

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
образования

«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

---

Механико-математический факультет

*На правах рукописи*

**БЕДНОВА Вероника Борисовна**

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ  
ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОМ НАГРЕВЕ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ  
ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА**

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре газовой и волновой динамики механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры газовой и волновой динамики  
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет  
имени М.В.Ломоносова»  
**Юмашев Михаил Владиславович**

Официальные оппоненты: **Ванько Вячеслав Иванович**  
доктор технических наук, профессор,  
профессор кафедры «Прикладная математика»  
ФГБОУ ВО «Московский государственный  
технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»;

**Зингерман Константин Моисеевич**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой вычислительной  
математики  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет».

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение  
науки Объединенный институт высоких температур  
Российской академии наук

Защита диссертации состоится 19 мая 2017 г. в 15 ч 00 мин на заседании диссертационного совета Д 501.001.91 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» по адресу: 119234, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» по адресу: г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета <http://mech.math.msu.su/>.

Автореферат разослан «    » марта 2017 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 501.001.91 на базе МГУ,  
кандидат физико-математических наук

П.В. Чистяков

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы исследования

Во многих технологических процессах элементы конструкций подвергаются интенсивной локальной термообработке. В таких процессах характерной особенностью является то, что локальные области материала оказываются разогретыми до температуры плавления, в то время как остальная большая часть тела остается практически холодной, то есть имеет исходную начальную температуру. Примерами таких процессов являются лазерная обработка поверхности трущихся деталей и пробивание технологических отверстий в керамических подложках микросхем.

Неравномерность прогрева в процессе лазерной обработки может приводить к значительным градиентам температуры и, как следствие, к возникновению температурных напряжений, которые могут превысить предел прочности материала.

В диссертации исследуется напряженно-деформированное состояние элементов конструкций, вызванное высокотемпературным нагревом. Эти исследования имеют отношение к практически важным задачам, описанным выше, и проводятся в рамках квазистатики. Обоснованность такого подхода следует из результатов многочисленных экспериментальных исследований по лазерному воздействию на металлы и керамические материалы (работы <sup>1, 2, 3, 4</sup>).

Актуальность задачи определяется проблемой возможного внутреннего растрескивания материала при возникновении значительных температурных градиентов в области, прилегающей к нагреваемой поверхности в процессе лазерного воздействия.

В НИИ Механики МГУ имени М.В.Ломоносова в течение многих лет проводились эксперименты по изучению термических напряжений в образцах балочного типа из карбида циркония при воздействии лучом оптического квантового генератора (ОКГ) <sup>1, 2</sup>. Для эксперимента были взяты образцы из карбида циркония (86 % Zr, 11 % C, модуль упругости  $E = 4 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент линейного расширения  $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-6}$  град<sup>-1</sup>, температура плавления  $\theta_m = 3000^\circ\text{C}$ ) размером  $0.03 \times 0.0042 \times 0.0017$  м. Облучение образцов проводили на ОКГ ГОС-ЗОМ в режиме свободной генерации с длительностью импульса  $10^{-3}$  с, фокусное расстояние оптической системы составляло 0,1 м. Луч лазера направляли перпендикулярно поверхности образца.

Результаты экспериментов показали определенную временную задержку в возникновении макротрещин в образцах, подверженных лазерному воздействию. При воздействии лазерного импульса длительностью  $10^{-3}$  с разрушение происходило за время, порядок которого равен или превышает в два раза порядок времени действия лазера. Поскольку время прохода волны составляет порядка  $10^{-6}$  с, а характерные времена разрушения порядка  $10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}$  с, то понятно, что наблюдаемые в эксперименте процессы разрушения не связаны с динамическими эффектами, а связаны с теплопроводностью и квазистатическими термонапряжениями. Такое поведение образцов

<sup>1</sup>Газуко И.В., Грязнов И.М., Миркин Л.И. О разрушении карбида циркония лазером // Проблемы прочности. 1978. №2. С. 105-107.

<sup>2</sup>Газуко И.В., Шестеряков С.А., Юмашев М.В. Хрупкое разрушение керамики при изгибе в условиях импульсного нагрева // Проблемы прочности. 1983. №4. С. 66-70.

<sup>3</sup>Рэди Дж. Действие мощного лазерного излучения на вещество. – М.: Мир, 1975. – 360 с.

<sup>4</sup>Skelton R.P., Miles L. Crack propagation in thick cylinders of  $\frac{1}{2}$  – Cr-Mo-V steel during thermal shock // High Temp. Technol. 1984. Vol. 2. №1. P. 23-34.

говорит о высокой инерционности источника разрушающих напряжений. В книге <sup>3</sup> отмечено, что задержка разрушения во времени указывает на его тепловой характер.

Также в образцах после эксперимента были видны системы трещин вдоль радиального направления в зонах максимального температурного градиента. В задачах пробивания отверстий с помощью лазера отверстие удастся сделать нужного диаметра, однако потом оказывается, что в области, отстоящей от отверстия на несколько характерных размеров, возникает микротрещина или даже макротрещина, то есть несущая способность материала уменьшается.

Известно, что классическое уравнение притока тепла при описании процессов теплопередачи механизмом теплопроводности дает не соответствующую действительности бесконечную скорость распространения возмущений. Кроме того, во многих прикладных задачах нет смысла гнаться за точностью решения параболического уравнения в частных производных, так как граничные условия порой задаются со значительной погрешностью, которая может достигать порядка искомых величин. Поэтому в реальных процессах актуальным может являться построение приближенных решений аналитического вида, удовлетворяющих некоторым интегральным энергетическим условиям.

К тому же, если решение было получено в численном виде, последующее исследование температурных напряжений также должно быть проведено численным способом. Аналитический вид решения задачи теплопроводности позволяет получить аналитические выражения для температурных напряжений и в дальнейшем облегчает анализ результатов.

Теоретическое подтверждение экспериментальных результатов для случая линейного одномерного уравнения теплопроводности с граничным условием первого рода было получено в аналитических моделях <sup>5, 6</sup>.

В диссертации аналитический приближенный метод нахождения нестационарных температурных полей (используемый в работах <sup>5, 6</sup>) модифицируется для случая нелинейного уравнения теплопроводности с граничными условиями первого и второго рода. Рассмотрены монотонно возрастающие, монотонно убывающие и немонотонный варианты зависимости коэффициента теплопроводности от температуры.

Процесс лазерной технологической обработки элементов конструкций и способы подавления нежелательных температурных напряжений определяют набор внешних параметров: температура и поток на нагреваемой поверхности, константа материала при учете его нелинейных свойств, коэффициент теплообмена, нагрузку при дополнительном механическом преднагрузении, пределы прочности и текучести материала. В связи с таким большим количеством параметров аналитический подход весьма удобен для описания напряженно-деформированного состояния и разрушения в элементах конструкций при высокотемпературном нагреве.

**Цели** диссертационной работы: а) исследовать влияние нелинейности теплофизических и механических свойств материала на напряженно-деформированное состояние и разрушение элементов конструкций при высокотемпературном нагреве;

<sup>5</sup>Шестериков С.А., Юмашева М.А. Приближенный метод оценки нестационарных температурных полей // Институт механики МГУ. Научные труды. Деформирование и разрушение твердых тел. Вып. 23. М.: Изд-во МГУ. 1973. С. 15–20.

<sup>6</sup>Бахарев М.С., Миркин Л.И., Шестериков С.А., Юмашева М.А. Структура и прочность материалов при лазерных воздействиях. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 224 с.

б) разработать возможные способы уменьшения термомеханических напряжений при высокотемпературном нагреве.

