе число p из π_0, т. е. такое p, для которого группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Следовательно, группа G π-примарно аппроксимируема для каждого множества π, состоящего из почти всех простых чисел.

В качестве следствия из этой теоремы отметим следующий результат Сексенбаева [46].

Следствие 2.1. *Если полициклическая группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна.*

Остановимся теперь на группах конечного общего ранга. Ниже будут доказаны обобщения ряда известных результатов о конечно порожденных финитно аппроксимируемых группах на случай финитно аппроксимируемых групп конечного общего ранга. Такого рода обобщение удается получить, например, для следующего классического результата А. И. Мальцева [24].

Любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа является хопфовой.

Напомним, что группа G называется хопфовой, если она не может быть изоморфна никакой своей истинной фактор-группе, т. е. если для любой нормальной подгруппы N группы G из того, что фактор-группа G/N изоморфна группе G, следует, что $N = 1$. Это понятие введено Хопфом еще в 1932 году (см. [50]).

Далее через $\mathcal{F}(G)$ будем обозначать множество всех конечных гомоморфных образов группы G. Очевидно, что свойством хопфовости обладает любая группа G, удовлетворяющая следующему условию: для каждой нормальной подгруппы N группы G из того, что $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G/N)$, следует, что $N = 1$. Поэтому результат А. И. Мальцева о хопфовости произвольной конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы непосредственно вытекает из следующей теоремы, доказанной Д. И. Молдаванским несколько лет тому назад в работе [32].

Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа, и N — нормальная подгруппа группы G. Если $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G/N)$, то $N = 1$.

Здесь получено следующее обобщение сформулированного выше результата Д. И. Молдаванского о конечно порожденных финитно аппроксимируемых группах на случай финитно аппроксимируемых групп конечного общего ранга.

Теорема 2.2. *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга, и N — нормальная подгруппа группы G. Если $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G/N)$, то $N = 1$.*

Частным случаем этой теоремы является следующее утверждение, обобщающее результат А. И. Мальцева о хопфовости произвольной конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы.

Следствие 2.2. *Любая финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга является хопфовой.*

Классическая теорема М. Холла утверждает, что конечно порожденная группа может содержать только конечное число подгрупп данного конечного индекса. Мы обобщаем эту теорему следующим образом.

Теорема 2.3. *Пусть G — группа конечного общего ранга. Тогда для каждого целого положительного числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно.*

Напомним еще три известные теоремы о конечно порожденных финитно аппроксимируемых группах, допускающие аналогичные обобщения.

1. Группа автоморфизмов конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы сама является финитно аппроксимируемой группой (Д. М. Смирнов [47], Г. Баумслаг [57]).

2. Любое расщепляемое расширение конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы с помощью финитно аппроксимируемой группы само является финитно аппроксимируемой группой (А. И. Мальцев [27]).

3. Группа автоморфизмов конечно порожденной почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы сама является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой (А. Лубоцкий [82]).

Эти результаты обобщаются следующим образом.

Теорема 2.4. *Пусть G — группа конечного общего ранга.*

1. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то группа автоморфизмов группы G также является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

2. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то любое расщепляемое расширение группы G с помощью $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы само является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

3. Если группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то группа автоморфизмов группы G является почти π-примарно аппроксимируемой группой.

4. Если группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то любое расщепляемое расширение группы G с помощью почти π-примарно аппроксимируемой группы само является почти π-примарно аппроксимируемой группой.

Эта теорема является частным случаем доказанных в §1 теорем 1.1 и 1.2. Возможность применения этих теорем к группам конечного общего ранга обеспечивается теоремой 2.3.

Аналогичный результат доказан ниже и для финитной отделимости подгрупп в расщепляемых расширениях. Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема 2.5. *Пусть F — расщепляемое расширение группы G конечного общего ранга с помощью группы H.*

1. Если в группах G и H все подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все подгруппы финитно отделимы.

2. Если в группе G все подгруппы финитно отделимы, а в группе H все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

3. Если в группах G и H все циклические подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все циклические подгруппы финитно отделимы.

Эта теорема обобщает аналогичный результат Р. Алленби и Р. Грегораса о расщепляемых расширениях конечно порожденных групп [53].

Заметим, что в теореме 2.5 (как и в теореме 2.4) требование конечности общего ранга может быть ослаблено до требования конечности числа подгрупп каждого конечного индекса.

Основные результаты §2 опубликованы автором в [110], [101] и [112].

Перейдем к доказательствам теорем 2.1, 2.2, 2.3 и 2.5. (теорема 2.4 является следствием предшествующих теорем).

Доказательство теоремы 2.1

Если G — группа конечного специального ранга, то через $r(G)$ будем обозначать наименьшее целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Число $r(G)$ будем называть рангом Прюфера группы G (или специальным рангом группы G).

Говорят, что группа G имеет конечный ранг Гирша, если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого является циклической группой или периодической группой. Число бесконечных циклических факторов такого ряда не зависит от выбора этого ряда. Оно называется рангом Гирша группы G и обозначается через $h(G)$. Для групп конечного ранга Гирша имеет место следующее очевидное правило сложения рангов: если H — нормальная подгруппа группы G, то $h(G) = h(H) + h(G/H)$.

Для ранга Прюфера это правило уже не выполняется, но если H — подгруппа группы G конечного специального ранга, а F — гомоморфный образ группы G, то $r(H) \leq r(G)$ и $r(F) \leq r(G)$. Если A — элементарная абелева p-группа порядка p^k, т. е. если A — прямое произведение k экземпляров группы простого порядка p, то легко видеть, что $r(A) = k$. Хорошо известно, что любая конечно порожденная нильпотентная группа является полициклической и поэтому она имеет конечный ранг Гирша и конечный ранг Прюфера.

Лемма 2.1. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа. Тогда $h(G) \leq r(G)$.*

Доказательство. Мы можем считать, что $h(G) > 0$. В этом случае из элементарных свойств конечно порожденных нильпотентных групп следует, что группа G содержит бесконечную циклическую центральную подгруппу C. Пусть p — простое число. Очевидно, что $h(G/C^p) = h(G) - 1$, C/C^p — центральная подгруппа порядка p группы G/C^p, и если T — центральная элементарная абелева подгруппа порядка p^k группы G, то CT/C^p — центральная элементарная абелева подгруппа порядка p^{k+1} группы G/C^p. Поэтому индукцией по $h(G)$ легко проверить, что некоторый гомоморфный образ F группы G содержит элементарную абелеву подгруппу A порядка $p^{h(G)}$, и тогда $h(G) = r(A) \leq r(F) \leq r(G)$. Лемма доказана.

Далее как и обычно через

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \dots$$

будем обозначать нижний центральный ряд группы G.

Лемма 2.2. *Пусть G — конечно порожденная группа конечного специального ранга r. Тогда для некоторого числа $k \leq r + 1$ фактор $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ конечен.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда первые $r + 1$ факторов нижнего центрального ряда группы G являются бесконечными конечно порожденными абелевыми группами. Поэтому ранг Гирша каждого из этих факторов больше 0, и следовательно $h(G/\gamma_{r+2}(G)) \geq r+1$. С другой стороны, по лемме 2.1 $h(G/\gamma_{r+2}(G)) \leq r(G/\gamma_{r+2}(G)) \leq r$. Это противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.3. *Пусть для каждого множества π, состоящего из почти всех простых чисел, группа G π-примарно аппроксимируема. Если для некоторого целого положительного числа k фактор $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ конечен, то $\gamma_k(G) = 1$.*

Доказательство. Обозначим через π множество всех простых чисел, не делящих порядок фактора $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$. Тогда при любом гомоморфизме φ группы G на конечную π-группу F выполняется равенство $\gamma_k(G)\varphi = \gamma_{k+1}(G)\varphi$, т. е. $\gamma_k(F) = \gamma_{k+1}(F)$. Если дополнительно предположить, что группа F нильпотентна, то последнее равенство означает, что $\gamma_k(F) = 1$, т. е. $\gamma_k(G)\varphi = 1$. Таким образом, при любом гомоморфизме φ группы G на конечную нильпотентную π-группу $\gamma_k(G)\varphi = 1$. Отсюда и из того, что группа G π-примарно аппроксимируема, следует равенство $\gamma_k(G) = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть G — группа конечного специального ранга r. И пусть для каждого множества π, состоящего из почти всех простых чисел, группа G π-примарно аппроксимируема. Тогда $\gamma_{r+1}(G) = 1$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что для любой конечно порожденной подгруппы H группы G выполняется равенство $\gamma_{r+1}(H) = 1$. Так как специальный ранг группы H конечен и не превосходит r, то по лемме 2.2 для некоторого числа $k \leq r+1$ фактор $\gamma_k(H)/\gamma_{k+1}(H)$ конечен. Отсюда и из того, что для каждого множества π, состоящего из почти всех простых чисел, группа H π-примарно аппроксимируема, по лемме 2.3 следует, что $\gamma_k(H) = 1$, а так как $k \leq r+1$, то и $\gamma_{r+1}(H) = 1$. Лемма доказана.

Справедливость доказываемой теоремы 2.1 обеспечивается леммой 2.4.

Доказательство теоремы 2.2

Доказательство теоремы 2.2 основано на следующем простом замечании о группах конечного общего ранга.

Лемма 2.5. *Пусть K — конечная группа, Var_K — многообразие групп, задаваемое всеми тождествами группы K. Тогда любая группа конечного общего ранга из многообразия Var_K является конечной.*

Доказательство. Хорошо известно, что все конечно порожденные группы из многообразия Var_K конечны (см., напр., [20, гл. 5, п. 2, упр. 8]). Обозначим через n_r порядок свободной группы данного многообразия с r свободными образующими. Тогда порядки всех r-порожденных групп многообразия Var_K ограничены числом n_r.

Пусть теперь G — группа конечного общего ранга из многообразия Var_K. Тогда существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество M элементов группы G содержится в некоторой r-порожденной подгруппе X группы G. Тогда $|M| \leq |X| \leq n_r$. Следовательно, G — конечная группа, и ее порядок ограничен числом n_r. Лемма доказана.

Далее для любого множества V групповых слов и для любой группы G через $V(G)$ будем обозначать вербальную подгруппу группы G, соответствующую множеству V. Напомним, что подгруппа $V(G)$ порождается всеми элементами группы G вида $f(h_1, h_2, \dots)$, где $f \in V$, $h_1 \in G, h_2 \in G, \dots$.

Лемма 2.6. *Пусть K — конечная группа, V — множество всех групповых слов, тождественно равных 1 в группе K. И пусть G — группа конечного общего ранга. Тогда фактор-группа $G/V(G)$ конечна.*

Доказательство. Очевидно, что фактор-группа $G/V(G)$ принадлежит многообразию Var_K и наследует от группы G конечность общего ранга. Поэтому в силу леммы 2.5 группа $G/V(G)$ конечна. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Для любых двух групп G и H из равенства $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(H)$ следует, что для произвольного множества V групповых слов имеет место равенство $\mathcal{F}(G/V(G)) = \mathcal{F}(H/V(H))$.*

Доказательство. Пусть группа X принадлежит семейству $\mathcal{F}(G/V(G))$. Тогда она принадлежит семейству $\mathcal{F}(G)$, которое по условию леммы совпадает с семейством $\mathcal{F}(H)$, и поэтому существует эпиморфизм $\varphi : H \longrightarrow X$. Так как $X \in \mathcal{F}(G/V(G))$, то все слова из множества V тождественно равны 1 в группе X. Отсюда следует, что $V(H)$ содержится в ядре гомоморфизма φ. Поэтому группа X является гомоморфным образом не только группы H, но и группы $H/V(H)$. Тем самым доказано включение

$\mathcal{F}(G/V(G)) \subseteq \mathcal{F}(H/V(H))$. Противоположное включение проверяется аналогично. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 2.2. Пусть G — финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга и N — нормальная подгруппа группы G такая, что $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G/N)$. Покажем, что $N = 1$.

Пусть S — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G. И пусть V — множество всех групповых слов, тождественно равных 1 в группе G/S. Тогда, очевидно, $V(G) \subseteq S$.

Так как группы G и G/N имеют конечный общий ранг, и так как V — множество всех групповых слов, тождественно равных 1 в конечной группе G/S, то по лемме 2.6 группы $G/V(G)$ и $(G/N)/V(G/N)$ конечны.

Так как $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G/N)$, то по лемме 2.7 $\mathcal{F}(G/V(G)) = \mathcal{F}((G/N)/V(G/N))$. Отсюда и из конечности групп $G/V(G)$ и $(G/N)/V(G/N)$ следует, что группы $G/V(G)$ и $(G/N)/V(G/N)$ изоморфны.

Таким образом,

$$G/V(G) \cong (G/N)/V(G/N) = (G/N)/(V(G)N/N) \cong G/(V(G)N).$$

Поэтому подгруппы $V(G)$ и $V(G)N$ имеют в группе G равные конечные индексы. Отсюда и из включения $V(G) \subseteq V(G)N$ следует, что $V(G) = V(G)N$. Поэтому $N \subseteq V(G)$. Отсюда и из включения $V(G) \subseteq S$ следует, что $N \subseteq S$.

Таким образом, N содержится в каждой нормальной подгруппе S конечного индекса группы G. Отсюда и из финитной аппроксимируемости группы G следует, что $N = 1$. Теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.3

Лемма 2.8. *Пусть G — группа конечного общего ранга, N — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. И путь V — множество всех групповых слов, тождественно равных единице в группе G/N. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. $V(G)$ — подгруппа конечного индекса группы G.

2. $V(G) \subseteq N$.

3. Если M — нормальная подгруппа группы G такая, что группа G/M изоморфна группе G/N, то $V(G) \subseteq M$.

Справедливость первого утверждения этой леммы обеспечивается леммой 2.6. Второе и третье утверждения очевидны.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 2.3. Пусть G — группа конечного общего ранга. И пусть n — целое положительное число.

Множество всех нормальных подгрупп группы G индекса n разбивается на конечное число классов, каждый из которых состоит из нормальных подгрупп группы G индекса n, фактор-группы группы G по которым изоморфны между собой. В силу п.3 леммы 2.8 для каждого такого класса в группе G существует вербальная подгруппа конечного индекса, которая содержится во всех подгруппах этого класса, и поэтому каждый такой класс конечен.

Из последних двух обстоятельств следует конечность числа всех нормальных подгрупп группы G индекса n.

Поэтому для любого целого положительного числа k будет конечным число всех нормальных подгрупп группы G, индекс которых не превосходит k. С другой стороны, любая подгруппа H группы G индекса n содержит в себе нормальную подгруппу N группы G, индекс которой не превосходит n^n (в качестве N можно взять пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с H).

Из последних двух обстоятельств следует конечность числа всех подгрупп группы G индекса n.

Теорема 2.3 доказана. Другое доказательство этой теоремы, не использующее многообразия групп, приведено в работе автора [112].

Доказательство теоремы 2.5

Пусть F — расщепляемое расширение группы G конечного общего ранга с помощью группы H. Докажем следующие утверждения.

1. Если в группах G и H все подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все подгруппы финитно отделимы.

2. Если в группе G все подгруппы финитно отделимы, а в группе H все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

3. Если в группах G и H все циклические подгруппы финитно отделимы, то и в группе F все циклические подгруппы финитно отделимы.

Заметим сначала, что если группа G конечно порождена, то справедливость утверждений 1, 2 и 3 доказана Р. Алленби и Р. Грегорасом в работе [53]. В частности, эти утверждения справедливы в случае конечной группы G.

Из этого замечания следует, что для доказательства каждого из утверждений 1 — 3 достаточно для (произвольной, конечно порожденной или циклической) подгруппы S группы F и не принадлежащего ей элемента $f \in F$ найти такую нормальную подгруппу N группы F, лежащую в подгруппе G и имеющую в G конечный индекс, что $f \notin SN$.

Действительно, если тогда φ — естественный гомоморфизм группы F на группу F/N, то элемент $f\varphi = fN$ не принадлежит подгруппе $S\varphi = SN/N$ группы F/N. Кроме того, группа G/N конечна, а группа F/N, как легко видеть, будет расщепляемым расширением группы G/N с помощью группы HN/N, которая изоморфна группе H, причем группа SN/N наследует от группы S конечную порожденность и цикличность. Поэтому из сделанного выше замечания следует существование гомоморфизма ψ группы F/N на некоторую конечную группу такого, что $f\varphi\psi \notin S\varphi\psi$. Таким образом, гомоморфизм $\rho = \varphi\psi$ группы F на конечную группу таков, что $f\rho \notin S\rho$.

Если элемент f не принадлежит подгруппе SG, то искомой подгруппой N является подгруппа G. Пусть теперь $f \in SG$, т. е. $f = sg$, где $s \in S$ и $g \in G$. Очевидно, что элемент g не принадлежит подгруппе $S_1 = S \cap G$, и так как S_1 наследует от S свойство цикличности, в условиях любого из утверждений 1 — 3 подгруппа S_1 группы G финитно отделима. Поэтому в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $g \notin S_1N$, причем ввиду конечности ранга группы G и в силу леммы 2.8 подгруппу N можно считать вербальной в G и потому нормальной в F. Остается показать, что элемент f не принадлежит подгруппе SN. Если, напротив, $f = s_1x$, где $s_1 \in S$ и $x \in N$, то $sg = s_1x$, откуда получаем равенство $s^{-1}s_1 = gx^{-1}$, левая часть которого является элементом подгруппы S, а правая — элементом подгруппы G. Следовательно, $s^{-1}s_1 \in S_1$, и поэтому элемент $g = s^{-1}s_1x$ принадлежит подгруппе S_1N, что противоречит выбору подгруппы N. Теорема 2.5 доказана.

§3. О разрешимых группах конечного ранга

Основные результаты параграфа

Здесь будут рассмотрены аппроксимационные свойства некоторых классов разрешимых групп. Основные результаты этого параграфа относятся к разрешимым группам конечного специального ранга. Следуя общепринятой терминологии, вместо термина "группа конечного специального ранга" далее будем использовать термин "группа конечного ранга". Напомним, что группа G имеет конечный ранг, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Как и выше через π будем обозначать непустое множество простых чисел.

В исследованиях $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости абелевых, нильпотентных и разрешимых групп особое значение имеет понятие π-полного элемента группы. Напомним, элемент a группы G называется π-полным, если для любого целого положительного π-числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Если множество π совпадает с множеством всех простых чисел, то понятие π-полного элемента совпадает с классическим понятием полного элемента. В теории абелевых групп для этого понятия используется термин "делимый элемент".

Связь $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы с понятием π-полноты ее элементов состоит в следующем.

Предложение 3.1. *Пусть G — произвольная группа. И пусть π — множество простых чисел.*

Если группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она не содержит π-полных элементов отличных от 1.

Если группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она не содержит π-полных элементов бесконечного порядка, и множество всех π-полных элементов группы G совпадает с множеством всех ее π'-элементов.

Здесь и далее мы называем элемент группы π'-элементом, если его порядок конечен и взаимно прост с каждым числом из множества π.

Связь финитной аппроксимируемости группы с полнотой ее элементов впервые была обнаружена еще А. И. Мальцевым в [27], где он заметил, что в финитно аппроксимируемой группе нет полных элементов отличных от 1, и что абелева группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней нет полных элементов отличных от 1.

Это утверждение не может быть распространено с абелевых групп на нильпотентные группы. Соответствующий пример был подсказан автору настоящей работы А. Л. Шмелькиным и представляет собой обобщенное прямое произведение бесконечного числа экземпляров группы кватернионов с объединенными центрами. Такая группа не является финитно аппроксимируемой, но при этом в ней нет полных элементов кроме 1.

Замечание Мальцева об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости абелевой группы легко обобщается на случай $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости следующим образом. Абелева группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит π-полных элементов отличных от 1 [105].

Это утверждение, как и замечание Мальцева, не может быть распространено с абелевых групп на нильпотентные группы, но, тем не менее, оно остается верным для достаточно широкого класса нильпотентных групп, содержащего все абелевы группы. В качестве такого класса выступает класс всех нильпотентных групп, в которых все степенные подгруппы финитно отделимы. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть G — нильпотентная группа, и все ее степенные подгруппы финитно отделимы. И пусть π — множество простых чисел.*

Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит π-полных элементов отличных от 1.

Для группы G следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

2. Множество T всех π'-элементов группы G конечно, и фактор-группа G/T $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

3. Множество T всех π'-элементов группы G конечно и совпадает с множеством всех π-полных элементов группы G.

В частности, если в группе G нет кручения, то для нее свойства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости равносильны.

В связи с этой теоремой напомним, что подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если она совпадает с пересечением некоторого семейства подгрупп конечного индекса группы G. Для нормальной подгруппы H это равносильно финитной аппроксимируемости фактор-группы G/H. Напомним также, что степенной подгруппой группы G называется подгруппа G^n, порожденная n-ми степенями всех элементов группы G, где n — фиксированное целое положительное число.

Если G — абелева группа, то по хорошо известной теореме Прюфера фактор-группа G/G^n раскладывается в прямое произведение циклических групп и потому финитно аппроксимируема. Таким образом, в абелевых группах все степенные подгруппы финитно отделимы, и поэтому теорема 3.1 применима к любой абелевой группе.

Еще одним классом групп, к которым применима теорема 3.1, является класс всех нильпотентных групп конечного ранга. Легко видеть, что в разрешимых (и, в частности, в нильпотентных) группах конечного ранга все степенные подгруппы имеют конечные индексы, и следовательно финитно отделимы (см., напр., [100], предл. 1). Поэтому утверждения теоремы 3.1 верны для любой нильпотентной группы G конечного ранга. Эти утверждения в более "сжатом" виде формулируются следующим образом.

Нильпотентная группа G конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема (почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда множество всех ее π-полных элементов совпадает с единичной подгруппой (является конечным и совпадает с множеством всех π'-элементов группы G).

Это утверждение существенно обобщает и дополняет классическую теорему Грюнберга [70] об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости произвольной конечно порожденной нильпотентной группы без кручения для каждого простого p. Оно не может быть обобщено на разрешимые группы конечного ранга. Тем не менее, такое обобщение верно в случае, когда множество π состоит из всех простых чисел, т. е. имеет место следующее утверждение, доказанное Д. Робинсоном (см., напр., [80], п. 5.3.2). Разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит полных элементов, отличных от 1.

Для произвольного множества π простых чисел вопрос об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы G конечного ранга не исследован даже в простейшем случае, когда группа G является полициклической, а множество π состоит из одного простого числа.

Значительно лучше изучен вопрос о почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимых групп конечного ранга. Исследования в этом направлении были начаты А.Л. Шмелькиным [51] и Д. Робинсоном (см., напр., [80], п. 5.3.8), а затем продолжены в работах [100] и [115]. Полученные в этих работах условия почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимых групп конечного ранга доказаны только для случая, когда множество π конечно. Прежде чем формулировать эти результаты, напомним некоторые известные теоремы, относящиеся к данному направлению.

Начнем с результатов о полициклических группах. В 1952 году К. Гирш [73] доказал, что любая полициклическая группа финитно аппроксимируема. Этот результат был усилен сначала в работе Лернера [79], а затем в работе А. Л. Шмелькина [51]. Лернером доказано, что для каждой полициклической группы G существует конечное множество π простых чисел такое, что группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, а в работе А. Л. Шмелькина доказана почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость произвольной полициклической группы для любого простого p. Заметим, что вопрос об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полициклических групп исследован только в некоторых частных случаях, например, для сверхразрешимых групп.

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. Финитная аппроксимируемость таких групп исследована Д. Робинсоном. Для формулировки соответствующего результата напомним, что группа G называется полной, если все ее элементы являются полными. Группа G называется редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Д. Робинсон (см., напр., [80], п. 5.3.2) доказал следующее утверждение.

Если разрешимая группа конечного ранга является редуцированной, то она финитно аппроксимируема.

С другой стороны, любая финитно аппроксимируемая группа, очевидно, не содержит неединичных полных элементов, а любая группа, не содержащая неединичных полных элементов, редуцирована. Поэтому для разрешимой группы конечного ранга условия финитной аппроксимируемости, редуцированности и отсутствия неединичных полных элементов равносильны между собой. Заметим, что для абелевой группы условия финитной аппроксимируемости и осутствыия неединичных полных элементов равносильны между собой, но они уже не равносильны редуцированности.

Вопрос об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга для подходящего конечного множества π простых чисел решается следующей теоремой.

Теорема 3.2. *Разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда она является редуцированной FATR-группой.*

Следуя Д. Робинсону [80], мы называем разрешимую группу FATR-группой (группой с конечными абелевыми тотальными рангами), если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого является или циклической группой, или квазициклической группой, или группой, вложимой в аддитивную группу рациональных чисел. Разрешимые FATR-группы составляют важный подкласс в классе разрешимых групп конечного ранга.

Достаточность в теореме 3.2 установлена Д. Робинсоном (см., напр., [80], п. 5.3.8). Очень простое доказательство необходимости в теореме 3.2 приведено ниже. Мы приводим это доказательство по той причине, что в [80] теорема 3.2 сформулирована и доказана только "в одну сторону". Кроме того, для разрешимых групп конечного ранга, удовлетворяющих условиям теоремы 3.2, мы докажем следующее более тонкое свойство.

Теорема 3.3. *Если разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то она почти π-примарно аппроксимируема.*

Б. Верфриц в статье "Remarks on Azarov's work on soluble groups of finite rank" [94], посвященной работе автора [115], привел свое доказательство теоремы 3.3.

В связи с формулировкой теоремы 3.3 заметим, что для разрешимой группы бесконечного ранга из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости уже не следует свойство почти π-примарной аппроксимируемости. Приведем соответствующий пример. Пусть множество π состоит из двух простых чисел p и q. Для каждого целого положительного числа k рассмотрим группы

$$A_k = (a_1, a_2, \dots a_{q^k}; {a_i}^p = 1, a_i a_j = a_j a_i, (i, j = 1, 2, \dots q^k))$$

и

$$G_k = (A, b; b^{q^k} = 1, b^{-1}a_1b = a_2, b^{-1}a_2b = a_3, \dots b^{-1}a_{q^k-1}b = a_{q^k}, b^{-1}a_{q^k}b = a_1).$$

Очевидно, что подгруппа A_k является наибольшей нормальной нильпотентной подгруппой группы G_k. Очевидно также, что прямое произведение G групп G_k по всем k является разрешимой $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой. Покажем, что эта группа не является почти π-примарно аппроксимируемой. Допустим от противного, что в G существует нормальная π-примарно аппроксимируемая подгруппа H конечного индекса n. Тогда $H \cap G_k$ — нормальная π-примарно аппроксимируемая подгруппа конечной группы G_k. Поэтому подгруппа $H \cap G_k$ нильпотентна, и следовательно она содержится в A_k. Тогда для каждого k выполняется неравенство

$$[G_k : A_k] \leq [G_k : H \cap G_k] \leq [G : H] = n,$$

что не возможно, так как индексы $[G_k : A_k] = q^k$ не ограничены.

Из теорем 3.3 и 2.4 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Если разрешимая группа G конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то группа автоморфизмов группы G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема и даже почти π-примарно аппроксимируема.

Заметим еще, что для фиксированного конечного множества π простых чисел мы не располагаем критерием $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга, но, тем не менее, ниже доказан следующий критерий почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости.

Теорема 3.4. *Пусть π — конечное множество простых чисел. Разрешимая группа конечного ранга почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она является редуцированной FATR-группой и не содержит π-полных элементов бесконечного порядка.*

Заметим, что предложение 3.1 позволяет заменить в теореме 3.4 требование отсутствия π-полных элементов бесконечного порядка в группе G требованием совпадения множества всех π-полных элементов группы G с множеством всех ее π'-элементов.

Непосредственным следствием теоремы 3.4 является упомянутый выше результат А. Л. Шмелькина о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости произвольной полициклической группы для каждого простого числа p.

Важным примером разрешимой группы конечного ранга является группа

$$G_n = (a, b; b^{-1}ab = a^n),$$

где n — ненулевое целое число. Эта группа принадлежит хорошо известному классу групп Баумслага — Солитэра и является финитно аппроксимируемой [86]. Очевидно, что подгруппа H группы G_n, порожденная всеми элементами $b^{-k}ab^k$, где k — целое число, изоморфна группе Q_n n-ичных дробей, а фактор-группа группы G_n по подгруппе H является бесконечной циклической. Поэтому G_n — редуцированная разрешимая FATR-группа без кручения. Пусть теперь π — некоторое (не обязательно конечное) множество простых чисел. Если все числа из π делят n, то все элементы из $H \cong Q_n$ являются π-полными, и в этом случае в силу предложения 3.1 группа G_n не является почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой. Если же некоторое простое число p из π не делит n, то в группе G_n, очевидно, нет неединичных p-полных элементов, и тогда в силу теоремы 3.4 группа G_n почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и, следовательно, она почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Пусть π — произвольное множество простых чисел. Группа G_n почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда множество π не содержится в множестве всех делителей числа n.

Независимое доказательство этого утверждения приведено в [96].

Сформулированные выше теоремы 3.3 и 3.4 допускают следующую "одновременную" формулировку.

Пусть π — конечное множество простых чисел. Для разрешимой группы G конечного ранга следующие три условия равносильны.

1. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

2. Группа G почти π-примарно аппроксимируема.

3. Группа G является редуцированной FATR-группой и не содержит π-полных элементов бесконечного порядка.

Недавно это утверждение было заново доказано Б. Верфрицем в упомянутой выше статье [94]. При этом он заметил, что требование конечности ранга разрешимой группы G в данном утверждении может быть в небольшой степени ослаблено следующим образом: разрешимая группа G имеет конечный ранг Гирша и удовлетворяет условию минимальности на p-подгруппы для каждого простого p.

В теоремах 3.2 и 3.4 для разрешимой группы конечного ранга указаны необходимые и достаточные условия $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для подходящего конечного множества π и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для фиксированного конечного множества π. Эти условия используют нетривиальное понятие FATR-группы. В следующей теореме указаны более простые эквивалентные условия.

Теорема 3.5. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга.*

1. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда все ее периодические подгруппы конечны, и группа G не содержит подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q рациональных чисел.

2. Пусть π — конечное множество простых чисел. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все ее периодические подгруппы конечны, и группа G не содержит подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q_π π-ичных дробей.

В связи с формулировкой теоремы 3.5 заметим, что конечность всех периодических подгрупп разрешимой группы G конечного ранга равносильна конечности ее периодического радикала $\tau(G)$ (напомним, что $\tau(G)$ — наибольшая нормальная периодическая подгруппа группы G). Это следует из хорошо известной теоремы Мальцева (см., напр., [80], п. 5.2.1), которая формулируется следующим образом. Если G — разрешимая группа конечного ранга, то в фактор-группе $G/\tau(G)$ существует нормальный ряд, все бесконечные факторы которого являются абелевыми группами без кручения.

Непосредственным следствием теоремы 3.5 является упомянутая выше теорема А. Л. Шмелькина [51]. Приведем теперь некоторые другие известные результаты, являющиеся следствиями теоремы 3.5. Первый из них относится к разрешимым минимаксным группам, которые составляют важный подкласс в классе разрешимых FATR-групп.

Пусть G — разрешимая минимаксная группа. Это означает, что в группе G существует конечный субнормальный ряд $\mathcal{R}$, каждый фактор которого является либо циклической группой, либо квазициклической группой. Спектром группы G называется множество $sp(G)$ всех простых чисел p таких, что ряд $\mathcal{R}$ имеет квазициклический фактор типа p^∞. Очевидно, что множество $sp(G)$ не зависит от выбора ряда $\mathcal{R}$. Очевидно также, что спектр группы Q_p p-ичных дробей (где p — простое число) состоит из одного числа p, и если H — подгруппа разрешимой минимаксной группы G, то $sp(H) \subseteq sp(G)$. Поэтому если $p \notin sp(G)$, то группа G не содержит подгрупп, изоморфных Q_p. Кроме того, любая периодическая подгруппа разрешимой минимаксной группы G, очевидно, удовлетворяет условию минимальности и поэтому является черниковской группой, т. е. либо она конечна, либо является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп. Поэтому если разрешимая минимаксная группа G редуцирована, то любая ее периодическая подгруппа конечна, и кроме того, как уже отмечалось выше, если $p \notin sp(G)$, то группа G не содержит подгрупп, изоморфных Q_p. Поэтому непосредственным следствием теоремы 3.5 является следующий классический результат (см. [80], п. 5.3.9).

Следствие 3.1. *Если разрешимая минимаксная группа G редуцирована и простое число p не принадлежит спектру группы G, то группа G является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. В частности, произвольная полициклическая группа является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой для каждого простого числа p.*

Рассмотрим теперь одно приложение теоремы 3.5 к исследованию нисходящих HNN-расширений групп. Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, H — подгруппа конечного индекса n группы G, φ — изоморфизм группы G на подгруппу H. И пусть $G(\varphi)$ — нисходящее HNN-расширение группы G с проходной буквой t, соответствующее изоморфизму φ. Для каждого целого числа i введем обозначение $G_i = t^{-i}Gt^i$. Очевидно, что

$$G_0 \subseteq G_{-1} \subseteq G_{-2} \subseteq \dots,$$

и подмножество $\bar{G} = \bigcup_{i \leq 0} G_i$ является нормальной подгруппой группы $G(\varphi)$, причем фактор-группа группы $G(\varphi)$ по подгруппе $\bar{G}$ является бесконечной циклической. Поэтому $G(\varphi)$ — разрешимая группа конечного ранга. Обозначим через T периодический радикал группы $G(\varphi)$. Очевидно, что $T \subseteq \bar{G}$, $T = \bigcup_{i\leq 0} T \cap G_i$, и $T \cap G_i \subseteq \tau(G_i) \cong \tau(G)$. Поэтому если подгруппа $\tau(G)$ конечна, то подгруппа T является объединением возрастающей последовательности конечных подгрупп $T \cap G_i$, порядки которых ограничены, и тогда подгруппа T конечна. Очевидно, что для всех целых i индекс $[G_i : G_{i+1}]$ конечен и равен n. Поэтому если для некоторого простого числа p бо́льшего n группа G не содержит подгрупп, изоморфных Q_p, то этим свойством обладает группа $\bar{G}$, а значит и группа $G(\varphi)$. Таким образом, очевидным следствием теоремы 3.5 является следующее утверждение, обобщающее некоторые недавние результаты о нисходящих HNN-расширениях.

