Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Беднова Вероника Борисовна

Исследование напряженно-деформированного состояния и разрушения элементов конструкций при высокотемпературном нагреве с учетом нелинейности термомеханических свойств материала

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент Юмашев Михаил Владиславович

Москва 2017

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования и история вопроса.

Во многих технологических процессах элементы конструкций подвергаются интенсивной локальной термообработке. В таких процессах характерной особенностью является то, что локальные области материала оказываются разогретыми до температуры плавления, в то время как остальная бóльшая часть тела остается практически холодной, то есть имеет исходную начальную температуру. Примерами таких процессов являются лазерная обработка поверхности трущихся деталей и пробивание технологических отверстий в керамических подложках микросхем.

Неравномерность прогрева в процессе лазерной обработки может приводить к значительным градиентам температуры и, как следствие, к возникновению температурных напряжений, которые могут превысить предел прочности материала.

В диссертации исследуется напряженно-деформированное состояние элементов конструкций, вызванное высокотемпературным нагревом. Эти исследования имеют отношение к практически важным задачам, описанным выше, и проводятся в рамках квазистатики. Обоснованность такого подхода следует из результатов многочисленных экспериментальных исследований по лазерному воздействию на металлы и керамические материалы (работы [9], [10], [49], [71]).

Актуальность задачи определяется проблемой возможного внутреннего растрескивания материала при возникновении значительных температурных градиентов в области, прилегающей к нагреваемой поверхности в процессе лазерного воздействия.

В НИИ Механики МГУ имени М.В.Ломоносова в течение многих лет проводились эксперименты по изучению термических напряжений в образцах балочного типа из карбида циркония при воздействии лучом оптического квантового генератора (ОКГ) [9], [10]. Для эксперимента были взяты образцы из карбида циркония ($86\,\%\,\mathrm{Zr}, 11\,\%\,\mathrm{C}$, модуль упругости $E = 4 \cdot 10^5\,\text{МПа}$, коэффициент линейного расширения $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-6}\,\text{град}^{-1}$, температура плавления $\theta_m = 3000°C$) размером $0.03 \times 0.0042 \times 0.0017$ м. Облучение образцов проводили на ОКГ ГОС-30М в режиме свободной генерации с длительностью импульса 10^{-3} с, фокусное расстояние оптической системы составляло $0,1$ м.

Результаты экспериментов показали определенную временную задержку в возникновении макротрещин в образцах, подверженных лазерному воздействию. При воздействии лазерного импульса длительностью 10^{-3} с разрушение происходило за время, порядок которого равен или превышает в два раза порядок времени действия лазера. Поскольку время прохода волны составляет порядка 10^{-6} с, а характерные времена разрушения порядка $10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}$ с, то понятно, что наблюдаемые в эксперименте процессы разрушения не связаны с динамическими эффектами, а связаны с теплопроводностью и квазистатическими термонапряжениями. Такое поведение образцов говорит о высокой инерционности источника разрушающих напряжений. В работе [49] отмечено, что задержка разрушения во времени указывает на его тепловой характер. Также в образцах после эксперимента были видны системы трещин вдоль радиального направления в зонах максимального температурного градиента. В задачах пробивания отверстий с помощью лазера отверстие удается сделать нужного диаметра, однако потом оказывается, что в области, отстоящей от отверстия на несколько характерных размеров, возникает микротрещина или даже макротрещина, то есть несущая способность материала уменьшается.

Для того, чтобы количественно оценить условия разрушения твердых тел при лазерном воздействии и провести анализ развития зон разрушения, необходимо знать распределение температур по всему образцу. Решению задач теплопроводности посвящены работы [7], [17], [29].

Известно, что классическое уравнение притока тепла при описании процессов теплопередачи механизмом теплопроводности дает не соответствующую действительности бесконечную скорость распространения возмущений. Кроме того, во многих прикладных задачах нет смысла гнаться за точностью решения параболического уравнения в частных производных, так как граничные условия порой задаются со значительной погрешностью, которая может достигать порядка искомых величин. Поэтому в реальных процессах актуальным может являться построение приближенных решений аналитического вида, удовлетворяющих некоторым интегральным энергетическим условиям.

К тому же, если решение было получено в численном виде, последующее исследование температурных напряжений также должно быть проведено численным способом. Аналитический вид решения задачи теплопроводности позволяет получить аналитические выражения для температурных напряжений и в дальнейшем облегчает анализ результатов.

Приближенные методы решения задач теплопроводности наиболее полно изложены в работе [29], где в большинстве случаев используется то обстоятельство, что точное решение уравнения теплопроводности хорошо аппроксимируется степенными функциями или многочленами, содержащими три или четыре слагаемых.

В работе [40] рассматриваются приближенные методы для нестационарной задачи теплопроводности.

В работе [5] приводятся доказательства теорем о существовании и единственности аналитических решений нелинейного уравнения теплопроводности, описывающих выравнивание температуры по изначально неравномерно прогретому телу.

В работе [12] исследуется асимптотическое поведение решений параболического уравнения типа нелинейной теплопроводности с зависящим от температуры T коэффициентом теплопроводности, удовлетворяющим условиям $K(T) > 0$ при $T > 0$, причем $K(0) = 0$. Заданы начальное условие $T(x, 0) = T_0(x) \geq 0$ и граничное условие $T(0, t) = T_1(t) > 0$, причем температура изменяется в режиме с обострением (то есть на границе температура обращается в бесконечность за конечный промежуток времени). Проведено исследование эффекта локализации тепла в средах с различными зависимостями коэффициента теплопроводности от температуры. Результаты работы показывают сильное влияние нелинейности на процесс распространения тепла.

В работе [39] доказаны существование и единственность обобщенного решения уравнения теплопроводности и доказана теорема о конечной скорости распространения возмущений.

В работе [16] рассматривается задача фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений.

В работе [58] предложен приближенный метод оценки нестационарных температурных полей для линейного уравнения теплопроводности и проведено исследование температурного поля в цилиндре, на поверхности которого задано распределение температуры.

В диссертации температурные поля оцениваются приближенным методом (работы [27], [58], [63], [80]), основанным на идее существования конечного температурного фронта и гипотезе "плоских сечений". В рамках гипотезы предполагается, что тепловой поток направлен вглубь тела перпендикулярно его поверхности. Такой подход вполне оправдан, когда наблюдается практически одномерное распространение тепла и когда промежутки времени достаточно малы для того, чтобы успели развиться потоки тепла в поперечных направлениях (работы [3], [27]). При высокотемпературной обработке образца процессы разрушения происходят как раз в таких малых промежутках времени (работы [9], [10]).

Температурный фронт физически можно интерпретировать как линию уровня температуры, значение которой в условиях эксперимента практически неотличимо от начальной температуры [58], [63], [80]. Такая граница существует, потому что любой измерительный прибор имеет ограниченную точность измерения. Тепловой фронт как аналитическая функция рассматривается в работе [5]. Граница температурного фронта (практически это изотерма с температурой, "максимально" близкой к температуре окружающей среды) как функция времени может быть определена из интегрального уравнения теплопроводности.

Применяемый метод активно используется в уравнениях фильтрации [3], диффузии [27], [28] и теплопроводности [58]. В работе [63] найдено приближенное решение нестационарного одномерного линейного уравнения теплопроводности для граничных условий первого рода и обоснована приемлемость метода для практического использования.

Предполагается, что температурные поля не зависят от вызываемых ими деформаций. Строго говоря, при деформировании выделяется или поглощается теплота, которая влияет на распределение температуры. Это влияние очень мало [69], [72] и может иметь значение, если изменение температуры вызывается не внешними источниками тепла, а самими деформациями.

В работе [78] получено приближенное решение квазидвумерного нестационарного уравнения теплопроводности.

В работе [23] температурная задача решается в рамках квазистатики.

В работе [27] исследовалось влияние диффузионных процессов на ползучесть и длительную прочность металлов. Метод исследования основывался на введении понятия диффузионного фронта, разделяющего невозмущенную и возмущенную части образца. Задачи теплопроводности и диффузии имеют аналогичные постановки, поэтому предложенный в [27] метод справедлив и для задач диссертации.

В работе [3] дается определение понятия области влияния в фильтрационных задачах, которая в точности аналогична пограничному слою в гидродинамике вязкой жидкости (в фильтрационных задачах время играет ту же роль, что и продольная координата в задачах пограничного слоя). Делается предположение о конечной скорости распространения возмущений. В этой работе распределение давления ищется в виде ряда, в котором переменным является отношение пространственной координаты и перемещающейся со временем границы области влияния. Коэффициенты этого ряда определялись из граничных условий на поверхности тела и на границе области влияния.

Тепловой фронт предполагается конечным и в работе [64]. Для определения температуры как функции времени и координат решаются аналоги уравнений Лагранжа [6]. Отличием метода в этой работе является явная зависимость скорости теплового фронта от величины теплового потока на поверхности тела.

В работах [8], [13] решение дифференциального уравнения также ищется в виде ряда, коэффициенты которого находятся из интегрального условия удовлетворения уравнению, умноженного на производную искомой функции по неизвестным параметрам.

Для задач быстрого нагрева в работе [59] была развита модель для описания поведения твердого тела до и после начала процесса разрушения. Также в этой работе было рассмотрено возникновение пластических зон в образце.

Основой метода описания процесса разрушения образца при высокотемпературном нагреве являются классические соотношения механики сплошной среды [48]. При этом критерии разрушения применяются для среды без заранее введенных дефектов. Используется метод введения понятия фронта разрушения [14]. В этой работе строится модель для математического описания деформирования и движения твердых горных пород при действии на них интенсивных нагрузок и в рамках этой модели рассматривается задача о действии взрыва сосредоточенного заряда в хрупкой горной породе.

В работе [2] было сделано предположение, что возникновение дефектов в различных материалах может быть обусловлено остаточными напряжениями. В этой работе исследовалась зависимость характерного размера области разрушения в стекле марки КВ (стекло кварцевое оптическое, прозрачное в видимой области спектра, с заметными полосами поглощения в интервалах длин волн $170 - 250$ нм и $2600 - 2800$ нм) от введенной лазерной энергии, а также характер развития этой области в процессе действия импульса. Источником излучения был рубиновый лазер, генерирующий моноимпульс длительностью 12 нс с энергией 5 Дж. В результате воздействия в центре образца была обнаружена веретенообразная область мелких трещин на расстоянии нескольких микрон друг от друга. Размеры этой области почти совпадали с размерами фокальной линзы.

Дальнейшие эксперименты показали, что, начиная с некоторого критического значения энергии лазерного импульса по мере его увеличения рост области разрушения замедляется, а затем и вовсе прекращается. Основным следствием увеличения вводимой энергии является лишь увеличение размера области разрушения. Возможной причиной возникновения этой области может оказаться поле напряжений, появляющееся из-за большого температурного градиента.

В работе [18] в качестве причины разрушения указывается объемное расширение материала.

Также существуют работы, в которых изучается одновременное действие температуры и механического воздействия.

Двухкритериальный подход обсуждается в работах [43], [44] и [45]. Впервые он формулируется в работе [32] и получает дальнейшее развитие в работах [33], [36], [38].

В работе [20] при решении термоупругой задачи учитывалось наличие теплоотдачи с боковых поверхностей пластин.

В работе [53] рассматривается лавинообразное разрушение образца при сравнительно небольших нагрузках. Такая особенность разрушения обусловлена перенапряженным состоянием образца.

В работе [52] с помощью методов фотоупругости установлено, что концентрация полей у разреза в пластине из эпоксидной смолы увеличивается по мере нагрева. Пластина подвергалась температурному воздействию в направлении, перпендикулярном направлению разреза при одноосном растяжении. При достижении предельной комбинированной нагрузки на образец разрез увеличивается и образец разрушается. Также возможен вариант упрочнения при правильно подобранных термической и механической нагрузках.

В работе [26] показано, что сжатие керамического образца при нагреве повышает его прочность.

Одной из наиболее ранних работ по определению температурных напряжений в диске является работа [70]. Задачи о цилиндрических оболочках рассмотрены в работе [68].

В работе [71] описывается экспериментальное исследование цилиндрических образцов, подвергнутых термическому удару. В равномерно нагретый стальной полый толстостенный цилиндр подается холодная жидкость; отмечено, что в результате возникает трещина, занимающая от трети до половины толщины цилиндра. Теоретическое подтверждение экспериментальных результатов было получено и в аналитических моделях [58] и численно, например, в задаче моделирования кинетики разрушения при нагреве композитных оболочек [15].

В работе [80] с помощью приближенного решения уравнения теплопроводности показана возможность возникновения зон макроразрушения при высокотемпературном нагреве диска.

Процесс лазерной технологической обработки элементов конструкций и способы подавления нежелательных температурных напряжений определяют набор внешних параметров: температура и поток на нагреваемой поверхности, параметр материала при учете его нелинейных свойств, коэффициент теплообмена, нагрузку при дополнительном механическом преднагружении, пределы прочности и текучести материала. В связи с таким большим количеством параметров аналитический подход весьма удобен для описания напряженно-деформированного состояния и разрушения в элементах конструкций при высокотемпературном нагреве.

Цели работы: а) исследовать влияние нелинейности теплофизических и механических свойств материала на напряженно-деформированное состояние и разрушение элементов конструкций при высокотемпературном нагреве; б) разработать возможные способы уменьшения термомеханических напряжений при высокотемпературном нагреве.

Для достижения этих целей были поставлены следующие задачи:

1) модифицировать аналитический приближенный метод нахождения нестационарных температурных полей на случаи граничных условий первого и второго рода для различных видов зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры;

2) получить аналитические выражения для полей напряжений (с использованием найденных распределений температуры) в случаях упругого и упругопластического материалов и провести анализ влияния нелинейности теплофизических и механических свойств материала на разрушение образца;

3) исследовать методы подавления термомеханических повреждений при высокотемпературной обработке элементов конструкций.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) впервые получены аналитические приближенные решения нелинейного уравнения теплопроводности с граничными условиями второго рода для монотонных и немонотонной зависимостей коэффициента теплопроводности от

температуры;

2) показано существенное влияние нелинейности теплофизических свойств материала на напряженно-деформированное состояние и разрушение элементов конструкций при высокотемпературном нагреве;

3) исследовано влияние дополнительного теплообмена на возможность обеспечения высокотемпературной обработки, не приводящей к нарушению сплошности элементов конструкций (балки, стержни, полосы, диски).

Личный вклад. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты могут быть использованы для решения ряда задач по лазерной обработке материалов и оценки прочности элементов конструкций при возникновении больших градиентов температур.

Методология и методы исследования. Исследования основаны на принципах классической механики, законов сохранения энергии, импульса и законов термодинамики. В рамках этих законов на основе приближенных и асимптотических методов строятся приближенные решения задач.

Положения, выносимые на защиту.

1. Модифицирован аналитический приближенный метод нахождения нестационарных температурных полей на случай нелинейного уравнения теплопроводности для граничных условий первого и второго рода. Рассмотрены монотонно возрастающие, монотонно убывающие и немонотонный варианты зависимости коэффициента теплопроводности от температуры.

2. Определены аналитические выражения для полей напряжений (с использованием найденных распределений температуры) в случаях упругого и упругопластического материалов и проведен анализ влияния нелинейных теплофизических свойств материала на разрушение образца.

3. Исследовано влияние понижения температуры с помощью теплообмена на напряженно-деформированное состояние при лазерной обработке элементов конструкций (балки, стержни, полосы, диски).

Степень достоверности результатов диссертации обусловлена использованием классических методов механики сплошной среды и теории дифференциальных уравнений, применением математически обоснованных методов решения поставленных задач, сравнением полученного приближенного решения с точным.

На протяжении нескольких лет в НИИ Механики МГУ имени М.В.Ломоносова проводились эксперименты по лазерному воздействию на образцы из карбида циркония. Результаты этих исследований хорошо коррелируют с результатами работы.