Для достижения этих целей были поставлены следующие задачи:

1) модифицировать аналитический приближенный метод нахождения нестационарных температурных полей на случаи граничных условий первого и второго рода при различных зависимостях коэффициента теплопроводности от температуры;

2) получить аналитические выражения для полей напряжений (с использованием полученных распределений температуры) в случаях упругого и упругопластического материалов и провести анализ влияния нелинейности теплофизических и механических свойств материала на разрушение образца;

3) исследовать методы подавления термомеханических повреждений при высокотемпературной обработке элементов конструкций.

**Научная новизна.** Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) впервые получены аналитические приближенные решения нелинейного уравнения теплопроводности с граничными условиями второго рода для монотонных и немонотонных зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры;

2) показано существенное влияние нелинейности теплофизических свойств материала на напряженно-деформированное состояние и разрушение элементов конструкций при высокотемпературном нагреве;

3) исследовано влияние дополнительного теплообмена на возможность обеспечения высокотемпературной обработки, не приводящей к нарушению сплошности элементов конструкций (балки, стержни, полосы, диски).

**Личный вклад.** Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Результаты могут быть использованы для решения ряда задач по высокотемпературной обработке материалов и оценки прочности элементов конструкций при возникновении больших градиентов температур.

**Методология и методы исследования.** Исследования основаны на принципах классической механики, законов сохранения энергии, импульса и законов термодинамики. В рамках этих законов на основе приближенных и асимптотических методов строятся приближенные решения задач.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. Модифицирован аналитический приближенный метод нахождения нестационарных температурных полей на случай нелинейного уравнения теплопроводности для граничных условий первого и второго рода. Рассмотрены монотонно возрастающие, монотонно убывающие и немонотонный варианты зависимости коэффициента теплопроводности от температуры.

2. Определены аналитические выражения для полей напряжений (с использованием найденных распределений температуры) в случаях упругого и упругопластического материалов и проведен анализ влияния нелинейных теплофизических свойств материала на разрушение образца.

3. Исследовано влияние понижения температуры с помощью теплообмена на напряженно-деформированное состояние при лазерной обработке элементов конструкций (балки, стержни, полосы, диски).

**Степень достоверности** результатов диссертации обусловлена использованием классических методов механики сплошной среды и теории дифференциальных уравнений, применением математически обоснованных методов решения поставленных задач, сравнением полученного приближенного решения в линейном случае с точным.

На протяжении нескольких лет в НИИ Механики МГУ имени М.В.Ломоносова проводились эксперименты по лазерному воздействию на образцы из карбида циркония. Результаты этих исследований хорошо коррелируют с результатами данной работы.

**Апробация диссертации.** Основные результаты, полученные в диссертации, неоднократно докладывались и обсуждались на семинарах

- механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова:

1) научно-исследовательский семинар кафедры газовой и волновой динамики под руководством академика Нигматулина Р.И. (2011-2016, неоднократно);

2) научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности под руководством члена-корреспондента РАН Ломакина Е.В. (2016);

3) научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости под руководством профессора Георгиевского Д.В. (2016);

4) научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов (2016);

- НИИ Механики МГУ имени М.В.Ломоносова:

1) научно-исследовательский семинар под руководством профессора Локощенко А.М. (2016);

2) научно-исследовательский семинар под руководством профессора Васина Р.А. (2017);

- МГТУ им. Н.Э. Баумана:

научно-методический семинар под руководством профессора Ванько В.И., профессора Феоктистова В.В. и доцента Марчевского И.К. (2016)

и следующих конференциях:

- Конференция-конкурс молодых ученых НИИ Механики МГУ имени М.В.Ломоносова (2012, 2013);

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012»;

- X Международный симпозиум по фундаментальным и прикладным проблемам науки, посвященный 70-летию Победы (2015).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных работах [1]–[7], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

В совместной работе [2] Юмашеву М.В. принадлежит постановка задачи разрушения, Вергазову М.М. принадлежит обработка экспериментальных данных, Юмашевой М.А.

принадлежит базовая постановка задачи термоупругости в квазистатическом приближении.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 80 наименований. Общий объем диссертации — 109 страниц с 31 рисунком.

## Краткое содержание диссертации

Во **введении** обоснованы актуальность проведенных исследований, научная новизна, теоретическая и практическая значимость диссертационной работы. Приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели и задачи представляемой работы.

В **первой главе** диссертации модифицируется аналитический приближенный метод определения нестационарных одномерных температурных полей, основанный на идее существования температурного фронта (метод развит в работах <sup>7, 8, 9, 10</sup> при решении задач фильтрации, диффузии и теплопроводности).

Температурный фронт физически можно интерпретировать как линию уровня температуры, значение которой в условиях эксперимента практически неотлично от начальной температуры. Такая граница существует, потому что любой измерительный прибор имеет ограниченную точность измерения. Граница температурного фронта (практически это изотерма с температурой, "максимально" близкой к температуре окружающей среды) как функция времени может быть определена из интегрального уравнения теплопроводности.

Вводятся безразмерные переменные (здесь  $h$  — характерный размер задачи):

$x = \frac{\xi}{h}$  — безразмерная координата,  $t = \frac{\tau K_0}{\rho c h^2}$  — безразмерное время (число Фурье),

$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0}$  — безразмерная температура,

$\eta = \frac{h H_f}{\varkappa}$  — безразмерный коэффициент теплоотдачи (число Био),

$K = \frac{\varkappa}{K_0}$  — безразмерный коэффициент теплопроводности,

$T_\Gamma = \frac{F - \theta_0}{\theta_m - \theta_0}$  — безразмерная температура на границе,

$q_\Gamma = \frac{\Phi h}{\varkappa(\theta_m - \theta_0)}$  — безразмерный поток на границе.

Решаются две модельные задачи — нагрев образца балочного типа по поверхности  $x = 0$  и нагрев тонкого диска по центральному круговому отверстию  $r = a$ . Рассматриваются граничные условия первого и второго рода — когда на нагреваемой поверхности задается температура  $T_0 = \text{const}$  и когда задается тепловой поток  $q_0 = \text{const}$ .

Опишем процедуру решения нестационарной задачи теплопроводности, моделирующей процесс высокотемпературного нагрева тела по границе  $x = 0$  с равной нулю температурой в начальный момент времени  $t = 0$ . Характер нагрева таков, что можно

<sup>7</sup>Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. — М.: Изд-во МГУ, 2000. — 178 с.

<sup>8</sup>Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 504 с.

<sup>9</sup>Шестериков С.А., Юмашева М.А. Приближенный метод оценки нестационарных температурных полей // Институт механики МГУ. Научные труды. Деформирование и разрушение твердых тел. Вып. 23. М.: Изд-во МГУ, 1973. С. 15–20.

<sup>10</sup>Баренблатт Г.И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОН. 1954. №9. С. 35–49.

выделить единственное определенное направление, в котором распространяется тепло. Хотя теоретически температура мгновенно изменяется в любой точке тела при изменении температуры на поверхности, реально температура изменяется постепенно. Это изменение начинается от нагреваемой поверхности и естественно ввести некую границу  $x = l(t)$ , которую будем считать границей температурного фронта, отделяющей прогретую часть тела от части, в которой температуру с достаточной степенью точности можно считать неизменной до момента подхода фронта.

Поэтому классическое граничное условие задачи теплопроводности на холодной границе тела можно заменить на условие на границе температурного фронта  $x = l(t)$ . Функция  $l(t)$  считается равной нулю при  $t = 0$  и  $\frac{dl}{dt}\big|_{t=0} \neq 0$ . В дальнейшем везде будет использоваться обозначение  $\frac{dl}{dt} = l'$ .