Следствие 3.2. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, H — подгруппа конечного индекса n группы G, φ — изоморфизм группы G на подгруппу H. И пусть $G(\varphi)$ — нисходящее HNN-расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ. Если для некоторого простого числа p бо́льшего n группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то и группа $G(\varphi)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Так как редуцированная разрешимая минимаксная группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p, и любая подгруппа H группы G, изоморфная G, имеет в G конечный индекс, то частным случаем следствия 3.2 является следующий результат А. Ремтуллы и М. Ширвани, недавно доказанный в работе [90]: *нисходящее HNN-расширение редуцированной разрешимой минимаксной группы финитно аппроксимируемо.* Ранее Д. Вайз и Т. Су в работе [74] доказали финитную аппроксимируемость нисходящего HNN-расширения полициклической группы.

Заметим еще, что в следствии 3.2 условие конечности ранга группы G может быть ослаблено до требования конечности общего ранга, а условие разрешимости не существенно. Данное утверждение в таком общем виде уже не относится к теории разрешимых групп и будет доказано в §4 диссертации.

Результаты из §3 опубликованы в работах автора [105], [100] и [115].

Доказательство предложения 3.1

Пусть π — множество простых чисел. И пусть G — произвольная группа.

Так как в конечной π-группе нет π-полных элементов отличных от 1, и так как свойство π-полноты элемента наследуется при гомоморфизме, то при любом гомоморфизме группы G на конечную π-группу все π-полные элементы переходят в 1. Поэтому если группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она не содержит π-полных элементов отличных от единицы. Первое утверждение предложения 3.1 доказано.

Так как любой π'-элемент группы G, очевидно, является π-полным, то для доказательства второй части предложения 3.1 остается проверить, что любой π-полный элемент g почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы G является π'-элементом. Обозначим через F какую-нибудь нормальную $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса группы G, а через m — индекс подгруппы F в группе G. Тогда для каждого элемента a группы G элемент a^m принадлежит F. Поэтому элемент g^m принадлежит подгруппе F и является ее π-полным элементом. Отсюда и из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы F по первому утверждению предложения 3.1 следует, что $g^m = 1$. Таким образом, порядок элемента g конечен. Очевидно, существует π'-число n такое, что g^n — π-элемент, причем он, как и элемент g, является π-полным. С другой стороны, любой π-полный π-элемент, очевидно, является полным. Таким образом, g^n — полный элемент, и поэтому в силу финитной аппроксимируемости группы G элемент g^n равен 1. Следовательно, g является π'-элементом.

Предложение 3.1 доказано.

Доказательство теоремы 3.1

Доказательство теоремы 3.1 основано на следующем утверждении, даказанном А. И. Мальцевым (см. [27], лемма 2).

Если G — нильпотентная группа ступени c, то для каждого целого положительного числа n из любого элемента степенной подгруппы G^{n^c} в группе G можно извлечь корень степени n.

Это утверждение будем далее называть леммой Мальцева. Заметим, что для конечно порожденных разрешимых групп лемма Мальцева обратима [81].

Переходя к доказательству теоремы 3.1, введем ряд обозначений. Пусть G — нильпотентная группа, и все ее степенные подгруппы финитно отделимы. Последнее условие означает, что для каждого целого положительного числа n фактор-группа G/G^n финитно аппроксимируема. Пусть, далее, π — непустое множество простых чисел, $\omega_\pi(G)$ — множество всех π-полных элементов группы G, $\sigma_\pi(G)$ — пересечение всех нормальных подгрупп конечного π-индескса группы G. Введенные выше обозначения сохраняются всюду в этом разделе.

Покажем сначала, что

$$\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G). \tag{3.1}$$

В самом деле, пусть $a \in \omega_\pi(G)$, т. е. a — π-полный элемент группы G. И пусть F — нормальная подгруппа группы G конечного π-индекса. Так как в конечной π-группе G/F, очевидно, нет π-полных элементов отличных от 1, а элемент aF наследует π-полноту от элемента a, то $aF = 1$, т. е. $a \in F$. Следовательно, $a \in \sigma_\pi(G)$. Таким образом, мы видим, что $\omega_\pi(G) \subseteq \sigma_\pi(G)$.

Теперь для доказательства равенства (3.1) остается проверить, что любой элемент a группы G, не принадлежащий $\omega_\pi(G)$, не принадлежит и некоторой нормальной подгруппе конечного π-индекса группы G. Так как элемент a не является π-полным, то для некоторого π-числа n уравнение $x^n = a$ не разрешимо в группе G. Отсюда по лемме Мальцева следует, что элемент a не принадлежит степенной подгруппе $H = G^{n^c}$, где c — ступень нильпотентности группы G. Так как G/H — финитно аппроксимируемая π-группа, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что aH — неединичный элемент группы G/H следует, что в группе G/H существует нормальная подгруппа F/H конечного π-индекса, не содержащая элемент aH. Тогда F — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G, не содержащая элемент a. Равенство (3.1) доказано.

Так как $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G, очевидно, равносильна условию $\sigma_\pi(G) = 1$, то из равенства (3.1) следует справедливость первого утверждения теоремы 3.1.

Для доказательства второго утверждения теоремы 3.1 будем использовать все введенные выше обозначения. Как и в формулировке теоремы 3.1 через T будем обозначать множество всех π'-элементов группы G, т. е. множество всех элементов группы G, порядки которых конечны и взаимно просты с каждым числом из множества π. Так как группа G нильпотентна, то T — подгруппа группы G.

Покажем, что следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.
2. Подгруппа T конечна, и фактор-группа G/T $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.
3. Подгруппа T конечна и совпадает с множеством $\omega_\pi(G)$.

Предположим сначала, что выполняется условие 1, т. е. что группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Обозначим через P какую-нибудь $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса группы G. Так как в любой $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группе, очевидно, нет π'-кручения, то $T \cap P = 1$. Отсюда и из того, что индекс подгруппы P в группе G конечен, следует, что подгруппа T конечна. Кроме того, из почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G по предложению 3.1 следут, что $\omega_\pi(G) = T$. Таким образом, выполняется условие 3.

Пусть теперь выполняется условие 3, т. е. подгруппа T конечна и совпадает с $\omega_\pi(G)$. Тогда в силу равенства (3.1) подгруппа T совпадает с пересечением всех нормальных подгрупп конечного π-индекса группы G. Отсюда следует, что в фактор-группе G/T пересечение всех нормальных подгрупп конечного π-индекса тривиально, т. е. что группа G/T $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Мы видим, что выполняется условие 2.

Предположим теперь, что выполняется условие 2, т. е. что подгруппа T конечна, и фактор-группа G/T $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Обозначим через m порядок подгруппы T. Рассмотрим степенную подгруппу $F = G^{m^c}$, где c — ступень нильпотентности группы G. По условию фактор-группа G/F финитно аппроксимируема. Пусть $t \in T \cap F$. Поскольку $t \in T$ и $\mid T \mid = m$, то $t^m = 1$. Так как $t \in F$, то по лемме Мальцева $t = g^m$ для некоторого элемента g из G. Из последних двух равенств следует, что $g^{m^2} = 1$. Отсюда и из того, что $m = |T|$ — π'-число, следует, что $g \in T$. Но тогда $g^m = 1$, т. е. $t = 1$. Таким образом, $T \cap F = 1$. Поэтому естественный гомоморфизм ε группы G на фактор-группу G/F инъективен на подгруппе T. Так как $T\varepsilon$ — конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы G/F, то существует гомоморфизм φ группы G/F на конечную группу K, инъективный на $T\varepsilon$. Тогда произведение $\varepsilon\varphi$ является гомоморфизмом группы G на конечную группу K, инъективным на T. Поэтому ядро N гомоморфизма $\varepsilon\varphi$

является подгруппой конечного индекса группы G, и при этом $N \cap T = 1$. Отсюда следует, что естественный гомоморфизм ρ группы G на фактор-группу G/T инъективен на N. Поэтому группа N вложима в группу G/T. Отсюда и из того, что по условию G/T $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, следует, что и N $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Таким образом, N — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая подгруппа конечного индекса группы G. Следовательно, G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, т. е. выполняется условие 1.

Теорема 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.2

Как уже отмечалось выше, достаточность в теореме 3.2 доказана Д. Робинсоном. Докажем необходимость. Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, являющаяся $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой для некоторого конечного множества π простых чисел. Покажем, что она является редуцированной FATR-группой. Так как любая финитно аппроксимируемая группа, очевидно, редуцирована, то нам остается доказать, что группа G является FATR-группой. Мы будем использовать следующий хорошо известный критерий (см. [80], стр. 90).

Разрешимая группа X конечного ранга является FATR-группой тогда и только тогда, когда ее периодический радикал $\tau(X)$ является черниковской группой (т. е. конечной группой или конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп). Напомним, что периодическим радикалом группы называется ее наибольшая нормальная периодическая подгруппа. Сформулированный выше критерий для свойства FATR доказан в ([80], стр. 90) даже в более общей ситуации — когда разрешимая группа X имеет конечный ранг Гирша.

Теперь доказательство теоремы 3.2 сводится к проверке конечности группы $\tau(G)$, т. е. к доказательству следующего утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть T — периодическая разрешимая группа конечного ранга, являющаяся $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемоой для некоторого конечного множества π простых чисел. Тогда группа T конечна.*

Доказательство. Так как T — периодическая $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая группа, то она является π-группой.

Пусть $1 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T_n = T$ — нормальный ряд группы T с абелевыми факторами. Группа $A = T_1$ является абелевой π-группой и раскладывается в прямое произведение примарных компонент, причем их число конечно, так как конечно множество π. Примарные компоненты группы A являются финитно аппроксимируемыми абелевыми p-группами конечного ранга. Покажем, что все они конечны.

Пусть P — p-компонента группы A. Для каждого целого положительного числа k через P_k будем обозначать множество всех элементов a группы P таких, что $a^{p^k} = 1$. Это множество конечно за счет конечности ранга группы P. Поэтому группа P не более чем счетна. Так как P финитно аппроксимируема, то в ней нет элементов бесконечной p-высоты отличных от единицы, т. е. таких неединичных элементов a, из которых в группе A извлекается корень степени p^k для любого целого положительного k. Из последних двух обстоятельств по второй теореме Прюфера следует, что группа P раскладывается в прямое произведение циклических p-групп. Отсюда и из конечности ранга группы P следует, что группа P конечна.

Таким образом, все примарные компоненты группы A являются конечными группами. А поскольку число этих примарных компонент также конечно, то и группа A конечна.

Так как группа T $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, и A — ее конечная нормальная подгруппа, то фактор-группа T/A также $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Таким образом, T/A — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая периодическая разрешимая группа конечного ранга, причем она обладает нормальным рядом с абелевыми факторами длины меньшей n. Поэтому в силу индуктивных соображений группа T/A конечна. Отсюда и из конечности группы A следует конечность группы T.

Вспомогательные леммы

Как уже отмечалось выше (см. [80], стр. 90), разрешимая группа G конечного ранга является FATR-группой тогда и только тогда, когда ее периодический радикал $\tau(G)$ является черниковской группой.

Очевидно также, что группа G является редуцированной тогда и только тогда, когда она не содержит квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q рациональных чисел.

Комбинация этих двух утверждений позволяет доказать следующую лемму.

Лемма 3.2. *Разрешимая группа G конечного ранга является редуцированной FATR-группой тогда и только тогда, когда все ее периодические подгруппы конечны, и G не содержит подгрупп, изоморфных аддитивной группе Q рациональных чисел.*

Доказательство. Необходимость в этой лемме обеспечивается следующими тремя очевидными утверждениями.

1. Редуцированная группа не содержит подгрупп, изоморфных группе Q.

2. Любая периодическая подгруппа разрешимой FATR-группы является черниковской.

3. Любая черниковская подгруппа редуцированной группы конечна.

Столь же очевидна и достаточность. В самом деле, пусть разрешимая группа G конечного ранга не содержит подгрупп, изоморфных группе Q, и все ее периодические подгруппы конечны. В частности, в G нет квазициклисеских подгрупп, и подгруппа $\tau(G)$ конечна. В силу последнего обстоятельства группа G является FATR-группой. Редуцированность группы G обеспечивается отсутствием в ней квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных группе Q. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть G — разрешимая редуцированная FATR-группа. Тогда в группе G существует нормальная нильпотентная подгруппа N без кручения такая, что фактор-группа G/N является полициклической.*

Доказательство. Пусть G — разрешимая редуцированная FATR-группа. По лемме 3.2 все ее периодические подгруппы конечны. В частности, конечен ее периодический радикал $\tau(G)$.

Хорошо известная теорема Грюнберга — Мальцева (см., напр., [80], п. 5.2.2) утверждает, что в любой разрешимой FATR-группе подгруппа Фиттинга нильпотентна. Напомним, что подгруппой Фиттинга данной группы называется произведение всех ее нормальных нильпотентных подгрупп.

Д. Робинсон доказал, что если периодический радикал разрешимой группы конечного ранга конечен, то фактор-группа этой группы по ее подгруппе Фиттинга является полициклической и почти абелевой. Этот результат имеет место даже в более общей ситуации — для разрешимых групп конечного ранга Гирша (см., напр., [80], п. 5.2.3).

Так как рассматриваемая нами группа G является FATR-группой, и ее периодический радикал $\tau(G)$ конечен, то в силу сформулированных выше теорем Грюнберга — Мальцева и Робинсона мы можем утверждать, что подгруппа Фиттинга F группы G нильпотентна, а фактор-группа G/F является полициклической.

Так как все периодические подгруппы группы G конечны, то периодический радикал $\tau(F)$ группы F конечен.

Так как G — редуцированная разрешимая группа конечного ранга, то по упомянутой выше теореме Робинсона она финитно аппроксимируема (см., напр., [80], п. 5.3.2). Поэтому из конечности ее подгруппы $\tau(F)$ следует, что в группе G существует нормальная подгруппа L конечного индекса такая, что $\tau(F) \cap L = 1$. Пусть $N = L \cap F$. Так как G/F — полициклическая группа и G/L — конечная разрешимая группа, то G/N — полициклическая группа. Хорошо известно, что периодический радикал нильпотентной группы совпадает с множеством всех ее элементов конечного порядка. Отсюда и из того, что $\tau(F) \cap N = 1$, следует, что подгруппа N нильпотентной группы F является нильпотентной группой без кручения. Лемма доказана

Лемма 3.4. *Пусть G — группа конечного ранга, содержащая нормальную подгруппу N такую, что фактор-группа G/N является полициклической. И пусть π — конечное множество простых чисел. Если группа N π-примарно аппроксимируема (и, в частности, если она нильпотентна и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема), то группа G почти π-примарно аппроксимируема.*

Доказательство. Будем использовать следующее утверждение, которое является частным случаем теоремы 2.4.

Пусть π — конечное множество простых чисел. Тогда любое расщепляемое расширение почти π-примарно аппроксимируемой группы конечного ранга с помощью почти π-примарно аппроксимируемой группы само является почти π-примарно аппроксимируемой группой.

Так как фактор-группа G/N является полициклической, то существует субнормальный ряд

$$1 \leq N = G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = G,$$

в котором все факторы, начиная со второго, являются циклическими группами. Индукцией по n покажем, что группа G почти π-примарно аппроксимируема. Если $n = 1$, то $G = N$ — π-примарно аппроксимируемая группа. Предположим теперь, что группа G_{n-1} почти π-примарно аппроксимируема, и покажем, что группа G также почти π-примарно аппроксимируема. Это очевидно, если фактор-группа G/G_{n-1} конечна. Поэтому можно считать, что G/G_{n-1} — бесконечная циклическая группа, т. е. что G — расширение группы G_{n-1} с помощью бесконечной циклической группы. Хорошо известно и легко проверяется, что любое такое расширение расщепляемо. Таким образом, группа G является расщепляемым расширением почти π-примарно аппроксимируемой группы G_{n-1} конечного ранга с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому в силу отмеченного выше утверждения группа G почти π-примарно аппроксимируема. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.3

Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, являющаяся $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой для некоторого конечного множества π простых чисел. Покажем, что она почти π-примарно аппроксимируема.

По теореме 3.2 группа G является редуцированной FATR-группой. Поэтому в силу леммы 3.3 в группе G существует нормальная нильпотентная подгруппа N такая, что фактор-группа G/N является полициклической. При этом группа N $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема как подгруппа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы G.

Из последних двух обстоятельств по лемме 3.4 следует, что группа G почти π-примарно аппроксимируема.

Доказательство теорем 3.4 и 3.5

Пусть G — разрешимая группа конечного ранга. По теореме 3.2 $\mathcal{F}_\pi$-аппрксимируемость группы G для некоторого конечного множества π простых чисел равносильна тому, что G является редуцированной FATR-группой, а это условие по лемме 3.2 равносильно тому, что что все периодические подгруппы группы G конечны, и G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q. Таким образом, первое утверждение теоремы 3.5 доказано.

Доказательство второго утверждения теоремы 3.5 и теоремы 3.4 сводится к проверке следующего утверждения.

Для разрешимой группы G конечного ранга и для фиксированного конечного множества π простых чисел следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

2. Группа G является редуцированной FATR-группой и не содержит π-полных элементов бесконечного порядка.

3. Все периодические подгруппы группы G конечны, и группа G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_π π-ичных дробей.

Предположим сначала, что выполняется условие 1. Тогда по предложению 3.1 группа G не содержит π-полных элементов бесконечного порядка, а по теореме 3.2 она является почти редуцированной почти FATR-группой, причем здесь слово "почти" по понятным причинам может быть опущено. Таким образом, из условия 1 вытекает условие 2.

Из условия 2 вытекает условие 3. В самом деле, из того, что G является редуцированной FATR-группой, по лемме 3.2 вытекает конечность ее периодических подгрупп, а из отсутствия π-полных элементов бесконечного порядка следуют отсутствие подгрупп, изоморфных группе Q_π.

Остается проверить, что из условия 3 вытекает условие 1. Предположим, что все периодические подгруппы группы G конечны, и что группа G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_π. В частности, группа G не содержит подгрупп, изоморфных группе Q, и тогда в силу леммы 3.2 G — редуцированная FATR-группа. Поэтому в силу леммы 3.3 G является расширением нильпотентной группы N без кручения с помощью полициклической группы. Покажем, что в группе N нет π-полных элементов отличных от 1. Допустим от противного, что h — неединичный π-полный элемент группы N. Обозначим через n произведение всех чисел из π. Тогда в силу нашего предположения для любого целого положительного числа t в группе N существует элемент x_t такой, что ${x_t}^{n^t} = h$. Тогда ${x_{t+1}}^{n^{t+1}} = h = {x_t}^{n^t}$. Отсюда и из однозначности извлечения корня в нильпотентной группе без кручения следует, что $x_{t+1}^n = x_t$. Поэтому подгруппа X группы N, порожденная всеми элементами x_t, изоморфна группе π-ичных дробей, что противоречит условию. Это противоречие показывает, что в N нет π-полных элементов отличных от 1, и поэтому в силу теоремы 3.1 группа N $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что G/N — полициклическая группа, по лемме 3.4 следует, что группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Теоремы 3.4 и 3.5 доказаны.

ГЛАВА 2

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ И ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ HNN-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Глава посвящена результатам об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости HNN-расширений некоторыми классами конечных групп.

Первый параграф главы (§4) посвящен существенным обобщениям известных результатов о $\mathcal{F}$-аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений и их аналогам для свойства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. В §5 исследуются HNN-расширения общего вида со связанными подгруппами, имеющими конечные индексы в базовой группе. §6 посвящен группам Баумслага — Солитэра как одному из наиболее простых и важных примеров HNN-расширений.

§4. О нисходящих HNN-расширениях групп

Основные результаты параграфа

Пусть G — группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \dots$ и определяемая множеством соотношений R. И пусть φ — инъективный эндоморфизм группы G. Тогда группа

$$G(\varphi) = (a_1, a_2, \dots, t; R, t^{-1}a_1t = a_1\varphi, t^{-1}a_2t = a_2\varphi, \dots)$$

называется нисходящим HNN-расширением группы G, соответствующим эндоморфизму φ.

Простейшими примерами нисходящих HNN-расширений являются разрешимые группы Баумслага — Солитэра

$$B_n = (a, b; b^{-1}ab = a^n),$$

где n — ненулевое целое число. Хорошо известно, что группа B_n финитно аппроксимируема [60]. Необходимые и достаточные условия аппроксимируемости конечными p-группами и почти аппроксимируемости конечными p-группами группы B_n получены в [31] и [96].

Рассмотрим теперь произвольное нисходящее HNN-расширение $G(\varphi)$. Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы $G(\varphi)$ является финитная аппроксимируемость группы G. С другой стороны, простые примеры показывают, что это условие не является достаточным.

Д. И. Молдаванский в работе [30] получил следующий фильтрационный критерий финитной аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения.

Группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда пересечение всех нормальных φ-совместимых подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой.

Здесь под φ-совместимой подгруппой понимается подгруппа V группы G такая, что $V\varphi = V \cap G\varphi$.

С помощью этого фильтрационного критерия ниже будут получены вполне конкретные достаточные условия финитной аппрксимируемости группы $G(\varphi)$. Одно из таких условий получено Д. И. Молдаванским в [30] и состоит в том, что база HNN-расширения является конечно порожденной свободной нильпотентной группой.

В 2003 году Д. Вайз и Т. Су [74] доказали следующий более общий результат.

Нисходящее HNN-расширение почти полициклической группы является финитно аппроксимируемой группой.

Авторы этого результата не использовали упомянутый выше критерий Д. И. Молдаванского, и по этой причине их доказательство оказалось весьма сложным. Заметим еще, что финитная аппроксимируемость нисходящего HNN-расширения полициклической группы является частным случаем следующего результата Г. Баумслага и Р. Биери, доказанного в работе [59] еще в 1976 году (см. также [80, п. 11.2.4]). *Пусть $\mathcal{K}$ — наименьший класс разрешимых групп, содержащий единичную группу и замкнутый относительно нисходящих HNN-расширений и расширений с помощью конечных разрешимых групп. Тогда любая группа из класса $\mathcal{K}$ финитно аппроксимируема.*

Существенным обобщением теоремы Вайза и Су является следующий результат А. Борисова и М. Сапира [62].

Нисходящее HNN-расширение конечно порожденной линейной группы является финитно аппроксимируемой группой.

Еще одним обобщением теоремы Вайза и Су является следующий недавний результат А. Ремтуллы и М. Ширвани [90].

Нисходящее HNN-расширение редуцированной почти разрешимой минимаксной группы является финитно аппроксимируемой группой.

Доказательство этой теоремы, приведенное в работе Ремтуллы и Ширвани, является нетривиальным в том смысле, что оно использует теорию разрешимых групп конечного ранга и фактически сводится к проверке следующего утверждения. Нисходящее HNN-расширение редуцированной почти разрешимой минимаксной группы само является редуцированной почти разрешимой минимаксной группой. Эта идея была подсказана авторам самим Д. Робинсоном. Напомним, что для разрешимых минимаксных групп условие редуцированности равносильно условию финитной аппроксимируемости (см., напр., [80, п. 5.3.2]).

Теория разрешимых групп конечного ранга позволяет доказать теорему Ремтуллы и Ширвани в более общем виде (см. доказанное в §3 следствие 3.2). Ниже доказаны значительно более общие результаты о нисходящих HNN-расширениях. Первый из них формулируется следующим образом.

Теорема 4.1. *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n. Если для некоторого множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема. В частности, если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p, то группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема.*

Заметим, что HNN-расширение $G(\varphi)$ финитно аппроксимируемой группы G конечного общего ранга не обязано быть финитно аппроксимируемой группой, даже если индекс $[G : G\varphi]$ конечен. Действительно, если G — группа рациональных дробей, знаменатели которых взаимно просты с фиксированным простым числом p, и эндоморфизм φ ставит в соответствие каждому x из G число px, то G — финитно аппроксимируемая абелева группа ранга 1, индекс $[G : G\varphi]$ конечен и равен p, и при этом группа $G(\varphi)$ не является финитно аппроксимируемой, поскольку содержит нетривиальные полные элементы.

Теорема 4.1 обобщает результаты Вайза, Су, Ремтуллы и Ширвани, но доказывается значительно проще по сравнению с доказательствами этих результатов, опубликованными в работах [74] и [90].

А. Л. Шмелькин [51] доказал, что любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p. Кроме того, если φ — инъективный эдоморфизм почти полициклической группы G, то индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен (см., напр., [74, утв. 3.10]). Поэтому теорема Вайза и Су является частным случаем теоремы 4.1.

Редуцированные разрешимые минимаксные группы почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы для всех достаточно больших простых p [80, п. 5.3.9]. Кроме того, по аналогии с упомянутым выше утверждением [74, утв. 3.10] может быть доказано, что для любого инъективного эндоморфизма φ почти разрешимой минимаксной группы G индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G

конечен. Поэтому теорема Ремтуллы — Ширвани является частным случаем теоремы 4.1.

Заметим, что теорема 4.1 является также частичным обобщением и для теоремы Борисова — Сапира, поскольку конечно порожденные линейные группы над полем нулевой характеристики почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы для всех достаточно больших простых p (см., напр., [83]).

Отметим также, что класс всех групп конечного общего ранга, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых для всех достаточно больших простых p, не исчерпывается конечно порожденными линейными группами над полями нулевой характеристики и редуцированными почти разрешимыми минимаксными группами. Этому классу принадлежат, например, конечные расширения конечно порожденных свободных разрешимых групп [70].

Еще один основной результат данного параграфа формулируется следующим образом.

Теорема 4.2. *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n. Если для некоторого конечного множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G почти π-примарно аппроксимируема, то и группа $G(\varphi)$ почти π-примарно аппроксимируема. В частности, если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p, то и группа $G(\varphi)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.*

Отметим теперь некоторые следствия из теоремы 4.2.

Так как группа Баумслага — Солитэра B_n представляет собой нисходящее HNN-расширение бесконечной циклической группы, то частным случаем теоремы 4.2 является следующее утверждение. *Если простое число p не делит n, то группа B_n почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.* Если же p делит n, то группа B_n не является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой, поскольку она содержит группу p-ичных дробей, которая, очевидно, не $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и не обладает этим свойством почти. Таким образом, из теоремы 4.2 вытекает следующее утверждение, которое было доказано в §3 диссертации с помощью теории разрешимых групп конечного ранга.

Следствие 4.1. *Группа B_n почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда p не делит n.*

Так как любая почти полициклическая группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p, и так как любая подгруппа почти полициклической группы G, изоморфная этой группе, имеет в ней конечный индекс, то из теоремы 4.2 вытекает следующее утверждение, усиливающее упомянутую выше теорему Вайза и Су.

Следствие 4.2. *Пусть G — почти полициклическая группа, φ — инъективный эндоморфизм группы G, n — индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G. Тогда для любого простого числа p, не делящего n, группа $G(\varphi)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Так как любая редуцированная почти разрешимая минимаксная группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p, и так как любая подгруппа группы G, изоморфная этой группе, имеет в ней конечный индекс, то из теоремы 4.2 вытекает следующее утверждение, усиливающее упомянутую выше теорему Ремтуллы и Ширвани.

Следствие 4.3. *Нисходящее HNN-расширение редуцированной почти разрешимой минимаксной группы является группой, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой для всех достаточно больших простых p.*

Поскольку конечно порожденные линейные группы над полем нулевой характеристики почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы для всех достаточно больших простых p, то еще одним следствием из теоремы 4.2 является следующий результат, дополняющий и частично обобщающий теорему Борисова — Сапира.

Следствие 4.4. *Пусть G — конечно порожденная группа, являющаяся линейной над полем нулевой характеристики, φ — инъективный эндоморфизм группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен. Тогда группа $G(\varphi)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.*

Теоремы 4.1 и 4.2 опубликованы автором в работах [102] и [113].

Доказательства теорем 4.1 и 4.2

Лемма 4.1. *Пусть K — конечная группа, Var_K — многообразие групп, задаваемое всеми тождествами группы K. Тогда любая группа конечного общего ранга из многообразия Var_K является конечной.*

Это утверждение было доказано в §2 (см. лемму 2.5).

Далее через π будем обозначать некоторое множество простых чисел.

Лемма 4.2. *Пусть G — группа конечного общего ранга. И пусть M — нормальная подгруппа конечного индекса (конечного π-индекса) группы G. Тогда в группе G существует вербальная подгруппа V конечного индекса (конечного π-индекса) такая, что $V \subseteq M$.*

Доказательство. Пусть

$$(f_i(x_1, x_2, \dots) = 1)_{i \in I}$$

— система всех тождеств группы G/M. Обозначим через V вербальную подгруппу группы G, порожденную всеми ее элементами $f_i(h_1, h_2, \dots)$, где $i \in I, h_1 \in G, h_2 \in G, \dots$. Тогда $V \subseteq M$ и $G/V \in Var_{G/M}$. Отсюда и из того, что группа G/V имеет конечный общий ранг, а группа G/M конечна, по лемме 4.1 следует конечность группы G/V. Если G/M — конечная π-группа, то в ней выполняется тождество $x^m = 1$, где m — π-число, и поскольку $G/V \in Var_{G/M}$, то и в группе G/V выполняется тождество $x^m = 1$, т. е. G/V — конечная π-группа. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу H, причем индекс подгруппы H в группе G конечен и равен n. И пусть для некоторого множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема (π-примарно аппроксимируема). Тогда для любого неединичного элемента $a \in G$ в группе G существует вербальная подгруппа V конечного π-индекса (конечного p-индекса для некоторого p из π), не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi = V \cap H$.*

Доказательство. Так как группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема (π-примарно аппроксимируема), то для каждого неединичного элемента $a \in G$ в группе G существует нормальная подгруппа M конечного π-индекса (конечного p-индекса для некоторого p из π), не содержащая элемент a. В силу леммы 4.2 в группе G существует вербальная подгруппа V конечного π-индекса (конечного p-индекса, где $p \in \pi$) такая, что $V \subseteq M$. Очевидно, что элемент a не принадлежит подгруппе V. Так как подгруппа V является вербальной, то $V\varphi \subseteq V$. Очевидно также, что $V\varphi \subseteq H$. Таким образом, $V\varphi \subseteq V \cap H$.

Поэтому для доказательства равенства $V\varphi = V \cap H$ нам остается проверить, что индексы подгрупп $V\varphi$ и $V \cap H$ конечны и совпадают между собой.

Так как индекс $[G : V]$ является π-числом и все числа из π взаимно просты с $[G : H]$, то индексы $[G : V]$ и $[G : H]$ взаимно просты. Поэтому

$$[G : V \cap H] = [G : V][G : H]. \tag{4.1}$$

С другой стороны, φ — изоморфизм группы G на подгруппу H, и поэтому $[G : V] = [H : V\varphi]$. Отсюда и из того, что $V\varphi \subseteq H \subseteq G$, получаем:

$$[G : V\varphi] = [G : H][H : V\varphi] = [G : H][G : V]. \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) следует, что индексы $[G : V \cap H]$ и $[G : V\varphi]$ конечны и совпадают между собой. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу H. И пусть $\mathcal{P}$ — класс групп, замкнутый относительно подгрупп. Если группа G содержит подгруппу конечного индекса, принадлежащую классу $\mathcal{P}$, то в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, принадлежащая классу $\mathcal{P}$ и такая, что $P\varphi = P \cap H$.*

В частности, если для некоторого множества π простых чисел группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема), то в группе G существует нормальная $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая (π-примарно аппроксимируемая) подгруппа P конечного индекса такая, что $P\varphi = P \cap H$.

Доказательство. Пусть M — подгруппа группы G конечного индекса, принадлежащая классу $\mathcal{P}$. В силу леммы 4.2 в группе G существует вербальная подгруппа V конечного индекса такая, что $V \subseteq M$. Так как класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно подгрупп, то подгруппа V принадлежит классу $\mathcal{P}$. А поскольку подгруппа V является вербальной, то $V\varphi \subseteq V$.