Апробация диссертации. Основные результаты, полученные в диссертации, неоднократно докладывались и обсуждались на семинарах

- механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова:

1) научно-исследовательский семинар кафедры газовой и волновой динамики под руководством академика Нигматулина Р.И. (2011-2016, неоднократно);

2) научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности под руководством члена-корреспондента РАН Ломакина Е.В. (2016);

3) научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости под руководством профессора Георгиевского Д.В. (2016);

4) научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов (2016);

- НИИ Механики МГУ имени М.В.Ломоносова:

1) научно-исследовательский семинар под руководством профессора Локощенко А.М. (2016);

2) научно-исследовательский семинар под руководством профессора Васина Р.А. (2017);

- МГТУ им. Н.Э. Баумана:

научно-методический семинар под руководством профессора Ванько В.И., профессора Феоктистова В.В. и доцента Марчевского И.К. (2016)

и следующих конференциях:

- Конференция-конкурс молодых ученых НИИ Механики МГУ имени М.В.Ломоносова (2012, 2013);

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012»;

- X Международный симпозиум по фундаментальным и прикладным проблемам науки, посвященный 70-летию Победы (2015).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных работах [74] – [80], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

В совместной работе [80] Юмашеву М.В. принадлежит постановка задачи разрушения, Вергазову М.М. принадлежит обработка экспериментальных данных, Юмашевой М.А. принадлежит базовая постановка задачи термоупругости в квазистатическом приближении.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 86 наименований.

В **первой главе** модифицируется приближенный метод определения температурных полей, основаный на идее температурного фронта, которая многократно использовалась Баренблаттом Г.И., Био М.А., Локощенко А.М., Шестериковым С.А., Юмашевым М.В. и другими авторами при решении задач фильтрации, диффузии и теплопроводности.

Метод впервые применен к нелинейному уравнению теплопроводности с различными типами зависимости коэффициента теплопроводности от температуры (монотонно возрастающие, монотонно убывающие, немонотонный варианты зависимостей) и граничным условиям первого и второго рода.

Проведено сравнение полученных приближенных решений линейных задач теплопроводности с точными решениями для граничных условий первого и второго рода. Для нелинейных задач теплопроводности с граничными условиями второго рода верификация метода проводилась с помощью уравнения теплового баланса.

Рассмотрена классическая зависимость $K(T) = T^{\sigma}$ коэффициента теплопроводности от температуры, которая исследовалась в работах Галактионова В.А., Курдюмова С.П., Калашникова А.С., Михайлова А.П., Олейник О.А., Самарского А.А.

Получены приближенные решения нелинейных задач теплопроводности, когда зависимость коэффициента теплопроводности от температуры описывает реальное поведение материалов при высокотемпературном воздействии. В частности, полученные решения описывают поведение карбида циркония.

Получены приближенные решения задач теплопроводности с различными видами нестационарного начального условия и с заданным тепловым потоком на температурном фронте.

Показано, что с помощью автомодельных переменных в некоторых случаях в рамках приближенного метода определения нестационарных температурных полей возможно упростить вычисления.

Во **второй главе** рассмотрены задачи определения упругих термонапряжений элементов конструкций при высокотемпературном нагреве в приближении несвязанной термоупругости.

На основе развитого в первой главе диссертации приближенного метода решения уравнения теплопроводности получены аналитические решения задач термоупругости для балки и тонкого диска.

Построено приближенное решение задачи однократного импульсного воздействия на образец и получено аналитическое решение задачи термоупругости, имеющее хорошее качественное согласование с результатами экспериментов.

В рамках идеально-пластического рассмотрения изучена возможность пластического течения материала в сильно прогретых областях элементов конструкций.

Показано, что учет нелинейности теплофизических и механических свойств материала оказывает значительное влияние на распределение напряжений.

В **третьей главе** на основании полученных в предыдущих главах результатов проведено исследование процессов деформирования и разрушения элементов конструкций при высокотемпературном воздействии с учетом нелинейности теплофизических и механических свойств материала.

Процесс разрушения рассматривался исходя из идеи фронта разрушения, используемой в работах Бахарева М.С., Григоряна С.С., Миркина Л.И., Юмашевой М.А.

Исследовано влияние нелинейности теплофизических и механических свойств материала на образование и развитие зон разрушения.

В **четвертой главе** рассмотрены способы уменьшения температурных напряжений при обработке элементов конструкций лазерным лучом.

Исследованы два способа: обдув поверхности образца теплопроводным носителем и механическое преднагружение.

Расчеты проведены для задачи нагрева образца балочного типа по боковой поверхности и тонкого диска по центральной круговой области.

Показана эффективность предложенных методов и указано на необходимость проведения экспериментов для внедрения этих методов на практике.

В **заключении** диссертации сформулированы основные результаты и направление дальнейших исследований.

Общий **объем** диссертации — 109 страниц с 31 рисунком. Библиография включает 80 наименований.

Глава 1. Аналитический приближенный метод решения граничных задач для нестационарного нелинейного уравнения теплопроводности

§1.1. Уравнение теплопроводности и физические параметры задачи

Для широкого класса задач вопросы передачи тепла к объему сплошной среды за счет неравномерности распределения температуры в теле определяются теплопроводностью. В этом случае [50] количество тепла, поступающее к бесконечно малому объему $\mathrm{d}V$ за время $\mathrm{d}\tau$, равно $\mathrm{d}Q^{(e)} = -\mathrm{div}\vec{q}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau$, а к единице массы среды равно $\mathrm{d}q^{(e)} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\vec{q}\mathrm{d}\tau$, где ρ — плотность вещества. Как показывает опыт [62], для многих сред для вектора потока тепла $\vec{q}$ выполняется закон теплопроводности Фурье $\vec{q} = -\varkappa(\theta)\mathrm{grad}\theta$, где $\varkappa$ —коэффициент теплопроводности, а θ — температура.

Уравнение притока тепла (уравнение внутренней энергии) в дифференциальной форме выводится из дифференциального уравнения энергии и дифференциального уравнения живых сил (уравнения кинетической энергии) и при отсутствии добавочных притоков энергии имеет вид $\mathrm{d}U = \frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A^{(i)} + \mathrm{d}q$. Здесь U — плотность внутренней энергии, $\frac{1}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}A^{(i)} = -\frac{1}{\rho}p^{ij}\nabla_j v_i \mathrm{d}\tau$ — плотность внутренней работы внутренних поверхностных сил за время $\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}q = \mathrm{d}q_m - \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\vec{q}\mathrm{d}\tau$ — приток тепла к единице массы за время $\mathrm{d}\tau$.

При условиях, что

1) среда находится в покое ($\vec{v} = 0$),

2) массовый приток тепла отсутствует ($\mathrm{d}q_m = 0$),

3) передача тепла происходит только за счет теплопроводности ($\mathrm{d}q = -\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\vec{q}\mathrm{d}\tau$) и

4) выполнен закон Фурье,

получим окончательный вид уравнения притока тепла в форме теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \mathrm{div}\left(\varkappa(\theta)\mathrm{grad}\theta\right).$$

Характерные значения основных физических величин [9], [54] для карбида циркония:

$$\begin{array}{l} \varkappa = 53\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}\cdot\text{с}\cdot\text{К}};\ c = 0.32\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}};\ \rho = 6370\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\ E = 412\ \text{ГПа}; \\ \alpha = 7.01\cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{К}};\ \theta_m = 3400^\circ\text{C};\ \theta_0 = 20^\circ\text{C}; \sigma_\text{В} = 300\ \text{МПа}, \end{array} \tag{1.1}$$

где c — удельная теплоемкость, E — модуль Юнга, α — коэффициент теплового расширения, θ_m — температура плавления, θ_0 — температура окружающей среды, σ_B — предел прочности.

На границе тела Γ могут быть заданы:

1) температура $\theta_\Gamma = F(P,\tau)$, где $P \in \Gamma$, τ — время;

2) поток тепла $-\varkappa\frac{\partial\theta}{\partial\vec{n}} = \Phi(P,\tau)$, где $\vec{n}$ — вектор внешней нормали Γ;

3) теплообмен по закону Ньютона $\varkappa\frac{\partial\theta}{\partial\vec{n}} = H_f(\theta-\theta_0)$, где H_f — коэффициент теплоотдачи.

В работах [22], [25] отмечено, что условие теплообмена по Ньютону, когда задана линейная комбинация температуры и потока, справедливо только при малых отличиях температур среды и поверхности тела. При этом коэффициент теплоотдачи известен только для некоторых случаев обтекания цилиндра или плоской стенки.

В случае изотропного тела с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры, в одномерном случае в декартовой системе координат уравнение теплопроводности (здесь ξ — координата) имеет вид

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\varkappa(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right).$$

Введем безразмерные переменные (здесь h — характерный размер задачи): $x = \frac{\xi}{h}$ — безразмерная координата, $t = \frac{\tau K_0}{\rho c h^2}$ — безразмерное время (число Фурье), $T = \frac{\theta-\theta_0}{\theta_m-\theta_0}$ — безразмерная температура, $\eta = \frac{hH_f}{\varkappa}$ — безразмерный коэффициент теплоотдачи (число Био), $K = \frac{\varkappa}{K_0}$ — безразмерный коэффициент теплопроводности, $T_\Gamma = \frac{F-\theta_0}{\theta_m-\theta_0}$ — безразмерная температура на границе; $q_\Gamma = \frac{\Phi h}{\varkappa(\theta_m-\theta_0)}$ — безразмерный поток на границе.

В декартовых координатах одномерное уравнение теплопроводности в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{1.2}$$

В работе [17] показано, как легко можно провести преобразование к другим системам ортогональных координат.

Для решения задачи по высокотемпературному воздействию на тонкий диск актуальными является система цилиндрических координат. В этой системе

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi$$

и уравнение, определяющее длину элементарной дуги, имеет вид

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2.$$

Одномерное уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат в безразмерной форме принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(K(T)r\frac{\partial T}{\partial r}\right). \tag{1.3}$$

В дальнейшем для удобства восприятия будем использовать следующее обозначение для частной производной по времени или координате в безразмерной форме: $\frac{\partial T}{\partial t} = T_t$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T_{xx}$ и т. п., то есть уравнения (1.2) и (1.3) запишутся соответственно в виде

$$T_t = (K(T)T_x)_x$$

и

$$T_t = \frac{1}{r}\left(K(T)rT_r\right)_r.$$

§1.2. Приближенные методы определения нестационарных температурных полей Био М.А., Баренблатта Г.И., Шестерикова С.А.

1. Рассмотрим приближенный метод Био М.А.

В работах [65], [66] и [67] главной идеей, на которой строится приближенный метод, является то, что линейное уравнение теплопроводности $T_t = T_{xx}$ может быть представлено в виде

$$T = -\frac{\partial q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Из этих соображений в качестве определяющего соотношения выбирается аналог уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial V}{\partial \beta_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}_i} = Q_i,$$

где

$$V = \frac{1}{2} \int\limits_0^{q_i} T^2 \,\mathrm{d}x,$$

$$D = \frac{1}{2} \int\limits_0^{q_i} \dot{q}^2 \,\mathrm{d}x,$$

— аналог диссипативной функции,

$$Q_i = \left(\frac{\partial q}{\partial \beta_i} \cdot T \right) \Bigg|_{x=0},$$

а q определяется из соотношения $-\dfrac{\partial q}{\partial x} = T$, где β_i и $\dot{\beta}_i$ — обобщенные координаты и скорости соответственно.

В том случае, если количество членов разложения для температуры превосходит число граничных условий, метод приводит к сложным вычислениям, и смысл построения эффективного простого приближенного решения теряется. Этот метод можно использовать для определения временной зависимости положения температурного фронта, когда задан конкретный вид зависимости температуры от базисных функций. Например, можно принять общий вид искомой функции в виде кубической параболы (q_{00} — заданный тепловой поток)

$$T\left(x,t\right)=\begin{cases}\dfrac{q_{00}l}{3}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)^{3}, & 0\leq x\leq l\\ 0, \qquad x>l.\end{cases}$$

Здесь неизвестной функцией является подвижная граница фронта $l(t)$, которая находится в виде

$$l=3\sqrt{t\left(1-\frac{9}{28q_{00}}\right)}.$$

Особенностью рассмотренного метода является явный характер зависимости скорости температурного фронта от величины теплового потока на границе тела.

2. Рассмотрим приближенный метод Баренблатта Г.И.

В работе [3] для решения линейного уравнения теплопроводности $T_t=T_{xx}$ с равными нулю температурой и тепловым потоком на температурном фронте $l=l(t)$ предлагается способ определения коэффициентов B_i в разложении

$$T=T_0\left(1+B_1x+B_2x^2+B_3x^3\right),$$

где T_0 — температура на нагреваемой поверхности.

Рассмотрим стационарные граничные условия на нагреваемой поверхности первого и второго рода:

$$T|_{x=0}=T_0,$$
$$T_x|_{x=0}=q_{00}.$$

Решение ищется в виде $T=\sum\limits_{i=0}^{n}A_i\varphi_i$, где φ_i — некоторые базисные функции, а A_i — функции времени.

Рассмотрим различные методы определения этих функций. Пусть $\varphi_i=\dfrac{x^i}{l^i}$, тогда распределение температуры ищется в виде

$$T\left(x,t\right)=\begin{cases}A_0+A_1\dfrac{x}{l}+...+A_n\dfrac{x^n}{l^n}, & 0\le x\le l\\ 0, \quad x>l.\end{cases}$$

В методе Баренблатта Г.И. рассматриваются граничные условия трех типов: α-условия, β-условия и γ-условия. Количество этих условий — N_α, N_β и N_γ соответственно. При этом, согласно [3], можно выбирать любое количество недостающих граничных условий в любой комбинации.

Для граничных условий первого рода выражение для температуры должно удовлетворять

$$\alpha\text{ -условиям на поверхности } \left.\frac{\partial^{2m}T}{\partial x^{2m}}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^m T_0}{\partial x^m}\right|_{x=0},$$

$$\beta\text{ -условиям на линии фронта } \left.\frac{\partial^k T}{\partial x^k}\right|_{x=l}=0, \tag{1.4}$$

$$\text{интегральным } \gamma\text{ -условиям } \int\limits_0^l\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{\partial T}{\partial t}\right)x^s\,\mathrm{d}x=0. \tag{1.5}$$

Для граничных условий второго рода выражение должно удовлетворять

$$\alpha\text{ -условиям на поверхности } \left.\frac{\partial^{2m+1}T}{\partial x^{2m+1}}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^m q_0}{\partial x^m}\right|_{x=0},$$

$$\beta\text{ -условиям на линии фронта } \left.\frac{\partial^k T}{\partial x^k}\right|_{x=l}=0, \tag{1.6}$$

$$\text{интегральным } \gamma\text{ -условиям } \int\limits_0^l\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{\partial T}{\partial t}\right)x^s\,\mathrm{d}x=0. \tag{1.7}$$

Как для первого, так и для второго рода $N_\alpha+N_\beta+N_\gamma=n+2$.

Рассмотрим сначала метод для $n=2$ и граничного условия первого рода. Т.к. $N_\alpha+N_\beta+N_\gamma=n+2=4$, для определения A_i и $l(t)$ воспользуемся, например, одним условием γ ($s=0$), одним условием α ($m=0$), двумя условиями β ($k=0,1$). В итоге получаем:

$$T\left(x,t\right)=\begin{cases}T_0\left(1-\dfrac{x}{l}\right)^2, & 0\le x\le l\\ 0, & x>l,\end{cases}$$

$$l=\sqrt{12t}.$$

Для граничного условия второго рода аналогично получаем

$$T\left(x,t\right)=\begin{cases}\dfrac{q_{00}l}{2}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)^2, & 0\le x\le l\\ 0, & x>l,\end{cases}$$

$$l=\sqrt{6t}.$$

При $n=3$ для граничного условия первого рода $N_\alpha+N_\beta+N_\gamma=n+2=5$, для определения A_i и $l(t)$ воспользуемся одним условием γ $(s=0)$, одним условием α $(m=0)$, двумя условиями β $(k=0,1)$.