Также в дальнейшем для удобства восприятия будем использовать следующее обозначение для частной производной по времени или координате в безразмерной форме:  $\frac{\partial T}{\partial t} = T_t$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T_{xx}$  и т. п.

Аналитическое решение ищется в виде ряда

$$T(x, t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n \varphi_i(t)x^i, & \text{если } 0 \leq x \leq l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varphi_i(t)$  находятся из граничных условий задачи.

Учитывая, что в общем виде количество неизвестных параметров равно  $n + 2$ , для вычисления неизвестных функций  $\varphi_i(t)$  и  $l(t)$  помимо граничных условий необходимо поставить  $n$  дополнительных условий.

В качестве таких условий могут выступать:  
заданный поток на температурном фронте

$$-K(T)T_x|_{x=l(t)} = q_0; \quad (2)$$

условие интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности

$$\int_0^l (T_t - (K(T)T_x)_x) dx = 0; \quad (3)$$

условие баланса тепла

$$q_0 t = \int_0^l T dx; \quad (4)$$

уравнение теплопроводности, про дифференцированное  $n$  раз ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и взятое в характерных точках, например, при  $x = l(t)$

$$(T_t - (K(T)T_x)_x)|_{x=l(t)} = 0, \quad (5)$$

$$(T_t - (K(T)T_x)_x)_x|_{x=l(t)} = 0, \quad (6)$$



$$(T_t - (K(T)T_x)_x)_{xx} \Big|_{x=l(t)} = 0$$

(и так далее);

интегральные условия (как, например, в работе <sup>11</sup>)

$$\int_0^l (T_t - (K(T)T_x)_x) x^s dx = 0. \quad (7)$$

Процедура определения температурных полей такова, что сначала находится зависимость  $T(x, l(t))$ , а затем ищется  $l(t)$ . Для нахождения функции границы температурного фронта ставится задача Коши с условием  $l(0) = 0$ .

В работе рассмотрены случаи, когда приближенное решение задачи теплопроводности строится в виде (1) при  $n = 2$  и  $n = 3$ :

$$T(x, t) = \begin{cases} \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \quad (8)$$

$$T(x, t) = \begin{cases} \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_3(t)x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \quad (9)$$

Предлагаемый метод хорош тем, что для анализа напряженно-деформированного состояния функцию  $l = l(t)$  не обязательно находить явно, пока не потребуются определить конкретное размерное время достижения напряжениями критических значений вследствие больших температурных градиентов. До тех пор можно считать  $l$  новым временем.

В работе рассмотрены следующие коэффициенты теплопроводности:

$K(T) = 1$ ;  $K(T) = T$  (данный коэффициент рассматривался во многих работах, например, <sup>12, 13</sup>);  $K(T) = \frac{2T}{1+T^2}$ ;  $K(T) = \frac{1}{1+T}$ ,  $K(T) = 1 - pT$  (в некотором приближении соответствуют коэффициенту теплопроводности карбида циркония <sup>14</sup>);  $K(T) = 1 + pT$ , где  $p$  — константа материала.

В случае линейной задачи теплопроводности для обоих рассматриваемых типов граничных условий проведено сравнение с точным решением, подтверждающее приемлемость метода для дальнейшего использования. В случае нелинейной задачи теплопроводности при заданном тепловом потоке на нагреваемой поверхности обеспечено выполнение условия баланса тепла.

Рассмотрим одномерную нестационарную ( $T = T(x, t)$ ) линейную ( $K(T) = 1$ ) задачу теплопроводности, моделирующую процесс высокотемпературного нагрева тела по границе  $x = 0$  постоянной по времени температурой  $T_0 = 1$ . Температура в начальный момент времени  $t = 0$  считается равной нулю; температура на фронте  $T|_{x=l(t)}$  равна нулю:

<sup>11</sup>Баренблатт Г.И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН. 1954. №9. С. 35–49.

<sup>12</sup>Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 88 с.

<sup>13</sup>Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн. ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. №4. С. 702–719.

<sup>14</sup>Физические величины. Справочник. Под редакцией Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 1232 с.

$$\begin{cases} T_t = T_{xx} \\ T|_{t=0} = 0 \\ T|_{x=0} = 1 \\ T|_{x=l(t)} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Перейдем от переменных  $(x, t)$  к переменным  $(z, \hat{t})$  следующим образом:

$$\begin{cases} z = x - l(t) \\ \hat{t} = t. \end{cases} \quad (11)$$

При этой замене тепловой фронт берется за новую координатную ось  $z = 0$  и производные преобразуются в соответствии с формулами

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = -l'(\hat{t}) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} - l'(\hat{t}) \frac{\partial}{\partial z}.$$

В новых переменных задача (10) имеет вид

$$\begin{cases} T_{\hat{t}} - l'(\hat{t})T_z = T_{zz} \\ T|_{\hat{t}=0} = 0 \\ T|_{z=-l(\hat{t})} = 1 \\ T|_{z=0} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Далее время везде будем обозначать за  $t$ .

**А.** Ищем выражение для температуры (аналогично (8)) в виде

$$T(z, t) = \begin{cases} u_0(t) + u_1(t)z + u_2(t)z^2, & \text{если } -l(t) \leq z \leq 0 \\ 0, & \text{если } z > 0. \end{cases} \quad (13)$$

Для нахождения функций  $u_i(t)$  необходимо задать еще одно условие. Будем считать, что выполнено условие типа (2), которое в новых переменных имеет вид

$$T_z|_{z=0} = 0. \quad (14)$$

Из алгебраической системы, состоящей из граничных условий задачи (12) и условия (14), при учете (13) получаем  $u_0 = 0$ ;  $u_1 = 0$ ;  $u_2 = \frac{1}{l^2(t)}$ , откуда  $T(z, t) = \frac{z^2}{l^2(t)}$  при  $-l(t) \leq z \leq 0$ .

Функцию  $l(t)$  находим из условия интегрального удовлетворения уравнения теплопроводности типа (3). Для этого подставим последнее полученное соотношение  $T(z, t)$  в уравнение из (12), проинтегрируем полученное выражение в пределах от  $-l(t)$  до 0 и приравняем к нулю:

$$\int_{-l(t)}^0 \left( -\frac{2l'(t)}{l^3(t)} z^2 - \frac{2l'(t)}{l^2(t)} z - \frac{2}{l^2(t)} \right) dz = -\frac{2l'(t)}{3} + l'(t) - \frac{2}{l(t)} = 0.$$

Получим дифференциальное уравнение относительно  $l(t)$ :  $ll' = 6$ , откуда  $\frac{l^2}{2} = 6t + c$ . Так как  $l(0) = 0$ , то  $c = 0$  и  $l(t) = \sqrt{12t}$ .

В итоге в прогретой зоне получаем  $T(z, t) = \frac{z^2}{12t}$ , или, в старых переменных,

$$T(x, t) = \frac{(x - \sqrt{12t})^2}{12t}. \quad (15)$$

**Б.** Ищем выражение для температуры (аналогично (9)) в виде

$$T(z, t) = \begin{cases} u_0(t) + u_1(t)z + u_2(t)z^2 + u_3(t)z^3, & \text{если } -l(t) \leq z \leq 0 \\ 0, & \text{если } z > 0. \end{cases} \quad (16)$$

При тех же граничных условиях, что в п. **А**, получаем

$$u_0 = 0; \quad u_1 = 0; \quad u_2 l^2(t) - u_3 l^3(t) = 1. \quad (17)$$

Четвертое условие для нахождения функций  $u_i(t)$  получим с помощью соотношения (6), которое в переменных  $(z, t)$  имеет вид

$$T_{tz}|_{z=0} - l'(t)T_{zz}|_{z=0} = T_{zzz}|_{z=0},$$

откуда при учете (17) получаем  $-2l'(t)u_2 = 6u_3$ .