Для каждого целого неотрицательного числа i через V_i будем обозначать множество всех элементов x группы G таких, что $x\varphi^i \in V$. Очевидно, что V_i — нормальная подгруппа конечного индекса группы G,

$$V_{i+1}\varphi = V_i \cap H \tag{4.3}$$

и

$$V_i \cong V_i\varphi^i \leq V. \tag{4.4}$$

Так как $V \in \mathcal{P}$ и класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно подгрупп, то в силу (4.4) $V_i \in \mathcal{P}$ для произвольного i. Поскольку $V\varphi \subseteq V$, то

$$V = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \ldots .$$

Отсюда и из того, что V — подгруппа конечного индекса группы G, следует, что существует целое положительное число j такое, что $V_j = V_{j+1}$. Тогда при $i = j$ равенство (4.3) принимает вид $V_j\varphi = V_j \cap H$. Таким образом, подгруппа $P = V_j$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу H, причем индекс подгруппы H в группе G конечен и равен n. И пусть для некоторого множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема). Тогда имеют место следующие два утверждения.*

1. В группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, удовлетворяющая равенству $P\varphi = P \cap H$ и такая, что для любого неединичного элемента $a \in P$ в группе P существует вербальная подгруппа V конечного π-индекса (конечного p-индекса для некоторого p из π), не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi = V \cap H$.

2. Для любого неединичного элемента $a \in G$ в группе G существует нормальная подгруппа V конечного индекса, не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi = V \cap H$.

Доказательство. По лемме 4.4 в группе G существует нормальная $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая (π-примарно аппроксимируемая) подгруппа P конечного индекса такая, что $P\varphi = P \cap H$. Очевидно, что в группе конечного общего ранга все подгруппы конечного индекса имеют конечный общий ранг. Поэтому P — группа конечного общего ранга. Покажем, что $[G : H] = [P : P \cap H]$. Так как φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу H, то $[G : P] = [H : P\varphi]$. Отсюда и из того, что $P\varphi = P \cap H$ следует, что $[G : P] = [H : P \cap H]$. Умножая это равенство на $[G : H]$, получаем

$$[G : H][G : P] = [G : H][H : P \cap H] = [G : P \cap H] = [G : P][P : P \cap H].$$

Сокращая это равенство на $[G : P]$, получаем требуемое равенство $[G : H] = [P : P \cap H]$. Отсюда и из того, что все числа из π взаимно просты с числом $n = [G : H]$, следует, что все числа из π взаимно просты с $[P : P \cap H]$. Так как $P\varphi = P \cap H$, то ограничение $\bar{\varphi}$ изоморфизма φ на подгруппу P является изоморфизмом группы P на подгруппу $P \cap H$.

Таким образом, P — группа конечного общего ранга, $\bar{\varphi}$ — изоморфизм группы P на ее подгруппу $P \cap H$, индекс $[P : P \cap H]$ конечен, и при этом для некоторого множества π простых чисел взаимно простых с $[P : P \cap H]$ группа P $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема (π-примарно аппроксимируема). Поэтому в силу леммы 4.3 для любого неединичного элемента $a \in P$ в группе P существует вербальная подгруппа V конечного π-индекса (конечного p-индекса для некоторого p из π), не содержащая элемент a и такая, что $V\bar{\varphi} = V \cap (P \cap H)$. Последнее равенство может быть переписано в виде $V\varphi = V \cap H$. Тем самым доказано первое утверждение леммы.

Так как V — вербальная подгруппа конечного индекса группы P, и P — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Таким образом, для любого неединичного элемента a группы G, принадлежащего подгруппе P, в группе G существует нормальная подгруппа V конечного индекса, не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi = V \cap H$. Подгруппа V с такими свойствами существует и в случае, когда элемент a группы G не принадлежит подгруппе P. В этом случае в качестве искомой подгруппы V можно взять саму подгруппу P. Тем самым доказано второе утверждение леммы.

Докажем теорему 4.1. Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу H, причем индекс подгруппы H в группе G конечен и равен n. И пусть для некоторого множества π простых чисел, взаимно простых с n, группа G почти аппроксимируема конечными π-группами.

Тогда по второму утверждению лемме 4.5 пересечение всех нормальных φ-совместимых подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой, и поэтому в силу сформулированного выше критерия Д. И. Молдаванского группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема. Теорема 4.1 доказана.

Для доказательства теоремы 4.2 наряду с уже доказанными леммами нам потребуется еще и следующее утверждение.

Лемма 4.6. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм группы G,*

$$G(\varphi) = (G, t; t^{-1}Gt = G\varphi)$$

— нисходящее HNN-расширение группы G. И пусть V — подгруппа группы G такая, что $V\varphi = V \cap G\varphi$. Для каждого целого числа i введем следующие обозначения: $V_i = t^{-i}Vt^i$ и $G_i = t^{-i}Gt^i$. Тогда подмножества $\bar{V} = \bigcup_{i\in Z} V_i$ и $\bar{G} = \bigcup_{i\in Z} G_i$ являются подгруппами группы $G(\varphi)$, $\bar{V} \subseteq \bar{G}$, и для каждого целого числа i имеет место равенство

$$\bar{V} \cap G_i = V_i. \tag{4.5}$$

Если, сверх того, V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то $\bar{V}$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $\bar{G}$ и $[G : V] = [\bar{G} : \bar{V}]$.

Доказательство. Так как $t^{-1}Vt = V\varphi = V \cap G\varphi \subseteq V$, то для любого целого числа k имеет место включение $t^{-k-1}Vt^{k+1} \subseteq t^{-k}Vt^k$. Таким образом,

$$\cdots \subseteq V_1 \subseteq V_0 \subseteq V_{-1} \subseteq \ldots. \tag{4.6}$$

Поэтому $\bar{V}$ — подгруппа группы $G(\varphi)$. Аналогично проверяется, что

$$\cdots \subseteq G_1 \subseteq G_0 \subseteq G_{-1} \subseteq \ldots, \tag{4.7}$$

и поэтому $\bar{G}$ — подгруппа группы $G(\varphi)$. Очевидно также, что $\bar{V} \subseteq \bar{G}$.

Так как $V\varphi = V\cap G\varphi$, то $V\varphi^2 = V\varphi\cap G\varphi^2 = V\cap G\varphi\cap G\varphi^2 = V\cap G\varphi^2$, и, вообще, $V\varphi^n = V \cap G\varphi^n$ для любого целого положительного числа n. Таким образом, $t^{-n}Vt^n = V \cap t^{-n}Gt^n$, и поэтому $V = t^nVt^{-n} \cap G = V_{-n} \cap G$ для всех положительных n. Отсюда и из того, что в силу (4.6) $\bar{V}$ совпадает с объединением подгрупп V_{-n} по всем положительным n, следует, что $V =$

$\bar{V} \cap G$. Поэтому для любого целого числа i имеет место равенство $V_i = t^{-i}Vt^i = t^{-i}\bar{V}t^i \cap t^{-i}Gt^i = \bar{V} \cap G_i$. Таким образом, равенство (4.5) доказано.

Пусть теперь V — нормальная подгруппа группы G. Очевидно, что для любого целого числа i подгруппа V_i нормальна в группе G_i, и тогда в силу условий (4.6) и (4.7) $\bar{V}$ — нормальная подгруппа группы $\bar{G}$. Предположим еще, что индекс подгруппы V в группе G конечен и равен s. Так как в силу (4.5) для каждого целого положительного числа i

$$G_i\bar{V}/\bar{V} \cong G_i/G_i \cap \bar{V} = G_i/V_i \cong G/V,$$

то подгруппы $G_i\bar{V}/\bar{V}$ конечны и имеют один и тот же порядок s. А поскольку объединение этих подгрупп совпадает с $\bar{G}/\bar{V}$, то $\bar{G}/\bar{V}$ — конечная группа порядка s. Таким образом, $[G:V] = s = [\bar{G}:\bar{V}]$ Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 4.2.

Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G, $G(\varphi) = (G, t; t^{-1}Gt = G\varphi)$ — нисходящее HNN-расширение группы G. И пусть индекс подгруппы $G\varphi$ в группе G конечен и равен n.

Предположим, что для некоторого конечного множества π простых чисел, не делящих n, группа G почти π-примарно аппроксимируема. Покажем, что и группа $G(\varphi)$ почти π-примарно аппроксимируема.

По лемме 4.5 в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, удовлетворяющая равенству $P\varphi = P \cap G\varphi$ и такая, что для любого неединичного элемента $a \in P$ в группе P существует вербальная подгруппа V конечного p-индекса, где $p \in \pi$, не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi = V \cap G\varphi$.

Для каждого целого числа i введем следующие обозначения: $P_i = t^{-i}Pt^i$ и $G_i = t^{-i}Gt^i$. По лемме 4.6 подмножества $\bar{P} = \bigcup_{i \in Z} P_i$ и $\bar{G} = \bigcup_{i \in Z} G_i$ являются подгруппами группы $G(\varphi)$, причем поскольку P — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то в силу леммы 4.6 $\bar{P}$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $\bar{G}$ и $[G:P] = [\bar{G}:\bar{P}]$.

Покажем, что группа $\bar{P}$ π-примарно аппроксимируема, то есть что для каждого неединичного элемента a группы $\bar{P}$ в группе $\bar{P}$ существует нормальная подгруппа конечного p-индекса, не содержащая элемент a, где $p \in \pi$. Так как элемент a, очевидно, сопряжен с некоторым элементом из подгруппы P, то без потери общности можно считать, что $a \in P$. По построению группы P в ней существует вербальная подгруппа V конечного p-индекса, не содержащая элемент a и такая, что $V\varphi = V \cap G\varphi$, где $p \in \pi$. Так как V — вербальная подгруппа конечного индекса группы P и P — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Для каждого целого числа i введем следующее обозначение: $V_i = t^{-i}Vt^i$. И пусть $\bar{V} = \bigcup_{i \in Z} V_i$. Так как $V\varphi = V \cap G\varphi$ и V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то по лемме 4.6 $\bar{V}$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $\bar{G}$, $[G : V] = [\bar{G} : \bar{V}]$, и для любого целого i выполняется равенство $G_i \cap \bar{V} = V_i$ (в частности, $G \cap \bar{V} = V$). Очевидно, что $\bar{V} \subseteq \bar{P} \subseteq \bar{G}$. Поэтому $[\bar{G} : \bar{V}] = [\bar{G} : \bar{P}][\bar{P} : \bar{V}]$. Отсюда и из того, что $[G : V] = [\bar{G} : \bar{V}]$ и $[G : P] = [\bar{G} : \bar{P}]$, следует, что $[G : V] = [G : P][\bar{P} : \bar{V}]$. Но, с другоий стороны, $[G : V] = [G : P][P : V]$. Из последних двух равенств получаем $[P : V] = [\bar{P} : \bar{V}]$. А поскольку $[P : V]$ — степень числа $p \in \pi$, то и $[\bar{P} : \bar{V}]$ — степень числа p. Таким образом, $\bar{V}$ — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы $\bar{P}$, причем $p \in \pi$. Так как $a \in P \subseteq G$, $a \notin V$ и $G \cap \bar{V} = V$, то $a \notin \bar{V}$. Мы видим, таким образом, что группа $\bar{P}$ π-примарно аппроксимируема. Отсюда и из того, что индекс $[\bar{G} : \bar{P}]$ конечен, следует, что группа $\bar{G}$ почти π-примарно аппроксимируема.

Так как группа $\bar{G}$ совпадает с объединением возрастающей последовательности подгрупп G_i, изоморфных группе G, и группа G имеет конечный общий ранг, то и группа $\bar{G}$ также имеет конечный общий ранг. Легко также видеть, что группа $G(\varphi)$ является расщепляемым расширением группы $\bar{G}$ с помощью циклической группы, порожденной элементом t.

Таким образом, $G(\varphi)$ — расщепляемое расширение почти π-примарно аппроксимируемой группы $\bar{G}$ конечного общего ранга с помощью бесконечной циклической группы, причем по условию теоремы 4.2 множество π конечно. Поэтому почти π-примарная аппроксимируемость группы $G(\varphi)$ вытекает из следующего результата, являющегося частью теоремы 2.4, доказанной в первой главе диссертации. *Если группа конечного общего ранга почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то любое расщепляемое расширение этой группы с помощью почти π-примарно аппроксимируемой группы само является почти π-примарно аппроксимируемой группой.*

§5. Об HNN-расширениях со связанными подгруппами конечных индексов

Основные результаты параграфа

Пусть G — группа, H и K — подгруппы группы G, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$$

— HNN-расширение группы G с подгруппами H и K, связанными относительно изоморфизма φ. Если хотя бы одна из связанных подгрупп H или K совпадает с группой G, то группа G^* является нисходящим HNN-расширением группы G.

Как уже отмечалось выше, Д. Вайз и Т. Су в работе [74] доказали, что нисходящее HNN-расширение почти полициклической группы является финитно аппроксимируемой группой. Существенным обобщением этой теоремы является следующий результат А. Ремтуллы и М. Ширвани, доказанный в работе [90]: *нисходящее HNN-расширение редуцированной почти разрешимой минимаксной группы является финитно аппроксимируемой группой.* Здесь мы обобщаем и усиливаем приведенные выше результаты следующим образом.

Теорема 5.1. *Пусть G — редуцированная почти разрешимая минимаксная группа. И пусть G^* — HNN-расширение группы G со связанными подгруппами H и K, причем H и K являются подгруппами конечных индексов группы G. Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:*

(1) группа G^* финитно аппроксимируема;

(2) или $H = G$, или $K = G$, или в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*;

(3) группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Легко видеть, что если HNN-расширение почти разрешимой минимаксной группы G является нисходящим, т. е. если хотя бы одна из связанных подгрупп H или K совпадает с группой G, то другая связанная подгруппа имеет в группе G конечный индекс. Поэтому отмеченный выше результат А. Ремтуллы и М. Ширвани является частным случаем теоремы 5.1.

Важным примером HNN-расширения является группа Баумслага — Солитэра

$$G(m,n) = (a, b; b^{-1}a^m b = a^n),$$

где m и n — ненулевые целые числа. Эта группа представляет собой HNN-расширение бесконечной циклической группы $G = (a)$ со связанными подгруппами $H = (a^m)$ и $K = (a^n)$. Легко видеть, что для данного HNN-расширения условие (2) из теоремы 5.1 равносильно тому, что или $|m| = 1$, или $|n| = 1$, или $|m| = |n|$. Поэтому очевидным следствием теоремы 5.1 является следующий результат Г. Баумслага, Д. Солитэра и С. Мескина [86].

Группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $|m| = 1$, или $|n| = 1$, или $|m| = |n|$.

Из теоремы 5.1 также следует, что если группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема, то она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p. Более детальные результаты о почти аппроксимируемости групп Баумслага — Солитэра некоторыми классами групп получены в §6 диссертации.

Рассмотрим теперь одно обобщение теоремы 5.1 на случай, когда база HNN-расширения является группой конечного общего ранга.

Теорема 5.2. *Пусть G — группа конечного общего ранга, удовлетворяющая нетривиальному тождеству и являющаяся почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой для всех достаточно больших простых p. И пусть G^* — HNN-расширение группы G со связанными подгруппами H и K, причем H и K являются подгруппами конечных индексов группы G. Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:*

(1) группа G^* финитно аппроксимируема;

(2) или $H = G$, или $K = G$, или в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*;

(3) группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

Так как любая редуцированная почти разрешимая минимаксная группа имеет конечный общий ранг, удовлетворяет нетривиальному тождеству и является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой для всех достаточно больших простых p, то теорема 5.2 является обобщением теоремы 5.1.

В теореме 5.2 предполагается $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость базовой группы для всех достаточно больших простых p. Без этого предположения не удается получить критерий финитной аппроксимируемости HNN-расширения группы конечного общего ранга, удовлетворяющей нетривиальному тождеству, со связанными подгруппами конечных индексов. Возникающие здесь трудности относятся только к нисходящим HNN-расширениям. Напомним в связи с этим, что в §4 приведен пример нисходящего HNN-расширения финитно аппроксимируемой абелевой группы конечного ранга с связанной подгруппой конечного индекса, которое не является финитно аппроксимируемой группой.

Рассмотрим теперь случай, когда HNN-расширение не является нисходящим, а связанные подгруппы, как и выше, имеют конечные индексы в базовой группе. Для такого HNN-расширения здесь доказан следующий результат.

Теорема 5.3. *Пусть G — $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного общего ранга с нетривиальным тождеством. И пусть G^* — HNN-расширение группы G с собственными связанными подгруппами H и K, имеющими конечные индексы в группе G.*

1. Группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*.

2. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то и группа G^* почти π-примарно аппроксимируема. В частности, имеют место следующие три утверждения.

3. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти разрешимой FATR-группой, то группа G^* почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел.

4. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти разрешимой минимаксной группой, то группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

5. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти полициклической, то группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p.

Первый пункт этой теоремы обобщает аналогичный критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы, доказанный Андреадакисом Раптисом и Варсосом в работе [54].

Заметим, что теорема 5.2 является следствием теорем 5.3 и 4.2. В самом деле, пусть G и G^* такие же, как в теореме 5.2. Пакажем с помощью теорем 5.3 и 4.2, что утверждения (1), (2) и (3) из теоремы 5.2 равносильны между собой. Если HNN-расширение G^* является нисходящим, то утверждение (2), очевидно, выполняется, а утверждения (3) и (1) выполняются в силу теоремы 4.2. Если же HNN-расширение G^* не является нисходящим, то равносильность утверждений (1) и (2) обеспечивается пунктом 1 теоремы 5.3, а равносильность утверждений (1) и (3) — пунктом 2 теоремы 5.3.

Для обобщенных свободных произведений здесь доказан следующий аналог теоремы 5.3.

Теорема 5.4. *Пусть A и B — $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы конечного общего ранга с нетривиальными тождествами. И пусть $P = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, причем H является собственной подгруппой конечного индекса в группах A и B.*

1. Группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в P.

2. Если группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B почти π-примарно аппроксимируемы для некоторого конечного множества π простых чисел, то и группа P почти π-примарно аппроксимируема. В частности, имеют место следующие три утверждения.

3. Если группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти разрешимыми FATR-группами, то группа P почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел.

4. Если группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти разрешимыми минимаксными группами, то группа P почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

5. Если группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти полициклическими, то группа P почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p.

В связи с пунктом 1 теоремы 5.4 заметим, что свободное произведение $P = (A * B, H)$ двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп A и B с объединенной подгруппой H, имеющей конечные индексы в группах A и B, не обязано быть $\mathcal{F}$-аппроксимирумой группой даже в простейшем случае, когда A и B — полициклические группы. В самом деле, очевидно, что группы

$$A = \langle a_1, a_2, x;\ a_1a_2 = a_2a_1,\ x^2 = 1,\ x^{-1}a_1x = a_2\rangle$$

и

$$B = \langle b_1, b_2, y;\ b_1b_2 = b_2b_1,\ y^2 = 1,\ y^{-1}b_1y = b_2\rangle$$

являются полициклическими, их подгруппы

$$H = (a_1, a_2^2) \quad \text{и} \quad K = (b_1, b_2^3)$$

имеют конечные индексы, и отображение

$$a_1 \mapsto b_1,\ a_2^2 \mapsto b_2^3$$

может быть продолжено до изоморфизма $\varphi : H \to K$. Покажем, что построенное таким образом свободное произведение P групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ, не является финитно аппроксимируемой группой. Действительно, в любом конечном гомоморфном образе $\bar{P}$ группы P порядки сопряженных подгрупп $A_2 = (a_2)$ и $B_2 = (b_2)$ совпадают. Поэтому подгруппа C, порожденная элементом

$$c = a_2^2 = b_2^3,$$

имеет один и тот же индекс s в каждой из подгрупп A_2 и B_2 группы $\bar{P}$. Так как элементы a_2^2 и b_2^3 принадлежат C, то s делит каждое из чисел 2 и 3. Поэтому $s = 1$, т. е. в группе $\bar{P}$ имеет место равенство $A_2 = C = B_2$. Следовательно, коммутатор $[a_2, b_2]$ равен 1 в любом конечном гомоморфном образе $\bar{P}$ группы

P, но в самой группе P этот коммутатор, как легко видеть, отличен от 1. Таким образом, группа P не является финитно аппроксимируемой.

Основные результаты настоящего параграфа (теоремы 5.1 — 5.4) опубликованы автором в работе [99]. Как уже отмечалось, теорема 5.1 является частным случаем теоремы 5.2, а теорема 5.2, в свою очередь, вытекает из теорем 5.3 и 4.2. Поэтому в доказательстве нуждаются только теоремы 5.3 и 5.4.

Вспомогательные утверждения

Ниже используется следующее утверждение, являющееся частью теоремы 2.4, доказанной в §2 диссертации.

Если группа L конечного общего ранга $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел), то любое расщепляемое расширение группы L с помощью $\mathcal{F}$-аппроксимируемой (почти π-примарно аппроксимируемой) группы само является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой (почти π-примарно аппроксимируемой) группой.

Лемма 5.1. *Пусть L — нормальная подгруппа конечного общего ранга группы G. И пусть фактор-группа G/L содержит свободную подгруппу H/L конечного индекса. Если группа L $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел), то и группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема).*

Доказательство. Хорошо известно и легко проверяется, что любое расширение с помощью свободной группы расщепляемо. Поэтому группа H является расщепляемым расширением группы L с помощью свободной группы F. Предположим, что группа L $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел). Так как любая свободная группа $\mathcal{F}$-аппроксимируема и даже π-примарно аппроксимируема, то в силу уже упомянутой теоремы 2.4 группа H $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема). А поскольку H является подгруппой конечного индекса группы G, то и группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема).

Лемма 5.2. *Пусть G — группа, H — подгруппа конечного индекса группы G, Ω некоторое семейство нормальных подгрупп группы G та-*

кое, что пересечение любых двух подгрупп из Ω принадлежит Ω. И пусть $\bigcap_{M\in\Omega} HM = H$. Тогда в Ω существует подгруппа U такая, что $U \leq H$.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — система представителей левых смежных классов группы G по подгруппе H. Тогда множество

$$X = \{x_i^{-1}x_j \mid i, j = 1, \ldots, m;\ i \neq j\}$$

не пересекается с подгруппой H. Отсюда и из того, что $\bigcap_{M\in\Omega} HM = H$, следует, что для любого элемента x из X найдется подгруппа M_x из Ω такая, что $x \notin HM_x$. Подгруппа $U = \bigcap_{x\in X} M_x$ принадлежит семейству Ω. Пусть x — произвольный элемент из X. Тогда $x \notin HM_x$, и поэтому $x \notin HU$. Таким образом, множество X не пересекается с подгруппой HU, т. е. элементы $x_1, \ldots, x_m$ попарно несравнимы слева по модулю HU. Отсюда следует, что $[G : HU] \geq m = [G : H]$. Это неравенство может выполняться только в случае, когда $HU = H$, т. е. когда $U \leq H$.

Лемма 5.3. *Пусть P — HNN-расширение конечной группы G (обобщенное свободное произведение конечных групп A и B). Тогда группа P содержит свободную подгруппу F конечного индекса.*

Доказательство. Согласно работам [56] и [58] группа P финитно аппроксимируема. Поэтому существует гомоморфизм группы P на конечную группу, инъективный на конечной подгруппе G (на конечных подгруппах A и B). Ядро F этого гомоморфизма является подгруппой конечного индекса в группе P. Так как F пересекается по единице со всеми подгруппами группы P, сопряженными с G (с A и B), то по теореме Х. Нейман (см., напр., [21], с. 288) подгруппа F является свободной.

Доказательство теоремы 5.3

Пусть G — группа, H и K — подгруппы группы G, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$ — HNN-расширение группы G с подгруппами H и K, связанными относительно изоморфизма φ. Подгруппу M группы G будем называть φ-совместимой, если $(M \cap H)\varphi = M \cap K$. Обозначим через Ω множество всех нормальных φ-совместимых подгрупп конечного индекса группы G. Введенные обозначения считаются фиксированными в этом разделе диссертации.

Б. Баумслаг и М. Треткофф в работе [56] доказали, что если

$$\bigcap_{M\in\Omega} M = 1, \bigcap_{M\in\Omega} HM = H, \bigcap_{M\in\Omega} KM = K,$$

то группа G^* финитно аппроксимируема. Очевидно, что если группа G^* финитно аппроксимируема, то $\bigcap_{M\in\Omega} M = 1$. М. Ширвани в [91] доказал следующие два утверждения.

1. Пусть подгруппа группы G, порожденная подгруппами H и K, строго содержится в некоторой подгруппе группы G с нетривиальным тождеством. Если группа G^* финитно аппроксимируема, то $\bigcap_{M\in\Omega} HM = H$ и $\bigcap_{M\in\Omega} KM = K$.

2. Пусть подгруппа группы G, порожденная подгруппами H и K, удовлетворяет нетривиальному тождеству. И пусть ни одна из подгрупп H и K не содержится в другой. Если группа G^* финитно аппроксимируема, то $\bigcap_{M\in\Omega} HM = H$ и $\bigcap_{M\in\Omega} KM = K$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Лемма 5.4. *Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$, группа G удовлетворяет нетривиальному тождеству, H и K — собственные подгруппы группы G. Группа G^* финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\bigcap_{M\in\Omega} M = 1$, $\bigcap_{M\in\Omega} HM = H$ и $\bigcap_{M\in\Omega} KM = K$.*

С помощью этой леммы докажем следующее утверждение.

Лемма 5.5. *Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$, группа G удовлетворяет нетривиальному тождеству, H и K — собственные подгруппы конечных индексов группы G. И пусть группа G^* финитно аппроксимируема. Тогда в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*.*

Доказательство леммы. По лемме 5.4 $\bigcap_{M\in\Omega} HM = H$ и $\bigcap_{M\in\Omega} KM = K$. Кроме того, очевидно, что пересечение любых двух подгрупп из Ω принадлежит Ω. Поэтому в силу леммы 5.2 в Ω существуют подгруппы U и V такие, что $U \leq H$ и $V \leq K$. Тогда подгруппа $L = U \cap V$ принадлежит Ω, т. е. L — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, и $(L \cap H)\varphi = L \cap K$. Так как $L \leq H$ и $L \leq K$, то последнее равенство принимает вид $L\varphi = L$, т. е. $t^{-1}Lt = L$. Отсюда следует, что L нормальна не только в G, но и в G^*. Лемма доказана.

Если $M \in \Omega$, то можно рассматривать HNN-расширение G^*_{M} группы G/M с подгруппами HM/M и KM/M, связанными относительно изоморфизма φ_{M}, который определен по правилу $(hM)\varphi_{M} = h\varphi M$, где $h \in H$. Группа G^*_{M} представляет собой фактор-группу группы G^* по нормальному замыканию подгруппы M. В частности, если M нормальна в G^*, то G^*_{M} совпадает с фактор-группой группы G^* по подгруппе M.

Лемма 5.6. *Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$, группа G имеет конечный общий ранг и содержит подгруппу L конечного индекса, нормальную в G^*. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел), то и группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема).*

Доказательство леммы. Так как L — нормальная подгруппа группы G^* и $L \subseteq G$, то с помощью леммы Бриттона (см., напр., [21], с. 249) легко проверяется, что $L \subseteq H \cap K$. Следовательно $(L \cap H)\varphi = L\varphi = t^{-1}Lt = L = L \cap K$. Поэтому $L \in \Omega$, и можно рассматривать HNN-расширение $G^*_{L} = G^*/L$. База G/L этого HNN-расширения конечна, и поэтому в силу леммы 5.3 G^*/L содержит свободную подгруппу конечного индекса, причем L имеет конечный общий ранг как подгруппа конечного индекса в группе G конечного общего ранга. Теперь справедливость доказываемого утверждения вытекает из леммы 5.1.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 5.3. Пусть G — $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного общего ранга с нетривиальным тождеством. И пусть G^* — HNN-расширение группы G с собственными связанными подгруппами H и K, имеющими конечные индексы в группе G.

1. Группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*. Необходимость в этом утверждении обеспечивается леммой 5.5, а достаточность — леммой 5.6.

2. Пусть группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел. Тогда и группа G^* почти π-примарно аппроксимируема. В самом деле, из финитной аппроксимируемости группы G^* по лемме 5.5 следует, что в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*. Отсюда и

из почти π-примарной аппроксимируемости группы G по лемме 5.6 следует почти π-примарная аппроксимируемость группы G^*.

3. Пусть группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти разрешимой FATR-группой. Тогда группа G^* почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел. Это утверждение является частным случаем только-что доказанного утверждения 2. В самом деле, так как G — почти разрешимая $\mathcal{F}$-аппроксимируемая (а значит, редуцированная) FATR-группа, то в силу теоремы Робинсона (см., напр., [80], п. 5.3.8) она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, а значит группа G почти π-примарно аппроксимируема в силу теоремы 3.3. Отсюда и из $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы G^* по уже доказанному утверждению 2 следует, что группа G^* почти π-примарно аппроксимируема.

4. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти разрешимой минимаксной группой, то группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p. Это утверждение является частным случаем доказанного выше утверждения 2, так как любая редуцированная почти разрешимая минимаксная группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p (см., напр., [80], п. 5.3.9).

5. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группа G является почти полициклической, то группа G^* почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p. Это утверждение является частным случаем доказанного выше утверждения 2, так как любая почти полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p [51].

Теорема 5.3 доказана.

Доказательство теоремы 5.4

Лемма 5.7. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. И пусть $(A_i)_{i\in I}$ и $(B_j)_{j\in J}$ — семейства всех нормальных подгрупп конечного индекса в группах A и B соответственно,*

$$\Lambda = \{(i,j) \in I \times J : A_i \cap H = B_j \cap H\}.$$

Для каждого $\lambda = (i, j)$ *из* Λ *введем следующие обозначения:* $A_\lambda = A_i$, $B_\lambda = B_j$. *Если*

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda H = H, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda H = H, \tag{5.1}$$

то группа P *финитно аппроксимируема. Если группа* P *финитно аппроксимируема, группы* A *и* B *удовлетворяют нетривиальному тождеству,* $H \neq A$ *и* $H \neq B$, *то выполняются условия (5.1).*

Первое утверждение леммы 5.7 хорошо известно как фильтрационная теорема Г. Баумслага и доказано в [58]. Второе утверждение этой леммы представляет собой обращение фильтрационной теоремы Г. Баумслага, и оно доказано в [92]. Ниже мы сохраняем обозначения, введенные в формулировке леммы 5.7.

Лемма 5.8. *Пусть* A *и* B *— группы с нетривиальными тождествами,* P *— свободное произведение групп* A *и* B *с объединенной подгруппой* H, *причем* H *является собственной подгруппой конечного индекса в каждой из групп* A *и* B. *И пусть группа* P *финитно аппроксимируема. Тогда в группе* H *существует подгруппа* L *конечного индекса, нормальная в* P.

Доказательство леммы. По лемме 5.7 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H$. Очевидно также, что пересечение любых двух подгрупп из семейства $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ снова принадлежит этому семейству. Поэтому в силу леммы 5.2 существует $\mu \in \Lambda$ такое, что $A_\mu \subseteq H$. Аналогично проверяется, что существуют $\nu \in \Lambda$ такое, что $B_\nu \subseteq H$. Тогда подгруппа $L = A_\mu \cap B_\nu$ является подгруппой конечного индекса группы H. Так как

$$L = A_\mu \cap H \cap B_\nu = A_\mu \cap H \cap A_\nu = A_\mu \cap A_\nu,$$

то L нормальна A. Так как

$$L = A_\mu \cap H \cap B_\nu = B_\mu \cap H \cap B_\nu = B_\mu \cap B_\nu,$$

то L нормальна B. Из последних двух обстоятельств следует, что L нормальна в P. Таким образом, L — подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в P.

Лемма 5.9. *Пусть A и B — группы конечного общего ранга, P — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, причем H является подгруппой конечного индекса в каждой из групп A и B. И пусть в группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в P. Если группы A и B $\mathcal{F}$-аппроксимируемы (почти π-примарно аппроксимируемы для некоторого конечного множества π простых чисел), то и группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема).*

Доказательство леммы. Фактор-группа P/L является свободным произведением конечных групп A/L и B/L с объединенной подгруппой H/L, и поэтому в силу леммы 5.3 P/L содержит свободную подгруппу конечного индекса, причем L имеет конечный общий ранг как подгруппа конечного индекса в группе A конечного общего ранга. Теперь справедливость доказываемого утверждения вытекает из леммы 5.1.

Докажем теперь теорему 5.4. Пусть A и B — $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы конечного общего ранга с нетривиальными тождествами. И пусть $P = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, причем H является собственной подгруппой конечного индекса в группах A и B.

1. Группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в P. Необходимость в этом утверждении обеспечивается леммой 5.8, а достаточность — леммой 5.9.

2. Пусть группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B почти π-примарно аппроксимируемы для некоторого конечного множества π простых чисел. Тогда и группа P почти π-примарно аппроксимируема. В самом деле, из финитной аппроксимируемости группы P по лемме 5.8 следует, что в группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в P. Отсюда и из почти π-примарной аппроксимируемости групп A и B по лемме 5.9 следует почти π-примарная аппроксимируемость группы P.

3. Пусть группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти разрешимыми FATR-группами. Тогда группа P почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел. Это утверждение является частным случаем только-что доказанного утверждения 2. В самом деле, так как A и B — почти разрешимые финитно аппрок-

симируемые (а значит, редуцированные) FATR-группы, то в силу теоремы Робинсона (см., напр., [80], п. 5.3.8) они $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы для некоторого конечного множества π простых чисел, а значит группы A и B почти π-примарно аппроксимируемы в силу теоремы 3.3. Отсюда и из финитной аппроксимируемости группы P по уже доказанному утверждению 2 следует, что группа P почти π-примарно аппроксимируема.