Возникает необходимость выбора еще одного определяющего соотношения. В качестве первого варианта возьмем еще одно соотношение α $(m=1)$. Тогда

$$T\left(x,t\right)=\begin{cases}T_0\left(1-\dfrac{3}{2}\dfrac{x}{l}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{l}\right)^2\right), & 0\le x\le l\\ 0, & x>l.\end{cases}$$

Если же воспользоваться еще одним условием β $(k=2)$, то

$$T\left(x,t\right)=\begin{cases}T_0\left(1-\dfrac{x}{l}\right)^3, & 0\le x\le l\\ 0, & x>l.\end{cases}$$

Для граничных условий второго рода
в первом варианте получаем

$$T\left(x,t\right)=\begin{cases}\dfrac{q_0l}{2}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)^2, & 0\le x\le l\\ 0, & x>l;\end{cases}$$

во втором варианте получаем

$$T(x,t)=\begin{cases}\dfrac{q_0 l}{3}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)^3, & 0\le x\le l\\ 0, & x>l.\end{cases}$$

Стоит отметить, что рассмотренный метод подразумевает гладкость температуры на температурном фронте $x = l(t)$.

3. Рассмотрим приближенный метод расчета нестационарных температурных полей Шестерикова С.А. (работы [4], [58]).

Пусть дано некоторое тело (рисунок 1.1) объемом V, ограниченное поверхностью $\Gamma(u,v)$. Точка P на поверхности Γ определяется системой ортогональных криволинейных координат u и v, координата w направлена по нормали внутрь тела.

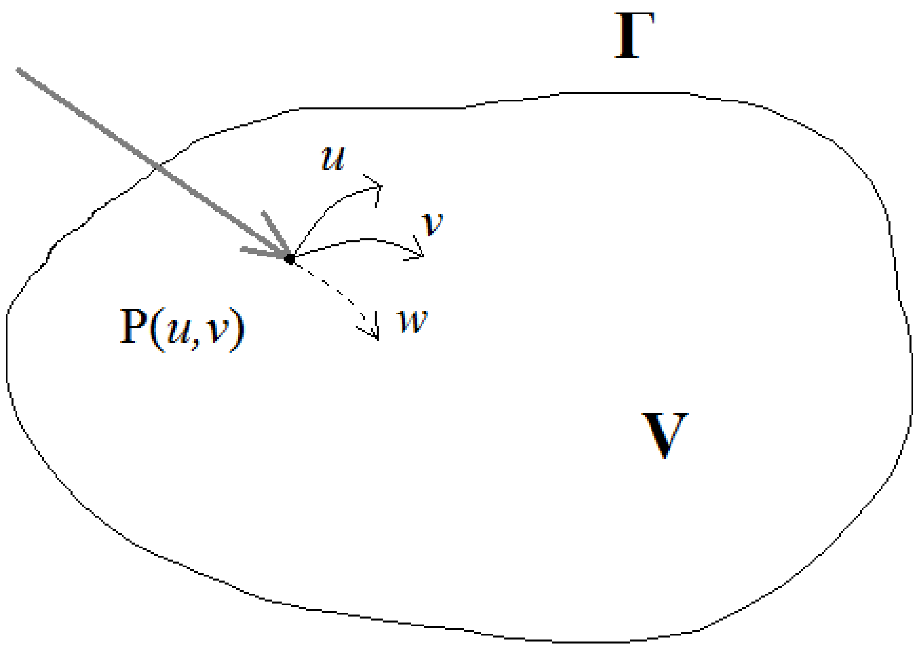

Рис. 1.1. Тело объемом V, ограниченное поверхностью Г. Точка P на поверхности тела определяется системой ортогональных криволинейных координат u и v. Координата w направлена по нормали внутрь тела.

Считаем, что до некоторого момента времени (который примем за начало отсчета) в теле было равномерное температурное поле. Примем, что начиная с этого момента на поверхности тела задается температура $T_\Gamma(P,t)$.

Тогда для определения температурного поля в теле как функции координат и времени необходимо найти решение уравнения

$$L\left(T\right)=\frac{\partial}{\partial u}\frac{H_vH_w}{H_u}\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{H_uH_w}{H_v}\frac{\partial T}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial w}\frac{H_vH_u}{H_w}\frac{\partial T}{\partial w}-\frac{\partial T}{\partial t}(H_uH_vH_w)=0 \quad (1.8)$$

с граничным условием

$$T=T_{\Gamma} \qquad \text{при} \qquad w=0 \tag{1.9}$$

и с начальным условием

$$T=0 \qquad \text{при} \qquad t=0. \tag{1.10}$$

Здесь H_i — коэффициенты Ламе.

В рамках приближенного метода вводится математическая поверхность $l=l(t)$, которая является границей между прогретой и холодной частями тела. При этом вдоль этой поверхности выполняются условия

$$T\mid_{w=l(t)}=0, \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial w}\right|_{w=l(t)}=0. \tag{1.11}$$

Решение задачи теплопроводности в прогретой зоне будем искать в виде

$$T(P,w,t)=\sum_{i=0}^{n}A_i\left(P,t\right)\varphi_i(w), \tag{1.12}$$

где $\varphi_i(w)$ — некоторые базисные функции, $A_i(P,t)$ определяются из граничных условий. В силу трех граничных условий необходимо задавать минимум три члена в ряде (1.12). Тогда имеем

$$T\left(P,w,t\right)=A_0(P,t)\varphi_0(w)+A_1(P,t)\varphi_1(w)+A_2(P,t)\varphi_2(w). \tag{1.13}$$

При этом полагается, что $\varphi_0\equiv 1$, $\varphi_1\left(0\right)=0$, $\varphi_2\left(0\right)=0$.

Из условий на фронте температурного поля (1.11) и граничного условия (1.9), используя (1.13), получим следующее решение:

$$T=T_{\Gamma}\cdot\omega\left(w,l\right). \tag{1.14}$$

Функция $\omega(w,l)$ имеет вид:

$$\omega(w,l) = 1 + B_1(l)\,\varphi_1(w) + B_2(l)\,\varphi_2(w)\,, \tag{1.15}$$

где

$$B_1 = -\left(\frac{\varphi_2'}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'}\right)_{w=l}, \quad B_2 = -\left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'}\right)_{w=l}.$$

Неизвестную функцию времени $l(t)$, определяющую положение безразмерной границы прогретой зоны, будем определять из условия интегрального удовлетворения уравнению по прогретой зоне

$$\iint\limits_{\Gamma}\left\{\int_0^l (L(T))\,\mathrm{d}w\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0,$$

где Γ – поверхность тела.

Будем считать, что направление вдоль координатной линии w есть единственное направление, в котором распространяется тепло, поэтому первые два слагаемых в (1.8) много меньше третьего.

В результате, интегрируя по w, учитывая граничное условие (1.9) и выражение для температуры (1.14), в случае, когда H_u, H_v, H_w не зависят от (u,v), а функция T_Γ может быть представлена в виде

$$T_\Gamma = T_0(t)\,\Psi(P)\,, \tag{1.16}$$

будем иметь

$$\left\{\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)T_0 + \int\limits_0^l K(w)\,\frac{\partial(T_0\omega)}{\partial t}\,\mathrm{d}w\right\}\iint\limits_{\Gamma}\Psi(P)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0,$$

где

$$K = \left(\frac{H_uH_vH_w}{(H_uH_v/H_w)_{w=0}}\right).$$

Второй интеграл считаем отличным от нуля, поэтому получаем следующее уравнение

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)_{w=0} T_0 + \int\limits_0^l K\left(w\right) \frac{\partial\left(T_0\omega\right)}{\partial t}\,\mathrm{d}w = 0, \tag{1.17}$$

из которого находится неизвестная функция $l\left(t\right)$.

Стоит отметить, что условие (1.16) не накладывает жестких ограничений на задание температурного поля на границе Γ. В большинстве задач температуру на границе можно задать с достаточной степенью точности соотношением вида

$$T_\Gamma = \sum_{i=1}^{k} T_{0k}\left(t\right)\Psi_k\left(P\right).$$

В силу линейности уравнения теплопроводности можно искать решение для одного слагаемого, а затем найти общее распределение температуры как сумму отдельных решений.

Вернемся к анализу уравнения (1.17). Будем в качестве базисных функций для φ_1 и φ_2 использовать степенные функции

$$\varphi_1\left(x\right) = x^{r_1},$$

$$\varphi_2\left(x\right) = x^{r_2}.$$

Тогда из (1.15) легко получить

$$\omega = 1 - \frac{r_2}{r_2 - r_1}\varphi_1\left(\frac{w}{l}\right) + \frac{r_1}{r_1 - r_2}\varphi_2\left(\frac{w}{l}\right). \tag{1.18}$$

Сохранение в выражениях (1.18) произвольных значений показателей степени r_1 и r_2 оправдывается тем, что в дальнейшем можно улучшать приближенное решение соответствующим подбором этих параметров, используя, например, метод наименьшего квадратичного отклонения решения от точного как по объему, так и по характерному времени. Введем в рассмотрение функцию $J\left(r_1, r_2\right)$:

$$J\left(r_1, r_2\right) = \int\limits_0^t \left(\iiint\limits_V \left(L\left(T\right)\right)^2 \,\mathrm{d}V \right) \mathrm{d}t.$$

При этом характерное время t равно времени до разрушения (можно выбирать время исходя из других каких-то соображений так, чтобы был охвачен весь интересующий интервал времени). Оптимальные значения показателей степени r_1 и r_2 находятся из условий достижения функцией $J\left(r_1, r_2\right)$ минимального значения

$$\frac{\partial J}{\partial r_1} = 0,$$
$$\frac{\partial J}{\partial r_2} = 0.$$

Очевидно, что метод может быть обобщен и на случай введения большего числа базисных функций и неопределенных параметров, но ввиду резко возрастающей громоздкости исследования подобный метод начнет терять преимущества перед точным решением задачи теплопроводности в рядах или численно.

В работе [21] было проведено сравнение решений, полученных различными приближенными методами, в том числе и упомянутыми в этом параграфе.

§1.3. О приближенном методе определения нестационарных температурных полей нелинейной задачи теплопроводности

Рассматривается нестационарная задача теплопроводности, моделирующая процесс высокотемпературного нагрева тела по границе $x = 0$ с равной нулю температурой в начальный момент времени $t = 0$. Характер нагрева таков, что можно выделить единственное определенное направление, в котором распространяется тепло. Хотя теоретически температура мгновенно изменяется в любой точке тела при изменении температуры на поверхности, реально температура изменяется постепенно. Это изменение начинается от нагреваемой поверхности и естественно ввести некую границу $x = l(t)$, которую будем считать границей температурного фронта, отделяющей прогретую часть тела от части, в которой температуру с достаточной степенью точности можно считать неизменной до момента подхода фронта. Поэтому классическое граничное условие задачи теплопроводности на холодной границе тела можно заменить на условие на границе температурного фронта $x = l(t)$. Функция $l(t)$ считается равной нулю при $t = 0$ и $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \neq 0$. В дальнейшем везде будет использоваться обозначение $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = l'$.

Решаются две модельные задачи — нагрев образца балочного типа по поверхности $x = 0$ и нагрев тонкого диска по центральному круговому отверстию $r = a$. Рассматриваются граничные условия первого и второго рода, когда на нагреваемой поверхности задается температура $T_0 = \text{const}$ и когда задается тепловой поток $q_{00} = \text{const}$ соответственно.

Аналитическое решение ищется в виде ряда

$$T(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} \varphi_i(t) x^i, & \text{если } 0 \le x \le l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t), \end{cases} \tag{1.19}$$

где $\varphi_i(t)$ находятся из граничных условий задачи.

Учитывая, что в общем виде количество неизвестных параметров равно $n + 2$, для вычисления неизвестных функций $\varphi_i(t)$ и $l(t)$ помимо граничных условий необходимо поставить n дополнительных условий.

В качестве таких условий могут выступать:
заданный поток на температурном фронте аналогично (1.4) и (1.6)

$$-K(T)T_x|_{x=l(t)} = q_0; \tag{1.20}$$

условие интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности

$$\int\limits_0^l \left(T_t - (K(T)T_x)_x\right) \mathrm{d}x = 0; \tag{1.21}$$

условие баланса тепла

$$q_{00}t = \int\limits_0^l T\,\mathrm{d}x; \tag{1.22}$$

уравнение теплопроводности, продифференцированное n раз ($n = 0,\ 1,\ 2, ...,$) и взятое в характерных точках, например, при $x = l(t)$

$$\left.\left(T_t - (K(T)T_x)_x\right)\right|_{x=l(t)} = 0, \tag{1.23}$$

$$\left.\left(T_t - (K(T)T_x)_x\right)_x\right|_{x=l(t)} = 0, \tag{1.24}$$

$$\left.\left(T_t - (K(T)T_x)_x\right)_{xx}\right|_{x=l(t)} = 0$$

(и так далее);
интегральные условия аналогично (1.5) и (1.7)

$$\int\limits_0^l \left(T_t - (K(T)T_x)_x\right) x^s\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.25}$$

Процедура определения температурных полей такова, что сначала находится зависимость $T(x, l(t))$, а затем ищется $l(t)$. Для нахождения функции границы температурного фронта ставится задача Коши с условием $l(0) = 0$.

В работе рассмотрены случаи, когда приближенное решение задачи теплопроводности строится в виде (1.19) при $n = 2$ и $n = 3$:

$$T(x,t) = \begin{cases} \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)x^2, & \text{если } 0 \le x \le l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \tag{1.26}$$

$$T(x,t) = \begin{cases} \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_3(t)x^3, & \text{если } 0 \le x \le l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \tag{1.27}$$

Предлагаемый метод хорош тем, что для анализа напряженно-деформированного состояния функцию $l = l(t)$ не обязательно находить явно, пока не потребуется определить конкретное размерное время нарушения сплошности образца вследствие больших температурных градиентов. До тех пор можно считать l новым временем.

§1.4. Построение приближенных решений линейных задач теплопроводности. Сравнение с точными решениями

1. Рассматривается одномерная нестационарная ($T = T(x,t)$) линейная ($K(T) = 1$) задача теплопроводности, моделирующая процесс высокотемпературного нагрева тела по границе $x = 0$ постоянной по времени температурой $T_0 = 1$. Температура в начальный момент времени $t = 0$ считается равной нулю; температура на фронте $T|_{x=l(t)}$ равна нулю.

Задача теплопроводности примет вид

$$\begin{cases} T_t = T_{xx} \\ T|_{t=0} = 0 \\ T|_{x=0} = 1 \\ T|_{x=l(t)} = 0. \end{cases} \tag{1.28}$$

Перейдем от переменных (x,t) к переменным $(z,\hat{t})$ следующим образом:

$$\begin{cases} z = x - l(t) \\ \hat{t} = t. \end{cases} \tag{1.29}$$

При этой замене тепловой фронт берется за новую координатную ось $z = 0$ и производные преобразуются в соответствии с формулами

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}}\frac{\partial \hat{t}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z};$$
$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}}\frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = -l'(\hat{t})\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}},$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z};\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2};\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} - l'(\hat{t})\frac{\partial}{\partial z}.$$

В новых переменных задача (1.28) имеет вид

$$\begin{cases} T_{\hat{t}} - l'(\hat{t})T_z = T_{zz} \\ T|_{\hat{t}=0} = 0 \\ T|_{z=-l(\hat{t})} = 1 \\ T|_{z=0} = 0. \end{cases} \tag{1.30}$$

Далее время везде будем обозначать за t.