Таким образом,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = \frac{3}{l^2(3+ll')}$ ,  $u_3 = -\frac{l'}{l^2(3+ll')}$  и приближенное решение задачи (12) при  $-l(t) \leq z \leq 0$  имеет вид

$$T(z, t) = \frac{3}{l^2(3+ll')}z^2 - \frac{l'}{l^2(3+ll')}z^3. \quad (18)$$

Для получения условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности, аналогичном (3), подставим решение (18) в уравнение из (12), получим выражение

$$L(T) = -\frac{6}{l^2(3+ll')} - \frac{3l'}{l^2(3+ll')}z + \frac{3l^2l'^3 - 18l' - 3l^2ll''}{l^3(3+ll')^2}z^2 - \frac{3ll'' - 3ll'^3 - 6l'^2}{l^3(3+ll')^2}z^3,$$

интегрируя которое по  $z$  в пределах от  $-l(t)$  до 0 и приравнивая к 0, получаем уравнение относительно  $l(t)$ :

$$l^3l'^3 - l^3l'' - 30ll' - 72 = 0. \quad (19)$$

Поскольку известно, что тепловая энергия локализуется в тонком поверхностном слое толщиной  $k\sqrt{t}$  (работа <sup>15</sup>), для нахождения  $l(t)$ , удовлетворяющей (19), предположим, что  $l(t) = k\sqrt{t}$ . Тогда, подставив  $l(t)$  в (19), получим уравнение относительно  $k$ :  $k^6 + 2k^4 - 120k^2 - 576 = 0$ . В качестве решения данного уравнения получаем три значения для  $k^2$ , два из которых отрицательны. Поэтому единственным подходящим решением (поскольку  $k^2 > 0$  и  $l(t) > 0$ ) будет  $k = \sqrt{12}$ , откуда  $l(t) = \sqrt{12t}$ .

Тогда

$$T(z, t) = \frac{1}{36t}z^2 - \frac{1}{36\sqrt{3t}^{\frac{3}{2}}}z^3,$$

или, в старых переменных,

$$T(x, t) = \frac{1}{36t}(x - 2\sqrt{3t})^2 - \frac{1}{36\sqrt{3t}^{\frac{3}{2}}}(x - 2\sqrt{3t})^3. \quad (20)$$

Проведем сравнение полученных приближенных решений с точным решением аналогичной задачи для полуограниченного твердого тела <sup>16</sup>. Данное сравнение

<sup>15</sup>Газуко И.В., Шестериков С.А., Юмашев М.В. Хрупкое разрушение керамики при изгибе в условиях импульсного нагрева// Проблемы прочности. 1983, №4. С. 66-70.

<sup>16</sup>Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. - 488 с.

корректно, потому что нас интересуют промежутки времени, когда тело еще не прогрелось полностью и температура на второй границе практически не изменилась. В этом случае применимо решение для полугограниченного твердого тела:

$$T(x, t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} \exp(-\xi^2) d\xi. \quad (21)$$

Сравнение полученных приближенных решений с точным показано на рис. 1.

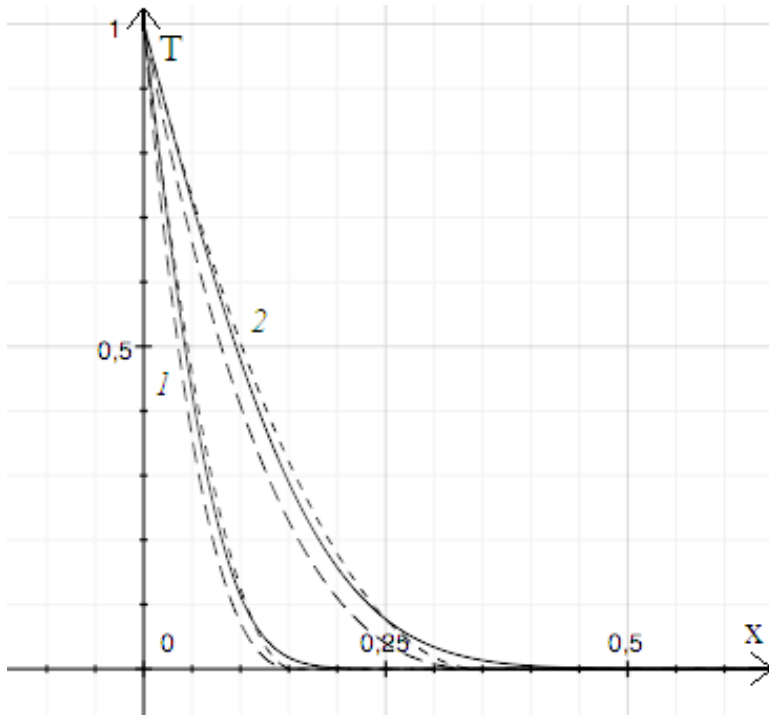


Рис. 1. Безразмерная температура в моменты безразмерного времени  $t = 0.01 - 1$ ,  $t = 0.1 - 2$ . Сплошная линия — точное решение (21), короткий пунктир — приближенное решение (20), длинный пунктир — приближенное решение (15).

Из графика видно, что приближенные и точные решения отличаются незначительно. Погрешность метода в интересующие нас промежутки времени составляет менее 10%.

Аналогичное сравнение проведено для приближенного решения линейной задачи теплопроводности для граничных условий второго рода.

Рассмотрим пример решения нелинейной задачи теплопроводности. Коэффициент теплопроводности берется в виде  $K(T) = 1 - pT$ , что при  $p > 0$  в некотором приближении соответствует коэффициенту теплопроводности карбида циркония.

Рассмотрим задачу нагрева тонкого диска по центральному круговому отверстию  $r = 1$  с заданным потоком на нагреваемой поверхности, нулевой температурой на фронте  $r = l(t)$  и с дополнительным условием вида (2) при  $q_0 = 0$ .

Нелинейная задача теплопроводности при  $K = K(T)$  в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} T_t = \frac{1}{r} (K(T)rT_r)_r \\ T|_{t=0} = 0 \\ -K(T)T_r|_{r=1} = q_{00} \\ T|_{r=l(t)} = 0 \\ K(T)T_r|_{r=l(t)} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Для коэффициента теплопроводности  $K(T) = 1 - pT$  из (22) получаем

$$\begin{cases} T_t = \frac{1}{r}(1 - pT)T_r - pT_r^2 + (1 - pT)T_{rr} \\ -(1 - pT)T_r|_{r=1} = q_{00} \\ T|_{r=l(t)} = 0 \\ (1 - pT)T_r|_{r=l(t)} = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Сделаем замены  $\chi = r - l$  и  $u = 1 - pT$ , получим

$$\begin{cases} u_t - l'u_\chi = \frac{1}{\chi+l}uu_\chi + u_\chi^2 + uu_{\chi\chi} \\ uu_\chi|_{\chi=1-l} = pq_{00} \\ u|_{\chi=0} = 1 \\ uu_\chi|_{\chi=0} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Зависимость температуры от функции  $l(t)$  и координаты в этом случае:

$$T = \begin{cases} \frac{1 \mp \sqrt{1 + 2pq_{00} - 2pq_{00}l}}{2p(l-1)^2} (l - r)^2, & \text{если } 1 \leq r \leq l(t) \\ 0, & \text{если } r > l(t). \end{cases} \quad (25)$$

Знак перед корнем выбирается в зависимости от знака константы  $p$ . При  $p > 0$  — плюс, при  $p < 0$  — минус. Случай  $p = 0$  соответствует линейному уравнению теплопроводности для аналогичной задачи нагрева диска.