4. Если группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти разрешимыми минимаксными группами, то группа P почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p. Это утверждение является частным случаем доказанного выше утверждения 2, так как любая редуцированная почти разрешимая минимаксная группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p (см., напр., [80], п. 5.3.9).

5. Если группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а группы A и B являются почти полициклическими, то группа P почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p. Это утверждение является частным случаем доказанного выше утверждения 2, так как любая почти полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p [51].

Теорема 5.4 доказана.

§6. О группах Баумслага — Солитэра

Основные результаты параграфа

Напомним, что группой Баумслага — Солитэра называется группа

$$G(m,n) = (a, b; b^{-1}a^m b = a^n),$$

где m и n — ненулевые целые числа. Эта группа представляет собой HNN-расширение бесконечной циклической группы с порождающим элементом a. Так как группы $G(m,n)$, $G(n,m)$ и $G(-m,-n)$ изоморфны между собой, то без потери общности можно считать, что $1 \leq m \leq |n|$ (и это по умолчанию предполагается ниже).

Хорошо известно [60, 86], что группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$, или $m = |n|$.

Пусть p — произвольное простое число. Д. И. Молдаванский в [31] доказал, что группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и $n \equiv 1 (\mathrm{mod} p)$, или $m = |n| = p^r$ для некоторого $r \geq 0$, причем если $m = -n$, то $p = 2$.

Рассмотрим теперь вопрос о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы $G(m,n)$. Мы можем считать, что группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема, т. е. что $m = 1$ или $m = |n|$. Здесь доказан следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть p — простое число.*

Если $m = 1$, то группа $G(m,n)$ тогда и только тогда почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, когда p не делит n. Если $m = |n|$, то группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для любого простого числа p.

Если $m = 1$ и p не делит n, то нормальное замыкание элементов a и b^{p-1} группы $G(m,n)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой подгруппой индекса $p-1$. Если же $m = |n|$, то нормальное замыкание элементов b^2, a^m и $b^{-1}a^{-1}ba$ группы $G(m,n)$ является подгруппой индекса $2m$, аппроксимируемой конечными p-группами для любого простого числа p.

В качестве следствия из этой теоремы отметим следующее утверждение.

Следствие. *Для группы $G(m,n)$ следующие три условия равносильны между собой.*

1. Группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема.

2. Группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.

3. Группа $G(m,n)$ почти аппроксимируема классом всех нильпотентных групп.

В этом утверждении импликация $1 \Rightarrow 2$ имеет место в силу теоремы 6.1. Действительно, если группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема, то или $m = 1$, и тогда группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех p, не делящих n, или $m = |n|$, и тогда группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех простых p. Так как любая конечная p-группа нильпотентна, то имеет место импликация $2 \Rightarrow 3$. А поскольку любая конечно порожденная нильпотентная группа финитно аппроксимируема [70], то справедлива импликация $3 \Rightarrow 1$.

Таким образом, для групп Баумслага — Солитэра финитная аппроксимируемость равносильна почти аппроксимируемости нильпотентными группами. С другой стороны, существуют финитно аппроксимируемые группы Баумслага — Солитэра, которые не аппроксимируемы нильпотентными группами. Соответствующим примером служит группа $G(1,2)$, так как нижний центральный ряд группы $G(1,2)$ стабилизируется на ее коммутанте. Аналогичные примеры существуют и среди групп $G(m,m)$. Эти группы имеют нетривиальный центр и нильпотентная аппроксимируемость группы $G(m,m)$ равносильна ее $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для подходящего простого числа p [85].

Пусть теперь π — непустое множество простых чисел. В работах [14, 19] Д. И. Молдаванским получены следующие необходимые и достаточные условия $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы $G(m,n)$.

1. Группа $G(1,n)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует π-число $l > 1$ такое, что l взаимно просто с n и порядок числа n по модулю l также является π-числом.

2. Группа $G(m,m)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда число m является π-числом.

3. Группа $G(m,-m)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда число m является π-числом и множество π содержит число 2.

Значительно проще дело обстоит с почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемостью группы $G(m, n)$. Ниже доказан соответствующий критерий, который формулируется следующим образом.

Теорема 6.2. *Пусть π — непустое множество простых чисел. Группа $G(m, n)$ почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого числа p из множества π.*

Основными результатами §6 являются теоремы 6.1 и 6.2, опубликованные автором в работе [96]. Эти результаты приведены также в обзорной статье [87] Д. И. Молдаванского, посвященной аппроксимационным свойствам групп Баумслага — Солитэра. Для их доказательства потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Вспомогательные утверждения

Следующие три леммы являются частными случаями ранее доказанных предложения 3.1 и теоремы 3.1.

Лемма 6.1. *Если группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она не содержит π-полных элементов отличных от единицы.*

Лемма 6.2. *Если группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она не содержит π-полных элементов бесконечного порядка.*

Лемма 6.3. *Если абелева группа G не содержит π-полных элементов отличных от 1, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.*

Следующие две леммы могут быть доказаны с помощью теоремы 1.3, но здесь для них приводятся независимые доказательства.

Лемма 6.4. *Пусть G — расщепляемое расширение циклической p-группы*

$$A = (a; a^{p^n} = 1)$$

с помощью бесконечной циклической группы $B = (b)$, т. е.

$$G = (a, b; a^{p^n} = 1, b^{-1}ab = a^k),$$

где k взаимно просто с p. Тогда подгруппа $H = AB^{p-1}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Доказательство. Если $n = 0$, то доказываемое утверждение очевидно. Поэтому далее будем считать, что $n > 0$. Так как

$$k^{p^{n-1}(p-1)} \equiv 1(\mathrm{mod} p^n),$$

то

$$a^{k^{p^{n-1}(p-1)}} = a.$$

С другой стороны, из определяющих соотношений группы G следует, что для любого целого положительного числа s

$$b^{-s}ab^s = a^{k^s}.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$b^{-p^{n-1}(p-1)}ab^{p^{n-1}(p-1)} = a.$$

Поэтому подгруппа $K = AB^{p^{n-1}(p-1)}$ является прямым произведением конечной p-группы A и бесконечной циклической группы $B^{p^{n-1}(p-1)}$. Отсюда следует, что группа K $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. А поскольку подгруппа $K = AB^{p^{n-1}(p-1)}$ является нормальной подгруппой индекса p^{n-1} в группе $H = AB^{p-1}$, то и группа H $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Лемма доказана.

Лемма 6.5. *Пусть G — расщепляемое расширение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой локально циклической группы A с помощью бесконечной циклической группы B. Тогда подгруппа $H = AB^{p-1}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и $[G : H] = p - 1$.*

Доказательство. Равенство $[G : H] = p - 1$ очевидно. Для доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы H достаточно проверить, что для каждого неединичного элемента g группы H существует гомоморфизм ε группы H на некоторую $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую группу такой, что $g\varepsilon \neq 1$. Если $g \notin A$, то в качестве ε можно взять естественный гомоморфизм группы H на бесконечную циклическую группу H/A.

Рассмотрим теперь случай, когда $g \in A$. Так как группа A $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то по лемме 6.1 элемент g не является p-полным. Поэтому существует степенная подгруппа $N = A^{p^s}$, не содержащая элемент g. Так как группа A является локально циклической, то A/N — локально циклическая группа. С другой стороны, по первой теореме Прюфера A/N — прямое произведение циклических p-групп. Следовательно, A/N — циклическая p-группа. Пусть ε — естественный гомоморфизм группы G на группу G/N. Тогда группа $G\varepsilon = G/N$ является расщепляемым расширением циклической p-группы $A\varepsilon = A/N$ с помощью бесконечной циклической группы $B\varepsilon$, и $H\varepsilon = A\varepsilon(B\varepsilon)^{p-1}$. Поэтому в силу леммы 6.4 подгруппа $H\varepsilon$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, причем $g\varepsilon \neq 1$ так как $g \notin N$. Следовательно, ограничение гомоморфизма ε на H является искомым гомоморфизмом. Лемма доказана.

Лемма 6.6. *Пусть $G = G(1, n) = (a, b; b^{-1}ab = a^n)$ — группа Баумслага — Солитэра.*

1. Если для некоторого множества π простых чисел группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то в множестве π существует простое число p, не делящее n. В частности, если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p, то p не делит n.

2. Если простое число p не делит n, то нормальное замыкание элементов a и b^{p-1} группы G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой подгруппой индекса $p-1$.

Доказательство. Обозначим через A нормальное замыкание элемента a в группе G. Очевидно, что A порождается всеми элементами вида $a_i = b^{-i}ab^i$, где i — произвольное целое число. Тогда соотношение $b^{-1}ab = a^n$ принимает вид $a_0^n = a_1$, и вообще,

$$a_{i-k}^{n^k} = a_i \tag{6.1}$$

для любого целого i и для любого целого неотрицательного числа k. Поэтому подгруппа A является объединением бесконечной возрастающей последовательности циклических подгрупп

$$(a_0) \leq (a_{-1}) \leq (a_{-2}) \leq \dots \tag{6.2}$$

Отсюда следует, что A — локально циклическая группа без кручения.

1. Предположим, что группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Тогда по лемме 6.2 она не содержит π-полных элементов бесконечного порядка. Покажем, что в множестве π существует простое число p, не делящее n. Допустим

противное, то есть что все простые числа из π делят n. Тогда любое π-число l делит n^k для подходящего k. Поэтому в силу (6.1) элемент a_i является π-полным элементом группы G, что не возможно.

2. Предположим теперь, что простое число p не делит n, то есть что p и n взаимно просты, и покажем, что в этом случае группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Покажем сначала, что в группе A нет p-полных элементов отличных от 1. Пусть g — p-полный элемент группы A. Тогда для любого целого положительного числа s в группе A существует элемент g_s такой, что

$$g_s^{p^s} = g. \tag{6.3}$$

Так как элементы g и g_s принадлежат подгруппе

$$A = \cup_{i\in Z}(a_i),$$

то

$$g = a_i^r, g_s = a_{i_s}^{r_s}, \tag{6.4}$$

где i, i_s, r, r_s — подходящие целые числа. Ввиду (6.2) числа i_s можно подобрать так, чтобы они не превосходили число i. Тогда $i_s = i - k_s$, где $k_s \geq 0$ и поэтому в силу (6.1)

$$a_{i_s}^{n^{k_s}} = a_i. \tag{6.5}$$

Из равенств (6.3), (6.4) и (6.5) получаем:

$$a_{i_s}^{r_s p^s} = g_s^{p^s} = g = a_i^r = a_{i_s}^{r n^{k_s}}.$$

Отсюда и из того, что порядок элемента a_{i_s} бесконечен следует, что

$$r_s p^s = r n^{k_s}.$$

Поэтому в силу взаимной простоты чисел p и n число p^s делит r при любом s. Следовательно, $r = 0$, то есть $g = 1$.

Таким образом, A — абелева группа, не содержащая p-полных элементов отличных от 1. Поэтому в силу леммы 6.3 группа A $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Очевидно, что группа G является расщепляемым расширением группы A с помощью циклической группы B, порожденной элементом b, причем группа A $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и является локально циклической. Поэтому в силу леммы 6.5 подгруппа $H = AB^{p-1}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и $[G : H] = p - 1$. Теперь для завершения доказательства леммы остается заметить, что подгруппа H нормальна в группе G и совпадает с нормальным замыканием элементов a и b^{p-1}.

Доказательство теорем

Пусть, как и выше,

$$G = G(m, n) = (a, b; b^{-1}a^m b = a^n)$$

— группа Баумслага — Солитэра, где $1 \leq m \leq |n|$.

Доказательство теоремы 6.1. Пусть p — простое число.

Рассмотрим сначала случай, когда $m = 1$. Если p не делит n, то в силу леммы 6.6 группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и нормальное замыкание элементов a и b^{p-1} группы G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой подгруппой индекса $p - 1$. Наоборот, если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то по лемме 6.6 p не делит n.

Рассмотрим теперь случай, когда $m = |n|$, т. е. когда группа G совпадает с одной из следующих двух групп:

$$G(m, m) = (a, b; b^{-1}a^m b = a^m), G(m, -m) = (a, b; b^{-1}a^m b = a^{-m}).$$

Покажем, что для любого простого числа p группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и нормальное замыкание H элементов b^2, a^m и $b^{-1}a^{-1}ba$ группы G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой подгруппой индекса $2m$. Очевидно, что

$$G/H = (a, b; a^m = 1, b^2 = 1, ab = ba)$$

— прямое произведение циклической группы порядка m и циклической группы порядка 2. Поэтому $[G : H] = 2m$. Так как $b^{-1}a^m b = a^{\pm m}$, то циклическая подгруппа M, порожденная элементом a^m, является нормальной подгруппой группы G. Поэтому элемент a^m перестановочен со всеми элементами группы G, сопряженными с элементами b^2, a^m и $b^{-1}a^{-1}ba$. Отсюда следует, что a^m

лежит в центре подгруппы H. Очевидно также, что

$$G/M = (a, b; a^m = 1)$$

— свободное произведение конечной циклической группы, порожденной элементом aM, и бесконечной циклической группы, порожденной элементом bM. Поэтому очевидно, что нормальное замыкание элемента bM в группе G/M является свободной группой. Подгруппа H/M группы G/M совпадает с нормальным замыканием элементов b^2M и $b^{-1}a^{-1}baM$, и следовательно она содержится в нормальном замыкании элемента bM, которое является свободной группой. Поэтому H/M — свободная группа, т. е. H является расширением группы M с помощью свободной группы. Хорошо известно, что любое такое расширение расщепляемо. Поэтому в группе H существует свободная подгруппа F такая, что H является расщепляемым расширением группы M с помощью группы F. А поскольку порождающий элемент a^m подгруппы M лежит в центре группы H, то данное расщепляемое расширение является прямым произведением. Таким образом, H — прямое произведение свободной группы F и бесконечной циклической группы M. Поэтому группа H $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, а группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Теорема 6.1 доказана.

Доказательство теоремы 6.2. Пусть π — непустое множество простых чисел. Предположим, что группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Тогда она финитно аппроксимируема, и поэтому или $m = 1$, или $m = |n|$. Если $m = |n|$, то по теореме 6.1 группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для любого простого числа p. Если же $m = 1$, то по лемме 6.6 (п.1) в множестве π существует число p, не делящее n, и тогда для этого p в силу леммы 6.6 (п.2) группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. В любом случае группа $G(m,n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого $p \in \pi$. Необходимость в теореме 6.2 доказана. Достаточность в этой теореме очевидна.

ГЛАВА 3

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ И ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Глава посвящена результатам об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений некоторыми классами конечных групп.

Глава состоит из пяти параграфов. Первый параграф (§7) посвящен критерию $\mathcal{F}$-аппроксимируемости свободного произведения двух разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением и его нетривиальному аналогу для почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Следующие за ним три параграфа содержат существенные обобщения ряда известных результатов о свободных произведениях двух групп с циклическим объединением. В последнем параграфе (§11) рассматриваются свободные произведения двух групп с конечным объединением.

§7. О свободных произведениях разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением

Основные результаты параграфа

Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому далее будем считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее для группы G будем использовать более компактное обозначение $G = (A * B, H)$ и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H. Здесь будет рассмотрено свободное произведение G групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Это означает, что подгруппа H нормальна в группах A и B (или, что равносильно, H нормальна в G).

В 1963 году Г. Баумслаг в работе [58] доказал, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Недавно для такого свободного произведения А. В. Розовым [44] было установлено следующее более тонкое и нетривиальное утверждение.

Свободное произведение двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемо для каждого простого числа p.

Напомним, что для полициклических групп свойство $\mathcal{F}$-аппроксимируемости было доказано еще в 1952 году К. Гиршем в работе [73]. Почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость произвольной полициклической группы для каждого простого p была установлена А. Л. Шмелькиным [51].

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. Напомним, что группа G называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами.

Для разрешимых групп конечного ранга вопрос о финитной аппроксимируемости решается следующей теоремой Д. Робинсона (см., напр., [80, п. 5.3.2]).

Предложение 7.1. *Почти разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Вопрос о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух разрешимых групп конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой решается следующим образом.

Теорема 7.1. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H редуцированы.*

Так как любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга почти разрешима [84], то частным случаем теоремы 7.1 является следующий результат.

Пусть $G = (A*B, H)$ — свободное произведение конечно порожденных $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.

Так как в полициклической группе все подгруппы финитно отделимы, то непосредственным следствием этого результата является упомянутая выше теорема Баумслага о финитной аппроксимируемости любого свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением. Существуют достаточно тонкие примеры конечно порожденных $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп конечного ранга, в которых не все нормальные подгруппы финитно отделимы [80, п. 11.1.4]. Поэтому свободное произведение двух конечно порожденных $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп конечного ранга с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Теперь выясним, при каких обстоятельствах свободное произведение двух почти разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой для подходящего конечного множества π простых чисел. Прежде всего заметим, что для разрешимой группы конечного ранга этот вопрос решается следующим образом.

Предложение 7.2. *Разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда она редуцирована и является FATR-группой.*

Достаточность в предложении 7.2 установлена Д. Робинсоном (см., напр., [80, п. 5.3.8]). Доказательство необходимости приведено в §3 (см. теорему 3.2).

Возвращаясь к поставленному выше вопросу об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости свободного произведения двух почти разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением, сформулируем первый основной результат настоящего параграфа.

Теорема 7.2. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H редуцированы и являются почти FATR-группами.*

Таким образом, с учетом предложения 7.2 мы видим, что $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G из теоремы 7.2 для некоторого конечного множества π простых чисел равносильна $\mathcal{F}_{\pi_1}$-аппроксимируемости групп A, B, A/H и B/H для некоторого конечного множества π_1 простых чисел.

Так как свободное произведение двух конечных p-групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, то для фиксированного конечного множества π простых чисел $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость обобщенного свободного произведения G из теоремы 7.2 не равносильна $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости групп A, B, A/H и B/H. Однако, если вместо свойства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости рассмотреть свойство почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — фиксированное конечное множество простых чисел, то удается получить следующий результат.

Теорема 7.3. *Пусть π — конечное множество простых чисел. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем*

$H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы.

Эта теорема существенно обобщает аналогичный результат А. В. Розова [43], который доказан в предположении, что A и B — нильпотентные группы конечного ранга, а множество π состоит из одного простого числа p.

Заметим еще, что теорема 7.2 является следствием теоремы 7.3 и предложения 7.2. Действительно, пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $A \neq H \neq B$. Предположим сначала, что группы A, B, A/H и B/H редуцированы и являются почти FATR-группами. Тогда по предложению 7.2 существует конечное множество π простых чисел такое, что группы A, B, A/H и B/H почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы. Отсюда по теореме 7.3 следует, что группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Поэтому существует конечное множество Π простых чисел, содержащее π и такое, что группа G $\mathcal{F}_\Pi$-аппроксимируема. Таким образом, достаточность в теореме 7.2 обеспечивается предложением 7.2 и теоремой 7.3. Аналогично, применяя сначала теорему 7.3, а затем предложение 7.2, можно легко доказать и необходимость в теореме 7.2.

Таким образом, в доказательстве нуждаются только теоремы 7.1 и 7.3. Доказательство теоремы 7.3 нетривиально и приведено ниже. Этому доказательству почти полностью посвящена работа автора [106]. Ниже приведено также и очень простое доказательство теоремы 7.1.

Сейчас остановимся на некоторых следствиях из теоремы 7.3.

Так как по теореме Шмелькина любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p, то непосредственным следствием теоремы 7.3 является следующий нетривиальный результат А. В. Розова [44].

Следствие 7.1. *Свободное произведение двух почти полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемо для каждого простого числа p.*

Важным промежуточным классом между классом полициклических групп и классом разрешимых групп конечного ранга является класс разрешимых минимаксных групп. Любая редуцированная разрешимая минимаксная группа не только $\mathcal{F}$-аппроксимируема, но и почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p (см., напр., [80, п. 5.3.9]). Поэтому из теорем 7.1 и 7.3 вытекает следующий результат.

Следствие 7.2. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых минимаксных групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Если группа G финитно аппроксимируема, то она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.*

Это утверждение доказывается последовательным применением теоремы 7.1, упомянутого выше результата [80, п. 5.3.9] о разрешимых минимаксных группах и теоремы 7.3. Здесь используется также то обстоятельство, что класс всех разрешимых минимаксных групп замкнут относительно факторизации. Класс всех разрешимых FATR-групп этим свойством уже не обладает. По этой причине финитно аппроксимируемое свободное произведение двух разрешимых FATR-групп с нормальным объединением может не быть $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемым ни для какого конечного множества π простых чисел.

Так как любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга является почти разрешимой минимаксной группой [84], то из следствия 7.2 вытекает следующий результат.

Следствие 7.3. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение конечно порожденных групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H. Если группа G финитно аппроксимируема, то она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.*

Все результаты, изложенные в §7, опубликованы в работе автора [106].

Доказательство теоремы 7.1

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Очевидно, что если группа G финитно аппроксимируема, то группы A и B финитно аппроксимируемы. В работе [92] Ширвани доказал, что если группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, и $A \neq H \neq B$, то из финитной аппроксимируемости группы G следует финитная отделимость подгруппы H в группах A и B (см. также лемму 5.7). В случае, если H — нормальная подгруппа в группах A и B, ее финитная отделимость в этих группах равносильна финитной аппроксимируемости фактор-групп A/H и B/H. Таким образом, если группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, подгруппа H нормальна в A и B, и $A \neq H \neq B$, то из финитной аппроксимируемости группы G следует финитная аппроксимируемость фактор-групп A/H и B/H. Это доказывает необходимость в теореме 7.1, так как любая финитно аппроксимируемая группа редуцирована.

Для доказательства достаточности предположим, что $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, и что группы A, B, A/H и B/H редуцированы. Покажем, что группа G финитно аппроксимируема. Для каждого целого положительного числа n через H^n будем обозначать подгруппу группы H, порожденную n-ми степенями всех ее элементов. Так как H — почти разрешимая редуцированная группа конечного ранга, то по предложению 7.1 она финитно аппроксимируема, и, следовательно, $\bigcap_{n \in N} H^n = 1$. Поэтому для доказательства финитной аппроксимируемости группы G нам достаточно доказать финитную аппроксимируемость фактор-группы G/H^n для каждого n. Заметим, что группа H/H^n является периодической почти разрешимой группой конечного ранга с ограниченными порядками элементов, и поэтому она конечна. Фактор-группы A/H^n и B/H^n являются расширениями конечной группы H/H^n с помощью редуцированных групп A/H и B/H, и, следовательно, группы A/H^n и B/H^n редуцированы. Отсюда по предложению 7.1 следует, что они финитно аппроксимируемы. Фактор-группа G/H^n представляет собой свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A/H^n и B/H^n с конечной объединенной подгруппой H/H^n. Поэтому финитная аппроксимируемость группы G/H^n обеспечивается следующей классической теоремой Г. Баумслага: свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с конечным объединением само финитно аппроксимируемо [58].

Вспомогательные утверждения

В этом разделе доказаны вспомогательные утверждения, которые требуются для доказательства теоремы 7.3. Некоторые из них представляют самостоятельный интерес. Так, например, доказанная ниже лемма 7.3 усиливает ранее доказанную теорему 3.3, которая утверждает, что если разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то она почти π-примарно аппроксимируема.

Для произвольной группы A через A' будем обозначать коммутант группы A, а через A^n — степенную подгруппу группы A, где n — целое неотрицательное число. Напомним, что подгруппа A^n порождается n-ми степенями всех элементов группы A. Если A — конечная p-группа, то ее подгруппа $A'A^p$, очевидно, совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы A.

Лемма 7.1. *Пусть H — конечная p-группа, Γ — подгруппа в группе всех автоморфизмов группы H. Если все автоморфизмы из Γ действуют тождественно по модулю подгруппы $H'H^p$, то Γ является p-группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (см., напр., [40, с. 562]).

Лемма 7.2. *Пусть G — конечная группа, H — нормальная нильпотентная подгруппа группы G, и фактор-группа G/H нильпотентна. И пусть взаимный коммутант $[G, H]$ группы G и подгруппы H содержится в подгруппе $H'H^p$ для каждого простого делителя p порядка группы H. Тогда группа G нильпотентна.*

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда H — p-группа. Обозначим через C централизатор подгруппы H в группе G. Так как $C/C \cap H \cong CH/H \leq G/H$, то группа $C/C \cap H$ нильпотентна. Отсюда и из того, что $C \cap H$ — центральная подгруппа группы C, следует, что группа C нильпотентна. Поэтому группа C раскладывается в прямое произведение конечной p-подгруппы P и подгруппы Q, порядок которой взаимно прост с p. Очевидно, что C совпадает с ядром гомоморфизма $\omega : G \to \operatorname{Aut} H$, сопоставляющего каждому элементу g группы G ограничение на H внутреннего автоморфизма группы G, производимого элементом g. Так как $[G, H] \subseteq H'H^p$, то все автоморфизмы из подгруппы $G\omega$ группы $\operatorname{Aut} H$ действуют тождественно по модулю подгруппы $H'H^p$. Поэтому в силу леммы 7.1 группа $G\omega$, а значит и изоморфная ей группа G/C, являются p-группами. Отсюда и из того, что $C/Q = (P \times Q)/Q \cong P$ — p-группа, следует, что G/Q — p-группа. Так как H — p-подгруппа, и порядок подгруппы Q взаимно прост с p, то $Q \cap H = 1$. Поэтому группа G вложима в прямое произведение $G/Q \times G/H$. Отсюда и из того, что G/Q — конечная p-группа, а G/H нильпотентна, следует, что группа G нильпотентна.

Рассмотрим теперь общий случай, когда H — произвольная нормальная нильпотентная подгруппа группы G. Обозначим через π множество всех простых делителей порядка группы H. Для каждого p из π обозначим через Q_p произведение всех примарных компонент группы H кроме p-компоненты. Тогда для каждого $p \in \pi$ H/Q_p — нормальная p-подгруппа группы G/Q_p, фактор-группа $(G/Q_p)/(H/Q_p)$ нильпотентна, и $[G/Q_p, H/Q_p] \subseteq (H/Q_p)'(H/Q_p)^p$. Поэтому в силу рассмотренного частного случая группа G/Q_p нильпотентна. Так как $\bigcap_{p\in\pi} Q_p = 1$, то группа G вложима в прямое произведение $\prod_{p\in\pi} G/Q_p$. А так как в этом прямом произведении все прямые множители G/Q_p нильпотентны, то оно само нильпотентно, а значит и вложимая в него группа G также нильпотентна. Лемма доказана.

Обозначения *Договоримся теперь о некоторых терминах и обозначениях. Если H и N — нормальные подгруппы группы G и $N \subseteq H$, то централизатором фактора H/N в группе G будем называть множество $C_G(H/N)$ всех элементов группы G, которые перестановочны с каждым элементом из H по модулю подгруппы N.*

Замечание. *Пусть, как и выше, H и N — нормальные подгруппы группы G, $N \subseteq H$, и $C_G(H/N)$ — централизатор фактора H/N в группе G. Очевидно, что взаимный коммутант $[C_G(H/N), H]$ подгрупп $C_G(H/N)$ и H содержится в N. Очевидно также, что $C_G(H/N)$ совпадает с ядром гомоморфизма $\omega : G \to Aut\, H/N$, сопоставляющего каждому элементу a из G ограничение на H/N внутреннего автоморфизма группы G/N, производимого элементом aN. В дальнейшем в качестве подгруппы N мы как правило будем рассматривать подгруппу $H'H^p$, где H' — коммутант группы H, H^p — степенная подгруппа, p — простое число. В этом случае $H/H'H^p$ — абелева группа, и поэтому подгруппа $C_G(H/H'H^p)$ содержит H. Если вдобавок предположить, что подгруппа H имеет конечный ранг, то группа $H/H'H^p$, как легко видеть, является конечной, а значит группа $Aut(H/H'H^p)$ также конечна, и поэтому $C_G(H/H'H^p)$ имеет конечный индекс в G. Таким образом, если подгруппа H имеет конечный ранг, то $C_G(H/H'H^p)$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G, содержащей H.*

Лемма 7.3. *Пусть π — конечное множество простых чисел.*

1. Если G — разрешимая FATR-группа, то в группе G существует подгруппа P конечного индекса такая, что любая конечная π-группа, являющаяся гомоморфным образом группы P, нильпотентна.

2. Если разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она почти π-примарно аппроксимируема.

Доказательство. Второе утверждение леммы вытекает из первого утверждения и предложения 7.2. Докажем первое утверждение. Так как G — FATR-группа, то в силу теоремы Грюнберга — Мальцева [80, п. 5.2.2] подгруппа Фиттинга F группы G нильпотентна, а фактор-группа G/F содержит абелеву подгруппу A/F конечного индекса. Обозначим через P пересечение подгруппы A и подгрупп $C_G(F/F'F^p)$ по всем $p \in \pi$. Используя сделанное выше замечание, легко видеть, что P — подгруппа конечного индекса группы G, содержащая F, P/F — абелева группа, и для всех $p \in \pi$ имеет место включение $[P, F] \subseteq F'F^p$. Пусть φ — гомоморфизм группы P на какую-нибудь конечную π-группу. Тогда $F\varphi$ — нормальная нильпотентная подгруппа группы $P\varphi$, $P\varphi/F\varphi$ — абелева группа, и для всех $p \in \pi$ имеет место включение $[P\varphi, F\varphi] \subseteq (F\varphi)'(F\varphi)^p$. Отсюда по лемме 7.2 следует, что группа $P\varphi$ нильпотентна. Лемма доказана.

Лемма 7.4. *Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга, H — нормальная подгруппа группы G, и фактор-группа G/H является редуцированной почти FATR-группой. И пусть p — простое число. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа S конечного индекса, содержащая H и такая, что для любого целого положительного числа k в группе S существует подгруппа M конечного p-индекса, нормальная в G и такая, что $M \cap H = H^{p^k}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что в группе G существует нормальный ряд $1 \leq H \leq F \leq S \leq G$, удовлетворяющий следующим условиям: F/H — нильпотентная группа, S/F — абелева группа, G/S — конечная группа, $[F, H] \subseteq H'H^p$, и $[S, F] \subseteq F'F^p$.

По условию леммы в группе G/H существует разрешимая FATR-подгруппа G_0/H конечного индекса, и без потери общности можно считать, что она нормальна в G/H. По уже упомянутой выше теореме Грюнберга — Мальцева [80, п. 5.2.2] подгруппа Фиттинга $F_0/H = Fit\,(G_0/H)$ нильпотентна, а фактор-группа G_0/F_0 почти абелева. Так как F_0/H характеристична в

G_0/H и G_0/H нормальна в G/H, то F_0 нормальна в G. Так как группа G/G_0 конечна, а группа G_0/F_0 почти абелева, то группа G/F_0 почти абелева.

Пусть $U = C_G(H/H'H^p)$ — централизатор фактора $H/H'H^p$ в группе G. По сделанному выше замечанию U — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая H, и $[U, H] \subseteq H'H^p$.

Пусть $F = F_0 \cap U$. Так как F_0 и U — нормальные подгруппы группы G, содержащие H, то F — нормальная подгруппа группы G, содержащая H. Фактор-группа F/H содержится в нильпотентной группе F_0/H, и поэтому F/H нильпотентна. Так как $[U, H] \subseteq H'H^p$ и $F \subseteq U$, то $[F, H] \subseteq H'H^p$.

Так как G/F_0 почти абелева, и G/U конечна, то группа G/F почти абелева. Поэтому в ней существует нормальная абелева подгруппа S_0/F конечного индекса. Тогда S_0 — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая F.

Пусть $V = C_G(F/F'F^p)$ — централизатор фактора $F/F'F^p$ в группе G. По уже упомянутому замечанию V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая F, и $[V, F] \subseteq F'F^p$.

Пусть $S = S_0 \cap V$. Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая F. Фактор-группа S/F содержится в абелевой группе S_0/F, и поэтому S/F абелева. Так как $[V, F] \subseteq F'F^p$ и $S \subseteq V$, то $[S, F] \subseteq F'F^p$.

Таким образом, мы построили в группе G нормальный ряд $1 \leq H \leq F \leq S \leq G$, удовлетворяющий следующим условиям: F/H — нильпотентная группа, S/F — абелева группа, G/S — конечная группа, $[F, H] \subseteq H'H^p$, и $[S, F] \subseteq F'F^p$.

Покажем теперь, что подгруппа S является искомой. Так как S — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая H, то нам остается проверить, что для любого целого положительного числа k в группе S существует подгруппа M конечного p-индекса, нормальная в G и такая, что $M \cap H = H^{p^k}$.

Фактор-группа G/H^{p^k} представляет собой расширение конечной группы H/H^{p^k} с помощью редуцированной группы G/H. Поэтому группа G/H^{p^k} редуцирована, и тогда в силу предложения 7.1 она финитно аппроксимируема. Следовательно, существует гомоморфизм φ_1 группы G/H^{p^k} на конечную группу, инъективный на подгруппе H/H^{p^k}. Пусть $\varepsilon : G \longrightarrow G/H^{p^k}$ —

естественный гомоморфизм. Введем следующие обозначения: $G_1 = G\varepsilon\varphi_1$, $H_1 = H\varepsilon\varphi_1$, $F_1 = F\varepsilon\varphi_1$, $S_1 = S\varepsilon\varphi_1$. Заметим, что группа G_1 конечна.