А.) Ищем выражение для температуры (аналогично (1.26)) в виде

$$T(z,t) = \begin{cases} u_0(t) + u_1(t)z + u_2(t)z^2, & \text{если } -l(t) \leq z \leq 0 \\ 0, & \text{если } z > 0. \end{cases} \tag{1.31}$$

Для нахождения функций $u_i(t)$ необходимо задать еще одно условие. Будем считать, что выполнено условие типа (1.20), которое в новых переменных будет иметь вид

$$T_z|_{z=0} = 0. \tag{1.32}$$

Из алгебраической системы, состоящей из граничных условий задачи (1.30) и условия (1.32), при учете (1.31) получаем $u_0 = 0$; $u_1 = 0$; $u_2 = \frac{1}{l^2(t)}$, откуда при $-l(t) \leq z \leq 0$

$$T(z,t) = \frac{z^2}{l^2(t)}$$

Функцию $l(t)$ находим из условия интегрального удовлетворения уравнения теплопроводности типа (1.21): подставим полученное решение в уравнение из (1.30), проинтегрируем полученное выражение в пределах от $-l(t)$ до 0 и приравняем к нулю:

$$\int\limits_{-l(t)}^{0} \left(-\frac{2l'(t)}{l^3(t)} z^2 - \frac{2l'(t)}{l^2(t)} z - \frac{2}{l^2(t)} \right) \mathrm{d}z = -\frac{2l'(t)}{3} + l'(t) - \frac{2}{l(t)} = 0.$$

Получим дифференциальное уравнение относительно $l(t)$: $ll' = 6$, откуда $\frac{l^2}{2} = 6t + c$. Так как $l(0) = 0$, то $c = 0$ и $l(t) = \sqrt{12t}$.

В итоге в прогретой зоне получаем $T(z,t)=\frac{z^2}{12t}$, или, в старых переменных,

$$T(x,t)=\frac{(x-2\sqrt{3t})^2}{12t}. \tag{1.33}$$

Б.) Рассмотрим случай, когда приближенное решение ищется в виде, аналогичном (1.27) и (1.31) (четыре неизвестных функции $u_i, \quad i=0,1,2,3.$).

При тех же граничных условиях, что в п. А.), получаем

$$u_0=0;\ u_1=0;\ u_2l^2(t)-u_3l^3(t)=1. \tag{1.34}$$

Четвертое условие получим с помощью соотношения (1.24):

$$T_{tz}|_{z=0}-l'(t)T_{zz}|_{z=0}=T_{zzz}|_{z=0}\,,$$

откуда при учете (1.34) $-2l'(t)u_2=6u_3$.

Таким образом, $u_0=0$, $u_1=0$, $u_2=\frac{3}{l^2(3+ll')}$, $u_3=-\frac{l'}{l^2(3+ll')}$ и приближенное решение задачи (1.30) при $-l(t)\le z\le 0$ имеет вид

$$T(z,t)=\frac{3}{l^2(3+ll')}z^2-\frac{l'}{l^2(3+ll')}z^3.$$

Для получения условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности, аналогичном (1.21), выражение

$$L(T)=-\frac{6}{l^2(3+ll')}-\frac{3l'}{l^2(3+ll')}z+$$

$$+\frac{3l^2l'^3-18l'-3l^2ll''}{l^3(3+ll')^2}z^2-\frac{3ll''-3ll'^3-6l'^2}{l^3(3+ll')^2}z^3,$$

интегрируем по z в пределах от $-l(t)$ до 0 и приравниваем к 0. Получаем уравнение относительно $l(t)$:

$$l^3l'^3-l^3l''-30ll'-72=0. \tag{1.35}$$

Поскольку известно, что тепловая энергия локализуется в тонком поверхностном слое толщиной $k\sqrt{t}$ (работа [10]), для нахождения $l(t)$, удовлетворяющей (1.35), предположим, что $l(t)=k\sqrt{t}$. Тогда, подставив $l(t)$

в (1.35), получим уравнение относительно k: $k^6 + 2k^4 - 120k^2 - 576 = 0$, в качестве решения которого получаем три значения для k^2. Два из них отрицательны, поэтому единственным подходящим решением будет $k = \sqrt{12}$, откуда $l(t) = \sqrt{12t}$.

Тогда

$$T(z,t) = \frac{1}{36t}z^2 - \frac{1}{36\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}z^3,$$

или, в старых переменных,

$$T(x,t) = \frac{1}{36t}(x - 2\sqrt{3t})^2 - \frac{1}{36\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}(x - 2\sqrt{3t})^3. \tag{1.36}$$

Проведем сравнение полученных приближенных решений с точным решением аналогичной задачи для полуограниченного твердого тела [17]. Нас интересуют промежутки времени, когда тело еще не прогрелось полностью и температура на второй границе практически не изменилась, поэтому сравнение корректно. В этом случае применимо решение для полуограниченного твердого тела:

$$T(x,t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} \exp\left(-\xi^2\right) \mathrm{d}\xi. \tag{1.37}$$

Сравнение полученных приближенных решений с точным показано на рис. 1.2.

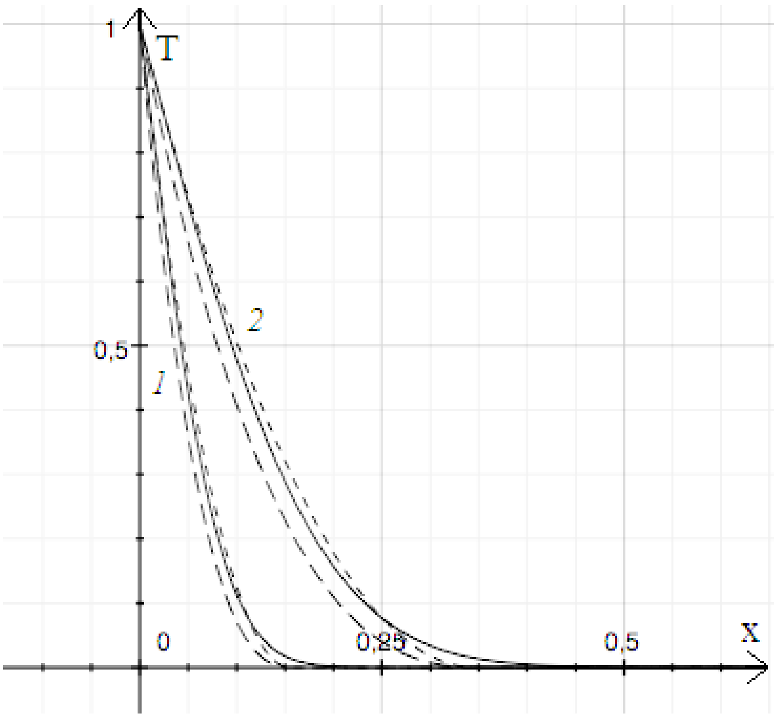

Рис. 1.2. Безразмерная температура в моменты безразмерного времени $t = 0.01$ — *1*, $t = 0.1$ — *2*. Сплошная линия — точное решение (1.37), короткий пунктир — приближенное решение (1.36), длинный пунктир — приближенное решение (1.33).

Из графика видно, что приближенные и точное решения отличаются незначительно. Погрешность метода в интересующие нас промежутки времени составляет менее 10%.

2. Рассмотрим одномерную нестационарную ($T = T(x,t)$) линейную ($K(T) = 1$) задачу теплопроводности, моделирующую процесс высокотемпературного нагрева тела по границе $x = 0$. Температура в начальный момент времени $t = 0$ считается равной нулю; температура на фронте $T|_{x=l(t)}$ равна нулю. Отличие от предыдущего пункта текущего параграфа состоит в том, что вместо температуры на нагреваемой поверхности задается тепловой поток $q_{00} = \text{const}$, то есть задача имеет вид

$$\begin{cases} T_t = T_{xx} \\ T|_{t=0} = 0 \\ -T_x|_{x=0} = q_{00} \\ T|_{x=l(t)} = 0. \end{cases}$$

Дополнительное граничное условие берем в виде (1.20). В этом случае получаем

$$T(x,t) = \begin{cases} \frac{q_{00}l}{2}(1-\frac{x}{l})^2, & \text{если } 0 \le x \le l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \tag{1.38}$$

Функция температурного фронта ищется из интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности (1.21), откуда получаем дифференциальное уравнение $ll' = 3$ и

$$l(t) = \sqrt{6t}. \tag{1.39}$$

Соотношения (1.38), (1.39) полностью задают температурное поле в образце.

Следует отметить, что найденная зависимость $l = l(t)$ (1.39) удовлетворяет условию теплового баланса (1.22) при полученном выражении для температуры (1.38).

Точное решение для рассмотренной линейной задачи получено в работе [17]:

$$T(x,t) = 2q_{00}\left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) - \frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right)\right). \tag{1.40}$$

На рис. 1.3 показано сравнение полученного приближенного решения (1.38), (1.39) с точным (1.40).

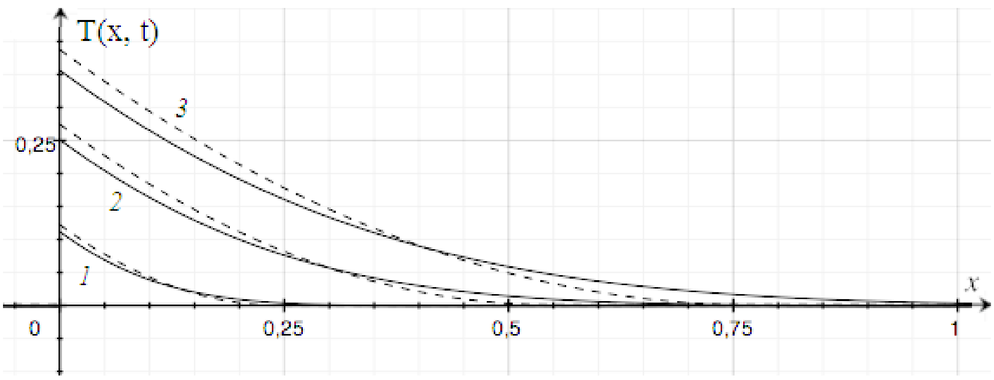

Рис. 1.3. Безразмерная температура в моменты безразмерного времени $t = 0.001$ — *1*, $t = 0.005$ — *2*, $t = 0.1$ — *3*. Задан поток на нагреваемой

поверхности $q_{00} = 1$. Точное решение (1.40) — сплошная линия, приближенное решение (1.38), (1.39) — штриховая линия.

Как и в предыдущем пункте текущего параграфа (рисунок 1.2), для граничных условий второго рода в интересующие нас промежутки времени погрешность применяемого метода составляет менее 10%.

3. Рассмотрим процесс нагрева тонкого бесконечного диска по центральному круговому отверстию безразмерного радиуса $r = 1$. Безразмерные величины вводятся по формулам аналогично параграфу 1.1 с учетом $r = \frac{2\widetilde{r}}{d}$, где $\widetilde{r}$ — размерная координата, d — радиус внутреннего отверстия.

На внутренней (нагреваемой) границе задается условие $T_0 = 1$, на границе фронта $r = l(t)$ температура и тепловой поток считаются равными нулю:

$$\begin{cases} T_t = T_{rr} + \frac{1}{r}T_r \\ T|_{r=1} = T_0 \\ T|_{r=l(t)} = 0 \\ T_r|_{r=l(t)} = 0. \end{cases} \tag{1.41}$$

С помощью приближенного метода получаем выражение для температуры

$$T(r,t) = T_0\frac{(l-r)^2}{(l-1)^2}. \tag{1.42}$$

Далее, из условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности, $l'(l^2 - 1) = 12$, откуда (с учетом условия $l(0) = 1$) получаем

$$l^3 - 3l = 36t - 2. \tag{1.43}$$

Выражения (1.42) и (1.43) определяют температурное поле в тонком диске при заданной температуре на нагреваемой поверхности в линейном случае.

4. Рассмотрим процесс нагрева тонкого бесконечного диска по центральному круговому отверстию радиуса $r = 1$ с граничными условиями второго рода: на нагреваемой границе задается тепловой поток $q_{00} = \text{const}$.

На границе температурного фронта $r = l(t)$ температура и тепловой поток считаются равными нулю:

$$\begin{cases} T_t = T_{rr} + \frac{1}{r} T_r \\ -T_r|_{r=1} = q_{00} \\ T|_{r=l(t)} = 0 \\ T_r|_{r=l(t)} = 0. \end{cases} \tag{1.44}$$

Приближенное решение имеет вид

$$T = \begin{cases} \frac{q_{00}}{2(l-1)}(l-r)^2, & \text{если } 1 \le r \le l(t) \\ 0, & \text{если } r > l(t). \end{cases} \tag{1.45}$$

Из условия баланса тепла (1.22) получаем зависимость для $l(t)$:

$$24t = (l-1)^2(l+3). \tag{1.46}$$

Соотношения (1.45)-(1.46) определяют температурное поле задачи (1.44).

§1.5. Построение приближенных решений задач теплопроводности с коэффициентом теплопроводности $K(T) = T$

1. В работе [5] доказывается существование и единственность аналитического решения задачи

$$\begin{cases} T_t = (K(T)T_x)_x \\ T|_{x=l(t)} = 0, \end{cases} \tag{1.47}$$

описывающего распространение тепловой волны по холодному фону. Коэффициент теплопроводности берется в виде $K(T) = \alpha T^\sigma$, α и σ — константы. Предполагается, что существует температурный фронт как функция времени.

Коэффициент теплопроводности такого вида рассматривается во многих работах, например, в работе [12] — для режимов с обострением, а в работе [47] приведены решения уравнения теплопроводности, однако ни одно из них не удовлетворяет граничным условиям, соответствующим нагреву тела.

В процессе доказательства решение задачи (1.47) строится в виде бесконечного ряда по координате, при этом автор работы [5] получает рекуррентные формулы для нахождения каждого члена ряда.

Найдем первые четыре члена ряда по методу, предложенному в [5] в случае $K(T) = T$ при $\alpha = 1$ и $\sigma = 1$.

Задача теплопроводности (1.47) после замены переменных (1.29) будет иметь вид

$$\begin{cases} T_t - l'T_z = TT_{zz} + T_z^2 \\ T|_{z=0} = 0. \end{cases} \tag{1.48}$$

Температуру ищем в виде, аналогичном (1.26) и (1.31). Из граничного условия следует, что $u_0 = 0$. Далее используем дополнительное условие (1.23): уравнение задачи (1.48) при $z = 0$ и учете найденного $u_0 = 0$ переходит в соотношение $u_1 = -l'$. Для нахождения u_2 и u_3 уравнение задачи (1.48) дифференцируется соответственно один (1.24) и два раза по z, полагается $z = 0$ и, при учете уже найденных u_i, получаем соотношения $u_1' = (3u_1 + l')u_2$ и $u_2' - l'u_3 = 4u_1u_3 + 3u_2^2$.