При  $p > 0$  из условия баланса тепла (4) получаем зависимость

$$\left(1 + \sqrt{1 + 2pq_{00} - 2pq_{00}l}\right) (l - 1)(l + 3) = 24pq_{00}t. \quad (26)$$

При  $p < 0$  из того же условия (4) получаем

$$\left(1 - \sqrt{1 + 2pq_{00} - 2pq_{00}l}\right) (l - 1)(l + 3) = 24pq_{00}t. \quad (27)$$

Сравнение найденных решений показано на рисунках 2 и 3. Сравнение графиков показывает, что при коэффициенте теплопроводности  $K(T) = 1 - pT$  идет перегрев поверхности, а при  $K(T) = 1 + pT$  тепло проходит внутрь образца.

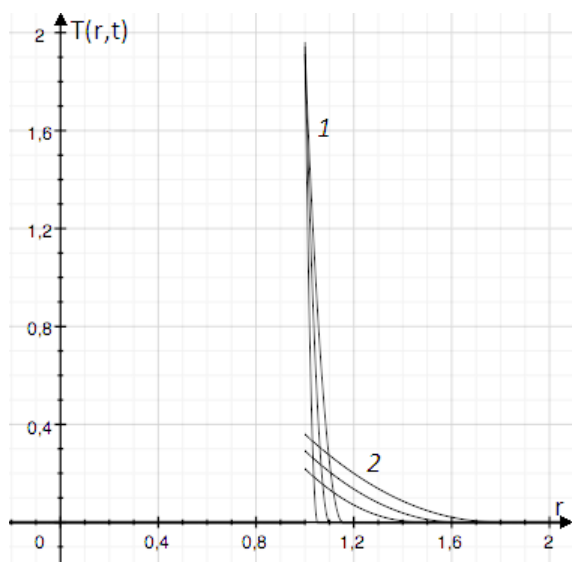


Рис. 2. Безразмерная температура для задачи нагрева дискового образца по границе внутреннего отверстия  $r = 1$  при  $K(T) = 1 - pT$ . Кривые 1 — соотношения (25) со знаком "+" и (26) при  $p = 1/2$ ; кривые 2 — соотношения (25) со знаком "-" и (27) при  $p = -1/2$ . Моменты безразмерного времени  $t = 0.03, t = 0.07, t = 0.1$ .

На графике видно, что в случае решения нелинейного уравнения теплопроводности происходит "запирание" температуры на нагреваемой поверхности, что в дальнейшем может привести к увеличению напряжений по сравнению с линейным случаем.

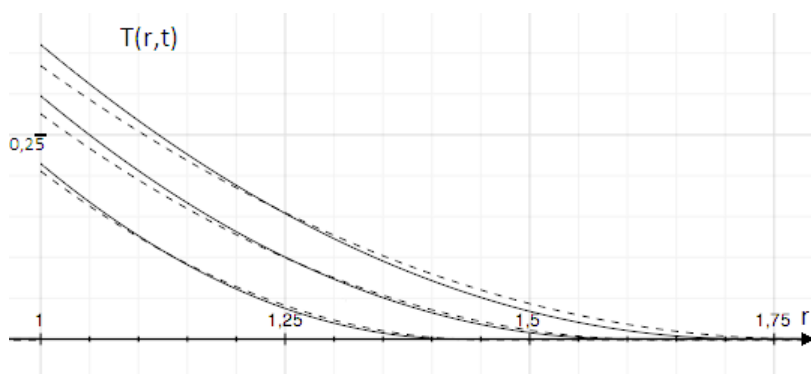


Рис. 3. Безразмерная температура для задачи нагрева дискового образца по границе внутреннего отверстия  $r = 1$  для коэффициента теплопроводности  $K(T) = 1 - pT$  при  $p < 0$  (штриховая линия, соотношения (25), (27)) и коэффициента теплопроводности  $K(T) = 1$  (сплошная линия). Моменты безразмерного времени  $t = 0.03, t = 0.07, t = 0.1$ .

Аналогичные результаты получены для случая высокотемпературного нагрева образца балочного типа.

Также с помощью модификации приближенного аналитического метода определения нестационарных температурных полей получены приближенные решения задач теплопроводности с различными видами нестационарного начального условия и с заданным тепловым потоком на температурном фронте.

Показано, что с помощью автомодельных переменных в некоторых случаях в рамках используемого приближенного метода возможно упростить вычисления.

Во **второй** главе решаются задачи определения упругих термонапряжений

элементов конструкций при высокотемпературном нагреве в приближении несвязанной термоупругости.

На основе развитого в первой главе диссертации приближенного метода решения уравнения теплопроводности получены аналитические решения задач термоупругости для балки и тонкого диска.

Задача, моделирующая высокотемпературный нагрев диска по границе внутреннего отверстия, решается в двух постановках: при отсутствии отверстия в диске и в случае, когда отверстие уже есть. Принимается, что распределение температуры в диске зависит только от радиальной координаты, а его поверхность свободна от механических нагрузок.

Здесь и далее  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{\sigma}$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  — размерные величины;  $u$ ,  $r$ ,  $\sigma$ ,  $T$ ,  $t$  — безразмерные.

Для случая диска с центральным круговым отверстием (как показано, например, в работе <sup>17</sup>), радиальное перемещение  $\tilde{u}$  будет являться решением уравнения

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d(\tilde{r}\tilde{u})}{d\tilde{r}} \right) = \alpha(1 + \nu) \frac{d\theta}{d\tilde{r}},$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{u}(\tilde{r}) = \frac{(1 + \nu)\alpha}{\tilde{r}} \int_a^{\tilde{r}} (\theta - \theta_0) \tilde{r} d\tilde{r} + C_1 \tilde{r} + \frac{C_2}{\tilde{r}}. \quad (28)$$

Деформации выражаются через радиальное перемещение следующим образом:

$$\varepsilon_{\tilde{r}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}}, \quad \varepsilon_{\tilde{\varphi}} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}}. \quad (29)$$

Также выполняется закон Гука для термоупругости

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{r}} = \frac{2G}{1 - \nu} (\tilde{\varepsilon}_{\tilde{r}} + \nu \tilde{\varepsilon}_{\tilde{\varphi}} - (1 + \nu) \alpha (\theta - \theta_0)), \quad (30)$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{\varphi}} = \frac{2G}{1 - \nu} (\tilde{\varepsilon}_{\tilde{\varphi}} + \nu \tilde{\varepsilon}_{\tilde{r}} - (1 + \nu) \alpha (\theta - \theta_0)), \quad (31)$$

откуда получаем зависимости для напряжений:

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{r}} = -\alpha E \frac{1}{\tilde{r}^2} \int_a^{\tilde{r}} (\theta - \theta_0) \tilde{r} d\tilde{r} + \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ C_1(1 + \nu) - C_2(1 - \nu) \frac{1}{\tilde{r}^2} \right], \quad (32)$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{\varphi}} = \alpha E \frac{1}{\tilde{r}^2} \int_a^{\tilde{r}} (\theta - \theta_0) \tilde{r} d\tilde{r} - \alpha E (\theta - \theta_0) + \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ C_1(1 + \nu) + C_2(1 - \nu) \frac{1}{\tilde{r}^2} \right], \quad (33)$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{r}\tilde{\varphi}} = 0.$$

Здесь  $\tilde{\sigma}_{\tilde{r}}$  — радиальное напряжение,  $\tilde{\sigma}_{\tilde{\varphi}}$  — окружное напряжение,  $\tilde{\sigma}_{\tilde{r}\tilde{\varphi}}$  — касательное напряжение.