Описанные выше свойства ряда $1 \leq H \leq F \leq S \leq G$ очевидным образом переносятся на ряд $1 \leq H_1 \leq F_1 \leq S_1 \leq G_1$. Поэтому $1 \leq H_1 \leq F_1 \leq S_1 \leq G_1$ — нормальный ряд конечной группы G_1, удовлетворяющий следующим условиям: H_1 — p-группа, F_1/H_1 — нильпотентная группа, S_1/F_1 — абелева группа, $[F_1, H_1] \subseteq H_1'H_1^p$, и $[S_1, F_1] \subseteq F_1'F_1^p$.

Так как H_1 — p-группа, F_1/H_1 — нильпотентная группа, и при этом $[F_1, H_1] \subseteq H_1'H_1^p$, то по лемме 7.2 F_1 — нильпотентная группа. Обозначим через Q_1 произведение всех примарных компонент группы F_1 кроме p-компоненты. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi_2 : G_1 \longrightarrow G_1/Q_1$. Так как $H_1 \cap Q_1 = 1$, то гомоморфизм φ_2 инъективен на H_1. Введем следующие обозначения: $G_2 = G_1\varphi_2$, $H_2 = H_1\varphi_2$, $F_2 = F_1\varphi_2$, $S_2 = S_1\varphi_2$. Тогда в группе G_2 мы получаем нормальный ряд $1 \leq H_2 \leq F_2 \leq S_2 \leq G_2$, удовлетворяющий следующим условиям: F_2 — p-группа, S_2/F_2 — абелева группа, и $[S_2, F_2] \subseteq F_2'F_2^p$. Поэтому в силу леммы 7.2 S_2 — нильпотентная группа. Обозначим через Q_2 произведение всех примарных компонент группы S_2 кроме p-компоненты. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi_3 : G_2 \longrightarrow G_2/Q_2$. Так как $F_2 \cap Q_2 = 1$, то гомоморфизм φ_3 инъективен на F_2, а значит и на H_2. Введем следующие обозначения: $G_3 = G_2\varphi_3$, $S_3 = S_2\varphi_3$. Заметим, что S_3 — конечная p-группа.

Обозначим через φ произведение гомоморфизмов φ_1, φ_2 и φ_3. Так как гомоморфизмы φ_1, φ_2 и φ_3 инъективны на подгруппах $H\varepsilon = H/H^{p^k}$, H_1 и H_2, то φ инъективен на подгруппе $H\varepsilon = H/H^{p^k}$. Поэтому $Ker\,\varepsilon\varphi \cap H = H^{p^k}$.

Пусть $M = S \cap Ker\,\varepsilon\varphi$. Тогда $M \cap H = S \cap Ker\,\varepsilon\varphi \cap H = Ker\,\varepsilon\varphi \cap H = H^{p^k}$, и $S/M = S/S \cap Ker\,\varepsilon\varphi \cong S\varepsilon\varphi = S_3$ — конечная p-группа. Таким образом, M — подгруппа конечного p-индекса группы S, нормальная в G, и $M \cap H = H^{p^k}$. Лемма доказана.

Лемма 7.5. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B. Если A — конечная p-группа, группа B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и взаимный коммутант $[B, A]$ подгрупп B и A содержится в подгруппе $A'A^p$, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Это утверждение является частным случаем тоеоремы 1.3, доказанной в §1.

Лемма 7.6. *Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга, H — конечная нормальная подгруппа группы G.*

1. Если группа G/H финитно аппроксимируема, то и группа G финитно аппроксимируема.

2. Если для некоторого множества π простых чисел группа G/H почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то и группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Доказательство. Пусть группа G/H финитно аппроксимируема. Так как любая финитно аппроксимируемая группа редуцирована, то G/H редуцирована. Отсюда и из конечности группы H следует, что группа G редуцирована. Но тогда по предложению 7.1 она финитно аппроксимируема.

Предположим теперь, что группа G/H почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Тогда она финитно аппроксимируема, и поэтому в силу первого утверждения леммы группа G финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что H — конечная подгруппа группы G, следует, что в G найдется подгруппа X конечного индекса, тривиально пересекающая H. Тогда X вложима в почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемую группу G/H, и поэтому X сама почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что X имеет конечный индекс в G, следует, что G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Лемма доказана.

Доказательство достаточности в теореме 7.3

Пусть π — конечное множество простых чисел. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H. Далее будем предполагать, что группы A, B, A/H и B/H почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы. Покажем, что группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Так как H — почти разрешимая и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая группа конечного ранга, то по лемме 7.3 группа H почти π-примарно аппроксимируема, т. е. в ней существует нормальная π-примарно аппроксимируемая подгруппа конечного индекса r. Пусть $H_1 = H^r$. Тогда H_1 — π-примарно аппроксимируемая подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в G.

На первом этапе доказательства мы покажем, что в группах A и B существуют подгруппы S и T, удовлетворяющие следующим условиям.

1°. S и T — нормальные подгруппы конечных индексов групп A и B соответственно, и $S \cap H = H_1 = T \cap H$.

2°. Группы S/H_1 и T/H_1 $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы.

3°. Для любого $p \in \pi$ и для любого целого $k \geq 0$ в группах S и T существуют подгруппы M и N конечных p-индексов, нормальные в A и B соответственно и такие, что $M \cap H = H_1^{p^k}$ и $N \cap H = H_1^{p^k}$.

Докажем, что в группе A существует подгруппа S со свойствами 1°, 2° и 3°.

Так как группа A/H_1 почти разрешима, имеет конечный ранг и является расширением конечной группы H/H_1 с помощью почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы A/H, то по лемме 7.6 группа A/H_1 почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что ее подгруппа H/H_1 конечна следует, что в группе A/H_1 существует нормальная $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая подгруппа S_1/H_1 конечного индекса, тривиально пересекающая H/H_1. Тогда S_1 — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, и $S_1 \cap H = H_1$.

Так как A/H_1 является почти разрешимой группой конечного ранга, и так как A/H_1 почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для конечного множества π простых чисел, то по предложению 7.2 A/H_1 является почти FATR-группой, причем как и любая финитно аппроксимируемая группа она редуцирована. Поэтому в силу леммы 7.4 для каждого простого p в группе A существует нормальная подгруппа S_p конечного индекса, содержащая H_1 и такая, что для любого целого положительного числа k в группе S_p существует подгруппа L конечного p-индекса, нормальная в A и такая, что $L \cap H_1 = H_1^{p^k}$.

Пусть S — пересечение подгруппы S_1 с подгруппами S_p по всем $p \in \pi$. Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы A. Так как $S_1 \cap H = H_1$, и все подгруппы S_p содержат H_1, то $S \cap H = H_1$. Таким образом, для подгруппы S выполняется условие 1°. Условие 2° для подгруппы S также выполняется. Действительно, группа S/H_1 содержится в $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группе S_1/H_1, и поэтому S/H_1 $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Для проверки условия 3° зафиксируем целое число $k \geq 0$ и простое число $p \in \pi$. По определению группы S_p в ней существует подгруппа L конечного p-индекса, нормальная в A и такая, что $L \cap H_1 = H_1^{p^k}$. Пусть $M = L \cap S$. Очевидно, что M нормальна в A. Так как S_p/L — конечная p-группа, и $S/M \cong SL/L \leq S_p/L$, то M имеет конечный p-индекс в S. Так как $S \cap H = H_1$, и $L \cap H_1 = H_1^{p^k}$, то $M \cap H = H_1^{p^k}$. Таким образом, условие 3° для подгруппы S выполняется.

Аналогично доказывается, что в группе B существует подгруппа T со свойствами 1°, 2° и 3°. В дальнейшем доказательстве подгруппы S и T со свойствами 1°, 2° и 3° считаются фиксированными.

Так как в силу условия 1° $S \cap H = T \cap H$, то отображение $HS/S \longrightarrow HT/T$, определенное по правилу $hS \longrightarrow hT$, где $h \in H$, является изоморфизмом, и поэтому можно рассмотреть соответствующее ему свободное произведение $G_{_{ST}} = (A/S * B/T; H_{_{ST}})$ групп A/S и B/T с объединенной подгруппой $H_{ST} = HS/S = HT/T$. Рассмотрим еще гомоморфизм $\rho_{_{ST}} : G \to G_{_{ST}}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \longrightarrow A/S$ и $B \longrightarrow B/T$.

Хорошо известно, что свободное произведение двух конечных групп с объединенной подгруппой финитно аппроксимируемо [58]. Так как в силу условия 1° группы A/S и B/T конечны, то группа $G_{_{ST}}$ финитно аппроксимируема, и поэтому существует гомоморфизм τ группы $G_{_{ST}}$ на конечную группу, инъективный на A/S и B/T. Пусть $U = \mathrm{Ker}\rho_{_{ST}}\tau$. Тогда U — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Так как $\rho_{_{ST}}$ продолжает естественные гомоморфизмы $A \longrightarrow A/S$ и $B \longrightarrow B/T$, и так как τ инъективен на A/S и B/T, то $U \cap A = S$ и $U \cap B = T$. Отсюда и из того, что в силу условия 1° $S \cap H = H_1$, получаем: $U \cap H = U \cap A \cap H = S \cap H = H_1$. Таким образом,

$$U \cap A = S,\ U \cap B = T,\ U \cap H = H_1. \tag{7.1}$$

Пусть p — простое число, $V_p = C_G(H_1/H_1'H_1^p)$ — централизатор фактора $H_1/H_1'H_1^p$ в группе G. Тогда в силу сделанного ранее замечания V_p — нормальная подгруппа группы G, содержащая H_1, и $[V_p, H_1] \subseteq H_1'H_1^p$. Так как ранг группы H_1 конечен, то по упомянутому замечанию V_p имеет конечный индекс в G. Пусть $V = \bigcap_{p\in\pi} V_p$. Тогда V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая H_1, и $[V, H_1] \subseteq H_1'H_1^p$ для каждого $p \in \pi$.

Пусть $W = U \cap V$. Тогда W — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая H_1. Теперь для доказательства почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G достаточно доказать $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы W. Для этого возьмем неединичный элемент w из W и построим для него гомоморфизм группы W на конечную π-группу, при котором образ элемента w отличен от 1. Ясно, что достаточно указать гомоморфизм группы W на $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемую группу, отображающий w в неединичный элемент.

Сначала рассмотрим случай, когда $w \notin H_1$. Пусть $\varepsilon : G \to G/H_1$ — естественный гомоморфизм. Заметим, что $G/H_1 = (A/H_1 * B/H_1; H/H_1)$ — свободное произведение групп A/H_1 и B/H_1 с объединенной подгруппой H/H_1. Так как $H_1 \subseteq U$, то из равенств (7.1) следует, что

$$U/H_1 \cap A/H_1 = S/H_1, U/H_1 \cap B/H_1 = T/H_1, U/H_1 \cap H/H_1 = 1.$$

Отсюда и из того, что подгруппа U/H_1 нормальна в группе G/H_1, следует, что она пересекается тривиально со всеми подгруппами группы G/H_1, сопряженными с объединенной подгруппой H/H_1. Поэтому в силу теоремы X. Нейман [21, стр. 122] подгруппа U/H_1 раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы и некоторого семейства подгрупп группы G/H_1, сопряженных с S/H_1 и T/H_1. Так как по условию 2° группы S/H_1 и T/H_1 $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы, и так как свободная группа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то группа U/H_1 раскладывается в свободное произведение некоторого семейства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых групп. Хорошо известно, что такое свободное произведение само $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемо (см., напр., теорему (*) из введения). Следовательно, группа U/H_1, а значит и ее подгруппа W/H_1, $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы. Так как $w \notin H_1$, то естественный гомоморфизм $W \longrightarrow W/H_1$ будет искомым, т. е. он отображает группу W на $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемую группу W/H_1 и переводит w в неединичный элемент.

Теперь рассмотрим случай, когда $w \in H_1$. Так как H_1 π-примарно аппроксимируема, то найдутся простое число $p \in \pi$ и целое положительное число k такие, что $w \notin H_1^{p^k}$. До конца доказательства числа p и k считаются фиксированными. Так как подгруппы S и T удовлетворяют условию 3°, то в них существуют подгруппы M и N конечных p-индексов, нормальные в A и B соответственно и такие, что $M \cap H = H_1^{p^k} = N \cap H$. Заметим, что $w \notin M$ и $w \notin N$.

Так как $M \cap H = N \cap H$, то отображение $HM/M \longrightarrow HN/N$, определенное по правилу $hM \longrightarrow hN$, где $h \in H$, является изоморфизмом. Поэтому можно рассмотреть соответствующее свободное произведение $G_{MN} = (A/M * B/N; H_{MN})$ групп A/M и B/N с объединенной подгруппой $H_{MN} = HM/M = HN/N$ и гомоморфизм $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$, продолжающий естественные отображения $A \to A/M$ и $B \to B/N$. Введем следующие обозначения: $G_{MN} = \overline{G}$, $A\rho_{MN} = A/M = \overline{A}$, $B\rho_{MN} = B/N = \overline{B}$, $H\rho_{MN} = \overline{H}$, $H_1\rho_{MN} = \overline{H}_1$, $S\rho_{MN} = S/M = \overline{S}$, $T\rho_{MN} = T/N = \overline{T}$, $U\rho_{MN} = \overline{U}$, $W\rho_{MN} = \overline{W}$, $w\rho_{MN} = \overline{w}$. Тогда $\overline{G} = (\overline{A} * \overline{B}; \overline{H})$. Так как $w \notin M$, то $\overline{w} \neq 1$.

Так как гомоморфизм ρ_{MN} отображает группу W на группу $\overline{W}$ и переводит элемент w в нееденичный элемент $\overline{w}$, то для завершения доказательства нам остается только проверить, что группа $\overline{W}$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. В действительности будет доказано даже более сильное утверждение: группа $\overline{W}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Заметим, что группы $\overline{S} = S/M$ и $\overline{T} = T/N$, а также их подгруппа $\overline{H_1}$, являются конечными p-группами. Заметим еще, что группы $\overline{A} = A/M$ и $\overline{B} = B/N$ конечны, и поэтому группа $\overline{G}$ конечно порождена.

Очевидно, что $\mathrm{Ker}\rho_{MN} \leq \mathrm{Ker}\rho_{ST} \leq U$. Поэтому из равенств (7.1) получаем:

$$\overline{U} \cap \overline{A} = \overline{S},\ \overline{U} \cap \overline{B} = \overline{T},\ \overline{U} \cap \overline{H} = \overline{H}_1. \tag{7.2}$$

Рассмотрим фактор-группу $\overline{G}/\overline{H}_1 = (\overline{A}/\overline{H}_1 * \overline{B}/\overline{H}_1; \overline{H}/\overline{H}_1)$. Так как $\overline{H}_1 \subseteq \overline{U}$, то из (7.2) следует, что

$$\overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{A}/\overline{H}_1 = \overline{S}/\overline{H}_1,\ \overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{B}/\overline{H}_1 = \overline{T}/\overline{H}_1,\ \overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{H}/\overline{H}_1 = 1.$$

Следовательно, по теореме Х. Нейман нормальная подгруппа $\overline{U}/\overline{H}_1$ группы $\overline{G}/\overline{H}_1$ раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы и семейства подгрупп группы $\overline{G}/\overline{H}_1$, сопряженных с $\overline{S}/\overline{H}_1$ и $\overline{T}/\overline{H}_1$. Заметим, что все эти сопряжения являются конечными p-группами, так как $\overline{S}$ и $\overline{T}$ — конечные p-группы. В силу хорошо известной теоремы Куроша подгруппа $\overline{W}/\overline{H}_1$ имеет такую же структуру как и $\overline{U}/\overline{H}_1$, т. е. $\overline{W}/\overline{H}_1$ раскладывается в свободное произведение вида: $\overline{W}/\overline{H}_1 = F * P_1 * P_2 * \ldots * P_m$, где F — свободная группа, а все P_i — конечные p-группы. Заметим, что число свободных сомножителей в этом разложении конечно, так как группа $\overline{W}$ конечно порождена как подгруппа конечного индекса в конечно порожденной группе $\overline{G}$. Рассмотрим гомоморфизм группы $\overline{W}/\overline{H}_1$ на прямое произведение $P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_m$, продолжающий отображение $F \to 1$ и тождественные отображения $P_i \to P_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Его ядро $\overline{K}/\overline{H}_1$ является свободной нормальной подгруппой конечного p-индекса группы $\overline{W}/\overline{H}_1$. Мы получаем, таким образом, субнормальный ряд $1 \leq \overline{H}_1 \leq \overline{K} \leq \overline{W}$, где $\overline{H}_1$ — конечная p-группа, $\overline{K}/\overline{H}_1$ — свободная группа, $\overline{W}/\overline{K}$ — конечная p-группа.

Хорошо известно [70] и легко проверяется, что любое расширение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы с помощью конечной p-группы является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. А так как $\overline{W}$ — расширение группы $\overline{K}$ с помощью конечной p-группы $\overline{W}/\overline{K}$, то доказательство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы $\overline{W}$ сводится к доказательству $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы $\overline{K}$.

Группа $\overline{K}$ представляет собой расширение конечной p-группы $\overline{H}_1$ с помощью свободной группы. Хорошо известно и легко проверяется, что любое расширение с помощью свободной группы является расщепляемым. Поэтому существует свободная подгруппа $\overline{F}$ группы $\overline{K}$ такая, что группа $\overline{K}$ является расщепляемым расширением группы $\overline{H}_1$ с помощью $\overline{F}$. Так как $W \subseteq V$, и по построению подгруппы V имеет место включение $[V, H_1] \subseteq H_1'H_1^p$, то $[W, H_1] \subseteq H_1'H_1^p$, и поэтому $[\overline{W}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1'\overline{H}_1^p$. Отсюда и из того, что $\overline{F} \leq \overline{K} \leq \overline{W}$ следует, что $[\overline{F}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1'\overline{H}_1^p$. Таким образом, $\overline{K}$ — расщепляемое расширение конечной p-группы $\overline{H}_1$ с помощью свободной (и потому $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой) группы $\overline{F}$, и $[\overline{F}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1'\overline{H}_1^p$. Поэтому в силу леммы 7.5 группа $\overline{K}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Доказательство необходимости в теореме 7.3

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathcal{F}_\pi$-отделимой, если для каждого элемента g группы G, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы G на конечную π-группу, при котором образ элемента g не принадлежит образу подгруппы H. Для нормальной подгруппы H это свойство равносильно $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости фактор-группы G/H.

Необходимость в теореме 7.3 обеспечивается следующей леммой.

Лемма 7.7. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B, удовлетворяющих нетривиальным тождествам, с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. И пусть группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, где π — некоторое множество простых чисел. Тогда группа G/H (а следовательно, и ее подгруппы A/H и B/H) почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы.*

Доказательство. Заметим, что группа G/H представляет собой свободное произведение групп A/H и B/H. Поэтому если A/H и B/H — группы порядка 2, то G/H — бесконечная диэдральная группа, и следовательно, она почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Мы можем теперь предполагать, что порядок хотя бы одной из групп A/H или B/H больше 2. Пусть для определенности порядок группы A/H больше 2. В группе G зафиксируем какой-нибудь элемент g, не лежащий в A. Тогда $A \cap g^{-1}Ag = H$.

По условию группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, т. е. содержит $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемую подгруппу P конечного индекса. Без потери общности мы можем считать, что подгруппа P нормальна в G. Так как PH/H — подгруппа конечного индекса группы G/H, то для доказательства почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G/H достаточно доказать $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы $PH/H \cong P/P \cap H$, т. е. $\mathcal{F}_\pi$-отделимость подгруппы $P \cap H$ в группе P. А так как $P \cap H = (P \cap A) \cap (P \cap g^{-1}Ag)$, то для проверки $\mathcal{F}_\pi$-отделимости подгруппы $P \cap H$ в группе P достаточно доказать $\mathcal{F}_\pi$-отделимость подгрупп $P \cap A$ и $P \cap g^{-1}Ag$ в группе P.

По условию группа A удовлетворяет нетривиальному тождеству $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Покажем, что она является максимальной среди всех подгрупп группы G с этим тождеством. Допустим от противного, что A строго содержится в подгруппе C группы G с тождеством $f = 1$. Введем обозначения: $\overline{G} = G/H$, $\overline{A} = A/H$, $\overline{B} = B/H$, $\overline{C} = C/H$. Тогда $\overline{G}$ — свободное произведение групп $\overline{A}$ и $\overline{B}$, подгруппа $\overline{C}$ строго содержит $\overline{A}$ и удовлетворяет тождеству $f = 1$. Зафиксируем в подгруппе $\overline{C}$ элемент $\overline{c}$, не лежащий в $\overline{A}$. Рассмотрим в группе $\overline{G}$ подгруппу $\overline{D}$, порожденную подгруппами $\overline{A}$ и $\overline{c}^{\,-1}\overline{A}\overline{c}$. Тогда с одной стороны подгруппа $\overline{D}$ удовлетворяет тождеству $f = 1$, а с другой стороны она содержит нециклическую свободную подгруппу, так как является свободным произведением подгрупп $\overline{A}$ и $\overline{c}^{\,-1}\overline{A}\overline{c}$, порядки которых больше 2. Мы пришли к противоречию.

Таким образом, подгруппа A является максимальной среди всех подгрупп группы G с тождеством $f = 1$. Тем же свойством обладает и сопряженная к ней подгруппа $g^{-1}Ag$. Используя эти свойства подгрупп A и $g^{-1}Ag$, мы докажем $\mathcal{F}_\pi$-отделимость подгрупп $P \cap A$ и $P \cap g^{-1}Ag$ в группе P.

Докажем $\mathcal{F}_\pi$-отделимость подгруппы $P \cap A$ в группе P. Пусть u — элемент группы P, не принадлежащий подгруппе $P \cap A$. Так как A — максимальная среди всех подгрупп группы G с тождеством $f = 1$, и $u \notin A$, то подгруппа L группы G, порожденная подгруппой A и элементом u, не удовлетворяет тождеству $f = 1$. Поэтому найдутся элементы $l_1, l_2, \ldots, l_n$ из L такие, что элемент $l = f(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ отличен от 1. Так как $u \in P$, то $L \leq AP$, и поэтому $LP/P \leq AP/P$. Отсюда и из того, что группа AP/P удовлетворяет тождеству $f = 1$, следует, что и группа LP/P удовлетворяет этому тождеству. Поэтому $f(l_1P, l_2P, \ldots, l_nP) = 1$, т. е. $l \in P$. Отсюда и из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы P следует, что в группе P существует нормальная подгруппа M конечного π-индекса, не содержащая элемент l. Так как M имеет конечный индекс в группе G, то число всех подгрупп группы G, сопряженных с M, конечно, причем все эти сопряжения являются нормальными подгруппами группы P и имеют в группе P конечный π-индекс, совпадающий с $[P : M]$. Поэтому пересечение N всех подгрупп группы G, сопряженных с M, является подгруппой конечного π-индекса группы P, причем подгруппа N нормальна в G. Заметим, что $l \notin N$, и поэтому $f(l_1N, l_2N, \ldots, l_nN) \neq 1$. Таким образом, в группе LN/N тождество $f = 1$ не выполняется. Отсюда и из того, что группа AN/N удовлетворяет тождеству $f = 1$, следует, что $LN/N \neq AN/N$. Учитывая к тому же, что подгруппа LN/N порождается подгруппой AN/N и элементом uN, заключаем, что $uN \notin AN/N$, и в частности, $uN \notin (A \cap P)N/N$. Таким образом, при естественном гомоморфизме группы P на конечную π-группу P/N образ uN элемента u не принадлежит образу $(A \cap P)N/N$ подгруппы $A \cap P$, и поэтому подгруппа $A \cap P$ $\mathcal{F}_\pi$-отделима в группе P.

Аналогично, используя тот факт, что $g^{-1}Ag$ является максимальной среди всех подгрупп группы G с тождеством $f = 1$, мы можем доказать $\mathcal{F}_\pi$-отделимость подгруппы $P \cap g^{-1}Ag$ в группе P. Это завершает доказательство леммы.

§8. О свободных произведениях нильпотентных групп конечного ранга с циклическим объединением

Основные результаты параграфа

Пусть π — непустое множество простых чисел. Исследования $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости нильпотентных групп были начаты К. Грюнбергом в работе [70], где доказано, в частности, что любая конечно порожденная нильпотентная группа финитно аппроксимируема, а любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p. С помощью этих результатов легко доказать следующее более общее утверждение.

Конечно порожденная нильпотентная группа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее конечная часть является π-группой.

Для нильпотентных групп конечного ранга имеет место следующее более общее утверждение.

Нильпотентная группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней нет неединичных π-полных элементов.

Это утверждение (даже в более общем виде) доказано в §3 (см. первую часть теоремы 3.1).

В упомянутой выше работе Грюнберга было доказано, что свободное произведение двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп само является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Там же аналогичные утверждения доказаны для $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости и для $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости.

Изучение свойств $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп было начато Г. Баумслагом и, соответственно, Г. Хигманом.

В 1963 году Г. Баумслаг в работе [58] доказал, что свободное произведение двух конечных групп с объединенной подгруппой является почти свободной, и, следовательно, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Эта теорема лежит в основе доказательств многих известных результатов о финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп.

В 1964 году Г. Хигман в работе [72] получил необходимое и достаточное условие $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения двух конечных p-

групп с объединенными подгруппами. В качестве важного следствия из этого результата в [72] Хигман приводит следующее утверждение.

Свободное произведение двух конечных p-групп с циклическими объединенными подгруппами является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Это утверждение лежит в основе доказательств большинства известных теорем об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением.

Одним из первых результатов о финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением является следующая теорема Г. Баумслага [58].

Свободное произведение двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.

Обобщениям этого результата посвящен ряд работ. Так, например, Д. Дайер в [67] доказала финитную аппроксимируемость свободного произведения двух полициклических групп с циклическим объединением. В §9 будет доказан следующий еще более общий результат.

Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение финитно аппроксимируемых разрешимых FATR-групп A и B с объединенными циклическими подгруппами H и K, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.

Условие FATR, накладываемое на группы A и B в этой теореме, пока не удается ослабить до требования конечности ранга. Значительно проще дело обстоит в случае, когда A и B — нильпотентные группы конечного ранга. В этом случае наряду с финитной аппроксимируемостью для свободного произведения $G = (A * B, H = K)$ с циклическим объединением удается также исследовать и более тонкое свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости. Соответствующий критерий является основным результатом настоящего параграфа и формулируется следующим образом.

Теорема 8.1. *Пусть π — непустое множество простых чисел, $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с объединенными циклическими под-*

группами H и K, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K $\mathcal{F}_\pi$-отделимы в группах A и B соответственно.

В частном случае, когда множество π совпадает с множеством всех простых чисел, теорема 8.1 утверждает, что свободное произведение финитно аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с собственными объединенными циклическими подгруппами H и K является финитно аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.

Так как конечно порожденная нильпотентная группа финитно аппроксимируема, имеет конечный ранг, и в ней все подгруппы финитно отделимы, то непосредственным следствием теоремы 8.1 является сформулированный выше результат Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением. Результат Хигмана об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения двух конечных p-групп с циклическим объединением также является следствием теоремы 8.1. Другие известные результаты, являющиеся следствиями теоремы 8.1, будут отмечены ниже.

Заметим, что конечность ранга групп A и B не существенна при доказательстве необходимости в теореме 8.1. Однако, достаточность в этой теореме уже не может быть доказана без предположения о конечности ранга групп A и B. Действительно, свободное произведение G финитно аппроксимируемых абелевых групп A и B с циклическими финитно отделимыми подгруппами H и K не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Соответствующий пример приведен во введении диссертации (после теоремы 15).

Таким образом, если π — произвольное множество простых чисел, то свободное произведение двух $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых групп с $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми циклическими подгруппами не обязано быть $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой. Иначе дело обстоит в случае, когда множество π состоит и из одного простого числа p. В этом случае имеет место следующее простое утверждение.

Предложение 8.1. *Свободное произведение двух $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп с $\mathcal{F}_p$-отделимыми циклическими подгруппами является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

Примеры, показывающие необратимость предложения 8.1, легко найти среди свободных произведений двух свободных групп с циклической объединенной подгруппой, изолированной в одном из свободных множителей. Такие свободные произведения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы для каждого простого числа p [2], но $\mathcal{F}_p$-отделимость объединенной подгруппы гарантирована лишь в том свободном множителе, в котором эта подгруппа изолирована.

В случае, когда A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, теорема 8.1 позволяет получить очень простой критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G. Действительно, пусть A — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $H = (h)$ — ее неединичная циклическая подгруппа, m — наибольшее целое положительное число такое, что уравнение $x^m = h$ разрешимо в группе A. Легко видеть (доказательство приведено ниже), что подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в A тогда и только тогда, когда m — π-число. Поэтому из теоремы 8.1 вытекает следующее очень простое утверждение, которое обобщает некоторые известные результаты, доказанные в работах [76] и [77] несколько лет тому назад.

Теорема 8.2. *Пусть π — непустое множество простых чисел, A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение групп A и B с объединенными неединичными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. И пусть m и n — наибольшие целые положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A и B соответственно. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда числа m и n являются π-числами.*

В аналогичных терминах (но с существенными отличиями) формулируется и критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением [2]. Заметим еще, что свободное произведение с циклическим объединением двух групп, аппроксимируемых конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, содержит подгруппу конечного индекса, которая $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p. Это утверждение будет доказано в §10.

Очевидно, что любая $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа нильпотентно аппроксимируема. Заметим еще, что нильпотентная аппроксимируемость группы G из теоремы 8.2 равносильна ее $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для подходящего простого p, т. е. тому, что числа m и n являются степенями числа p. Это вытекает из следующего общего утверждения, доказанного в [5].

Пусть $G = (A*B, H = K)$ — свободное произведение локально нильпотентных групп A и B с объединенными подгруппами H и K, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Если группа G аппроксимируема нильпотентными группами, то существует простое число p такое, что подгруппы H и K p'-изолированы в группах A и B соответственно.

Напомним, что подгруппа H группы A называется p'-изолированной, если для каждого элемента a группы A и для каждого простого числа q отличного от p из того, что $a^q \in H$, следует, что $a \in H$.

Наряду с нильпотентной аппроксимируемостью групп изучается также свойство аппроксимируемости разрешимыми группами. Отметим следующее простое утверждение.

Предложение 8.2. *Для свободного произведения двух нильпотентных групп с циклическим объединением свойство аппроксимируемости конечными разрешимыми π-группами равносильно свойству $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости.*

Основные результаты §8 (теоремы 8.1 и 8.2) опуликовваны в работе автора [108]. Их доказательства, а также доказательства предложений 8.1 и 8.2 приведены ниже. Для доказательства теоремы 8.1 потребуются некоторые вспомогательные утверждения о нильпотентных группах конечного ранга.

Предварительные утверждения

Лемма 8.1. *Пусть T — финитно аппроксимируемая разрешимая p-группа конечного ранга. Тогда группа T конечна.*

Это утверждение является частным случаем ранее доказанной леммы 3.1.

Очевидно, что в финитно аппроксимируемой группе любая конечная подгруппа финитно отделима. С другой стороны, простые примеры показывают, что наличие в группе финитно отделимой конечной подгруппы не гарантирует финитную аппроксимируемость этой группы. Иначе ведут себя в этом отношении разрешимые группы конечного ранга. Для них имеет место следующее утверждение.

Лемма 8.2. *Пусть S — разрешимая группа конечного ранга, и T — ее конечная подгруппа. Если подгруппа T финитно отделима в S, то группа S финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть A — полная подгруппа группы S. Очевидно, что A содержится в любой подгруппе конечного индекса группы S. Так как T финитно отделима в S, то T совпадает с пересечением некоторого множества подгрупп конечного индекса группы S. Из последних двух обстоятельств следует, что A содержится в T. Таким образом, A — конечная полная группа, и поэтому она единичная. Мы видим, что группа S редуцирована. Поэтому в силу теоремы Д. Робинсона [80, п. 5.3.2] она финитно аппроксимируема. Лемма доказана.

Лемма 8.3. *Пусть N — нильпотентная группа конечного ранга. И пусть $H = (h)$ — бесконечная циклическая финитно отделимая подгруппа группы N. Тогда для каждого неединичного элемента a подгруппы H и для каждого простого числа p существует целое положительное число s такое, что уравнение $x^{p^s} = a$ не разрешимо в группе N.*

Доказательство. Пусть a — неединичный элемент подгруппы H, p — простое число, C — централизатор подгруппы $A = (a)$ в группе N. Так как H финитно отделима в N, и H содержится в C, то H финитно отделима C, и поэтому H/A финитно отделима в C/A. Отсюда и из конечности H/A по лемме 8.2 следует финитная аппроксимируемость группы C/A. Тем же свойством обладает и p-компонента P/A группы C/A. Поэтому в силу леммы 8.1 группа P/A конечна. Если теперь предположить, что в группе N выполняется равенство $g^{p^l} = a$, то элемент g принадлежит C и имеет по модулю A порядок p^l. Поэтому gA принадлежит конечной p-группе P/A, и, следовательно, его порядок p^l ограничен порядком группы P/A. Таким образом, уравнение $x^{p^s} = a$ не разрешимо в группе N, если p^s больше чем порядок группы P/A. Лемма доказана.

Следующее утверждение принадлежит А. И. Мальцеву [27, лемма 2].