После преобразований получаем

$$u_1 = -l',\ u_2 = \frac{l''}{2l'},\ u_3 = \frac{5l''^2 - 2l'l'''}{12l'^3}.$$

Таким образом функция температуры по методу, описанному в работе [5] в прогретой зоне $-l(t) \leq z \leq 0$ имеет вид

$$T(z,t) = -l'z + \frac{l''}{2l'}\frac{z^2}{2} + \frac{5l''^2 - 2l'l'''}{12l'^3}\frac{z^3}{3}. \tag{1.49}$$

В работе [5] не ставится задача непосредственно найти распределение температуры в зависимости от времени и координаты, считается, что функция $l(t)$ задана. Однако, чтобы получить выражение, пригодное для дальнейшего анализа, функцию границы температурного фронта $l(t)$ для (1.49) можно найти с помощью приближенного метода, как и в случае линейной задачи теплопроводности, решенной выше. Если для простоты вычислений оставить только первые два слагаемых в (1.49), то есть взять $T(z,t) = -l'z + \frac{l''}{2l'}\frac{z^2}{2}$ и перейти к координатам (x,t), получим

$$T(x,t) = ll' + \frac{l^2 l''}{4l'} - l'x - \frac{ll''}{2l'}x + \frac{l''}{4l'}x^2.$$

Проинтегрировав выражение $L(T) = T_t - T_x^2 - TT_{xx}$ от 0 до $l(t)$ по координате x (условие (1.21)), получим дифференциальное уравнение $2l'l''' - 5l''^2 = 0$. Если в него подставить функцию $l = kt^i$, $i = \text{const}, k = \text{const}$ получим $i = \frac{1}{3}$ и $l(t) = kt^{1/3}$, откуда

$$T(x,t) = \frac{k^2}{6t^{1/3}} - \frac{x^2}{6t}. \tag{1.50}$$

Константа k определяется из физического смысла задачи.

Полученное приближенное решение (1.50) показано на рисунке 1.4.

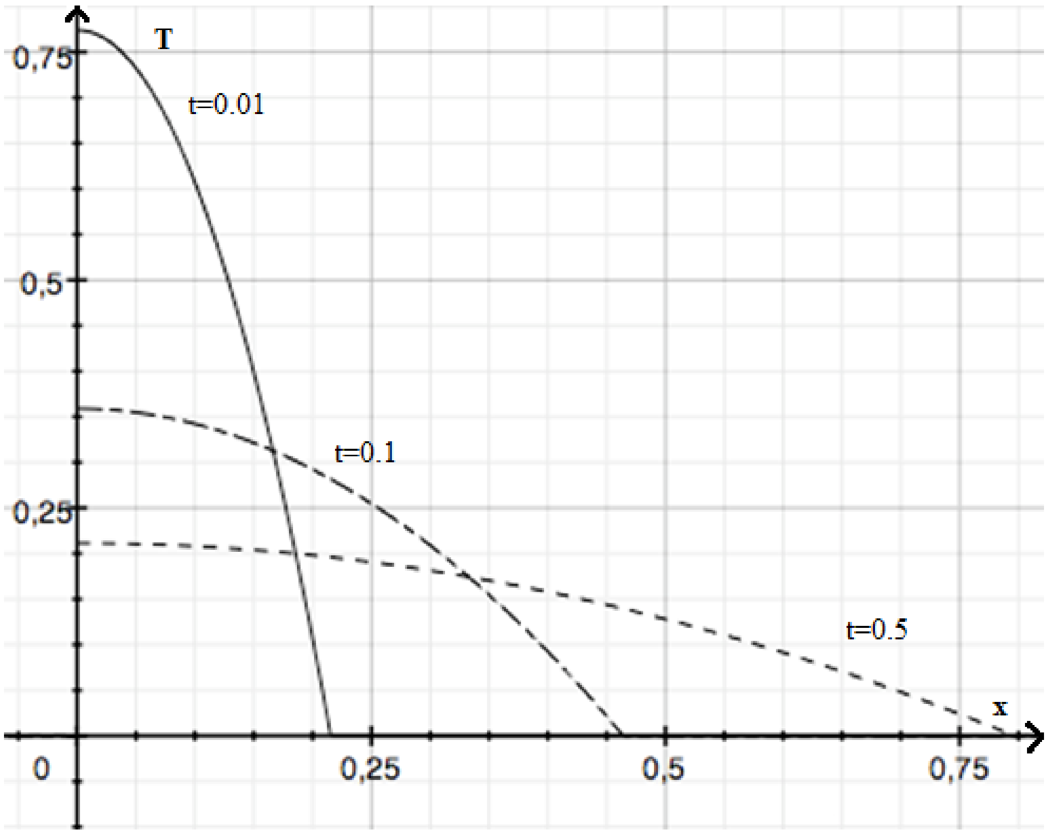

Рис. 1.4. Безразмерная температура (1.50) в моменты безразмерного времени $t = 0.01,\ t = 0.1,\ t = 0.5$; $k = 1$.

Поскольку при постановке задачи не было задано условие на нагреваемой поверхности, полученное решение описывает ситуацию с изначально неравномерно прогретым телом и процесс состоит только в выравнивании температуры по всему образцу.

2. Рассмотрим задачу (1.47) с условием не только на температурном фронте, но и на нагреваемой поверхности. Предположим, что на границе $x = 0$ задана постоянная температура, равная единице. Начальная температура (аналогично предыдущим задачам) равна нулю. Тогда аналогично (1.48) после замены переменных (1.29) получаем

$$\begin{cases} T_t - l'T_z = TT_{zz} + T_z^2 \\ T|_{z=-l} = 1 \\ T|_{z=0} = 0. \end{cases} \tag{1.51}$$

Приближенное решение ищется в виде многочлена второй степени с тремя слагаемыми аналогично (1.26). В качестве третьего граничного условия возьмем (1.23). Тогда функция температуры

$$T(z,t) = \begin{cases} -l'z + \frac{1-ll'}{l^2}z^2, & \text{если } -l(t) \le z \le 0 \\ 0, & \text{если } z > 0. \end{cases} \tag{1.52}$$

Для нахождения функции границы температурного фронта возьмем условие (1.24). Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$l^2 l'' + 4l{l'}^2 - 4l' = 0.$$

В это уравнение не входит независимая переменная t, поэтому его порядок можно понизить [55], взяв за новую независимую переменную l, а за неизвестную функцию $l' = p(l)$. Тогда $l'' = \frac{\mathrm{d}(l')}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p(l)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}l} \cdot \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = pp'$.

Подставляя $l' = p$ и $l'' = pp'$ в уравнение, получим $p' + \frac{4}{l}p = \frac{4}{l^2}$. Это уравнение является линейным, для его решения сначала решается однородное уравнение методом разделения переменных. Затем в общем решении однородного уравнения произвольная постоянная C заменяется на неизвестную функцию $C(t)$. Затем выражение, полученное для l, надо подставить в исходное неоднородное уравнение и найти функцию $C(t)$.

В результате получаем (ставя задачу Коши с условием $l(0) = 0$)

$$l = \sqrt{\frac{8}{3}t}. \tag{1.53}$$

Температурное поле в рассмотренном случае полностью определяется соотношениями (1.52), (1.53).

3. Рассмотрим задачу о нагреве образца балочного типа с заданным постоянным тепловым потоком q_{00} (поток действует в направлении оси Ox) на нагреваемой поверхности $x = 0$ с предположением, что на границе $x = l(t)$ температура равна нулю:

$$\begin{cases} T_t = T_x^2 + TT_{xx} \\ T|_{x=l(t)} = 0 \\ -TT_x|_{x=0} = q_{00}. \end{cases}$$

Перейдя к координатам (z, t) (1.29), получим

$$\begin{cases} T_t - l'T_z = TT_{zz} + T_z^2 \\ T|_{z=0} = 0 \\ -TT_z|_{z=-l} = q_{00}. \end{cases} \tag{1.54}$$

Температуру будем искать в виде многочлена с тремя слагаемыми аналогично (1.31). В качестве третьего граничного условия берем условие (1.23) с учетом замены переменных. Получим следующие выражения:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ (u_1 l - u_2 l^2)(u_1 - 2u_2 l) = q_{00} \\ \left[\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_1 = -l'. \end{array} \right. \end{cases}$$

При $u_1 = 0$ с учетом (1.24) получим нулевое решение задачи.

При $u_1 = -l'$ в прогретой зоне образца получаем

$$T(z, t) = -l'z + \frac{-3ll' + \sqrt{l^2 l'^2 + 8q_{00} l}}{4l^2} z^2. \tag{1.55}$$

Уравнение для функции температурного фронта можно получить из условия (1.22) с учетом замены переменных:

$$q_{00}t = \int\limits_{-l(t)}^{0} T\,\mathrm{d}z,$$

откуда

$$l^4 l'^2 - 9q_{00}tl^2 l' = q_{00}l^3 - 18q_{00}^2 t^2. \tag{1.56}$$

Выражения (1.55)-(1.56) полностью определяют температурное поле задачи (1.54).

§1.6. Построение приближенных решений задач теплопроводности с коэффициентами теплопроводности $K(T) = 1 - pT$ и $K(T) = 1 + pT$

Как отмечено в работе [17] о коэффициенте теплопроводности, наиболее близкое приближение к действительному положению вещей можно получить, полагая коэффициент $K = K(T)$ линейной функцией температуры T. Рассмотрим два варианта этой зависимости: $K(T) = 1 - pT$ и $K(T) = 1 + pT$, где p — константа материала.

1. Рассмотрим задачу теплопроводности с коэффициентом теплопроводности $K(T) = 1 - pT$, что при $p > 0$ в некотором приближении соответствует коэффициенту теплопроводности карбида циркония. На нагреваемой поверхности задана постоянная температура, на границе температурного фронта температура считается равной нулю:

$$\begin{cases} T_t = -pT_x^2 + T_{xx} - pTT_{xx} \\ T|_{x=0} = 1 \\ T|_{x=l(t)} = 0. \end{cases}$$

Сделаем замены переменных $u = 1 - pT$ и (1.29), получим

$$\begin{cases} u_t - l'(t)u_z = uu_{zz} + u_z^2 \\ u|_{z=-l(t)} = 1 - p \\ u(z,t)|_{z=0} = 1. \end{cases}$$

Ищем приближенное решение в виде

$$u(z,t) = \begin{cases} u_0(t) + u_1(t)z + u_2(t)z^2, & \text{если } -l(t) \le z \le 0 \\ 0, & \text{если } z > 0, \end{cases}$$

где необходимо определить три неизвестных функции времени. В качестве дополнительного третьего условия будет условие (1.23).

Из граничных и дополнительного условий получаем

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \frac{\sqrt{(2+ll')^2+8p} - ll' - 2}{2l} \\ u_2 = \frac{\sqrt{(2+ll')^2+8p} - ll' - 2(p+1)}{2l^2}. \end{cases}$$

Таким образом

$$T = \begin{cases} \frac{ll'+2-\sqrt{(2+ll')^2+8p}}{2pl} z + \frac{ll'+2(p+1)-\sqrt{(2+ll')^2+8p}}{2pl^2} z^2, \text{если } -l(t) \le z \le 0 \\ 0, \text{если } z > 0. \end{cases}$$

Из условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности (1.21), выраженному через переменную z, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения функции границы температурного фронта

$$l^4 l' l'' + 2l^3 l'' + 2l^3 l'^3 + 12 l^2 l'^2 + 30 ll' + 48 =$$

$$= \sqrt{(ll'+2)+4}\left(l^3 l'^3 + 2l^2 l'^2 + 6ll' + 12\right).$$

2. В случае $K(T) = 1 + pT$ при $p > 0$ после замен переменных $u = 1 + pT$ и (1.29) получим задачу

$$\begin{cases} u_t - l'(t)u_z = uu_{zz} + u_z^2 \\ u|_{z=-l(t)} = 1 + p \\ u(z,t)|_{z=0} = 1. \end{cases}$$

С помощью условия (1.23) аналогично предыдущему пункту получим

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \frac{\sqrt{(2+ll')^2-8p}-ll'-2}{2l} \\ u_2 = \frac{-\sqrt{(2+ll')^2-8p}+ll'-2(p-1)}{2l^2}, \end{cases}$$

откуда

$$T = \begin{cases} \frac{-ll'-2+\sqrt{(2+ll')^2-8p}}{2pl}z + \frac{ll'-2(p-1)-\sqrt{(2+ll')^2-8p}}{2pl^2}z^2, \text{если } -l(t) \le z \le 0 \\ 0, \text{если } z > 0. \end{cases}$$

3. Рассмотрим случай, когда на поверхности нагрева задан постоянный поток q_{00}. В рамках приближенного метода предполагается, что на границе температурного фронта температура и тепловой поток равны нулю. После замены переменных $u = 1 - pT$ и (1.29) получим

$$\begin{cases} u_t - l'(t)u_z = uu_{zz} + u_z^2 \\ uu_z|_{z=-l} = pq_{00} \\ u|_{z=0} = 1 \\ u_z|_{z=0} = 0. \end{cases}$$

Аналогично предыдущим пунктам получаем $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{-1+\sqrt{1-2pq_{00}l}}{2l^2}$.

Функция температуры после возврата к переменным (x,t) будет иметь вид

$$T(x,t) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-2pq_{00}l}}{2pl^2}(x-l)^2, & \text{если } 0 \le x \le l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \tag{1.57}$$

Эта зависимость для температуры была получена в работе [63], однако функция $l(t)$ в той работе была найдена из условия интегрального удовлетворения уравнения теплопроводности, тогда как важнее удовлетворить условию теплового баланса (1.22).

Из условия (1.22) получаем

$$l^3 - 6tl + 18pq_{00}t^2 = 0. \tag{1.58}$$

Полученное уравнение относительно функции $l(t)$ при $p = 0$ дает $l(t) = \sqrt{6t}$, что совпадает с решением уравнения для $l(t)$ в случае линейной задачи теплопроводности с такими же граничными условиями.

На рис. 1.5 построено поле температуры, определяемое соотношениями (1.38), (1.39) (линейная задача, $K(T) = 1$) и (1.57), (1.58) (нелинейная задача, $K(T) = 1 - pT$), в различные моменты безразмерного времени с учетом удовлетворения условия теплового баланса (1.22).

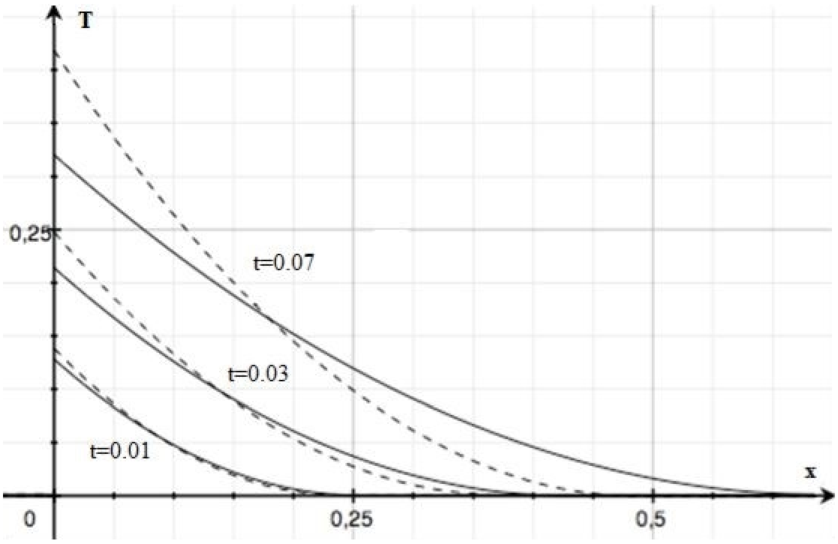

Рис. 1.5. Безразмерная температура в моменты безразмерного времени $t = 0.01$, $t = 0.03$, $t = 0.07$. Задан поток на нагреваемой поверхности $q_{00} = 1$. Сплошная линия — линейная задача (1.38), (1.39), штриховая линия — нелинейная задача (1.57), (1.58) теплопроводности; $p = 1/2$.

На графике видно, что в случае решения нелинейного уравнения теплопроводности происходит "запирание" температуры на нагреваемой поверхности, что в дальнейшем может привести к увеличению напряжений по сравнению с линейным случаем.