<sup>17</sup>Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.

Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{r}}|_{\tilde{r}=a} = 0,$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{r}}|_{\tilde{r} \rightarrow \infty} = 0.$$

При учете этих граничных условий и вводя безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\tilde{\sigma}_z}{E\alpha(\theta_m - \theta_0)}, \quad T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0}, \quad x = \frac{\xi}{h}, \quad y = \frac{\beta}{h}, \quad z = \frac{\zeta}{h}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\tilde{\varepsilon}_z}{\alpha(\theta_m - \theta_0)}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\alpha(\theta_m - \theta_0)}, \quad \kappa_0 = \frac{\tilde{\kappa}_0 h}{\alpha(\theta_m - \theta_0)}, \end{aligned} \quad (34)$$

при упругом поведении материала получаем

$$\sigma_r = -\frac{1}{r^2} \int_1^r T r dr, \quad (35)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{r^2} \int_1^r T r dr - T. \quad (36)$$

При учете упруго-пластического поведения принимаем, что во время нагрева материал меняет свойства и в разогретой области могут проявиться свойства пластичности. Материал в этой области считаем идеально упругопластическим. Граница  $r = \lambda(t)$  разделяет пластическую и упругую зоны в диске, координата  $r = \lambda$  является неизвестной функцией времени.

Также считаем, что материал в пластической области подчиняется условию пластичности Треска:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma_T,$$

где  $\sigma_T$  — безразмерный предел текучести сильно нагретого материала;  $\sigma_1, \sigma_3$  — максимальное и минимальное главные безразмерные напряжения.

При учете результатов упругого решения (34)–(35), критерий Треска примет вид

$$|\sigma_\varphi| = \sigma_T. \quad (37)$$

Пусть также в пластической области выполняется уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0. \quad (38)$$

Решая (38) с учетом (37) и с граничным условием

$$\sigma_r|_{r=1} = 0, \quad (39)$$

получим распределение радиального напряжения в пластической области (индекс  $p$  соответствует области пластичности)

$$\sigma_r^p = \sigma_T \left(1 - \frac{1}{r}\right), \quad 1 \leq r < \lambda(t). \quad (40)$$



Таким образом, в упругой области выполняются соотношения типа (32)–(33) (индекс  $e$  соответствует области упругости)

$$\sigma_r^e = -\frac{1}{r^2} \int_{\lambda}^r T r \, dr + C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad (41)$$

$$\sigma_{\varphi}^e = \frac{1}{r^2} \int_{\lambda}^r T r \, dr - T + C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \quad (42)$$

а в области пластического течения, прилегающей к области нагрева, выполняются соотношения (37) и (40). Константы  $C_1, C_2$  находятся из условий сопряжения на границе пластической и упругой областей  $r = \lambda(t)$

$$\sigma_r^e = \sigma_T, \quad \sigma_r^p = \sigma_r^p \text{ при } r = \lambda.$$

Тогда напряжения в диске в упругопластическом случае будут описываться следующими соотношениями:

$$\sigma_r = \begin{cases} \sigma_T \left(1 - \frac{1}{r}\right), & 1 \leq r < \lambda \\ -\frac{1}{r^2} \int_{\lambda}^r T r \, dr + \sigma_T \left(1 - \frac{1}{r^2}\right), & \text{если } \lambda \leq r \leq l(t) \\ -\frac{1}{r^2} \int_{1}^{l(t)} T r \, dr + \sigma_T \left(1 - \frac{1}{r^2}\right), & \text{если } r > l(t), \end{cases} \quad (43)$$

$$\sigma_{\varphi} = \begin{cases} \sigma_T, & 1 \leq r < \lambda \\ -T + \frac{1}{r^2} \int_{\lambda}^r T r \, dr + \sigma_T \left(1 + \frac{1}{r^2}\right), & \text{если } \lambda \leq r \leq l(t) \\ \frac{1}{r^2} \int_{1}^{l(t)} T r \, dr + \sigma_T \left(1 + \frac{1}{r^2}\right), & \text{если } r > l(t). \end{cases} \quad (44)$$

На рис. 4 показано сравнение полученных полей напряжений при учете только упругих (35)–(36) (штриховая линия) и упругопластических (43), (44) (сплошная линия) свойств материала для одного момента безразмерного времени.

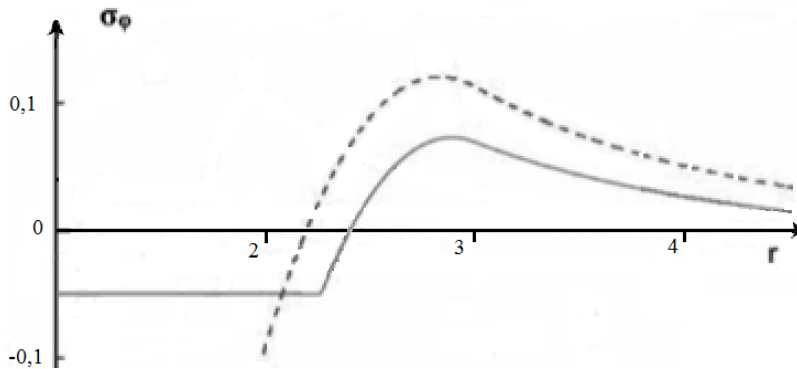


Рис. 4. Окружные напряжения при учете только упругих (штриховая линия) и упругопластических (сплошная линия) свойств материала для задачи высокотемпературного нагрева тонкого диска.

Сравнение упругого и упругопластического решений показывает, что окружные напряжения  $\sigma_\varphi$ , максимум которых достигается в области "холодного" материала, близкой к границе температурного фронта  $l(t)$ , могут превысить предельное значение и начнется процесс хрупкого разрушения. Учет пластичности в разогретой зоне приводит к уменьшению напряжений в диске, что сильно влияет на прочность образца.

Аналогичные вычисления были проведены для задачи высокотемпературного нагрева образца балочного типа. Для обеих модельных задач показано, что учет нелинейности теплофизических и механических свойств материала оказывает значительное влияние на распределение напряжений.

Также во второй главе построено приближенное решение задачи однократного импульсного воздействия на образец и получено аналитическое решение задачи термоупругости, имеющее хорошее качественное согласование с результатами экспериментов.

В **третьей** главе диссертации на основании полученных в предыдущих главах результатов проведено исследование процессов деформирования и разрушения элементов конструкций при высокотемпературном воздействии с учетом нелинейности теплофизических и механических свойств материала.

Процесс хрупкого разрушения изучается на основании идеи фронта разрушения, развитой в работах <sup>18</sup>, <sup>19</sup>, <sup>20</sup>.

В работе <sup>18</sup> отмечено, что в ряде случаев достижение максимальным растягивающим напряжением предела прочности может привести к образованию конечных, но малых областей разрушения, наличие которых не приводит к глобальному разрушению тела.

В работе <sup>20</sup> строится модель для математического описания деформирования и движения твердых горных пород при действии на них интенсивных нагрузок и в рамках этой модели рассматривается задача о действии взрыва сосредоточенного заряда в хрупкой горной породе.

В работе <sup>19</sup> рассмотрено квазистатическое деформирование и разрушение материалов при высокотемпературном воздействии. В качестве критерия разрушения использовалось условие достижения напряжениями своих критических значений. Дальнейшие расчеты напряженного состояния и роста трещин проводились в рамках предположения, что на вновь образующихся свободных поверхностях соответствующие элементы поля напряжений равны нулю, а на концах трещины выполняются условия критерия разрушения.