Лемма 8.4. *Пусть N — нильпотентная группа ступени c. И пусть n — целое неотрицательное число. Тогда из любого элемента степенной подгруппы N^{n^c} в группе N можно извлечь корень степени n.*

Элемент h бесконечного порядка группы G называется мощным, если для любого целого положительного числа l в группе G существует нормальная подгруппа L конечного индекса такая, что порядок элемента h по модулю подгруппы L равен l (т. е. такая, что $H \cap L = H^l$, где $H = (h)$ — циклическая подгруппа, порожденная элементом h). Этим свойством обладают, например, все элементы бесконечного порядка конечно порожденной нильпотентной группы. В действительности, имеет место следующее более общее утверждение.

Лемма 8.5. *Пусть N — нильпотентная группа конечного ранга. И пусть $H = (h)$ — бесконечная циклическая финитно отделимая подгруппа группы N. Тогда для любого целого положительного числа l в группе N существует характеристическая подгруппа L конечного индекса такая, что $H \cap L = H^l$. В частности, элемент h группы N является мощным.*

Доказательство. Покажем, что для любого целого положительного числа l в группе N существует характеристическая подгруппа L конечного индекса такая, что $H \cap L = H^l$. Рассмотрим сначала частный случай, когда $l = p^k$ — степень простого числа p. Обозначим через h_1 элемент $h^{p^{k-1}}$. По лемме 8.3 существует число s, для которого уравнение $x^{p^s} = h_1$ не разрешимо в группе N. Рассмотрим степенную подгруппу $V = N^{p^{sc}}$, где c — ступень нильпотентности группы N. По лемме 8.4 $h_1 \notin V$. Так как N/V — нильпотентная p-группа конечного ранга с ограниченными порядками элементов, то N/V — конечная p-группа. Из элементарных свойств конечных p-групп следует, что существует ряд

$$N/V = N_1/V \geq N_2/V \geq \cdots \geq N_r/V = V/V,$$

где $N_{i+1}/V = (N_i/V)^p$, $i = 1, \dots, r-1$. Так как для всех $i = 2, \dots, r$ подгруппа N_i/V характеристична в N_{i-1}/V, то N_i/V характеристична в N/V. Отсюда и из того, что V характеристична в N, следует, что N_i характеристична в N для всех $i = 1, \dots, r$. Так как

$$N_i/N_{i+1} \cong (N_i/V)/(N_{i+1}/V) = (N_i/V)/(N_i/V)^p,$$

то N_i/N_{i+1} удовлетворяет тождеству $x^p = 1$. Поскольку

$$N = N_1 \geq N_2 \geq \cdots \geq N_r = V$$

и $h_1 \notin V$, то найдется число j такое, что $h_1 \in N_j$ и $h_1 \notin N_{j+1}$. Поэтому из того, что группа N_j/N_{j+1} удовлетворяет тождеству $x^p = 1$, следует, что $| \ h_1N_{j+1} \ |= p$. Отсюда и из того, что $h_1 = h^{p^{k-1}}$, следует, что $| \ hN_{j+1} \ |= p^k$. Поэтому $H \cap N_{j+1} = H^{p^k}$. Кроме того N_{j+1} характеристична в N и имеет в N конечный индекс (так как содержит подгруппу V, имеющую в N конечный индекс). Таким образом, в качестве искомой подгруппы L мы можем взять подгруппу N_{j+1}.

Рассмотрим теперь общий случай, когда разложение числа l на простые множители имеет вид $l = \prod\limits_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$. В силу рассмотренного выше частного случая для каждого $i = 1, \ldots, n$ в группе N существует характеристическая подгруппа L_i конечного индекса такая, что $H \cap L_i = H^{p_i^{k_i}}$. Тогда подгруппа $L = \bigcap_{i=1}^{n} L_i$ является характеристической подгруппой конечного индекса группы N, и $H \cap L = H^l$. Лемма доказана.

Лемма 8.6. *Пусть N — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $H = (h)$ — ее неединичная циклическая подгруппа, m — наибольшее целое положительное число такое, что уравнение $x^m = h$ разрешимо в группе N. Подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$-отделима в N тогда и только тогда, когда m — π-число.*

Доказательство. Если m не является π-числом, то найдутся простое число q, не принадлежащее π, и элемент g группы N такие, что $g^q = h$. Тогда очевидно, что при любом гомоморфизме группы N на конечную π-группу образ элемента g принадлежит образу подгруппы H, и поэтому H не будет $\mathcal{F}_\pi$-отделимой в N.

Предположим теперь, что m — π-число. Обозначим через c элемент группы N такой, что $c^m = h$. Тогда подгруппа $C = (c)$ изолирована в группе N. Хорошо известно и легко проверяется, что в конечно порожденной нильпотентной группе любая изолированная подгруппа $\mathcal{F}_p$-отделима для каждого простого p (см., напр., [22, п.4]). Поэтому C $\mathcal{F}_\pi$-отделима в N. Как уже отмечалось выше, в конечно порожденной нильпотентной группе без кручения все неединичные элементы являются мощными. Отсюда следует, что в группе N существует нормальная подгруппа L конечного индекса такая, что $C \cap L = C^m = H$, причем в силу элементарных свойств конечных нильпотентных групп можно считать, что N/L — конечная π-группа. Покажем, что для каждого элемента a группы N, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы N на конечную π-группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H. Если a не принадлежит C, то существование такого гомоморфизма следует из того, что C $\mathcal{F}_\pi$-отделима в N. Если же a принадлежит C, то в качестве искомого гомоморфизма выступает естественный гомоморфизм группы N на группу N/L. Лемма доказана.

Доказательства теорем 8.1 и 8.2

Пусть A и B — произвольные группы, h и k — элементы групп A и B соответственно. И пусть порядки этих элементов совпадают. Рассмотрим свободное произведение $G = (A * B,\ h = k)$ групп A и B с объединенными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Нам потребуется следующая конструкция, принадлежащая Г. Баумслагу [58]. Пусть P и Q — нормальные подгруппы групп A и B такие, что порядки элементов $hP \in A/P$ и $kQ \in B/Q$ совпадают. Тогда можно рассмотреть свободное произведение $G_{PQ} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ)$ и гомоморфизм $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$.

С помощью этой конструкции докажем следующее утверждение, обобщающее упомянутый выше результат Хигмана о $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости произвольного свободного произведения двух конечных p-групп с циклическим объединением.

Лемма 8.7. *Пусть $G = (A * B,\ h = k)$ — свободное произведение конечных нильпотентных π-групп A и B с объединенными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Тогда группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Более того, группа G аппроксимируема конечными разрешимыми π-группами.*

Доказательство. Пусть c — неединичный элемент, принадлежащий одному из свободных множителей A или B. Обозначим через p какой-нибудь простой делитель порядка элемента c, а через P и Q — подгруппы групп A и B, состоящие из всех элементов этих групп, порядки которых взаимно просты с p. Тогда можно рассмотреть свободное произведение

$G_{PQ} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ)$ конечных p-групп A/P и B/Q с циклическим объединением и гомоморфизм $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$. Так как элемент $c\rho_{PQ}$ отличен от 1, и так как в силу результата Хигмана группа G_{PQ} $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то существует гомоморфизм ρ группы G_{PQ} на конечную p-группу такой, что элемент $c\rho_{PQ}\rho$ отличен от 1. Ядро гомоморфизма $\rho_{PQ}\rho$ обозначим через F_c. Тогда F_c — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G, не содержащая c, причем $p \in \pi$. Пусть F — пересечение подгрупп F_c по всем неединичным элементам c из объединения подгрупп A и B. Тогда G/F — конечная нильпотентная π-группа, и F тривиально пересекает свободные множители A и B. В силу последнего обстоятельства F — свободная группа, и поэтому она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для любого простого p. В частности, группа F аппроксимируема конечными разрешимыми π-группами. Таким образом, группа G является расширением группы, аппроксимируемой конечными разрешимыми π-группами, с помощью конечной разрешимой π-группы. Поэтому, как легко видеть, группа G аппроксимируема конечными разрешимыми π-группами (см., напр., [23, п.6.5]. Лемма доказана.

Пусть $G = (A * B,\ h = k)$ — свободное произведение нильпотентных групп A и B с объединенными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. И пусть F — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G. Обозначим через P и Q пересечения подгрупп A и B с F. Тогда G_{PQ} — свободное произведение конечных нильпотентных π-групп A/P и B/Q с циклическим объединением. По лемме 8.7 группа G_{PQ} аппроксимируема конечными разрешимыми π-группами. Заметим еще, что ядро гомоморфизма $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$ содержится в F. Таким образом, любая нормальная подгруппа F конечного π-индекса группы G содержит в себе ядро некоторого гомоморфизма группы G на группу, аппроксимируемую конечными разрешимыми π-группами. Поэтому из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G следует ее аппроксимируемость конечными разрешимыми π-группами. Очевидно и обратное утверждение. Тем самым доказано предложение 8.2.

Лемма 8.8. *Пусть $G = (A * B,\ h = k)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B с объединенными конечными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Тогда группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.*

Доказательство. Так как группы A и B $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы, а их подгруппы H и K конечны, то в группах A и B существуют нормальные подгруппы P и Q конечных π-индексов, тривиально пересекающие H и K. Тогда группа $G_{PQ} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема в силу леммы 8.7. Поэтому существует гомоморфизм τ группы G_{PQ} на конечную π-группу, инъективный на объединяемых подгруппах. Очевидно, что гомоморфизм $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$, инъективен на подгруппах H и K. Мы получаем, таким образом, гомоморфизм $\rho_{PQ}\tau$ группы G на конечную π-группу, инъективный на подгруппах H и K. Его ядро F является нормальной подгруппой конечного π-индекса группы G, тривиально пересекающей H и K. Из последнего обстоятельства по хорошо известной теореме Х. Нейман [21, с. 122] следует, что F — свободное произведение некоторой свободной группы и некоторого числа сопряжений к подгруппам групп A и B. Поэтому группа F $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что G/F — конечная π-группа, следует $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G. Лемма доказана.

Лемма 8.9. *Пусть $G = (A * B,\ h = k)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B с объединенными бесконечными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. И пусть выполняются следующие два условия.*

1. Подгруппы H и K $\mathcal{F}_\pi$-отделимы в группах A и B.

2. Элементы h и k групп A и B являются мощными.

Тогда группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Доказательство. Пусть g — неединичный элемент группы G. Покажем, что существует гомоморфизм φ группы G на конечную π-группу, переводящий элемент g в неединичный элемент. Пусть

$$g = x_1 x_2 \dots x_r$$

— несократимая запись элемента g.

Предположим сначала, что $r = 1$. В этом случае $g \in A$ или $g \in B$. Пусть для определенности $g \in A$. Так как группа A $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то существует нормальная подгруппа P конечного π-индекса группы A, не содержащая элемент g. Так как элемент k группы B является мощным, то существует нормальная подгруппа Q конечного индекса группы B такая, что $|hP| = |kQ|$, причем без потери общности можно считать, что Q имеет π-индекс в B. Группа $G_{PQ} = (A/P*B/Q,\ hP = kQ)$ является свободным произведением двух конечных нильпотентных π-групп с циклическим объединением, и, следовательно, по лемме 8.7 она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Рассмотрим гомоморфизм $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$. Так как $g\rho_{PQ} \neq 1$, и так как G_{PQ} $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то существует гомоморфизм τ группы G_{PQ} на конечную π-группу такой, что $g\rho_{PQ}\tau \neq 1$.

Пусть теперь $r > 1$. Для определенности предположим, что $x_1, x_3, \dots \in A \setminus H$ и $x_2, x_4, \dots \in B \setminus K$. Пусть $X = \{x_1, x_3, \dots\}$ и $Y = \{x_2, x_4, \dots\}$. Так как $X \cap H = \emptyset = Y \cap K$ и подгруппы H и K $\mathcal{F}_\pi$-отделимы в группах A и B, то существуют нормальные подгруппы P_0 и Q_0 конечных π-индексов в группах A и B такие, что $X \cap HP_0 = \emptyset$ и $Y \cap KQ_0 = \emptyset$. Пусть m — наименьшее общее кратное π-чисел $|hP_0|$ и $|kQ_0|$. Так как h и k — мощные элементы групп A и B, существуют нормальные подгруппы P_1 и Q_1 конечных индексов в группах A и B такие, что $|hP_1| = m = |kQ_1|$. Без потери общности можно считать, что подгруппы P_1 и Q_1 имеют π-индексы в A и B. Пусть $P = P_0 \cap P_1$ и $Q = Q_0 \cap Q_1$. Тогда P и Q — нормальные подгруппы в A и B, удовлетворяющие следующим условиям: $X \cap HP = \emptyset$, $Y \cap KQ = \emptyset$, A/P и B/Q — конечные нильпотентные π-группы, и $|hP| = m = |kQ|$. Последнее обстоятельство позволяет рассмотреть свободное произведение $G_{PQ} = (A/P*B/Q,\ hP = kQ)$ и гомоморфизм $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$. По лемме 8.7 группа G_{PQ} $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Так как $X \cap HP = \emptyset$ и $Y \cap KQ = \emptyset$, то

$$x_1P \notin HP/P,\ x_2Q \notin KQ/Q,\ x_3P \notin HP/P,\ x_4Q \notin KQ/Q, \dots$$

Поэтому элемент $g\rho_{PQ}$ группы G_{PQ} имеет несократимую запись

$$g\rho_{PQ} = x_1\rho_{PQ}x_2\rho_{PQ} \dots x_r\rho_{PQ} = x_1P \cdot x_2Q \cdot x_3P \cdot x_4Q \cdot \dots$$

длины $r > 1$. Следовательно, $g\rho_{PQ} \neq 1$. Отсюда и из того, что группа G_{PQ} $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема следует, что существует гомоморфизм τ группы G_{PQ} на конечную π-группу такой, что $g\rho_{PQ}\tau \neq 1$. Лемма доказана.

Лемма 8.10. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение нильпотентных групп A и B с объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. И пусть группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Тогда подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$–отделима в группах A и B.*

Доказательство. Предположим от противного, что существует элемент a группы A, не принадлежащий H, и такой, что для любого гомоморфизма ψ группы A на конечную π-группу $a\psi \in H\psi$. Так как группа B нильпотентна, то существует такое натуральное n, что для произвольного простого коммутатора веса n, составленного из элементов группы B, выполняется тождество $[x_1, [x_2, [\ldots, [x_{n-1}, x_n] \ldots]]] = 1$. Пусть b — элемент группы B, не принадлежащий H. Рассмотрим в группе G простой коммутатор веса n следующего вида: $c = [a, [a, [\ldots, [a, b] \ldots]]]$. Заметим, что элемент c имеет в группе G несократимую запись длины 2^n, и поэтому $c \neq 1$. Отсюда и из того, что группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, следует, что в G существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса, не содержащая c.

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varepsilon : G \to G/N$, и обозначим через ψ его ограничение на подгруппу A. Тогда ψ — гомоморфизм группы A на конечную π-группу AN/N. Поэтому в силу выбора элемента a имеем: $a\psi \in H\psi$, т. е. существует элемент $h \in H$ такой, что $a\psi = h\psi$ или, что то же самое, $a\varepsilon = h\varepsilon$. Тогда

$$c\varepsilon = [a\varepsilon, [a\varepsilon, [\ldots, [a\varepsilon, b\varepsilon] \ldots]]] =$$

$$= [h\varepsilon, [h\varepsilon, [\ldots, [h\varepsilon, b\varepsilon] \ldots]]] = [h, [h, [\ldots, [h, b] \ldots]]]\varepsilon,$$

причем $[h, [h, [\ldots, [h, b] \ldots]]] = 1$, так как $h \in B$ и $b \in B$. Следовательно, $c\varepsilon = 1$. Но, с другой стороны, $c \notin N = \mathrm{Ker}\varepsilon$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Докажем теперь теорему 8.1. Путь G — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с объединенными циклическими подгруппами H и K, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Покажем, что группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K $\mathcal{F}_\pi$-отделимы в группах A и B соответственно. Необходимость в этом утверждении обеспечивается леммой 8.10. Лемма 8.8 обеспечивает достаточность в случае, когда H и K конечны. В случае бесконечных

H и K достаточность в доказываемой теореме обеспечивается леммами 8.5 и 8.9. В самом деле, пусть G — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с объединенными бесконечными циклическими $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Тогда по лемме 8.5 элементы h и k групп A и B являются мощными, и поэтому в силу леммы 8.9 группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Теорема 8.1 доказана.

Теорема 8.2 является непосредственным следствием теоремы 8.1 и леммы 8.6. В самом деле, пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, G — свободное произведение групп A и B с объединенными неединичными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. И пусть m и n — наибольшие целые положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A и B соответственно. По теореме 8.1 группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда H и K $\mathcal{F}_\pi$-отделимы в A и B, а это силу леммы 8.6 равносильно тому, что m и n являются π-числами. Теорема 8.2 доказана.

Значительно проще (по сравнению с теоремой 8.1) доказывается сформулированное выше предложение 8.1. В случае конечных объединенных подгрупп предложение 8.1 почти очевидно с учетом отмеченного выше результата Хигмана. Если же объединяемые подгруппы бесконечны, предложение 8.1 легко доказывается по аналогии с леммой 8.9 с учетом следующего очевидного утверждения: если a — элемент бесконечного порядка $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы A, то элемент a является p-мощным, т. е. для любого целого положительного p-числа m существует гомоморфизм группы A на конечную p-группу, при котором порядок образа элемента a равен m.

§9. О свободных произведениях некоторых разрешимых групп с циклическим объединением

Основные результаты параграфа

Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ.

Г. Баумслагом [58] доказана финитная аппроксимируемость группы G при условии, что группы A и B финитно аппроксимируемы, а подгруппы H и K конечны. Другим естественным ограничением является цикличность подгрупп H и K. Свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с циклическим объединением уже не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Соответствующим примером может служить упомянутая во введении диссертации группа Хигмана, представляющая собой свободное произведение двух разрешимых групп Баумслага — Солитэра с циклическим объединением.

Г. Баумслаг [58] доказал, что свободное произведение двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой. Д. Дайер [67] обобщила этот результат следующим образом.

Свободное произведение двух почти полициклических групп с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.

Здесь доказаны два обобщения теоремы Д. Дайер. Первое из них относится к свободному произведению двух редуцированных почти разрешимых FATR-групп с циклическим объединением. Такое свободное произведение, как показывает упомянутый выше пример, не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Соответствующий критерий формулируется следующим образом.

Теорема 9.1. *Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение редуцированных почти разрешимых FATR-групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.*

Эта теорема применима, в частности, для свободных произведений редуцированных почти разрешимых минимаксных групп с циклическим объединением. А так как любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга является редуцированной почти разрешимой минимаксной группой [84], то частным случаем теоремы 9.1 является следующее утверждение.

Следствие 9.1. *Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп A и B конечного ранга с циклическими объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.*

Так как почти полициклические группы конечно порождены, финитно аппроксимируемы, имеют конечный ранг, и в них все подгруппы финитно отделимы (см., напр., [80, п. 1.3.10]), то теорема Д. Дайер является частным случаем следствия 9.1.

Еще одно обобщение теоремы Д. Дайер формулируется следующим образом.

Теорема 9.2. *Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если существуют гомоморфизмы групп A и B на почти полициклические группы, инъективные на подгруппах H и K соответственно, то группа G финитно аппроксимируема.*

Пусть, как и выше, $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K.

Если группы A и B являются почти полициклическими, то они финитно аппроксимируемы, и тождественные отображения $A \to A$ и $B \to B$ инъективны на H и K. Поэтому результат Д. Дайер является непосредственным следствием теоремы 9.2.

Предположим, что группы A и B аппроксимируемы полициклическими группами без кручения. Тогда они финитно аппроксимируемы, и существуют гомоморфизмы групп A и B на полициклические группы без кручения, инъективные на подгруппах H и K соответственно. Действительно, если $H \neq 1$ и $K \neq 1$, то в качестве таких гомоморфизмов можно взять любые гомоморфизмы групп A и B на полициклические группы без кручения, отображающие порождающие элементы подгрупп H и K в неединичные элементы. Если же $H = 1 = K$, то существование таких гомоморфизмов очевидно. Поэтому непосредственным следствием теоремы 9.2 является следующий результат.

Следствие 9.2. *Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B аппроксимируемы полициклическими группами без кручения, то группа G финитно аппроксимируема.*

Так как конечно порожденные нильпотентные группы являются полициклическими, то частным случаем следствия 9.2 является следующее утверждение.

Следствие 9.3. *Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B аппроксимируемы конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то группа G финитно аппроксимируема.*

В §10 для группы G из следствия 9.3 будет доказано более сильное свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для каждого простого числа p.

Следуя А. Л. Шмелькину [52], будем называть группу G группой Магнуса, если пересечение всех членов нижнего центрального ряда группы G совпадает с единичной подгруппой, и все факторы этого ряда не имеют кручения. Это свойство было установлено Магнусом для свободных групп в 30-е годы прошлого века. Другие примеры групп Магнуса можно найти в работе [52]. Так как любая конечно порожденная группа Магнуса, очевидно, аппроксимируема конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то частным случаем следствия 9.3 является следующее утверждение.

Следствие 9.4. *Свободное произведение двух конечно порожденных групп Магнуса с циклическим объединением финитно аппроксимируемо.*

Так как свободные группы аппроксимируемы конечно порожденными свободными группами, то из теоремы Магнуса следует, что любая свободная группа аппроксимируема конечно порожденными нильпотентными группами без кручения. Поэтому из следствия 7.3 вытекает классический результат Г. Баумслага [58], утверждающий финитную аппроксимируемость свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением.

Результаты настоящего параграфа опубликованы в работах автора [98] и [114]. Для их доказательства потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Вспомогательные утверждения

Лемма 9.1. *Пусть N — нильпотентная группа конечного ранга. И пусть H — бесконечная циклическая финитно отделимая подгруппа группы N. Тогда для любого целого положительного числа l в группе N существует характеристическая подгруппа L конечного индекса такая, что $H \cap L = H^l$.*

Это утверждение доказано в §8 (см. лемму 8.5). Так как конечно порожденная нильпотентная группа имеет конечный ранг, и в ней все подгруппы финитно отделимы, то частным случаем леммы 9.1 является следующее утверждение.

Следствие 9.5. *Пусть N — конечно порожденная нильпотентная группа. И пусть H — бесконечная циклическая подгруппа группы N. Тогда для любого целого положительного числа l в группе N существует характеристическая подгруппа L конечного индекса такая, что $H \cap L = H^l$.*

Нам потребуется также следующая лемма о структуре редуцированных почти разрешимых FATR-групп.

Лемма 9.2. *Пусть P — редуцированная почти разрешимая FATR-група. Тогда в группе P существует нормальный ряд $1 \leq N \leq A \leq P$, где N — нильпотентная группа, A/N — конечно порожденная абелева группа без кручения, P/A — конечная группа.*

Доказательство. По условию в группе P существует редуцированная разрешимая FATR-подгруппа S конечного индекса. Без потери общности можно считать, что S нормальна в P. Обозначим через N подгруппу Фиттинга группы S. Очевидно, что N нормальна не только в S, но и в P.

Так как S — разрешимая FATR-группа, то по теореме Грюнберга — Мальцева [80, п. 5.2.2] подгруппа N нильпотентна, а фактор-группа S/N почти абелева.

Так как S — редуцированная разрешимая FATR-группа, то по лемме 3.2 ее периодический радикал конечен. Отсюда по теореме Робинсона [80, п. 5.2.3] следует, что S/N — полициклическая группа.

Так как S/N — полициклическая почти абелева группа, и S — подгруппа конечного индекса группы P, то P/N — почти полициклическая почти абелева группа. Пусть A/N — абелева подгруппа конечного индекса группы P/N. Тогда A/N — конечно порожденная абелева группа, и, следовательно, она почти вся без кручения. Поэтому мы можем считать, что A/N — группа без кручения. Кроме того, можно считать, что она нормальна в P/N.

Мы получаем, таким образом, нормальный ряд $1 \leq N \leq A \leq P$, где N — нильпотентная группа, A/N — конечно порожденная абелева группа без кручения, P/A — конечная группа. Лемма доказана.

Лемма 9.3. *Пусть P — редуцированная почти разрешимая FATR-група. И пусть H — финитно отделимая бесконечная циклическая подгруппа группы P. Тогда существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l в группе P существует нормальная подгруппа W конечного индекса такая, что $H \cap W = H^{ml}$.*

Доказательство. По лемме 9.2 в группе P существует нормальный ряд $1 \leq N \leq A \leq P$, где N — нильпотентная группа, A/N — конечно порожденная абелева группа без кручения, P/A — конечная группа. Обозначим через m целое положительное число, для которого $H^m = H \cap A$.

Рассмотрим сначала случай, когда $H^m \subseteq N$. Очевидно, что в этом случае $H^m = H \cap N$. Поэтому из финитной отделимости подгруппы H в группе P следует финитная отделимость подгруппы H^m в группе N. Кроме того, N — нильпотентная группа конечного ранга. Из последних двух обстоятельств по лемме 9.1 следует, что для любого целого положительного числа l в группе N существует характеристическая подгруппа L конечного индекса такая, что

$H^m \cap L = (H^m)^l = H^{ml}$. С другой стороны, $H^m \cap L = H \cap A \cap L = H \cap L$. Таким образом, $H \cap L = H^{ml}$. Поскольку L характеристична в N, и N нормальна в P, то L нормальна в P. Пусть $\sigma : P \to P/L$ — естественный гомоморфизм. Тогда равенство $H \cap L = H^{ml}$ примет вид $H \cap Ker\,\sigma = H^{ml}$. Так как P/A — конечная группа, A/N — конечно порожденная абелева группа, и N/L — конечная нильпотентная группа, то группа P/L является почти полициклической. Поэтому P/L финитно аппроксимируема. Таким образом, $H\sigma$ — конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы P/L, и поэтому существует гомоморфизм ψ групппы P/L на конечную группу, инъективный на $H\sigma$. Тогда $Ker\,\sigma\psi \cap H = Ker\,\sigma \cap H = H^{ml}$. Поэтому в каческтве искомой подгруппы W можно взять подгруппу $Ker\,\sigma\psi$.

Рассмотрим теперь случай, когда $H^m \nsubseteq N$. Пусть $\varepsilon : P \to P/N$ — естественный гомоморфизм. Так как $H^m \nsubseteq N$, и $H^m \subseteq A$, то $H^m\varepsilon$ — неединичная подгруппа группы $A\varepsilon = A/N$, причем в группе $A\varepsilon = A/N$ нет кручения. Поэтому $H^m\varepsilon$ — бесконечная циклическая подгруппа группы $A\varepsilon$. Очевидно, что $H^m\varepsilon \subseteq H\varepsilon \cap A\varepsilon$. Имеет место и обратное включение. Действительно, пусть $x \in H\varepsilon \cap A\varepsilon$, то есть $x = h\varepsilon = a\varepsilon$, где $h \in H, a \in A$. Тогда $h^{-1}a \in N$. Отсюда и из того, что $N \subseteq A$, вытекает, что $h \in A$. Следовательно, $h \in H \cap A = H^m$, и поэтому $x \in H^m\varepsilon$. Таким образом, $H\varepsilon \cap A\varepsilon = H^m\varepsilon$. Так как $H^m\varepsilon$ — бесконечная циклическая подгруппа конечно порожденной абелевой группы $A\varepsilon$, то по следствию 9.5 для любого целого положительного числа l в группе $A\varepsilon$ существует характеристическая подгруппа X конечного индекса такая, что $H^m\varepsilon \cap X = (H^m\varepsilon)^l = (H\varepsilon)^{ml}$. Отсюда и из того, что $H\varepsilon \cap A\varepsilon = H^m\varepsilon$ получаем: $H\varepsilon \cap X = H\varepsilon \cap A\varepsilon \cap X = H^m\varepsilon \cap X = (H\varepsilon)^{ml}$. Так как X — характеристическая подгруппа конечного индекса группы $A\varepsilon$, и $A\varepsilon$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $P\varepsilon$, то X — нормальная подгруппа группы $P\varepsilon$, и фактор-группа $P\varepsilon/X$ конечна. Пусть $\rho : P\varepsilon \to P\varepsilon/X$ — естественный гомоморфизм. Так как ядро X гомоморфизма ρ высекает в бесконечной циклической подгруппе $H\varepsilon$ подгруппу $(H\varepsilon)^{ml}$, то порядок группы $H\varepsilon\rho$ равен ml. Поэтому если через W обозначить ядро гомоморфизма $\varepsilon\rho$, то $H \cap W = H^{ml}$. Так как $P/W \cong P\rho\varepsilon = P\varepsilon/X$ — конечная группа, то W — нормальная подгруппа конечного индекса группы P. Лемма доказана.

Так как почти полициклическая группа является редуцированной почти разрешимой FATR-группой, и в ней все подгруппы финитно отделимы

[80, п. 1.3.10], то частным случаем леммы 9.3 является следующее утверждение.

Следствие 9.6. *Пусть P — почти полициклическая група. И пусть H — бесконечная циклическая подгруппа группы P. Тогда существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l в группе P существует нормальная подгруппа W конечного индекса такая, что $H \cap W = H^{ml}$.*

Нам потребуется также следующее утверждение, которое уже использовалось в §5.

Лемма 9.4. *Пусть $G = (A * B, H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. И пусть $(A_i)_{i \in I}$ и $(B_j)_{j \in J}$ — семейства всех нормальных подгрупп конечного индекса в группах A и B соответственно,*

$$\Lambda = \{(i, j) \in I \times J : (A_i \cap H)\varphi = B_j \cap K\}.$$

Для каждого $\lambda = (i, j)$ из Λ введем следующие обозначения: $A_\lambda = A_i$, $B_\lambda = B_j$. Если

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda H = H, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda K = K, \tag{9.1}$$

то группа G финитно аппроксимируема. Если группа G финитно аппроксимируема, группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, $H \neq A$ и $K \neq B$, то выполняются условия (9.1) и, в частности, подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.

Первое утверждение леммы 9.4 хорошо известно как фильтрационная теорема Г. Баумслага и доказано в [58]. Второе утверждение леммы, представлющее собой обращение теоремы Баумслага, доказано в [92].

Лемма 9.5. *Пусть A и B — финитно аппроксимируемые группы, H и K — бесконечные циклические финитно отделимые подгруппы групп A и B соответственно, $G = (A * B, H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. И пусть существуют целые положительные числа m и n такие, что для любого целого положительного числа l в группах A и B существуют* *нормальные подгруппы M и N конечных индексов такие, что $H \cap M = H^{ml}$ и $K \cap N = K^{nl}$. Тогда группа G финитно аппроксимируема.*

Доказательство. По условию в группе A существует нормальная подгруппа U конечного индекса такая, что $H \cap U = H^{mn}$. Пусть $(A_i)_{i \in I}$ — семейство всех нормальных подгрупп конечного индекса группы A. Так как группа A финитно аппроксимируема, и ее подгруппа H финитно отделима, то

$$\bigcap_{i \in I} A_i = 1, \bigcap_{i \in I} A_i H = H. \tag{9.2}$$

Пусть $U_i = A_i \cap U$ для каждого $i \in I$. Тогда U_i — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, и в силу (9.2)

$$\bigcap_{i \in I} U_i = 1, \bigcap_{i \in I} U_i H = H. \tag{9.3}$$

Так как $H \cap U = H^{mn}$, то $H \cap U_i = H^{mn} \cap A_i = H^{mnl_i}$ для подходящего целого положительного чмсла l_i. Так как число mnl_i делится на n, то по условию в группе B существует нормальная подгруппа V_i конечного индекса такая, что $K \cap V_i = K^{mnl_i}$. Тогда

$$(H \cap U_i)\varphi = H^{mnl_i}\varphi = K^{mnl_i} = K \cap V_i.$$

Таким образом, подгруппа U_i принадлежит семейству $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ для каждого $i \in I$. Отсюда и из (9.3) следует, что

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda H = H.$$

Аналогично проверяется, что

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = 1, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda K = K.$$

Поэтому в силу леммы 9.4 группа G финитно аппроксимируема.

Доказательство теоремы 9.1

Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение редуцированных почти разрешимых FATR-групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. По теореме Д. Робинсона [80, п. 5.3.2] любая редуцированная разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема. Поэтому группы A и B финитно аппроксимируемы.

Покажем, что группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.

Так как группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, то необходимость в доказываемом утверждении обеспечивается вторым утверждением леммы 9.4.

Докажем теперь достаточность. Пусть подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно. Покажем, что группа G финитно аппроксимируема. Так как по теореме Г. Баумслага свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой, то мы можем считать, что подгруппы H и K бесконечны. Поскольку группы A и B редуцированы и являются почти разрешимыми FATR-группами, а бесконечные циклические подгруппы H и K финитно отделимы в A и B соответственно, то в силу леммы 9.3 существуют целые положительные числа m и n такие, что для любого целого положительного числа l в группах A и B существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов такие, что $H \cap M = H^{ml}$ и $K \cap N = K^{nl}$. Мы видим, таким образом, что выполняются все условия леммы 9.5, в силу которой группа G финитно аппроксимируема. Теорема 9.1 доказана.

Для доказательства теоремы 9.2 наряду с доказанными выше леммами нам потребуется еще несколько вспомогательных лемм.