4. Для коэффициента теплопроводности $K(T) = 1 + pT$, $p > 0$, при решении задачи, аналогичной пункту 3 текущего параграфа (задан поток на нагреваемой поверхности; поток на температурном фронте считается равным нулю) после замен переменных $u = 1 + pT$ и (1.29) получим

$$\begin{cases} u_t - l'(t)u_z = uu_{zz} + u_z^2 \\ -uu_z|_{z=-l} = pq_{00} \\ u|_{z=0} = 1 \\ u_z|_{z=0} = 0. \end{cases}$$

В этом случае функция температуры будет иметь вид

$$T(x,t) = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{1+2pq_{00}l}}{2pl^2}(x-l)^2, & \text{если } 0 \le x \le l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \tag{1.59}$$

Из условия баланса тепла (1.22) получаем зависимость для функции $l(t)$:

$$l^3 - 6tl - 18pq_{00}t^2 = 0. \tag{1.60}$$

5. Рассмотрим задачу нагрева тонкого диска по центральному круговому отверстию $r = 1$ с заданным потоком на нагреваемой поверхности, нулевой температурой на фронте $r = l(t)$ и с дополнительным условием вида (1.20) при $q_0 = 0$.

Нелинейная задача теплопроводности при $K = K(T)$ имеет вид

$$\begin{cases} T_t = \frac{1}{r}\left(K(T)rT_r\right)_r \\ T|_{t=0} = 0 \\ -K(T)T_r|_{r=1} = q_{00} \\ T|_{r=l(t)} = 0 \\ K(T)T_r|_{r=l(t)} = 0. \end{cases} \tag{1.61}$$

Для коэффициента теплопроводности $K(T) = 1 - pT$ из (1.61) получаем

$$\begin{cases} T_t = \frac{1}{r}(1-pT)T_r - pT_r^2 + (1-pT)T_{rr} \\ -(1-pT)T_r|_{r=1} = q_{00} \\ T|_{r=l(t)} = 0 \\ (1-pT)T_r|_{r=l(t)} = 0. \end{cases} \tag{1.62}$$

Сделав замены $\chi = r - l$ аналогично (1.29) и $u = 1 - pT$, получим

$$\begin{cases} u_t - l' u_\chi = \frac{1}{\chi + l} u u_\chi + u_\chi^2 + u u_{\chi\chi} \\ u u_\chi \big|_{\chi = 1 - l} = p q_{00} \\ u \big|_{\chi = 0} = 1 \\ u u_\chi \big|_{\chi = 0} = 0. \end{cases} \tag{1.63}$$

Зависимость температуры от функции границы фронта и координаты в этом случае:

$$T = \begin{cases} \frac{1 \mp \sqrt{1 + 2pq_{00} - 2pq_{00} l}}{2p(l-1)^2} (l - r)^2, & \text{если } 1 \leq r \leq l(t) \\ 0, & \text{если } r > l(t). \end{cases} \tag{1.64}$$

Знак перед корнем выбирается в зависимости от знака константы p. При $p > 0$ — плюс, при $p < 0$ — минус. Случай $p = 0$ соответствует линейному уравнению теплопроводности, рассмотренному в предыдущем пункте.

При $p > 0$ из условия баланса тепла (1.22) получаем зависимость

$$\left(1 + \sqrt{1 + 2pq_{00} - 2pq_{00} l}\right)(l - 1)(l + 3) = 24 p q_{00} t. \tag{1.65}$$

При $p < 0$ из того же условия (1.22) получаем

$$\left(1 - \sqrt{1 + 2pq_{00} - 2pq_{00} l}\right)(l - 1)(l + 3) = 24 p q_{00} t. \tag{1.66}$$

Сравнение найденных решений показано на рисунках 1.6 и 1.7.

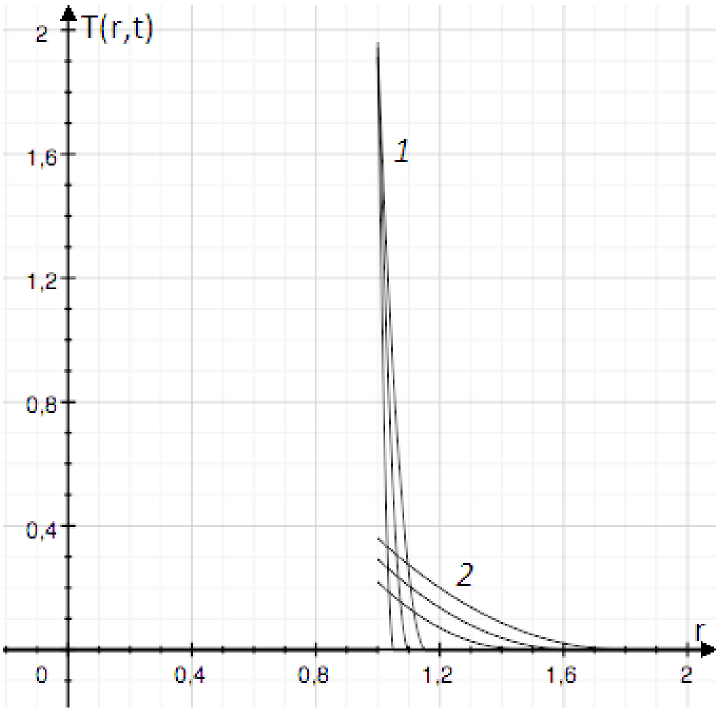

Рис. 1.6. Безразмерная температура для задачи нагрева дискового образца по границе внутреннего отверстия $r = 1$ при $K(T) = 1 - pT$. Кривые *1* — соотношения (1.64) со знаком $''+''$ и (1.65) при $p = 1/2$; кривые *2* — соотношения (1.64) со знаком $''-''$ и (1.66) при $p = -1/2$. Моменты безразмерного времени $t = 0.03$, $t = 0.07$, $t = 0.1$.

На рисунках видно, что при коэффициенте теплопроводности $K(T) = 1 - pT$ идет перегрев поверхности, а при $K(T) = 1 + pT$ тепло проходит внутрь образца.

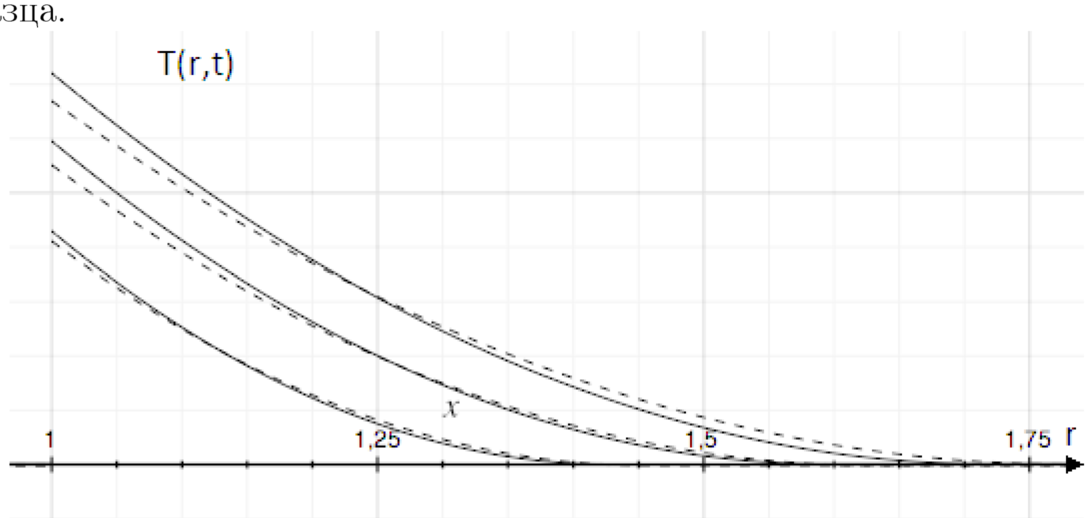

Рис. 1.7. Безразмерная температура для задачи нагрева дискового образца по границе внутреннего отверстия $r = 1$. $K(T) = 1 - pT$ при $p < 0$ (штриховая

линия) и $K(T) = 1$ (сплошная линия). Моменты безразмерного времени $t = 0.03$, $t = 0.07$, $t = 0.1$; $p = -1/2$.

6. Аналогичным образом может быть рассмотрена задача, когда в диске еще не появилось отверстие, то есть происходит точечный нагрев в $r = 0$.

В случае линейной задачи теплопроводности с заданным тепловым потоком $q_{00} = \text{const}$ при $r = 0$, получим

$$T = \begin{cases} \frac{q_{00}}{2l}(l-r)^2, & \text{если } 0 \leq r \leq l(t) \\ 0, & \text{если } r > l(t). \end{cases}$$

Из энергетического условия при учете $l(0) = 0$ получаем зависимость $l(t) = 2\sqrt[3]{3t}$.

§1.7. Построение приближенного решения нелинейной задачи теплопроводности с коэффициентом теплопроводности $K(T) = \frac{1}{1+\widetilde{p}T}$

Зависимость $K(T) = \frac{1}{1+\widetilde{p}T}$ в некотором приближении соответствует коэффициенту теплопроводности карбида циркония [54].

Пусть на нагреваемой поверхности задан постоянный поток; температура и поток при $x = l(t)$ считаются равными нулю. Задача принимает вид

$$\begin{cases} T_t = \left(\frac{1}{1+T}T_x\right)_x \\ -\frac{1}{1+T}T_x\Big|_{x=0} = q_{00} \\ T\big|_{x=l(t)} = 0 \\ -\frac{1}{1+T}T_x\Big|_{x=l(t)} = 0. \end{cases}$$

Сделаем замену переменных $u = 1 + T$. Тогда

$$\begin{cases} u_t = -\frac{1}{u^2}u_x^2 + \frac{1}{u}u_{xx} \\ -\frac{1}{u}u_x\big|_{x=0} = q_{00} \\ u\big|_{x=l(t)} = 1 \\ -\frac{1}{u}u_x\big|_{x=l(t)} = 0. \end{cases}$$

Из граничных условий аналогично предыдущим параграфам получаем значения функций $u_i(t)$, $i = 0, 1, 2$ для приближенного решения в виде квадратичного полинома: $u_0 = -\frac{2}{q_{00}l-2}$; $u_1 = \frac{2q_{00}}{q_{00}l-2}$; $u_2 = -\frac{q_{00}}{l(q_{00}l-2)}$, откуда в прогретой зоне

$$T = \frac{q_{00}l}{2 - q_{00}l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2. \tag{1.67}$$

Из условия баланса тепла (1.22) для (1.67) получаем зависимость от времени для границы температурного фронта

$$l(t) = \frac{-3tq_{00} + \sqrt{9t^2q_{00}^2 + 24t}}{2}, \tag{1.68}$$

построенную на рисунке 1.8.

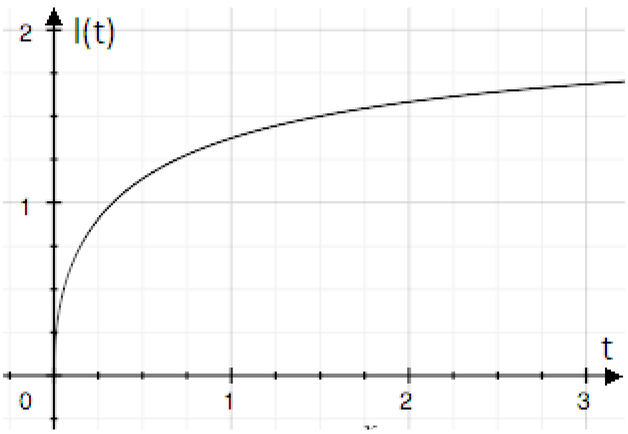

Рис. 1.8. Функция $l = l(t)$, соотношение (1.68).

На рисунке 1.9 построено поле температуры, определяемое соотношениями (1.67) и (1.68).

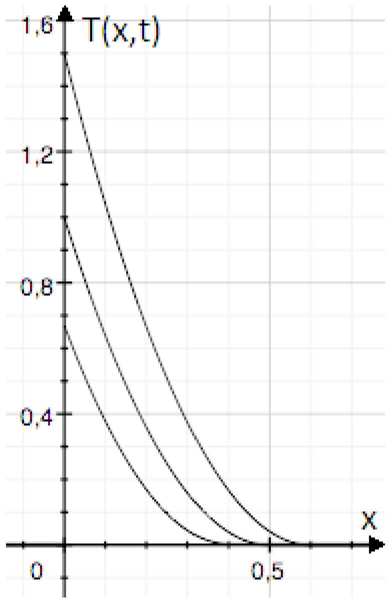

Рис. 1.9. Безразмерная температура в моменты безразмерного времени $t = 0.04$, $t = 0.08$, $t = 0.15$ при $q_{00} = 2$.

По сравнению с графиком решения линейной задачи теплопроводности на рисунке 1.5, рисунок 1.9 (как и проведенное сравнение на рисунке 1.6) показывает существенную зависимость температурных полей от нелинейности теплофизических свойств материала.

§1.8. Построение приближенных решений задач теплопроводности с коэффициентами теплопроводности, удовлетворяющими условию $K(T)|_{x=l(t)} = 0$

1. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} T_t = (K(T)T_x)_x \\ T(x,t)|_{x=l(t)} = 0 \end{cases}$$

с условием $K(T)|_{x=l(t)} = 0$.

После замены переменных (1.29) получаем

$$\begin{cases} T_t = l'(t)T_z + K'(T)T_z^2 + K(T)T_{zz} \\ T(z,t)|_{z=0} = 0. \end{cases} \tag{1.69}$$

Строим решение в виде многочлена

$$T(z,t) = \begin{cases} T_0(t) + T_1(t)z + T_2(t)\frac{z^2}{2}, & \text{если } -l(t) \le z \le 0 \\ 0, & \text{если } z > 0, \end{cases} \tag{1.70}$$

где по условию $T_0(t) = 0,\ T_0'(t) = 0$.

Для нахождения неизвестных функций времени используем условия (1.23)-(1.24) с учетом замены переменных. Из (1.23) получаем $l'(t)T_1 + K'(T)T_1^2 = 0$, откуда

$$T_1(t) = -\frac{l'(t)}{K'(T_0)},\ T_1'(t) = \frac{K''(T_0)l'(t) - l''(t)K'(T_0)}{K'^2(T_0)}. \tag{1.71}$$

Условие (1.24) переходит в

$$T_z' = l'T_{zz} + 2K'T_zT_{zz} + K''T_z^3 + KT_{zzz} + K'T_zT_{zz}.$$

Подставляем $z = 0$ и (1.70), получаем (при учете того, что $K(T)|_{z=0} = 0$)

$$T_1' = l'T_2 + 3K'T_1T_2 + K''T_1^3. \tag{1.72}$$

Подставляем в (1.72) $T_1'(t)$ и $T_1(t)$ из (1.71). Получаем

$$T_2 = \frac{K'^2l'' - K''l'^3 - K'K''l'}{2l'K'^3}$$

и в итоге при $-l(t) \le z \le 0$

$$T(z,t) = -\frac{l'(t)}{K'(T_0)}z + \frac{K'^2l'' - K''l'^3 - K'K''l'}{2l'K'^3}\frac{z^2}{2}.$$

2. Теперь решим задачу теплопроводности с коэффициентом $K(T) = \frac{2T}{1+T^2}$, опираясь на формулы, выведенные в предыдущем пункте параграфа. Поскольку $K'(T) = \frac{2(1-T^2)}{(1+T^2)^2}$, система (1.69) примет вид

$$\begin{cases} T_t = l'(t)T_z + \frac{2(1-T^2)}{(1+T^2)^2}T_z^2 + \frac{2T}{1+T^2}T_{zz} \\ T(z,t)|_{z=0} = 0. \end{cases}$$

В этом случае получаем $T_1 = -\frac{l'}{2}$, $T_2 = \frac{l''}{4l'}$, то есть $T = -\frac{l'}{2}z + \frac{l''}{4l'}\frac{z^2}{2}$.