Критическое состояние, предшествующее фактическому разрушению с образованием трещин может быть описано в виде некоторого инвариантного соотношения, связывающего компоненты тензора напряжений (условия прочности). В общем случае условие прочности для изотропного материала запишется в виде

$$\Phi(I_1, I_2, I_3) \leq 0, \quad (45)$$

---

<sup>18</sup> Миркин Л.И., Шестериков С.А., Юмашев М.В., Юмашева М.А. Неустойчивость терморазрушения при стесненной деформации // Физико-химическая механика материалов. 2006. №6. С. 55–60.

<sup>19</sup> Бахарев М.С., Миркин Л.И., Шестериков С.А., Юмашева М.А. Структура и прочность материалов при лазерных воздействиях. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 224 с.

<sup>20</sup> Григорян С.С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // ПММ. 1967. Т. 31. №2. С. 643–669.

где  $I_1, I_2, I_3$  — некоторые независимые инварианты тензора напряжений (например, главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ).

Если напряженное состояние элемента таково, что в условии (45) имеет место неравенство, то будем считать состояние элемента прочным. При достижении равенства в (45) будет достигнут предел прочности в элементе и он разрушится — в нем возникнут трещины. Совокупность точек рассматриваемого объема образца, в которых достигнуто равенство (45) и которые в последующий момент окажутся разрушенными, образует границу между неразрушенной частью рассматриваемого элемента и разрушенной.

В рамках используемого подхода считаем, что равенство (45) выполняется на поверхности, отделяющей разрушенную часть элемента конструкций от неразрушенной, как предельное соотношение, вырабатывающееся при приближении к этой поверхности из неразрушенной области. За поверхностью разрушения образуется множество мелких трещин, поэтому разрушенный материал тоже можно рассматривать как сплошную среду и описывать его уравнениями механики сплошных сред.

Поверхность, разделяющая оба состояния (разрушенное и неразрушенное), называется фронтом разрушения.

Если свойства разрушенного и неразрушенного материалов известны, условия совместности на фронте разрушения (законы сохранения) вместе с равенством (45) образуют систему граничных соотношений, формулируемых на поверхности разрыва, достаточную для однозначного решения задачи в целом <sup>21</sup>.

Наибольший интерес с точки зрения анализа возможности появления разрушения представляет окружное напряжение, поскольку оно становится растягивающим. В этом случае простейшим естественным ограничением для изотропного материала будет

$$\sigma_\varphi \leq \sigma_p. \quad (46)$$

При достижении предела прочности на растяжение (равенства в условии (46)) в диске возникает зона "разрушения", размеры которой определяются с использованием модели, представленной в работах <sup>22, 23</sup>. В этой зоне выполняется критериальное условие  $\sigma_\varphi = 0$ , тогда как  $\sigma_r$  определяется из условия равновесия.

Из анализа соотношений для напряжений, полученных в предыдущей главе, следует, что максимум растягивающего напряжения  $\max \sigma_\varphi$  как функции безразмерной координаты достигается при условии  $r < l(t)$ . Абсолютный максимум безразмерного напряжения по переменным  $r$  и  $l(t)$  может быть определен из решения системы уравнений

$$\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial l} = 0,$$

откуда получаются два алгебраических уравнения для нахождения критических значений  $r$  и  $l(t)$ , при которых окружное напряжение имеет максимальное значение. Если в определенный момент времени, т.е. при определенном значении параметра  $l = l_p$ , напряжение  $\sigma_\varphi$  достигнет предела прочности  $\sigma_p$ , то происходит образование зоны

<sup>21</sup> Григорян С.С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // ПММ. 1967. Т. 31. №2. С. 643–669.

<sup>22</sup> Бахарев М.С., Миркин Л.И., Шестериков С.А., Юмашева М.А. Структура и прочность материалов при лазерных воздействиях. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 224 с.

<sup>23</sup> Миркин Л.И., Шестериков С.А., Юмашев М.В., Юмашева М.А. Неустойчивость терморазрушения при стесненной деформации. // Физико-химическая механика материалов. 2006. №6. С. 55–60.

”разрушения”, границы которой  $a(t)$  и  $b(t)$  определяются из условия сопряжения для напряжений, вводимых ниже. В работе <sup>24</sup> показано, что зона ”разрушения” развивается мгновенно, охватывая некоторую область. Поэтому весь образец разбивается на три области: первая (индекс 1), соответствующая  $1 < r < a(t)$  — сплошное тело с исходными характеристиками, вторая (индекс 2), соответствующая  $a(t) < r < b(t)$  — зона материала, удовлетворяющего условию  $\sigma_\varphi = 0$  и третья  $r > b(t)$  — сплошное тело с исходными характеристиками (индекс 3).

Согласно принятой модели в области разрушения  $a(t) < r < b(t)$  напряжения  $\sigma_r$  определяются решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{r} = 0, \quad (47)$$

которое получается из условия равновесия при  $\sigma_\varphi = 0$ . Тогда из (47) получим, что при  $a(t) < r < b(t)$

$$\sigma_r = \frac{C_1^{(2)}}{r}. \quad (48)$$

Радиальное перемещение  $u$  в области разрушения определим из первых соотношений закона Гука (30) и кинематических соотношений (29). Тогда при учете (48) получим

$$\frac{du}{dr} = T + \frac{C_1^{(2)}}{r},$$

откуда

$$u = \int_1^r T dr + C_1^{(2)} \ln r + C_2^{(2)}.$$

Таким образом, напряженное состояние диска определяется системой формул

$$\sigma_r^{(1)} = -\frac{1}{r^2} \int_1^r T r dr + C_1^{(1)} - \frac{C_2^{(1)}}{r^2},$$

$$\sigma_r^{(2)} = \frac{C_1^{(2)}}{r},$$

$$\sigma_r^{(3)} = -\frac{1}{r^2} \int_1^r T r dr + C_1^{(3)} - \frac{C_2^{(3)}}{r^2},$$

$$\sigma_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r^2} \int_1^r T r dr - T + C_1^{(1)} - \frac{C_2^{(1)}}{r^2},$$

$$\sigma_\varphi^{(2)} = 0,$$

<sup>24</sup>Бахарев М.С., Миркин Л.И., Шестериков С.А., Юмашева М.А. Структура и прочность материалов при лазерных воздействиях. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 224 с.

$$\sigma_{\varphi}^{(3)} = \frac{1}{r^2} \int_1^r T r \, dr - T + C_1^{(3)} - \frac{C_2^{(3)}}{r^2}.$$

Константы  $C_1^{(1)}$ ,  $C_2^{(1)}$ ,  $C_1^{(2)}$ ,  $C_2^{(2)}$ ,  $C_1^{(3)}$ ,  $C_2^{(3)}$  и функции времени  $a(t)$ ,  $b(t)$  находим из алгебраической системы граничных условий и условий сопряжения на границах областей 1, 2, 3 (диаметр диска считается много большим, чем диаметр внутреннего кругового отверстия):

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=1} = 0, \quad \sigma_r^{(3)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=a(t)} = \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=a(t)}, \quad \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=b(t)} = \sigma_r^{(3)} \Big|_{r=b(t)},$$

$$\sigma_{\varphi}^{(1)} \Big|_{r=a(t)} = \sigma_p, \quad \sigma_{\varphi}^{(3)} \Big|_{r=b(t)} = \sigma_p, \quad u^{(1)} \Big|_{r=a(t)} = u^{(2)} \Big|_{r=a(t)}, \quad u^{(2)} \Big|_{r=b(t)} = u^{(3)} \Big|_{r=b(t)}.$$

Результаты расчетов для окружных напряжений при учете упругопластического поведения материала с одновременным ростом зоны "разрушения" показаны на рис. 5. Для наглядности выбраны два момента времени: при  $t = 0.167$  и  $t = 0.24$  показано развитие зоны разрушения в случае  $K(T) = 1$ ; при  $t = 0.24$  (кривая 3) построено решение в случае  $K(T) = 1 - pT$ .