Вспомогательные леммы

Лемма 9.6. *Пусть H — бесконечная циклическая подгруппа группы P. И пусть существует гомоморфизм φ группы P на почти полициклическую группу, инъективный на H. Тогда существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l в группе P существует нормальная подгруппа W конечного индекса такая, что $H \cap W = H^{ml}$.*

Доказательство. Так как φ инъективен на подгруппе H, то $H\varphi$ — бесконечная циклическая подгруппа почти полициклической группы $P\varphi$. По следствию 9.6 существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l существует гомоморфизм τ группы $P\varphi$ на конечную группу, переводящий подгруппу $H\varphi$ на подгруппу $H\varphi\tau$ порядка ml. Тогда ядро W гомоморфизма $\varphi\tau$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы P, и $H \cap W = H^{ml}$. Лемма доказана.

Лемма 9.7. *Пусть Δ — некоторое семейство нормальных подгрупп группы P, замкнутое относительно пересечений конечного числа подгрупп и такое, что $\bigcap\limits_{N \in \Delta} N = 1$. И пусть элемент h группы P имеет бесконечный порядок по модулю любой подгруппы N из Δ. И пусть, наконец, $H = (h)$ — циклическая подгруппа, порожденная элементом h. Тогда для каждого элемента $x \in P \setminus H$ существует подгруппа $N_x \in \Delta$ такая, что $x \notin HN_x$.*

Доказательство. Пусть $x \in P \setminus H$. Мы утверждаем, что существует нормальная подгруппа $N_x \in \Delta$ такая, что $x \notin HN_x$. Действительно, предположим противное. Тогда для каждой подгруппы $N \in \Delta$ существует целое число n такое, что $xN = h^n N$. Пусть $M \in \Delta$. Тогда $xM = h^m M$ для некоторого целого m. Так как $x \neq h^m$ и $\bigcap\limits_{N \in \Delta} N = 1$, то существует подгруппа $L \in \Delta$ такая, что $xL \neq h^m L$. Так как подгруппа $S = M \cap L$ принадлежит множеству Δ, то существует целое s такое, что $xS = h^s S$. Поэтому $xM = h^s M$, и следовательно $h^m M = h^s M$. Так как порядок элемента hM бесконечен, то $m = s$. Таким образом, $xS = h^s S = h^m S$. Это противоречит тому, что $xL \neq h^m L$ и $S \subseteq L$. Лемма доказана.

Лемма 9.8. *Пусть $H = (h)$ — циклическая подгруппа финитно аппроксимируемой группы P. И пусть существует гомоморфизм φ группы P на почти полициклическую группу, инъективный на H. Тогда подгруппа H финитно отделима в группе P.*

Доказательство. Так как в финитно аппроксимируемой группе любая конечная подгруппа финитно отделима, то мы можем предполагать далее, что подгруппа H бесконечна. Обозначим через D ядро гомоморфизма φ. Тогда P/D — почти полициклическая группа, и порядок ее элемента hD бесконечен. Обозначим через Δ множество пересечений подгруппы D со всеми нормальными подгруппами конечного индекса группы P. Если $N \in \Delta$, то группа P/N вложима в прямое произведение группы P/D и некоторой конечной группы. Поэтому для любой подгруппы N из Δ группа P/N является почти полициклической.

Так как группа P финитно аппроксимируема, то пересечение всех ее нормальных подгрупп конечного индекса совпадает с единичной подгруппой. Поэтому $\bigcap_{N\in\Delta} N = 1$. Заметим еще, что пересечение любых двух подгрупп из Δ само принадлежит множеству Δ. Очевидно также, что для любой подгруппы N из Δ порядок элемента hN группы P/N бесконечен (так как бесконечен порядок элемента hD). Таким образом, выполняются все условия леммы 9.7.

Пусть $x \in P \setminus H$. По лемме 9.7 существует подгруппа $N_x \in \Delta$ такая, что $x \notin HN_x$, то есть $x\varepsilon \notin H\varepsilon$, где ε — естественный гомоморфизм группы P на группу P/N_x. Так как P/N_x — почти полициклическая группа, то в ней все подгруппы финитно отделимы [80, п. 1.3.10]. Поэтому существует гомоморфизм ϕ группы P/N_x на конечную группу такой, что $x\varepsilon\phi \notin H\varepsilon\phi$. Таким образом, подгруппа H группы P финитно отделима. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 9.2

Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Предположим, что существуют гомоморфизмы групп A и B на почти полициклические группы, инъективные на подгруппах H и K соответственно. Покажем, что группа G финитно аппроксимируема. Если подгруппы H и K конечны, то группа G финитно аппроксимируема в силу отмеченного выше результата Г. Баумслага [58]. Предположим теперь, что H и K бесконечны. По лемме 9.8 подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно, а по лемме 9.6 существуют целые положительные числа m и n такие, что для любого целого положительного числа l в группах A и B существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов такие, что $H \cap M = H^{ml}$ и $K \cap N = K^{nl}$. Поэтому в силу леммы 9.5 группа G финитно аппроксимируема.

§10. О свободных произведениях нильпотентно аппроксимируемых групп с циклическим объединением

Основные результаты параграфа

Здесь будут использоваться следующие обозначения для некоторых классов групп:

$\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп,

$\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп,

$\mathcal{F}_s$ — класс всех конечных разрешимых групп,

$\mathcal{N}$ — класс всех нильпотентных групп,

$\mathcal{N}_0$ — класс всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения.

Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение групп A и B с объединенными подгруппами H и K. Г. Баумслаг [58] доказал, что если A и B — свободные группы, а подгруппы H и K — циклические, то группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема. Более того, как доказано в работе автора [2], в этом случае G $\mathcal{F}_s$-аппроксимируема. Г. Баумслаг также доказал [58], что свободное произведение двух $\mathcal{N}_0$-групп с циклическим объединением является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Перечисленные результаты здесь обобщаются следующим образом.

Теорема 10.1. *Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемых групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа M такая, что фактор-группа G/M является конечной нильпотентной группой, и группа M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p. В частности, имеют место следующие утверждения.*

1. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема. Более того, группа G $\mathcal{F}_s$-аппроксимируема.

2. Группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p, и поэтому группа G почти $\mathcal{N}$-аппроксимируема.

Финитная аппроксимируемость группы G из теоремы 10.1 имеет место даже если требование $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемости групп A и B ослабить до требования их аппроксимируемости полициклическими группами без кручения (см. доказанное в §9 следствие 9.2).

По хорошо известной теореме Магнуса свободные группы $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемы. Произвольная $\mathcal{N}_0$-группа также $\mathcal{N}_0$-аппроксимируема. Поэтому частным случаем теоремы 10.1 является следующее утверждение.

Следствие 10.1. *Пусть $G = (A*B, H = K)$ — свободное произведение групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K. Если A и B — свободные группы или $\mathcal{N}_0$-группы, то группа G $\mathcal{F}_s$-аппроксимируема и почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.*

Заметим, что сформулированные выше результаты Г. Баумслага [58] являются частными случаями следствия 10.1.

Некоторые аппроксимационные свойства группы $G = (A * B, H = K)$ из следствия 10.1 изучаются в работах [2, 64, 68, 77]. Например, в работе автора [2] доказано следующее утверждение.

Предложение 10.1. *Пусть $G = (A*B, H = K)$ — свободное произведение свободных групп A и B с циклическими объединенными подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. И пусть m и n — наибольшие целые положительные числа, такие что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A и B соответственно.*

1. Если хотя бы одно из чисел m или n равно 1, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p.

2. Если же $m > 1$ и $n > 1$, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда числа m и n являются степенями числа p.

3. Группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого p.

Этот результат автора, опубликованный в работе [2], послужил отправной точкой для поиска нетривиальных достаточных условий $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемости свободного произведения свободных групп с циклическим объединением (см. работу [78]).

Заметим еще, что первые два утверждения предложения 10.1 независимо от работы автора [2] были получены Кимом и Тангом в [77].

Аналог предложения 10.1 для свободного произведения $\mathcal{N}_0$-групп с циклическим объединением формулируется следующим образом.

Предложение 10.2. *Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение $\mathcal{N}_0$-групп A и B с собственными циклическими объединенными подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. И пусть m и n — наибольшие целые положительные числа, такие что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A и B соответственно.*

1. Группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда числа m и n являются степенями числа p.

2. Группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого p.

Это утверждение является частным случаем результатов §8 диссертации (см. теорему 8.2 и работу [5]).

Как показывают предложения 10.1 и 10.2, свободное произведение двух свободных групп (двух N_0-групп) с циклическим объединением не обязано быть $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой. Тем не менее, оно обладает свойством почти $\mathcal{N}$-аппроксимируемости в силу следствия 10.1.

Теорема 10.1 является основным результатом §10. Этому результату полностью посвящена работа автора [111]. Для доказательства теоремы 10.1 потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Вспомогательные утверждения

Лемма 10.1. *Пусть F — $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемая группа, $H = (h)$ — циклическая подгруппа группы F. И пусть X — конечное подмножество группы F такое, что $X \cap H = \emptyset$. Тогда существует нормальная подгруппа V группы F такая, что $F/V \in \mathcal{N}_0$ и $X \cap HV = \emptyset$.*

Доказательство. В случае, когда $H = 1$, данное утверждение очевидно. Поэтому можно считать, что $H \neq 1$. Обозначим через Δ множество всех нормальных подгрупп D группы F таких, что $F/D \in \mathcal{N}_0$ и $h \notin D$. Заметим, что для любой подгруппы $D \in \Delta$ порядок элемента hD бесконечен. Так как группа F $\mathcal{N}_0$-аппроксимируема, то $\bigcap\limits_{D \in \Delta} D = 1$. Заметим еще, что множество Δ замкнуто относительно пересечений конечного числа подгрупп. Таким образом, выполняются все условия леммы 9.7.

По лемме 9.7 для любого элемента $x \in X$ существует нормальная подгруппа M_x группы F такая, что $F/M_x \in \mathcal{N}_0$ и $x \notin HM_x$. Пусть $V = \bigcap\limits_{x \in X} M_x$. Тогда $F/V \in \mathcal{N}_0$ и $X \cap HV = \emptyset$. Лемма доказана.

Далее потребуются следующие два простые замечания о конечно порожденных нильпотентных группах.

1. Любая $\mathcal{N}_0$-группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p [70], и в ней все максимальные циклические подгруппы $\mathcal{F}_p$-отделимы (см. лемму 8.6).

2. В любой $\mathcal{N}_0$-группе все неединичные элементы являются мощными (см. следствие 9.5). Иными словами, если F — $\mathcal{N}_0$-группа, H и C — ее неединичные циклические подгруппы, и H содержится в C, то существует нормальная подгруппа S конечного индекса группы F такая, что $S \cap C = H$.

Лемма 10.2. *Пусть $F \in \mathcal{N}_0$, и пусть H — неединичная циклическая подгруппа группы F. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Существует нормальная подгруппа S конечного индекса группы F такая, что $H \leq S$, и H — максимальная циклическая подгруппа группы S.

2. Пусть подгруппа S такая же как в утверждении 1. Тогда для любого простого p и для любого конечного подмножества X множества $F \setminus H$ существует нормальная подгруппа P группы F, удовлетворяющая следующим условиям: $P \leq S$, $X \cap HP = \emptyset$, F/P — конечная группа, S/P — конечная p-группа.

Доказательство. 1. Так как любая $\mathcal{N}_0$-группа удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, то существует максимальная циклическая подгруппа C группы F такая, что $H \leq C$. Как уже отмечалось выше, существует нормальная подгруппа S конечного индекса группы F такая, что $S \cap C = H$. Легко видеть, что H — максимальная циклическая подгруппа группы S.

2. Пусть S — нормальная подгруппа конечного индекса группы F такая, что $H \leq S$, и H — максимальная циклическая подгруппа в S. Пусть p — простое число. И пусть X — конечное подмножество группы F такое, что $X \cap H = \emptyset$.

Покажем, что для любого элемента $x \in X$ существует нормальная подгруппа P_x группы F, удовлетворяющая следующим условиям: $P_x \leq S$, $x \notin HP_x$, F/P_x — конечная группа, S/P_x — конечная p-группа. Если $x \notin S$, то полагаем $P_x = S$. Мы можем теперь считать, что $x \in S$. Так как H — максимальная циклическая подгруппа группы S, то, как отмечалось выше, она $\mathcal{F}_p$-отделима в S. Поэтому для элемента $x \notin H$ существует гомоморфизм

φ группы S на конечную p-группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$. Тогда подгруппа

$$P_x = \bigcap_{a\in F} a^{-1}(\mathrm{Ker}\varphi)a$$

нормальна в F и удовлетворяет требуемым условиям: $P_x \leq S$, $x \notin HP_x$, F/P_x — конечная группа, S/P_x — конечная p-группа.

Пусть $P = \bigcap_{x\in X} P_x$. Очевидно, что P — нормальная подгруппа группы F, удовлетворяющая требуемым условиям: $P \leq S$, $X \cap HP = \emptyset$, F/P — конечная группа, S/P — конечная p-группа. Лемма доказана.

Лемма 10.3. *Пусть F — $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемая группа, $H = (h)$ — неединичная циклическая подгруппа группы F. И пусть U — нормальная подгруппа группы F такая, что $F/U \in \mathcal{N}_0$ и $HU/U \neq 1$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Существует нормальная подгруппа S конечного индекса группы F такая, что $HU \leq S$, и HU/U — максимальная циклическая подгруппа группы S/U.

2. Пусть подгруппа S такая же как в утверждении 1. Тогда для любого простого p и для любого конечного подмножества X множества $F \setminus H$ существует нормальная подгруппа P группы F, удовлетворяющая следующим условиям: $P \leq S$, $X \cap HP = \emptyset$, F/P — конечная нильпотентная группа, S/P — конечная p-группа.

Доказательство. 1. По лемме 10.2 существует нормальная подгруппа S/U конечного индекса группы F/U такая, что $HU/U \leq S/U$, и HU/U — максимальная циклическая подгруппа группы S/U. Таким образом, утверждение 1 справедливо.

2. Пусть S — нормальная подгруппа конечного индекса группы F такая, что $HU \leq S$, и HU/U — максимальная циклическая подгруппа группы S/U. Пусть p — простое число. И пусть X — конечное подмножество группы F такое, что $X \cap H = \emptyset$.

По лемме 10.1 существует нормальная подгруппа V группы F такая, что $F/V \in \mathcal{N}_0$ и $X \cap HV = \emptyset$. Пусть $W = U \cap V$. Тогда $F/W \in \mathcal{N}_0$, $HW/W \neq 1$, $X \cap HW = \emptyset$ и, следовательно, $XW/W \cap HW/W = \emptyset$. Так как $HW \leq HU \leq S$, то $HW/W \leq S/W$.

Покажем, что HW/W — максимальная циклическая подгруппа группы S/W. В самом деле, предположим противное. Тогда существует элемент $a \in S$ такой, что $a^m W = hW$, где $m > 1$. Так как $W \le U$, то $a^m U = hU$. Это противоречит тому, что HU/U — максимальная циклическая подгруппа группы S/U.

Таким образом, имеют место следующие утверждения: $F/W \in \mathcal{N}_0$, HW/W — неединичная циклическая подгруппа группы F/W, S/W — нормальная подгруппа конечного индекса группы F/W, HW/W — максимальная циклическая подгруппа группы S/W, XW/W — конечное подмножество множества F/W, $XW/W \cap HW/W = \emptyset$.

Поэтому в силу леммы 10.2 существует нормальная подгруппа P/W группы F/W, удовлетворяющая условиям: $P/W \le S/W$, $XW/W \cap HW/W \cdot P/W = \emptyset$, $(F/W)/(P/W)$ — конечная группа, $(S/W)/(P/W)$ — конечная p-группа. Тогда P — нормальная подгруппа группы F, удовлетворяющая следующим условиям: $P \le S$, $X \cap HP = \emptyset$, F/P — конечная группа, S/P — конечная p-группа. Заметим, что $W \le P$ и, следовательно, F/P — нильпотентная группа. Лемма доказана.

В работе [72] Хигман даказал, что свободное произведение двух конечных p-групп с циклическим объединением является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Напомним, что если A и B — произвольные группы, h и k — элементы групп A и B соответственно, и порядки этих элементов совпадают, то через $G = (A * B,\ h = k)$ обозначается свободное произведение групп A и B с объединенными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Если теперь P и Q — нормальные подгруппы групп A и B соответственно, и порядки элементов $hP \in A/P$ и $kQ \in B/Q$ совпадают, то можно рассмотреть обобщенное свободное произведение $G_{PQ} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ)$ и гомоморфизм $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$ (конструкция Г. Баумслага [58]). Через $[A, B]$ будем обозначать взаимный коммутант подгрупп A и B группы G, т. е. подгруппу группы G, порожденную всеми элементами $a^{-1}b^{-1}ab$, где $a \in A$ и $b \in B$.

Лемма 10.4. *Пусть $G = (A * B,\ h = k)$ — свободное произведение конечных нильпотентных групп A и B с объединенными циклическими p-подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. И пусть S и T — наибольшие p-подгруппы* *групп A и B соответственно, M — нормальное замыкание в группе G множества $S \cup T \cup [A, B]$. Тогда группа M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Заметим, что $H \leq S$ и $K \leq T$. Очевидно, что группа G/M представляет собой прямое произведение групп A/S и B/T. Очевидно также, что $M \cap A = S$ и $M \cap B = T$.

Хорошо известно, что любая конечная нильпотентная группа раскладывается в прямое произведение силовских подгрупп. Поэтому $A = S \times P$ и $B = T \times Q$ для некоторых подгрупп P и Q. Заметим, что $|hP| = |h| = |k| = |kQ|$. Теперь мы можем рассмотреть свободное произведение

$$G_{_{PQ}} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ) \cong (S * T,\ h = k)$$

и гомоморфизм $\rho_{_{PQ}} : G \to G_{_{PQ}}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$. Группа $G_{_{PQ}}$ представляет собой свободное произведение двух конечных p-групп с объединенными циклическими подгруппами, и, следовательно, она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема по теореме Хигмана [72], упомянутой выше. Поэтому существует гомоморфизм σ групы $G_{_{PQ}}$ на конечную p-группу X, инъективный на A/P и B/Q. Пусть $L = \mathrm{Ker}\rho_{_{PQ}}\sigma$. Так как $\mathrm{Ker}\rho_{_{PQ}} \cap A = P$ и $\mathrm{Ker}\rho_{_{PQ}} \cap B = Q$, и так как σ ниъективен на A/P и B/Q, то $L \cap A = P$ и $L \cap B = Q$.

Пусть $F = M \cap L$. Так как

$$S \cap P = 1,\ M \cap A = S,\ L \cap A = P,\ T \cap Q = 1,\ M \cap B = T,\ L \cap B = Q,$$

то $F \cap A = 1$ и $F \cap B = 1$. Поэтому в силу теоремы Х. Нейман [21, гл. 1, предл. 11.22] подгруппа F свободна. Так как $M/F = M/(M \cap L) \cong ML/L \leq G/L$, и так как $G/L \cong X$ — конечная p-группа, то M/F — конечная p-группа. Таким образом, свободная группа F является нормальной подгруппой конечного p-индекса группы M. Следовательно, M — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа. Лемма доказана.

Лемма 10.5. *Пусть $G = (A * B,\ h = k)$ — свободное произведение $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемых групп A и B с объединенными неединичными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. И пусть U и V — нормальные подгруппы групп A и B такие, что $A/U \in \mathcal{N}_0$, $B/V \in \mathcal{N}_0$ и $HU/U \neq 1 \neq KV/V$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Существуют нормальные подгруппы S и T конечных индексов групп A и B соответственно такие, что $HU \leq S$, $KV \leq T$, и подгруппы HU/U и KV/V являются максимальными циклическими подгруппами групп S/U и T/V.

2. Пусть подгруппы S и T такие же как в утверждении 1. И пусть M — нормальное замыкание в группе G множества $S \cup T \cup [A, B]$. Тогда фактор-группа G/M является конечной нильпотентной группой, и группа M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p.

Доказательство. 1. По лемме 10.3 существуют нормальные подгруппы S и T конечных индексов групп A и B соответственно такие, что $HU \leq S$, $KV \leq T$, и подгруппы HU/U и KV/V являются максимальными циклическими подгруппами групп S/U и T/V.

2. Пусть S и T такие же как в утверждении 1. И пусть M — нормальное замыкание в группе G подмножества $S \cup T \cup [A, B]$. Так как $G/M \cong A/S \times B/T$, и так как A/S и B/T — конечные нильпотентные группы, то G/M — конечная нильпотентная группа. Покажем, что группа M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для любого простого p. Заметим, что свободные множители A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, так как они являются $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемыми группами. Обозначим через g неединичный элемент группы M. Покажем, что существует гомоморфизм φ группы M на конечную p-группу, переводящий элемент g в неединичный элемент. Пусть элемент g имеет несократимую запись

$$g = x_1 x_2 \ldots x_r.$$

Предположим сначала, что $r = 1$. В этом случае $g \in A$ или $g \in B$. Пусть для определенности $g \in A$. Так как группа A $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то существует нормальная подгруппа P конечного p-индекса группы A, не содержащая элемент g. Так как группа B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и так как порядок элемента hP конечной p-группы A/P является степенью числа p, то существует нормальная подгруппа Q конечного p-индекса группы B такая, что $|hP| = |kQ|$. Группа $G_{PQ} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ)$ является свободным произведением двух конечных p-групп с циклическим объединением, и, следовательно, по упомянутой выше теореме Хигмана [72] она $\mathcal{F}_p$-

аппроксимируема. Рассмотрим гомоморфизм $\rho_{_{PQ}} : G \to G_{_{PQ}}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$. Так как $g\rho_{_{PQ}} \neq 1$, и так как группа $G_{_{PQ}}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то существует гомоморфизм τ группы $G_{_{PQ}}$ на конечную p-группу такой, что $g\rho_{_{PQ}}\tau \neq 1$. Пусть φ — ограничение гомоморфизма $\rho_{_{PQ}}\tau$ на M. Тогда φ — гомоморфизм группы M на конечную p-группу, переводящий элемент g в неединичный элемент.

Рассмотрим теперь случай, когда $r > 1$. Для определенности будем считать, что $x_1, x_3, \dots \in A \setminus H$ и $x_2, x_4, \dots \in B \setminus K$. Рассмотрим подмножества $X = \{x_1, x_3, \dots\}$ и $Y = \{x_2, x_4, \dots\}$. Так как S и T такие же как в утверждении 1, и так как $X \cap H = \emptyset = Y \cap K$, то по лемме 10.3 существуют нормальные подгруппы P_0 и Q_0 групп A и B, удовлетворяющие следующим условиям: $P_0 \leq S$, $Q_0 \leq T$, $X \cap HP_0 = \emptyset$, $Y \cap KQ_0 = \emptyset$, A/P_0 и B/Q_0 — конечные нильпотентные группы, S/P_0 и T/Q_0 — конечные p-группы. Так как hP_0 и kQ_0 — элементы конечных p-групп S/P_0 и T/Q_0, то $|hP_0| = p^s$ и $|kQ_0| = p^t$. Пусть $m = \max(s, t)$. Так как A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, то существуют нормальные подгруппы P_1 и Q_1 конечных p-индексов групп A и B такие, что $|hP_1| = p^m = |kQ_1|$. Пусть $P = P_0 \cap P_1$ и $Q = Q_0 \cap Q_1$. Тогда P и Q — нормальные подгруппы групп A и B, удовлетворяющие следующим условиям: $P \leq S$, $Q \leq T$, $X \cap HP = \emptyset$, $Y \cap KQ = \emptyset$, A/P и B/Q — конечные нильпотентные группы, S/P и T/Q — конечные p-группы, и $|hP| = p^m = |kQ|$. Поэтому можно рассмотреть обобщенное свободное произведение $G_{_{PQ}} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ)$ и гомоморфизм $\rho_{_{PQ}} : G \to G_{_{PQ}}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$. Так как $X \cap HP = \emptyset$ и $Y \cap KQ = \emptyset$, то

$$x_1P \notin HP/P,\ x_2Q \notin KQ/Q,\ x_3P \notin HP/P,\ x_4Q \notin KQ/Q, \dots$$

Поэтому элемент $g\rho_{_{PQ}}$ группы $G_{_{PQ}}$ имеет несократимую запись

$$g\rho_{_{PQ}} = x_1\rho_{_{PQ}}x_2\rho_{_{PQ}} \dots x_r\rho_{_{PQ}} = x_1P \cdot x_2Q \cdot x_3P \cdot x_4Q \cdot \dots$$

длины $r > 1$. Следовательно, $g\rho_{_{PQ}} \neq 1$. Заметим, что подгруппа $M\rho_{_{PQ}}$ группы $G_{_{PQ}}$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G_{_{PQ}}$ множества $S/P \cup T/Q \cup [A/P, B/Q]$. Так как A/P и B/Q — конечные нильпотентные группы, и так как S/P и T/Q — подгруппы в наибольших p-подгруппах групп

A/P и B/Q, то по лемме 10.4 группа $M\rho_{_{PQ}}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что $g\rho_{_{PQ}} \in M\rho_{_{PQ}} \setminus 1$, следует, что существует гомоморфизм σ группы $M\rho_{_{PQ}}$ на конечную p-группу такой, что $(g\rho_{_{PQ}})\sigma \neq 1$. Пусть ρ — ограничение гомоморфизма $\rho_{_{PQ}}$ на M. И пусть $\varphi = \rho\sigma$. Тогда φ — гомоморфизм группы M на конечную p-группу, переводящий элемент g в неединичный элемент.

Таким образом, группа M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для любого простого p. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 10.1

Грюнберг [70] доказал, что свободное произведение двух $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. В частности, свободное произведение двух $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемых групп $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемо для любого простого числа p.

Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемых групп A и B с объединенными циклическими подгруппами H и K. Покажем, что существует нормальная подгруппа M группы G такая, что G/M — конечная нильпотентная группа, и группа M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для любого простого p.

Если $H = 1$ и $K = 1$, то G — свободное произведение $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемых групп A и B. В этом случае группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p, и мы полагаем $M = G$.

Если же $H \neq 1$ и $K \neq 1$, то по лемме 10.5 существует нормальная подгруппа M группы G такая, что G/M — конечная нильпотентная группа, и группа M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для любого простого p. В частности, имеют место следующие утверждения.

1. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема. Более того, группа G $\mathcal{F}_s$-аппроксимируема.

2. Группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p, и пэтому группа G почти $\mathcal{N}$-аппроксимируема.

§11. О свободных произведениях групп с конечным объединением

Основные результаты параграфа

Как уже отмечалось выше, наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения $G = (A * B, H)$ групп A и B с объединенной подгруппой H состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости), накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединенную подгруппу H. Примером таких ограничений может служить конечность подгруппы H, ее цикличность, конечность индексов подгруппы H в группах A и B, а также нормальность подгруппы H в группах A и B.

Такой подход к изучению аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп был применен Г. Баумслагом, который в 60-е годы прошлого века начал систематическое изучение финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп. В его статье [58] получен целый ряд фундаментальных результатов в этом направлении, а также намечен путь для дальнейших исследований финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп. Сначала Баумслаг доказывает, что если группы A и B конечны, то группа $G = (A * B, H)$ финитно аппроксимируема. Заметим, что свободное произведение двух конечных p-групп с объединенной подгруппой быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой уже не обязано. Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для такого свободного произведения был получен Г. Хигманом [72]. Этот критерий сформулирован ниже. Из него, в частности, следует $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость свободного произведения двух конечных p-групп с циклической объединенной подгруппой.

Следующий шаг, сделанный Г. Баумслагом, состоял в том, что требование конечности свободных множителей A и B было ослаблено до требования конечности объединенной подгруппы H. Баумслаг [58] доказал, что свободное произведение G финитно аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной подгруппой H является финитно аппроксимируемой группой.

Простые примеры показывают, что этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения двух $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп с конечной объединенной подгруппой будет сформулирован и доказан ниже. Этот критерий является основным результатом в данном параграфе.

Возвращаясь к упомянутому выше результату Хигмана [72], напомним прежде всего, что нормальным рядом группы A называется конечный ряд $\mathcal{R}_A$ вида:

$$1 = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_n = A,$$

состоящий из нормальных подгрупп группы A. Если $\mathcal{R}_A$ — нормальный ряд группы A, имеющий указанный выше вид, и H — подгруппа группы A, то через $\mathcal{R}_A(H)$ будем обозначать нормальный ряд группы H, который получается удалением повторяющихся членов из ряда

$$1 = A_0 \cap H \leq A_1 \cap H \leq \ldots \leq A_n \cap H = H.$$

Нормальный ряд $\mathcal{R}_A$ группы A называется главным, если в нем нет повторяющихся членов, и его нельзя уплотнить никаким другим нормальным рядом группы A (без повторяющихся членов). Очевидно, что нормальный ряд конечной p-группы является главным тогда и только тогда, когда все его факторы имеют порядок p. Хорошо известно и легко проверяется, что в конечной p-группе любой нормальный ряд без повторений может быть уплотнен до главного ряда.

Упомянутый выше фундаментальный результат Хигмана [72] формулируется следующим образом.

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение конечных p-групп A и B с объединенной подгруппой H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах A и B существуют главные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ такие, что $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$.

Аналог теоремы Хигмана для HNN-расширения конечной p-группы получен Д. И. Молдаванским в работе [31].

Условие $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$, найденное Хигманом, естественно называть H-совместимостью рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$. Оно фактически означает, что множество всех пересечений подгруппы H с членами ряда $\mathcal{R}_A$ совпадает с множеством всех пересечений подгруппы H с членами ряда $\mathcal{R}_B$.

В доказанной Хигманом теореме предполагается, что свободные множители A и B являются конечными p-группами. Ослабляя это ограничение до требования $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных множителей и конечности объединяемой подгруппы, мы доказываем здесь следующее обобщение теоремы Хигмана.

Теорема 11.1. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной p-подгруппой H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах A и B существуют нормальные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) в каждом из рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ все факторы, кроме быть может одного, являются конечными группами порядка p;

(ii) $\mathcal{R}_A(H)$ и $\mathcal{R}_B(H)$ — главные ряды группы H;

(iii) $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$.

Заметим, что теорема Хигмана является непосредственным следствием теоремы 11.1. Действительно, любые главные H-совместимые ряды конечных p-групп A и B, очевидно, удовлетворяют условиям (i), (ii) и (iii). Наоборот, если нормальные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ конечных p-групп A и B удовлетворяют условиям (i), (ii) и (iii), то в группах A и B существуют главные H-совместимые ряды $\mathcal{R}'_A$ и $\mathcal{R}'_B$. В качестве рядов $\mathcal{R}'_A$ и $\mathcal{R}'_B$ можно взять любые главные ряды групп A и B, являющиеся уплотнениями рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$. При этом H-совместимость рядов $\mathcal{R}'_A$ и $\mathcal{R}'_B$ вытекает из H-совместимости рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ (условие (iii)) с учетом того обстоятельства, что в силу условия (ii) $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}'_A(H)$ и $\mathcal{R}_B(H) = \mathcal{R}'_B(H)$.

Еще одно обобщение результата Хигмана получено с помощью теоремы 11.1 при более жестких ограничениях на A и B. Оно формулируется следующим образом.

Теорема 11.2. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной p-подгруппой H. И пусть в группах A и B существуют конечные нормальные p-подгруппы S и T, содержащие подгруппу H. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах S и T существуют главные ряды $\mathcal{R}_S$*

и $\mathcal{R}_T$ такие, что $\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_T(H)$, и все члены рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ нормальны в группах A и B соответственно.

В теореме 11.2 предполагается, что в группах A и B существуют конечные нормальные p-подгруппы S и T, содержащие конечную объединенную подгруппу H. Такие подгруппы S и T существуют, например, в случае, когда A и B — конечно порожденные нильпотентные $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемые группы. В этом случае в качестве подгрупп S и T можно взять множества всех элементов конечных порядков этих групп. В самом деле, напомним, что в конечно порожденной нильпотентной группе A множество всех элементов конечного порядка является конечной нормальной подгруппой и называется конечной частью группы A, причем $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы A равносильна тому, что ее конечная часть является p-группой. Поэтому непосредственным следствием теоремы 11.2 является следующее утверждение.

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с конечной объединенной подгруппой H. И пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, т. е. их конечные части S и T являются p-группами. Группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группах S и T существуют главные ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ такие, что $\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_T(H)$, и все члены рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ нормальны в группах A и B соответственно.

Этот результат (как и теоремы 11.1 и 11.2) обобщает результат Хигмана. Его аналог для HNN-расширений получен Д. И. Молдаванским в работе [35].

Доказательства теорем 11.1 и 11.2 приведены ниже. Доказательство теоремы 11.1 основано на теореме Хигмана, а доказательство теоремы 11.2 — на теореме 11.1.

В свой фундаментальной работе [70] Грюнберг предлагает при изучении свободных произведений наряду со свойствами $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости рассматривать более общее свойство $\mathcal{K}$-аппроксимируемости, где $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, т. е. нетривиальный класс групп, замкнутый относительно подгрупп и удовлетворяющий следующему условию: если в субнормальной последовательности подгрупп $C \leq B \leq A$ факторы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе C существует подгруппа D, нормальная в A и такая, что фактор-группа A/D

принадлежит $\mathcal{K}$. Очевидно, что классы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_p$ являются корневыми. Еще одним примером корневого класса служит класс $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных π-групп, где π — некоторое множество простых чисел.

В монографии [23, п. 6.5] В. Магнус, А. Каррас и Д. Солитэр приводят следующий результат Грюнберга, доказанный в уже упомянутой выше работе [70].