Для нахождения $l(t)$ предположим, что на нагреваемой поверхности задана температура $T = 1$, то есть выполнено соотношение $T = \frac{ll'}{2} + \frac{l^2 l''}{8l'} = 1$, откуда получаем дифференциальное уравнение

$$4ll'^2 - 8l' + l^2 l'' = 0. \tag{1.73}$$

Вид функции границы температурного фронта можно найти, подставив в (1.73) $l(t) = k\sqrt{t}$, где $k = \mathrm{const}$. Тогда $k = \frac{4}{\sqrt{3}}$ и в переменных (x,t) получаем

$$T(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{3t}}(x + \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{t}) - \frac{1}{16t}(x + \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{t})^2, & \text{если } 0 \leq x \leq l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \tag{1.74}$$

§1.9. Построение приближенных решений задач теплопроводности путем введения автомодельной переменной

Вид функции температуры, получившейся вследствие применения приближенного метода, наводит на мысль ввести автомодельные переменные. Введем их следующим образом:

$$T(x,t) = \Theta(\upsilon),\ \upsilon = \frac{x}{l(t)}. \tag{1.75}$$

Тогда

$$T_t = -\Theta_\upsilon(\upsilon) \cdot \upsilon \cdot \frac{l'}{l},$$

$$T_x = \Theta_\upsilon(\upsilon) \cdot \frac{1}{l},$$

$$T_{xx} = \Theta_{\upsilon\upsilon}(\upsilon) \cdot \frac{1}{l^2}.$$

Приближенное решение ищется в виде, аналогичном (1.26):

$$\Theta(\upsilon) = \begin{cases} \psi_0(t) + \psi_1(t)\upsilon + \psi_2(t)\upsilon^2, & \text{если } 0 \le \upsilon \le 1 \\ 0, & \text{если } \upsilon > 1. \end{cases} \tag{1.76}$$

В ряде случаев замена (1.75) может существенно облегчить вычисления. Разберем несколько примеров.

1. Для коэффициента теплопроводности $K(T) = 1$ при заданной постоянной температуре на нагреваемой поверхности и при нулевой температуре на границе фронта $\upsilon = 1$ получаем

$$\begin{cases} \upsilon\Theta_\upsilon ll' + \Theta_{\upsilon\upsilon} = 0 \\ \Theta|_{\upsilon=0} = T_0 \\ \Theta|_{\upsilon=1} = 0. \end{cases}$$

Добавляя условие (1.20) в виде $\Theta_\upsilon|_{\upsilon=1}$, получаем приближенное решение

$$\Theta = \begin{cases} T_0\,(1-\upsilon)^2, & \text{если } 0 \le \upsilon \le 1 \\ 0, & \text{если } \upsilon > 1. \end{cases}$$

Для нахождения функции границы температурного фронта используем условие (1.21) в виде

$$\int\limits_0^1 (\upsilon\Theta_\upsilon ll' + \Theta_{\upsilon\upsilon})\ \mathrm{d}\upsilon = 0, \tag{1.77}$$

откуда находим зависимость $l(t) = \sqrt{12t}$.

2. Когда на нагреваемой поверхности задан постоянный тепловой поток q_{00}, соответствующее граничное условие превращается в $-\Theta_\upsilon|_{\upsilon=0} = lq_{00}$. Добавляем граничное условие в виде (1.20), получаем приближенное решение

$$\Theta = \begin{cases} \frac{lq_{00}}{2}\,(1-\upsilon)^2, & \text{если } 0 \le \upsilon \le 1 \\ 0, & \text{если } \upsilon > 1. \end{cases}$$

Из условия баланса тепла (1.22) получаем $l(t) = \sqrt{6t}$.

3. В случае $K(T) = T$ с заданной температурой на нагреваемой поверхности получаем задачу

$$\begin{cases} \xi\Theta_\upsilon ll' + \Theta\Theta_{\upsilon\upsilon} + \Theta_\upsilon^2 = 0 \\ \Theta|_{\upsilon=0} = 1 \\ \Theta|_{\upsilon=1} = 0 \end{cases}$$

и приближенное решение

$$\Theta = \begin{cases} 1 + (ll' - 2)\upsilon + (1 - ll')\upsilon^2, & \text{если } 0 \le \upsilon \le 1 \\ 0, & \text{если } \upsilon > 1. \end{cases}$$

Из условия (1.22) находим $l(t) = \sqrt{8t}$.

4. В случае $K(T) = T$ с заданным потоком на нагреваемой поверхности

$$\begin{cases} \upsilon\Theta_\upsilon ll' + \Theta\Theta_{\upsilon\upsilon} + \Theta_\upsilon^2 = 0 \\ \Theta_\upsilon|_{\upsilon=0} = -lq_{00} \\ \Theta|_{\upsilon=1} = 0; \end{cases} \tag{1.78}$$

приближенное решение (с использованием условия (1.22))

$$\Theta = \begin{cases} 1 + (ll' - 2)\upsilon + (1 - ll')\upsilon^2, & \text{если } 0 \le \upsilon \le 1 \\ 0, & \text{если } \upsilon > 1. \end{cases} \tag{1.79}$$

В процессе нахождения ψ_i получается два набора выражений для этих функций. Один из них дает $\Theta = -lq_{00}(\upsilon - \upsilon^2)$. Это решение не подходит из-за не удовлетворения условию баланса тепла вида (1.22) и физическому смыслу задачи.

Для функции границы температурного фронта получаем обыкновенное дифференциальное уравнение $2l^2l' + q_{00}l^2 = 6q_{00}t$, которое в совокупности с (1.79) полностью определяет температурное поле задачи (1.78).

§1.10. Построение приближенных решений линейного уравнения теплопроводности с нестационарными граничными условиями

Рассмотрим случай, когда температура на нагреваемой поверхности зависит от времени, т.е. $T|_{x=0} = T_0(t)$, а тепловой поток на границе температурного фронта $x = l(t)$ считается равным константе q_0. Тогда задача в линейном случае будет иметь вид

$$\begin{cases} T_t = T_{xx} \\ T|_{x=0} = T_0(t) \\ T|_{x=l(t)} = 0 \\ T_x|_{x=l(t)} = q_0. \end{cases} \tag{1.80}$$

Функция температуры при $0 \leq x \leq l(t)$ равна

$$T(x,t) = T_0 - \frac{2T_0 - q_0 l}{l} x + \frac{T_0 - q_0 l}{l^2} x^2. \tag{1.81}$$

Из условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности найдем дифференциальное уравнение относительно $l(t)$:

$$T_0 l l' + T_0' l^2 + q_0 l^2 l' - 6T_0 + 3q_0 l = 0.$$

При $q_0 = 0$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T_0 l l' + T_0' l^2 - 6T_0 = 0. \tag{1.82}$$

1. Примем, что температура на нагреваемой поверхности меняется по линейному закону $T_0(t) = T_{00} t$. В этом случае дифференциальное уравнение относительно функции границы температурного фронта будет иметь вид

$$t l l' + l^2 - 6t = 0,$$

откуда, имея в виду условие $l(0) = 0$, получаем $l = 2\sqrt{t}$.

2. Если принять, что температура на нагреваемой поверхности меняется по закону $T_0(t) = T_{00}\left(1 - \exp^{-\beta t}\right)$, где $T_{00} = \mathrm{const}$ и $\beta = \mathrm{const}$, то уравнение (1.82) после замены $2ll' = \xi$ будет иметь вид

$$\left(1 - \exp^{-\beta t}\right)\xi' + 2\beta \exp^{-\beta t}\xi - 12\left(1 - \exp^{-\beta t}\right).$$

Учитывая, что $l(0) = 0$, получаем

$$l(t) = \sqrt{\frac{12\beta t + 24\exp^{-\beta t} - 6\exp^{-2\beta t} - 18}{\beta\left(1 - \exp^{-\beta t}\right)^2}}. \qquad (1.83)$$

Температурное поле, определяемое соотношениями (1.81) и (1.83), построено на рисунке 1.10.

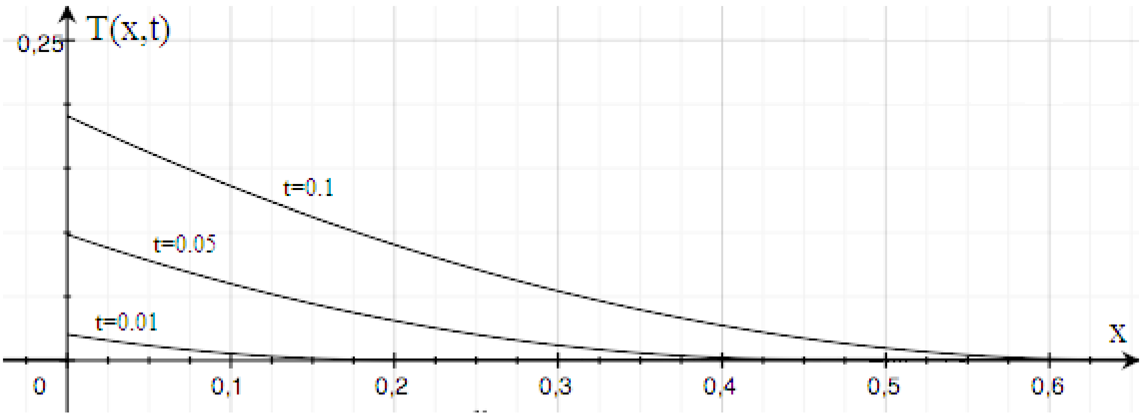

Рис. 1.10. Безразмерная температура в безразмерные моменты времени $t = 0.01$, $t = 0.05$, $t = 0.1$.

§1.11. О построении приближенных решений уравнения теплопроводности с заданным потоком на температурном фронте

Также с помощью приближенного метода определения температурных полей можно решать задачи теплопроводности с учетом заданного теплового потока не только на нагреваемой поверхности, но и на температурном фронте.

Если рассмотреть нелинейную задачу теплопроводности при условии заданных постоянных потоков на нагреваемой поверхности и на границе температурного фронта, используя дополнительное граничное условие, получим

$$\begin{cases} T_t = (K(T)T_x)_x \\ -K(T)T_x|_{x=0} = q_{00} \\ T|_{x=l(t)} = 0 \\ -K(T)T_x|_{x=l(t)} = q_0. \end{cases} \tag{1.84}$$

1. В линейном случае, при $K(T) = 1$, получаем

$$T = \begin{cases} \frac{(q_{00}-q_0)l}{2} - q_{00}x + \frac{q_{00}-q_0}{2l}x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \tag{1.85}$$

Из условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности получаем обыкновенное дифференциальное уравнение $ll' = 3$, откуда $l(t) = \sqrt{6t}$ при условии, что $l(0) = 0$.

2. В нелинейном случае, проанализировав граничные условия на фронте, можно сделать вывод, что условие для потока на фронте можно заменить на более простое условие в зависимости от вида коэффициента теплопроводности.

Для $K(T) = T$, $K(T) = \frac{2T}{1+T^2}$ и коэффициентов теплопроводности, удовлетворяющих условию $K(T)|_{x=l(t)} = 0$, q_0 автоматически становится равным нулю; для $K(T) = 1 \pm pT$ третье условие превращается в условие $-T_x = q_0$.

3. Рассмотрим полуплоскость, на границе $x = 0$ которой при $t \geq 0$ задается поток тепла $q_{00} = \frac{m}{m+y^2}$, где $m = const$. Возьмем $m = 1$. Предположим, что на фронте $x = l(t)$ температура образца равна нулю, а поток зависит от потока на нагреваемой поверхности следующим образом: $q_0 = \frac{1}{10}q_{00}$.

Для линейного уравнения теплопроводности в этом случае задача имеет вид (1.84) при $K(T) = 1$.

Решение при $x < l(t)$ берется в виде многочлена второй степени с тремя слагаемыми. Из граничных условий находим коэффициенты:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} l(t)(q_0 + q_{00}),$$

$$\varphi_1 = -q_{00},$$

$$\varphi_2 = \frac{q_{00} - q_0}{2l(t)}.$$

Из условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности, считая, что потоки стационарны, получаем дифференциальное уравнение относительно $l(t)$:

$$2ll' \left(\frac{1}{3} q_0 + \frac{1}{6} q_{00} \right) = q_{00} - q_0,$$

откуда $l(y,t) = \sqrt{\frac{6(q_0 - q_{00})}{2q_0 + q_{00}} t}$. Тогда функция температуры имеет вид

$$T = \begin{cases} \frac{1}{1+y^2} \left(\frac{33\sqrt{2t}}{40} - x + \frac{3}{10\sqrt{2t}} x^2 \right), & \text{если } x \le l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t). \end{cases}$$

На рисунке 1.11 показана динамика температурного фронта во времени и в аналогичном масштабе построена функция теплового потока $q_{00} = \frac{1}{1+y^2}$.

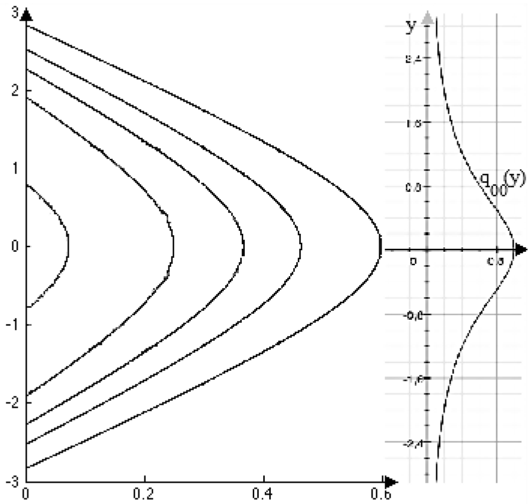

Рис. 1.11. Линии уровня температуры (слева) при $q_{00} = \frac{1}{1+y^2}$, $q_0 = \frac{q_{00}}{10}$ в моменты безразмерного времени $t = 0.02$, $t = 0.04$, $t = 0.07$, $t = 0.1$, $t = 0.15$. Справа — график функции $q_{00}(y)$.

§1.12. Выводы по первой главе

Приближенный метод определения температурных полей основан на идее температурного фронта, которая многократно использовалась Баренблаттом Г.И., Био М.А., Локощенко А.М., Шестериковым С.А., Юмашевым М.В. и другими авторами при решении задач фильтрации, диффузии и теплопроводности.

Метод впервые применен к нелинейному уравнению теплопроводности с различными типами зависимости коэффициента теплопроводности от температуры (монотонно возрастающие, монотонно убывающие, немонотонный варианты зависимостей) и граничным условиям первого и второго рода.

Проведено сравнение полученных приближенных решений линейных задач теплопроводности с точными решениями для граничных условий первого и второго рода. Для нелинейных задач теплопроводности с граничными условиями второго рода верификация метода проводилась с помощью уравнения теплового баланса.

Рассмотрена классическая зависимость $K(T) = T^\sigma$ коэффициента теплопроводности от температуры, которая исследовалась в работах Галактионова В.А., Курдюмова С.П., Калашникова А.С., Михайлова А.П., Олейник О.А., Самарского А.А.

Получены приближенные решения нелинейных задач теплопроводности, когда зависимость коэффициента теплопроводности от температуры описывает реальное поведение материалов при высокотемпературном воздействии. В частности, полученные решения описывают поведение карбида циркония.

Получены приближенные решения задач теплопроводности с различными видами нестационарного начального условия и с заданным тепловым потоком на температурном фронте.

Показано, что с помощью автомодельных переменных в некоторых случаях в рамках приближенного метода определения нестационарных температурных полей возможно упростить вычисления.

Глава 2. Определение напряженно-деформированного состояния при высокотемпературном нагреве. Упругое и упругопластическое поведение материала

§2.1. Основные соотношения для термоупругой задачи

Нестационарное температурное поле вызывает напряженное состояние, которое изменяется с течением времени. Однако в основном изменения температуры происходят достаточно медленно, так что можно пренебречь влиянием ускорений и рассматривать движение как некоторую последовательность состояний равновесия (гипотеза Дюамеля).