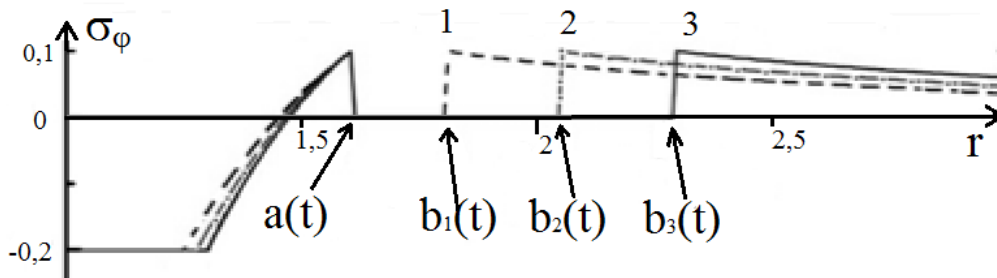


Рис. 5. Напряжения с учетом зоны "разрушения" (отрезки  $[a(t), b_i(t)]$ ) для задачи высокотемпературного нагрева тонкого диска. Моменты безразмерного времени  $t = 0.167$  (линия 1, линейная задача теплопроводности),  $t = 0.24$  (линии 2 — линейная задача и 3 — нелинейная задача теплопроводности);  $p = 1/10$ .

Проведенный анализ на простой модели высокотемпературного нагрева диска показывает, что учет нелинейности теплофизических свойств материала и учет пластичности в разогретой зоне приводит к уменьшению напряжений в образце, что сильно влияет на прочность.

В **четвертой главе** диссертации для рассмотренных выше задач предложены методы предупреждения термомеханических повреждений при лазерной обработке элементов конструкций:

- 1) с помощью обдува поверхности образца;
- 2) с помощью механического преднагружения диска приложением дополнительного давления.

В первом случае задача теплопроводности (и для образца балочного типа, и для диска) решается с учетом теплообмена на поверхности образца. Безразмерный коэффициент

теплообмена  $\eta$  считается постоянным. По полученному приближенному решению задачи теплопроводности определяются поля напряжений по формулам (35)–(36).

На рис. 6 показаны найденные поля напряжений для модели высокотемпературного нагрева образца балочного типа с учетом теплообмена на поверхности.

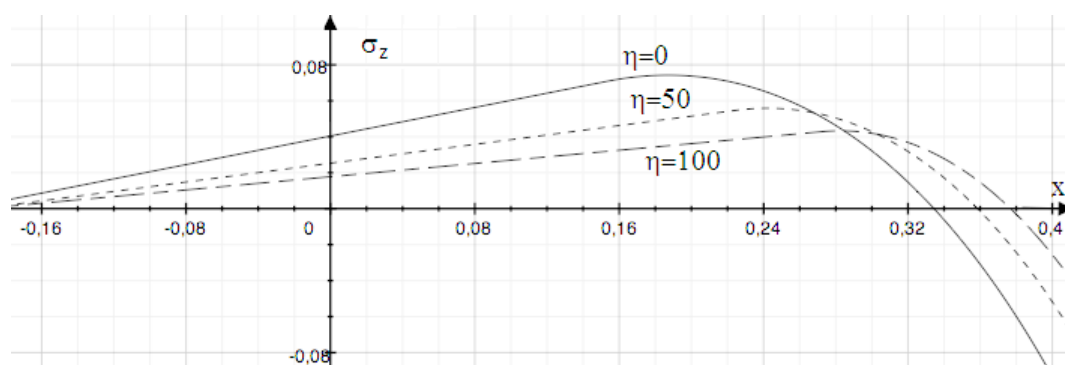


Рис. 6. Сравнение напряжений при лазерном воздействии с учетом теплообмена на поверхности образца балочного типа для одного момента безразмерного времени  $t = 0.02$  для значений  $\eta = 0$ ,  $\eta = 50$ ,  $\eta = 100$ .

Увеличение коэффициента теплообмена  $\eta$  влечет за собой уменьшение градиентов температуры, что влияет на максимальные растягивающие напряжения. Таким образом при высокотемпературной обработке элементов конструкций можно уменьшить нежелательные термонапряжения с помощью обдува образца.

Во втором случае показано, что для модели высокотемпературного нагрева тонкого диска возможно существенное уменьшение максимальных напряжений с помощью дополнительного преднагружения. Для температурной задачи в этом случае ставились граничные условия второго рода.

Влияние предложенных методов может быть значительным, но конкретные рекомендации можно дать только в результате проведения соответствующих экспериментов.

В **заклучении** диссертации сформулированы основные результаты и направление дальнейших исследований, заключающиеся в следующем:

модифицирован аналитический приближенный метод нахождения нестационарных температурных полей на случай нелинейного уравнения теплопроводности для граничных условий первого и второго рода (рассмотрены монотонно возрастающие, монотонно убывающие и немонотонные варианты зависимости коэффициента теплопроводности от температуры);

определены аналитические выражения для полей напряжений (с использованием найденных распределений температуры) в случаях упругого и упругопластического материалов и проведен анализ влияния нелинейных теплофизических свойств материала на разрушение образца;

исследовано влияние понижения температуры с помощью теплообмена на напряженно-деформированное состояние при лазерной обработке элементов конструкций (балки, стержни, полосы, диски).

В дальнейшем предполагается с помощью двумерной модели высокотемпературного

нагрева ( $T = T(x, y, t)$ ) более точно учитывать свойства пластичности и вязкости материала в разогретой области и локальность воздействия лазерного луча на образец.

**Благодарности.** Автор искренне благодарен своему научному руководителю, кандидату физико-математических наук, доценту кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета Юмашеву Михаилу Владиславовичу за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе. Автор также признателен за серьезные и плодотворные обсуждения проведенных исследований на семинарах механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, НИИ Механики МГУ имени М.В.Ломоносова и МГТУ им. Н.Э. Баумана.

## **Публикации автора по теме диссертации**

### **Статьи в научных журналах из перечня ВАК**

[1] Беднова В.Б. Об одном методе подавления термомеханических повреждений при лазерной обработке элементов конструкций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. №6. С. 62–66.

[2] Юмашев М. В., Беднова В.Б., Вергазов М.М., Юмашева М. А. Разрушение хрупких материалов в условиях локального воздействия на поверхность энергетическим потоком // Машиностроение и инженерное образование. 2014. №4. С. 52–58.

[3] Беднова В.Б. Об одном методе приближенного решения нелинейного уравнения теплопроводности // Чебышевский сб.. 2016. Т. 17. Вып. 4. С. 11–22.

### **Статьи в сборниках трудов научных конференций и тезисы докладов**

[4] Беднова В.Б. Приближенный метод определения температурного поля при быстром нагреве образца в двумерной постановке // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2012» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, К.К. Андреев, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2012.

[5] Беднова В.Б. Приближенный метод определения температурного поля при быстром локальном нагреве образца // Труды конференции-конкурса молодых ученых. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2013. С. 78–83.

[6] Беднова В.Б. Приближенный метод определения температурного поля при лазерном воздействии с учетом физической нелинейности и локальности нагрева // Труды конференции-конкурса молодых ученых. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2014. С. 84–88.

[7] Беднова В.Б. Методы подавления термомеханических повреждений в элементах конструкций в условиях технологической обработки лазером // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Том 1. Материалы X Международного симпозиума, посвященного 70-летию Победы. – М.:РАН, 2015. С. 26–32.