Если все свободные группы аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, то свободное произведение любого числа $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп само является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

С другой стороны, в совместной работе автора настоящей диссертации и Д. Тьеджо [12] доказано следующее утверждение.

Произвольная свободная группа аппроксимируема любым корневым классом.

Очень простое доказательство этого утверждения основано на том, что с одной стороны любой корневой класс, как легко видеть, содержит в себе или класс $\mathcal{N}$ всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения, или класс $\mathcal{F}_p$ для некоторого простого p, а с другой стороны по хорошо известной теореме Магнуса любая свободная группа $\mathcal{N}$-аппроксимируема, а значит и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p. Таким образом, свободные группы аппроксимируемы любым корневым классом, и поэтому результат Грюнберга приобретает следующий более "законченный" вид.

Предложение 11.1. *Свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, сомо аппроксимируемо классом $\mathcal{K}$.*

Этот результат, послуживший началом многочисленных исследований аппроксимируемости свбодных конструкций корневыми классами групп (см. введение), позволяет, в частности, найти критерий аппроксимируемости корневым классом для свободного произведения двух групп с конечным объединением. Для этого нам потребуется следующий хорошо известный результат о строении подгрупп обобщенных свободных произведений групп, принадлежащий Х. Нейман (см., напр., [21, предл. 11.22]).

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Если F — подгруппа группы G, тривиально пересе-

кающая все подгруппы группы G, сопряженные с H, то F раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы и некоторого семейства подгрупп вида $x^{-1}Ax \cap F$ и $x^{-1}Bx \cap F$ $(x \in G)$. В частности, если F — нормальная подгруппа группы G, тривиально пересекающая H, то F раскладывается в свободное произведение указанного выше вида.

Отсюда и из предложения 11.1 вытекает упомянутый выше критерий, который формулируется следующим образом.

Предложение 11.2. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, с конечной объединенной подгруппой H. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу, инъективный на H.*

Необходимость в этом утверждении очевидна. Для проверки достаточности предположим, что существует гомоморфизм группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу, инъективный на H. Ядро этого гомоморфизма обозначим через F. Тогда F — нормальная подгруппа группы G, тривиально пересекающая H. По теореме Х.Нейман F раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы и подгрупп вида $x^{-1}Ax \cap F$ и $x^{-1}Bx \cap F$ $(x \in G)$. Поэтому в силу предложения 11.1 группа F является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой. Отсюда и из того, что фактор-группа G/F принадлежит классу $\mathcal{K}$, следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G.

Разумеется, аналог предложения 11.2 имеет место и для HNN-расширений с конечными связанными подгруппами.

Заметим еще, что свойство почти аппроксимируемости корневым классом для свободных конструкций ведет себя значительно более регулярно по сравнению с обычной аппроксимируемостью. Так, например, с помощью предложения 11.1 и сформулированного выше результата Х. Нейман может быть легко доказано следующее утверждение [4].

Предложение 11.3. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с конечной объединенной подгруппой H. И пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс конечных групп. Группа G почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A и B почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемы.*

Аналог этого утверждения имеет место, разумеется, и для HNN-расширений с конечными связанными подгруппами.

Основные результаты настоящего параграфа (теоремы 11.1 и 11.2) опубликованы автором в работе [109]. Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству этих теорем.

Доказательство теоремы 11.1

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной p-подгруппой H.

Для доказательства достаточности в теореме 11.1 предположим, что в группах A и B существуют нормальные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) в каждом из рядов $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ все факторы, кроме быть может одного, являются конечными группами порядка p;

(ii) $\mathcal{R}_A(H)$ и $\mathcal{R}_B(H)$ — главные ряды группы H;

(iii) $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$.

Совпадающие главные ряды $\mathcal{R}_A(H)$ и $\mathcal{R}_B(H)$ представляют собой нормальный ряд

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_l = H$$

с факторами порядка p. Покажем, что для каждого $k = 0, 1, \ldots, l$ найдется нормальная подгруппа L_k конечного p-индекса группы A такая, что $L_k \cap H = H_k$. Так как H_k является членом ряда $\mathcal{R}_A(H)$, то найдется член L ряда $\mathcal{R}_A$ такой, что $L \cap H = H_k$. Так как по условию (i) ряд $\mathcal{R}_A$ имеет не более одного бесконечного фактора, а все его конечные факторы являются p-группами, то конечной p-группой является или A/L или L. В первом случае в качестве искомой подгруппы L_k можно взять L. Во втором случае из $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы A следует $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы A/L. Тогда HL/L — конечная подгруппа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы A/L, и поэтому в группе A/L существует нормальная подгруппа L_k/L конечного p-индекса, тривиально пересекающая HL/L. Тогда L_k — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы A, причем $L_k \cap H = L \cap H$, т. е. $L_k \cap H = H_k$.

Очевидно, что для каждого $i = 0, 1, \ldots, l$ подгруппа

$$M_i = \bigcap_{k=i}^{l} L_k$$

является нормальной подгруппой конечного p-индекса группы A, и

$$M_i \cap H = \bigcap_{k=i}^{l} (L_k \cap H) = \bigcap_{k=i}^{l} H_k = H_i.$$

Очевидно также, что

$$M_0 \leq M_1 \leq \ldots \leq M_l \leq A.$$

Аналогично в группе B можно построить последовательность подгрупп

$$N_0 \leq N_1 \leq \ldots \leq N_l \leq B$$

такую, что для каждого $i = 0, 1, \ldots, l$ N_i — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы B и $N_i \cap H = H_i$.

Так как подгруппы $M = M_0$ и $N = N_0$ тривиально пересекают H, то естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$ могут быть продолжены до гомоморфизма $\rho_{_{MN}}$ группы G на свободное произведение $G_{_{MN}}$ конечных p-групп A/M и B/N с объединенной подгруппой $H_{_{MN}} = HM/M = HN/N$ (см. [58]). Заметим, что $A\rho_{_{MN}} = A/M$, $B\rho_{_{MN}} = B/N$, $H\rho_{_{MN}} = H_{_{MN}}$. Докажем $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы $G_{_{MN}}$ с помощью результата Хигмана.

Так как M и N тривиально пересекают H, то гомоморфизм $\rho_{_{MN}}$ инъективен на подгруппе H, и поэтому совпадающие главные ряды $\mathcal{R}_A(H)$ и $\mathcal{R}_B(H)$ группы H отображаются на главный ряд

$$1 = H_0\rho_{_{MN}} \leq H_1\rho_{_{MN}} \leq \ldots \leq H_l\rho_{_{MN}} = H_{_{MN}}$$

группы $H_{_{MN}}$, который далее будем обозначать $\mathcal{R}_{H_{_{MN}}}$. Так как для каждого $i = 0, 1, \ldots, l$ $M_i \cap H = H_i$ и $M \leq M_i$, то $M_i/M \cap HM/M = H_iM/M$, т. е. $M_i\rho_{_{MN}} \cap H_{_{MN}} = H_i\rho_{_{MN}}$. Поэтому если через $\mathcal{R}_{A/M}$ обозначить нормальный ряд

$$1 = M_0\rho_{_{MN}} \leq M_1\rho_{_{MN}} \leq \ldots \leq M_l\rho_{_{MN}} \leq A/M$$

группы A/M, то

$$\mathcal{R}_{A/M}(H_{_{MN}}) = \mathcal{R}_{H_{_{MN}}}.$$

Хорошо известно и легко проверяется, что в конечной p-группе любой нормальный ряд можно уплотнить до главного ряда. Обозначим через $\mathcal{R}'_{A/M}$ какой-нибудь главный ряд группы A/M, являющийся уплотнением ряда $\mathcal{R}_{A/M}$. Тогда ряд $\mathcal{R}'_{A/M}(H_{_{MN}})$ будет уплотнением ряда $\mathcal{R}_{A/M}(H_{_{MN}})$, т. е. ряда $\mathcal{R}_{H_{_{MN}}}$. Но последний ряд является главным, и поэтому

$$\mathcal{R}'_{A/M}(H_{_{MN}}) = \mathcal{R}_{H_{_{MN}}}.$$

Аналогично с помощью последовательности $N_0 \leq N_1 \leq \ldots \leq N_l \leq B$ в группе B/N можно построить главный ряд $\mathcal{R}'_{B/N}$ такой, что

$$\mathcal{R}'_{B/N}(H_{_{MN}}) = \mathcal{R}_{H_{_{MN}}}.$$

Таким образом, в конечных p-группах A/M и B/N мы построили главные ряды $\mathcal{R}'_{A/M}$ и $\mathcal{R}'_{B/N}$, которые в силу последних двух равенств являются $H_{_{MN}}$-совместимыми. Поэтому в силу теоремы Хигмана группа $G_{_{MN}}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что ее подгруппа $H\rho_{_{MN}} = H_{_{MN}}$ конечна, следует существование гомоморфизма ρ группы $G_{_{MN}}$ на конечную p-группу, инъективного на $H_{_{MN}}$. Тогда $\rho_{_{MN}}\rho$ — гомоморфизм группы G на конечную p-группу, инъективный на H. Поэтому в силу предложения 11.2 группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Это завершает доказательство достаточности в теореме 11.1.

Для доказательства необходимости предположим, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Так как подгруппа H группы G конечна, то найдется нормальная подгруппа F группы G конечного p-индекса такая, что $F \cap H = 1$. Уплотняя ряд $1 \leq F \leq G$, получим нормальный ряд $\mathcal{R}_G$ группы G вида

$$1 \leq F = G_1 \leq G_2 \leq \ldots \leq G_k = G,$$

в котором для любого $i = 1, 2, \ldots, k-1$ порядок фактора G_{i+1}/G_i равен p. Очевидно, что $\mathcal{R}_G(H)$ — главный ряд группы H. Кроме того, очевидно, что ряды $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_G(A)$ и $\mathcal{R}_B = \mathcal{R}_G(B)$ являются нормальными рядами в группах A и B, и все факторы этих рядов, начиная со второго, имеют порядок p. Это означает, что ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ удовлетворяют условию (i). Очевидно также, что $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_G(H)$, $\mathcal{R}_B(H) = \mathcal{R}_G(H)$. Поэтому $\mathcal{R}_A(H) = \mathcal{R}_B(H)$ — главный ряд группы H, т. е. выполняются условия (ii) и (iii). Необходимость в теореме 11.1 доказана.

Доказательство теоремы 11.2

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной p-подгруппой H. И пусть в группах A и B существуют конечные нормальные p-подгруппы S и T, содержащие подгруппу H.

Предположим сначала, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Так как подгруппы S и T группы G конечны, то найдется нормальная подгруппа L группы G конечного p-индекса такая, что $L \cap S = 1$ и $L \cap T = 1$. Уплотняя ряд $1 \leq L \leq G$, получим нормальный ряд $\mathcal{R}_G$ группы G вида

$$1 \leq L = G_1 \leq G_2 \leq \ldots \leq G_k = G,$$

в котором для любого $i = 1, 2, \ldots, k-1$ порядок фактора G_{i+1}/G_i равен p. Очевидно, что ряды $\mathcal{R}_S = \mathcal{R}_G(S)$ и $\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_G(T)$ являются главными рядами в группах S и T, и члены этих рядов нормальны в A и B соответственно. Очевидно также, что $\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_G(H)$, $\mathcal{R}_T(H) = \mathcal{R}_G(H)$. Поэтому $\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_T(H)$. Необходимость в теореме 11.2 доказана.

Достаточность в теореме 11.2 обеспечивается теоремой 11.1. В самом деле, пусть в группах S и T существуют главные ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ такие, что $\mathcal{R}_S(H) = \mathcal{R}_T(H)$, и все члены рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ нормальны в группах A и B соответственно. Добавляя к рядам $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ в качестве "новых" членов подгруппы A и B, получаем нормальные ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ групп A и B. Очевидно, что ряды $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ удовлетворяют условиям (i), (ii) и (iii) из теоремы 11.1. Поэтому в силу теоремы 11.1 группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Теорема 11.2 доказана.

Заключение

Как уже отмечалось выше, многие результаты об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости групп и свободных конструкций не могут быть распространены на аппроксимируемость другими классами конечных групп. Аналоги этих результатов для свойств $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости и π-примарной аппроксимируемости как правило не верны. Это относится как к классическим теоремам об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости, так и к новым результатам об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости, доказанным в диссертации. С другой стороны, некоторые из этих результатов имеют нетривиальные аналоги для свойств почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости и почти π-примарной аппроксимируемости.

В целом, результаты диссертации показывают, что свойства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости и почти π-примарной аппроксимируемости ведут себя более "регулярно" по сравнению с обычной аппроксимируемостью соответствующими классами групп. В этом состоит одна из причин, мотивирующих изучение свойства почти аппроксимируемости различными классами конечных групп. Другая причина состоит в том, что использование свойств почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости позволяет получать новые результаты об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости. Так, например, при условии почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости базовой группы удается получить новые нетривиальные достаточные условия $\mathcal{F}$-аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения, существенно обобщающие известные результаты такого рода (см. §4). С другой стороны, до сих пор не известно, обладает ли свойством финитной аппроксимируемости произвольное нисходящее HNN-расширение конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы со связанной подгруппой конечного индекса (вопрос Д. И. Молдаванского).

Несмотря на то, что многие $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы являются также и почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемыми, доказательства для них свойства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости оказываются значительно более сложными, чем доказательства $\mathcal{F}$-аппроксимируемости. Так, например, для свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением свойство $\mathcal{F}$-аппроксимируемости легко проверяется (и было установлено еще

Г. Баумслагом), а свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости таких свободных произведений (для каждого простого p), недавно установленное А. В. Розовым, доказывается нетривиально (см. §7). Остается нерешенным вопрос о линейности такого свободного произведения. Для свободного произведения двух полициклических групп с циклическим объединением свойство $\mathcal{F}$-аппроксимируемости доказано Д. Дайер, но, с другой стороны, не известно, будет ли такое свободное произведение почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемым для каждого простого p.

Вопрос об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных π-групп и HNN-расширения конечной π-группы полностью исследован только в двух случаях — когда множество π состоит из одного простого числа, и когда оно совпадает с множеством всех простых чисел. Это обстоятельство существенно ограничивает возможности исследования свойства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости свободных конструкций. Тем не менее, для некоторых обобщенных свободных произведений в диссертации получен критерий почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости для фиксированного конечного множества π простых чисел.

Автор выражает благодарность профессору Д. И. Молдаванскому, а также участникам возглавляемого им научно-исследовательского семинара, за постоянную помощь и поддержку в процессе подготовки и написания диссертации.

Список литературы

1. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой / Д. Н. Азаров // *Сиб. матем. журнал.* — 1997. — Т. 38, № 1. — С. 3–13.
2. *Азаров, Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением / Д. Н. Азаров // *Мат. заметки.* — 1998. — Т. 64, № 1. — С. 3–8.
3. *Азаров, Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости сверхразрешимых групп / Д. Н. Азаров // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 2001. — № 4. — С. 11–14.
4. *Азаров, Д. Н.* О почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп некоторыми классами конечных групп / Д. Н. Азаров, Д. В. Гольцов // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2012. — № 2. — С. 86–91.
5. *Азаров, Д. Н.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп / Д. Н. Азаров, Е. А. Иванова // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 1999. — № 2. — С. 5–7.
6. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой / Д. Н. Азаров, Е. А. Иванова // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 2002. — № 5. — С. 3–5.
7. *Азаров, Д. Н.* Аппроксимационные свойства свободных произведений конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением / Д. Н. Азаров, Е. А. Иванова // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2008. — № 2. — С. 56–62.
8. *Азаров, Д. Н.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p–группами / Д. Н. Азаров, Д. И. Молдаванский // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 1999. — № 2. — С. 8–9.
9. *Азаров, Д. Н.* О сверхразрешимых группах, аппроксимируемых конечными p-группами относительно сопряженности / Д. Н. Азаров, Д. И. Молдаванский // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2005. — № 3. — С. 59–67.

10. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / Д. Н. Азаров, А. В. Розов // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2011. — № 2. — С. 98–103.
11. *Азаров, Д. Н.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами / Д. Н. Азаров, Е. А. Туманова // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 2008. — № 6. — С. 29–42.
12. *Азаров, Д. Н.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневыми классами групп / Д. Н. Азаров, Д. Тьеджо // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 2002. — № 5. — С. 6–10.
13. *Азаров, Д. Н.* Об аппроксимируемости конечными p-группами некоторых расщепляемых расширений / Д. Н. Азаров, Е. И. Чуракова // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2009. — № 2. — С. 68–72.
14. *Варламова, И. А.* Об аппроксимируемости конечными группами групп Баумслага — Солитэра / И. А. Варламова, Д. И. Молдаванский // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2012. — № 2. — С. 107–114.
15. *Гольцов, Д. В.* О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп / Д. В. Гольцов // *Чебышевский сборник.* — 2013. — Т. 14, № 3. — С. 53–60.
16. *Гольцов, Д. В.* Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп / Д. В. Гольцов // *Мат. заметки.* — 2015. — Т. 97, № 5. — С. 665–669.
17. *Горяга, А. В.* Пример конечного расширения ФАС-группы, не являющегося ФАС-группой / А. В. Горяга // *Сиб. матем. журнал.* — 1986. — Т. 27, № 3. — С. 203–205.
18. *Гудовщикова, А. С.* Замечание об аппроксимируемости расщепляющихся расширений / А. С. Гудовщикова, Е. В. Соколов // *Математика и ее приложения: ЖИМО.* — 2010. — № 1(7). — С. 29–32.
19. *Иванова, О. А.* Аппроксимируемость конечными π—группами некоторых групп с одним определяющим соотношением / О. А. Иванова, Д. И. Молдаванский // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 2008. — № 6. — С. 51–58.

20. *Каргаполов, М. И.* Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. — М.: Наука, 1972. — 239 с.
21. *Линдон, Р.* Комбинаторная теория групп / Р. Линдон, П. Шупп. — М.: Мир, 1980. — 450 с.
22. *Логинова, Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами / Е. Д. Логинова // *Сиб. матем. журнал.* — 1999. — Т. 40, № 2. — С. 395–407.
23. *Магнус, В.* Комбинаторная теория групп / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
24. *Мальцев, А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами / А. И. Мальцев // *Мат. сборник.* — 1940. — Т. 8, № 3. — С. 405–422.
25. *Мальцев, А. И.* О группах конечного ранга / А. И. Мальцев // *Мат. сборник.* — 1948. — Т. 22, № 2. — С. 351–352.
26. *Мальцев, А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы / А. И. Мальцев // *Мат. сборник.* — 1949. — Т. 25, № 3. — С. 347–366.
27. *Мальцев, А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы / А. И. Мальцев // *Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та.* — 1958. — Т. 18, № 5. — С. 49–60.
28. *Мерзляков, Ю. И.* Целочисленное представление голоморфов полициклических групп / Ю. И. Мерзляков // *Алгебра и логика.* — 1980. — Т. 9, № 5. — С. 539–558.
29. *Мерзляков, Ю. И.* Рациональные группы / Ю. И. Мерзляков. — М.: Наука, 1987. — 464 с.
30. *Молдаванский, Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп / Д. И. Молдаванский // *Укр. матем. журнал.* — 1992. — Т. 44, № 6. — С. 842–845.
31. *Молдаванский, Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений / Д. И. Молдаванский // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2000. — № 3. — С. 129–140.
32. *Молдаванский, Д. И.* Два замечания о финитно аппроксимируемых группах с одинаковыми семействами конечных гомоморфных образов / Д. И. Молдаванский // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 2001. — № 4. — С. 83–87.

33. *Молдаванский, Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений / Д. И. Молдаванский // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2002. — № 3. — С. 123–133.

34. *Молдаванский, Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп / Д. И. Молдаванский // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2003. — № 3. — С. 102–116.

35. *Молдаванский, Д. И.* Об аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширений нильпотентных групп / Д. И. Молдаванский // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2006. — № 3. — С. 128–132.

36. *Молдаванский, Д. И.* Аппроксимируемость групп Баумслага — Солитэра / Д. И. Молдаванский // *Чебышевский сборник.* — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 110–115.

37. *Молдаванский, Д. И.* Комбинаторная теория групп в Ивановском государственном университете / Д. И. Молдаванский // *Чебышевский сборник.* — 2014. — Т. 15, № 4. — С. 32–54.

38. *Носков, Г. А.* Почти аппроксимируемость конечно-порожденных AP-групп без кручения конечными p-группами / Г. А. Носков // *Алгебра и логика.* — 1974. — Т. 13, № 6. — С. 676–684.

39. *Платонов, В. П.* Некоторые проблемы для конечно порожденных групп / В. П. Платонов // *Докл. Акад. наук БССР.* — 1968. — № 12. — С. 492–494.

40. *Плоткин, Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем / Б. И. Плоткин. — М.: Наука, 1966. — 603 с.

41. *Ремесленников, В. Н.* Сопряженность в полициклических группах / В. Н. Ремесленников // *Алгебра и логика.* — 1969. — № 6. — С. 712–725.

42. *Ремесленников, В. Н.* Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности / В. Н. Ремесленников // *Сиб. матем. журнал.* — 1971. — Т. 12, № 5. — С. 1085–1099.

43. *Розов, А. В.* Некоторые аппроксимационные свойства свободных произведений разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Чебышевский сборник.* — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 130–142.

44. *Розов, А. В.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения полициклических групп с нормальными объеди-

ненными подгруппами / А. В. Розов // *Известия ВУЗов. Математика.* — 2014. — № 11. — С. 64–71.

45. *Романовский, Н. С.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения / Н. С. Романовский // *Известия АН СССР. Сер. математика.* — 1969. — Т. 33, № 6. — С. 1324–1329.
46. *Сексенбаев, К.* К теории полициклических групп / К. Сексенбаев // *Алгебра и логика.* — 1965. — Т. 4, № 3. — С. 79–83.
47. *Смирнов, Д. М.* К теории финитно аппроксимируемых групп / Д. М. Смирнов // *Укр. мат. журнал.* — 1963. — Т. 15. — С. 453–457.
48. *Туманова, Е. А.* Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой / Е. А. Туманова // *Чебышевский сборник.* — 2013. — Т. 14, № 3. — С. 140–147.
49. *Туманова, Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп / Е. А. Туманова // *Модел. и анализ информ. систем.* — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 133–137.
50. *Чандлер Б.* Развитие комбинаторной теории групп / Б. Чандлер, В. Магнус. — М.: Мир, 1985. — 250 с.
51. *Шмелькин, А. Л.* О полициклических группах / А. Л. Шмелькин // *Сиб. мат. журнал.* — 1968. — Т. 9, № 1. — С. 234–235.
52. *Шмелькин, А. Л.* О нижнем центральном ряде свободного произведения групп / А. Л. Шмелькин // *Алгебра и логика.* — 1969. — Т. 8, № 1. — С. 129–137.
53. *Allenby, R. B. J. T.* On locally extended residually finite groups / R. B. J. T. Allenby, R. J. Gregorac // *Lecture Notes Math.* — 1973. — V. 319. — P. 9–17.
54. *Andreadakis, S.* Residual finiteness and hopficity of certain HNN-extensions / S. Andreadakis, E. Raptis, D Varsos // *Arch. Math.* — 1986. — V. 47. — P. 1–5.
55. *Aschenbrenner, M.* Residual properties of graph manifold groups / M. Aschenbrenner, S. Friedl // *Topology Appl.* — 2011. — V. 158, № 10. — P. 1179–1191.
56. *Baumslag, B.* Residually finite HNN-extensions / B. Baumslag, M. Tretkoff // *Communs in Algebra.* — 1978. — V. 6. — P. 179–194.

57. *Baumslag, G.* Automorphism groups of residually finite groups / G. Baumslag // *J. London Math. Soc.* — 1963. — V. 38. — P. 117–118.
58. *Baumslag, G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups / G. Baumslag // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1963. — V. 106, № 2. — P. 193–209.
59. *Baumslag, G.* Constructable soluble groups / G. Baumslag, R. Bieri // *Math. Z.* — 1976. — V. 151. — P. 249–267.
60. *Baumslag, G.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups / G. Baumslag, D. Solitar // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1962. — V. 68. — P. 199–201.
61. *Boler, J.* The free product of residually finite groups amalgamated along retracts is residually finite / J. Boler, B. Evans // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1973. — V. 37, № 1. — P. 50–52.
62. *Borisov, A.* Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms / A. Borisov, M. Sapir // *arXiv:math/0309121v1 [math.GR] 6 Sep 2003.*
63. *Bou-Rabee, K.* Parasurface groups / K. Bou-Rabee // *arXiv:0908.1808v1 [math.GR] 12 Aug 2009.*
64. *Brunner, A. M.* The subgroup separability of free products of two free groups with cyclic amalgamation / A. M. Brunner, R. G. Burns, D. Solitar // *Contributions to group theory, Contemp. Math.* — 1984. — V. 33. — P. 90–115.
65. *Cohen, D.* Residual finiteness and Britton's lemma / D. Cohen // *J. London Math. Soc.* — 1977. — V. 16. — P. 232–234.
66. *Corson, J.* A strong form of residual finiteness for groups / J. Corson, T. Ratkovich // *J. Group Theory.* — 2006. — V. 9. — P. 497–505.
67. *Dyer, J.* On the residual finiteness of generalized free products / J. Dyer // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1968. — V. 133, № 1. — P. 131–143.
68. *Dyer, J.* Separating conjugates in amalgamated free products and HNN–extensions / J. Dyer // *J. Austral Math. Soc.* — 1980. — V. 29, № 1. — P. 35–51.
69. *Formanek, E.* The automorphism group of a free group is not linear / E. Formanek, C. Procesi // *J. Algebra.* — 1992. — V. 149, № 2. — P. 494–499.
70. *Gruenberg, K. W.* Residual properties of infinite soluble groups / K. W. Gruenberg // *Proc. London Math. Soc.* — 1957. — V. 7. — P. 29–62.

71. *Higman, G.* A finitely generated group with an isomorphic proper factor grpoup / G. Higman // *J. London Math. Soc.* — 1951. — V. 26. — P. 59–61.
72. *Higman, G.* Amalgams of *p*–groups / G. Higman // *J. Algebra.* — 1964. — № 1. — P. 301–305.
73. *Hirsh, K. A.* On infinite soluble groups / K. A. Hirsh // *J. London Math. Soc.* — 1952. — V. 27. — P. 81–85.
74. *Hsu, T.* Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite / T. Hsu, D. Wise // *J. Pure Appl. Algebra.* — 2003. — V. 182. — № 1. — P. 65–78.
75. *Iwasawa, K.* Einige Satze uber freie Gruppen / K. Iwasawa // *Proc. Acad. Tokyo.* — 1943. — V. 19. — P. 272–274.
76. *Kim, G.* On amalgamated free products of residually *p*–finite groups / G. Kim, J. McCarron // *J. Algebra.* — 1993. — V. 162. — P. 1–11.
77. *Kim, G.* On generalized free products of residually finite *p*–groups / G. Kim, C. Y. Tang // *J. Algebra.* — 1998. — V. 201. — P. 317–327.
78. *Labute, J.* Residually torsion-free nilpotent one relator groups / J. Labute // *arXiv:1503.05167v1 [math.GR] 17 Mar 2015.*
79. *Learner, A.* Residual properties of polycyclic groups / A. Learner // *J. Math.*— 1964. — V. 8. — P. 536–542.
80. *Lennox, J.* The theory of infinite soluble groups / J. Lennox, D. Robinson. — Oxford.: Clarendon press, 2004. — 344 P.
81. *Lennox, J.* Converse of theorem of Mal'cev on nilpotent groups / J. Lennox, C. Wiegold // *Math. Z.* — 1974. — V. 139, № 1. — P. 85–86.
82. *Lubotzky, A.* Normal automorphisms of free groups / A. Lubotzky // *J. of algebra.* — 1980. — V. 63. — P. 494–498.
83. *Lubotzky, A.* A group-theoretic characterization of lenear groups / A. Lubotzky // *J. of algebra.* — 1988. — V. 113. — P. 207–214.
84. *Lubotzky, A.* Residually finite groups of finite rank / A. Lubotzky, A. Mann // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* — 1989. — V. 106, № 3. — P. 185–188.
85. *McCarron, J.* Residually nilpotent one-relator groups with nontrivial centre / J. McCarron // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1996. — V. 124, № 1. — P. 1–5.
86. *Meskin, S.* Nonresidually finite one-relator groups / S. Meskin // *Trans. Amer. Math. Soc.*. — 1972. — V. 164. — P. 105–114.

87. *Moldavanskii, D.* On some residual properties of Baumslag — Solitar groups / D. Moldavanskii // *arXiv:1310.3585v1 [math.GR] 14 Oct 2013.*
88. *Paris, L.* Residual p-properties of mapping class groups and surface groups / L. Paris // *arXiv: math. GR/0703703v1. 23 Mar 2007.*
89. *Raptis, E* The residual finiteness of HNN-extensions and generalized free products of nilpotent groups: a characterization / E. Raptis, D Varsos // *J. Austral Math. Soc.* — 1992. — V. 53. — P. 408–420.
90. *Rhemtulla, A. H.* The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups / A. H. Rhemtulla, M. Shirvani // *Illinois J. of Math.* — 2003. — V. 47. — P. 477–484.
91. *Shirvani, M.* On residually finite HNN-extensions / M. Shirvani // *Arch. Math.* — 1985. — V. 44. — P. 110–115.
92. *Shirvani, M.* A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag / M. Shirvani // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1988. — V. 104, № 3. — P. 703–706.
93. *Sokolov, E. V.* A characterization of root classes of groups / E. V. Sokolov // *Comm. in Algebra.* — 2015. — V. 43, № 2. — P. 856–860.
94. *Wehrfritz, B. A. F.* Remarks on Azarov's work on soluble groups of finite rank / B. A. F. Wehrfritz // *Boll. Unione Mat. Ital.* — 2016. — doi:10.1007/s40574-015-0047-8.
95. *Wilson, J. S.* Embedding theorems of residually finite groups / J. S. Wilson // *Math. J.* — 1980. — V. 174, № 2. — P. 149–157.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Работы автора, опубликованные в журналах из списка ВАК

96. *Азаров, Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами групп Баумслага — Солитэра / Д. Н. Азаров // *Модел. и анализ информ. систем.* — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 116–123.
97. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // *Сиб. матем. журнал.* — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 485–497.
98. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами / Д. Н. Азаров // *Мат. заметки.* — 2013. — Т. 93, № 4. —

С. 483–491.

99. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // *Сиб. матем. журнал.* — 2013. — Т. 54, № 6. — С. 1203–1215.
100. *Азаров, Д. Н.* Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп / Д. Н. Азаров // *Известия ВУЗов. Математика.* — 2014. — № 8. — С. 18–29.
101. *Азаров, Д. Н.* Некоторые аппроксимационные свойства групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // *Модел. и анализ информ. систем.* — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 50–55.
102. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп / Д. Н. Азаров // *Мат. заметки.* — 2014. — Т. 96, № 2. — С. 163–169.
103. *Азаров, Д. Н.* Аппроксимационные свойства групп автоморфизмов и расщепляемых расширений / Д. Н. Азаров // *Известия ВУЗов. Математика.* — 2015. — № 8. — С. 3–13.
104. *Азаров, Д. Н.* Аппроксимационные свойства абелевых групп / Д. Н. Азаров // *Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика.* — 2015. — № 3(35). — С. 5–11.
105. *Азаров, Д. Н.* Аппроксимационные свойства нильпотентных групп / Д. Н. Азаров // *Модел. и анализ информ. систем.* — 2015. — Т. 22, № 2. — С. 149–157.
106. *Азаров, Д. Н.* Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой / Д. Н. Азаров // *Сиб. матем. журнал.* — 2015. — Т. 56, № 2. — С. 249–264.
107. *Азаров, Д. Н.* Некоторые аппроксимационные свойства полициклических групп и расщепляемых расширений / Д. Н. Азаров // *Владикавк. матем. журнал.* — 2015. — Т. 17, № 4. — С. 3–10.
108. *Азаров, Д. Н.* Критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости свободных произведений с объединенной циклической подгруппой нильпотентных групп конечных рангов / Д. Н. Азаров // *Сиб. матем. журнал.* — 2016. — Т. 57, № 3. — С. 483–494.

109. *Азаров, Д. Н.* Апппроксимируемость конечными p-группами обобщенных свободных произведений групп / Д. Н. Азаров // *Известия ВУЗов. Математика.* — 2017. — № 5. — С. 3–10.

110. *Азаров, Д. Н.* О финитно аппроксимируемых группах конечного общего ранга / Д. Н. Азаров // *Мат. заметки.* — 2017. — Т. 101, № 3. — С. 323–329.

111. *Azarov, D.* Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation / D. Azarov // *Commun. in Algebra* — 2015. — V. 43:4. — P. 1464–1471.

Работы автора, опубликованные в журналах, не входящих в список ВАК

112. *Азаров, Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами / Д. Н. Азаров // *Чебышевский сборник.* — 2010. — Т. 11, № 3(35). — С. 11–20.

113. *Азаров, Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих HNN-расширений / Д. Н. Азаров // *Чебышевский сборник.* — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 9–19.

114. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением / Д. Н. Азаров // *Чебышевский сборник.* — 2013. — Т. 14, № 3(47). — С. 9–19.

115. *Азаров, Д. Н.* Некоторые аппроксимационные свойства разрешимых групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // *Чебышевский сборник.* — 2014. — Т. 15, № 1(49). — С. 7–19.