Благодаря полученным в предыдущей главе зависимостям для температуры в аналитическом виде, в ряде случаев при высокотемпературном нагреве образца можно довольно просто определить вид напряжений в рассматриваемых телах для широкого класса зависимостей между напряжениями и деформациями.

Рассмотрим однородный изотропный материал, для которого выполнен закон Гука, причем модуль Юнга E, модуль сдвига G, коэффициент теплового расширения α и коэффициент Пуассона ν не зависят от температуры.

В приближении несвязанной термоупругости рассматриваются задачи для образца балочного типа и образца в виде тонкого бесконечного диска. Для обоих вариантов считаем, что длина образца много больше размеров поперечного сечения, поэтому можно предположить, что имеет место плоское напряженное состояние.

Для распределений температуры вида $\theta = \theta(\xi, \beta)$ (далее θ_0 — температура окружающей среды) в размерных переменных в декартовой системе координат (ξ, β, ζ) плоское напряженное состояние определяется (как показано, например,

в работах [7], [37]) следующими уравнениями: $\sigma_\zeta = \sigma_{\xi\zeta} = \sigma_{\beta\zeta} = 0$. Три величины напряжений $\widetilde{\sigma}_\xi,\ \widetilde{\sigma}_\beta,\ \widetilde{\sigma}_{\xi\beta}$, три величины деформаций $\widetilde{\varepsilon}_\xi,\ \widetilde{\varepsilon}_\beta,\ \widetilde{\varepsilon}_{\xi\beta}$ и две величины перемещений $\widetilde{u},\ \widetilde{v}$ удовлетворяют следующим восьми уравнениям:
двум уравнениям равновесия

$$\begin{array}{l} \frac{\partial\widetilde{\sigma}_\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial\widetilde{\sigma}_{\xi\beta}}{\partial\beta} = 0, \\ \frac{\partial\widetilde{\sigma}_{\xi\beta}}{\partial\xi} + \frac{\partial\widetilde{\sigma}_\beta}{\partial\beta} = 0; \end{array} \tag{2.1}$$

трем соотношениям между напряжениями и деформациями

$$\begin{array}{l} \widetilde{\varepsilon}_\xi = \frac{1}{E}\left(\widetilde{\sigma}_\xi - \nu\widetilde{\sigma}_\beta + \alpha\left(\theta - \theta_0\right)\right), \\ \widetilde{\varepsilon}_\beta = \frac{1}{E}\left(\widetilde{\sigma}_\beta - \nu\widetilde{\sigma}_\xi + \alpha\left(\theta - \theta_0\right)\right), \\ \widetilde{\varepsilon}_{\xi\beta} = 2G\widetilde{\sigma}_{\xi\beta}; \end{array} \tag{2.2}$$

трем соотношениям между деформациями и перемещениями

$$\widetilde{\varepsilon}_\xi = \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi},\ \widetilde{\varepsilon}_\beta = \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\beta},\ \widetilde{\varepsilon}_{\xi\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\beta} + \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\xi}\right). \tag{2.3}$$

Модуль сдвига G, модуль Юнга E, коэффициент Пуассона ν связаны соотношением $2G = \frac{E}{1+\nu}$.

Компонента деформации $\widetilde{\varepsilon}_\zeta$ определяется выражением

$$\widetilde{\varepsilon}_\zeta = -\frac{\nu}{E}\left(\widetilde{\sigma}_\xi + \widetilde{\sigma}_\beta\right) + \alpha\left(\theta - \theta_0\right).$$

Граничные условия для случая свободных от нагрузок граничных поверхностей имеют вид

$$\widetilde{\sigma}_\xi n_\xi + \widetilde{\sigma}_{\xi\beta} n_\beta = 0,\quad \widetilde{\sigma}_{\xi\beta} n_\xi + \widetilde{\sigma}_\beta n_\beta = 0, \tag{2.4}$$

где n_ξ, n_β — направляющие косинусы внешней нормали к граничной поверхности.

Условие совместности имеет вид

$$\frac{\partial^2\widetilde{\varepsilon}_\xi}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2\widetilde{\varepsilon}_\beta}{\partial\xi^2} = \frac{\partial^2\widetilde{\varepsilon}_{\xi\beta}}{\partial\xi\partial\beta}$$

или в напряжениях, при отсутствии объемных сил,

$$\nabla^2 \left(\widetilde{\sigma}_\xi + \widetilde{\sigma}_\beta\right) + E\alpha \nabla^2 \left(\theta - \theta_0\right) = 0. \tag{2.5}$$

Таким образом, компоненты напряжения $\widetilde{\sigma}_\xi$, $\widetilde{\sigma}_\beta$, $\widetilde{\sigma}_{\xi\beta}$ находятся из уравнений равновесия (2.1) и условия совместности (2.5) при соответствующих граничных условиях (2.4).

§2.2. Задача термоупругости при высокотемпературном нагреве образца балочного типа

При практическом расчете балок под действием тепловых нагрузок обычно принимается гипотеза Бернулли-Эйлера, по которой сечения, плоские и перпендикулярные к осевой линии до нагружения, остаются плоскими и перпендикулярными и после нагружения и влиянием поперечной деформации можно пренебречь (коэффициент Пуассона равен нулю). Предполагается, что балка статически определима и свободна от внешних нагрузок.

Рассмотрим случай резкого нагрева поверхности $\xi = 0$ балки толщины h. В этом случае можно принять одномерные нестационарные поля напряжений и температур. Согласно гипотезе Бернулли-Эйлера (гипотезе плоских сечений) $\widetilde{\varepsilon}_\zeta = \widetilde{\varepsilon}_0 - \widetilde{\kappa}_0 \xi$, где $\widetilde{\varepsilon}_0$ — деформация при $\xi = 0$, $\widetilde{\kappa}_0$ — кривизна балки. Ось ζ направлена вдоль оси балки.

Условия совместности в напряжениях (2.5) (с учетом гипотезы Бернулли-Эйлера) запишутся в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} \left(\widetilde{\sigma}_\zeta + \alpha E \left(\theta - \theta_0\right)\right) = 0, \tag{2.6}$$

откуда

$$\tilde{\sigma}_\zeta = -\alpha E(\theta - \theta_0) + \widetilde{\varepsilon}_0 - \widetilde{\kappa}_0 \xi.$$

Постоянные $\widetilde{\varepsilon}_0$ и $\widetilde{\kappa}_0$ должны быть определены из нулевых граничных условий для напряжений на краях образца. Но из выражения (2.6) следует, что напряжения не могут быть равны нулю по всей толщине, за исключением частного случая линейного изменения температуры по ξ (в этом случае все компоненты напряжения тождественно равны нулю). Однако значения $\widetilde{\varepsilon}_0$ и $\widetilde{\kappa}_0$ можно выбрать таким образом, чтобы для любой температуры $\theta = \theta(\xi)$ результирующая сила и результирующий момент (на единицу длины), обусловленные напряжением $\widetilde{\sigma}_\zeta$, были равны нулю на краях образца: $\int\limits_0^h \widetilde{\sigma}_\zeta \, \mathrm{d}\xi = 0$, $\int\limits_0^h \widetilde{\sigma}_\zeta \xi \, \mathrm{d}\xi = 0$.

Согласно принципу Сен-Венана, на расстояниях от краев больших, чем одна толщина образца, найденное таким образом выражение для напряжений является хорошим приближением для решения, соответствующего случаю краев, свободных от нагрузок. Поэтому в рамках принципа Сен-Венана приведенное решение является искомым (и единственным) решением для рассматриваемой задачи термоупругости.

Введем безразмерные переменные (аналогично §1.1)

$$\begin{aligned} &\sigma_z = \tfrac{\widetilde{\sigma}_\zeta}{E\alpha(\theta_m - \theta_0)},\ T = \tfrac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0},\ x = \tfrac{\xi}{h},\ y = \tfrac{\beta}{h},\ z = \tfrac{\zeta}{h}, \\ &\varepsilon_z = \tfrac{\widetilde{\varepsilon}_\zeta}{\alpha(\theta_m - \theta_0)},\ \varepsilon_0 = \tfrac{\widetilde{\varepsilon}_0}{\alpha(\theta_m - \theta_0)},\ \kappa_0 = \tfrac{\widetilde{\kappa}_0 h}{\alpha(\theta_m - \theta_0)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

На рисунке 2.1 изображен элемент конструкций (цилиндрическая система координат, ось Oz направлена вверх), рассматриваемый в текущем параграфе.

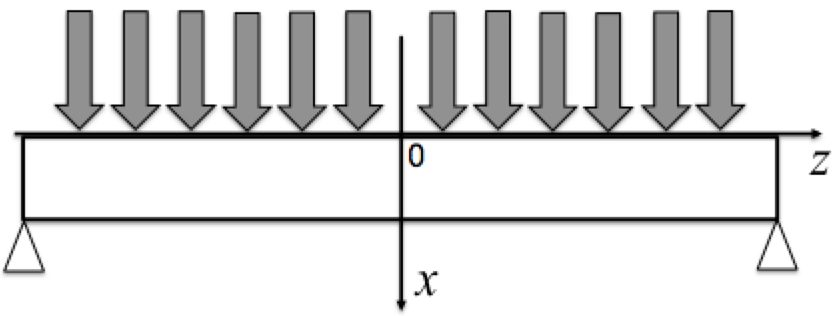

Рис. 2.1. Элемент конструкций балочного типа.

Выражение для напряжений и условия на торцах в безразмерных переменных имеют вид:

$$\sigma_z = \varepsilon_0 - \kappa_0 x - T, \tag{2.8}$$

$$\int\limits_0^1 \sigma_z \,\mathrm{d}x = 0, \ \int\limits_0^1 \sigma_z x \,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) получим общий вид для напряжений

$$\sigma_z = -T + (4-6x)\int\limits_0^{l(t)} T \,\mathrm{d}x + (12x-6)\int\limits_0^{l(t)} Tx \,\mathrm{d}x, \tag{2.10}$$

который для удобства восприятия можно переписать в виде

$$\sigma_z = \begin{cases} -T + (4-6x)\int\limits_0^{l(t)} T \,\mathrm{d}x + (12x-6)\int\limits_0^{l(t)} Tx \,\mathrm{d}x, & \text{если } 0 \le x \le l(t) \\ (4-6x)\int\limits_0^{l(t)} T \,\mathrm{d}x + (12x-6)\int\limits_0^{l(t)} Tx \,\mathrm{d}x, & \text{если } l(t) \le x \le 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

§2.3. Решение задачи термоупругости при высокотемпературном нагреве образца балочного типа

Подставим в полученные выражения (2.11) найденные в главе 1 поля температур для различных зависимостей коэффициента теплопроводности и различных граничных условий задачи теплопроводности.

Для линейной задачи теплопроводности (1.28) при заданной температуре на нагреваемой поверхности получаем

$$\sigma_z = \begin{cases} -\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 + (4-6x)\frac{l}{3} + (12x-6)\frac{l^2}{12}, & \text{если } 0 \le x \le l(t) \\ (4-6x)\frac{l}{3} + (12x-6)\frac{l^2}{12}, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \tag{2.12}$$

Для линейной задачи теплопроводности (1.38)-(1.39) при заданном потоке на нагреваемой поверхности получаем

$$\sigma_z = \begin{cases} \frac{q_{00} l}{2}\left(-\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 + (4-6x)\frac{l}{3} + (12x-6)\frac{l^2}{12}\right), & \text{если } 0 \le x \le l(t) \\ \frac{q_{00} l}{2}\left((4-6x)\frac{l}{3} + (12x-6)\frac{l^2}{12}\right), & \text{если } x > l(t). \end{cases} \tag{2.13}$$

Для нелинейной задачи теплопроводности (1.51) при $K(T) = T$ и заданной температуре на нагреваемой поверхности получаем

$$\sigma_z = \begin{cases} -\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(1+\frac{x}{l}\left(ll'-1\right)\right) + (4-6x)\frac{5l}{9} + (12x-6)\frac{7l^2}{36}, & \text{если } 0 \le x \le l(t) \\ (4-6x)\frac{5l}{9} + (12x-6)\frac{7l^2}{36}, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \tag{2.14}$$

На рисунке 2.2. построены напряжения для линейной (2.12) и нелинейной (2.14) задач теплопроводности.

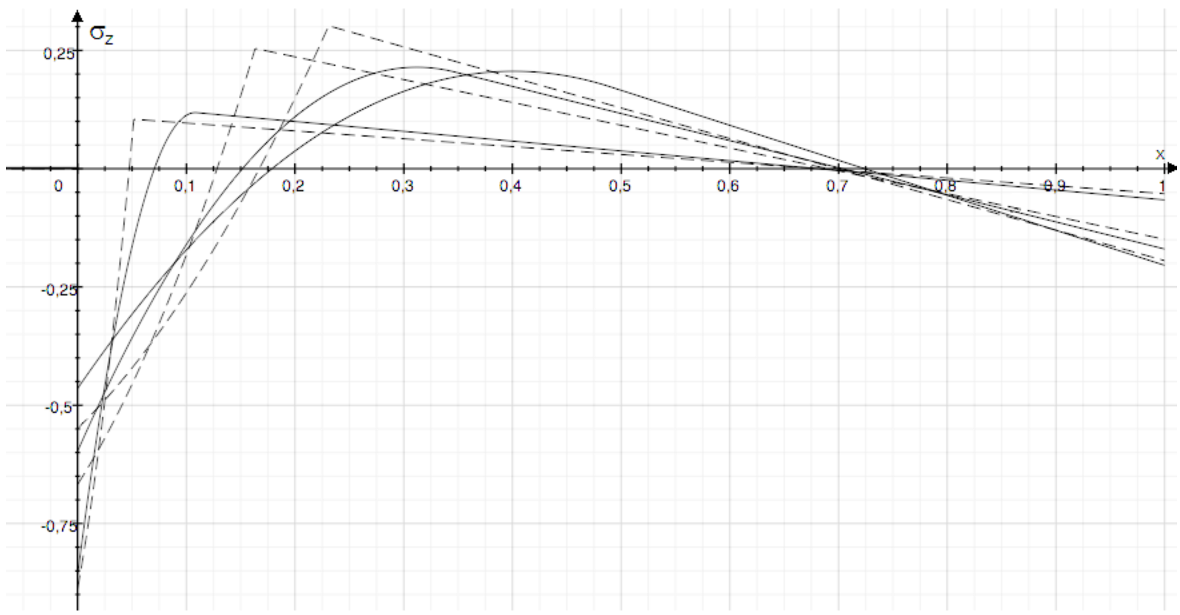

Рис. 2.2. Сравнение полученных полей напряжений для линейной (сплошная кривая, соотношение (2.12)) и нелинейной (штриховая кривая, соотношение (2.14)) задач теплопроводности. Рассмотрены три момента безразмерного времени $t = 0.01$, $t = 0.03$, $t = 0.04$.

Как видно на графике, зависимость температурных напряжений от нелинейности теплофизических свойств материала весьма существенна, когда коэффициент теплопроводности растет с увеличением температуры.

Для нелинейной задачи теплопроводности (1.57)-(1.58) при $K(T) = 1 - pT$ и заданном потоке на нагреваемой поверхности получаем

$$\sigma_z = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-2pq_{00}l}}{2p}\left(-(1-\frac{x}{l})^2 + (4-6x)\frac{l}{3} + (12-6x)\frac{l^2}{12}\right), & \text{если } 0 \leq x \leq l(t) \\ \frac{1-\sqrt{1-2pq_{00}l}}{2p}\left((4-6x)\frac{l}{3} + (12-6x)\frac{l^2}{12}\right), & \text{если } l(t) < x < 1. \end{cases} \tag{2.15}$$

На рисунке 2.3. построены напряжения для линейной (2.13) и нелинейной (2.15) задач теплопроводности.

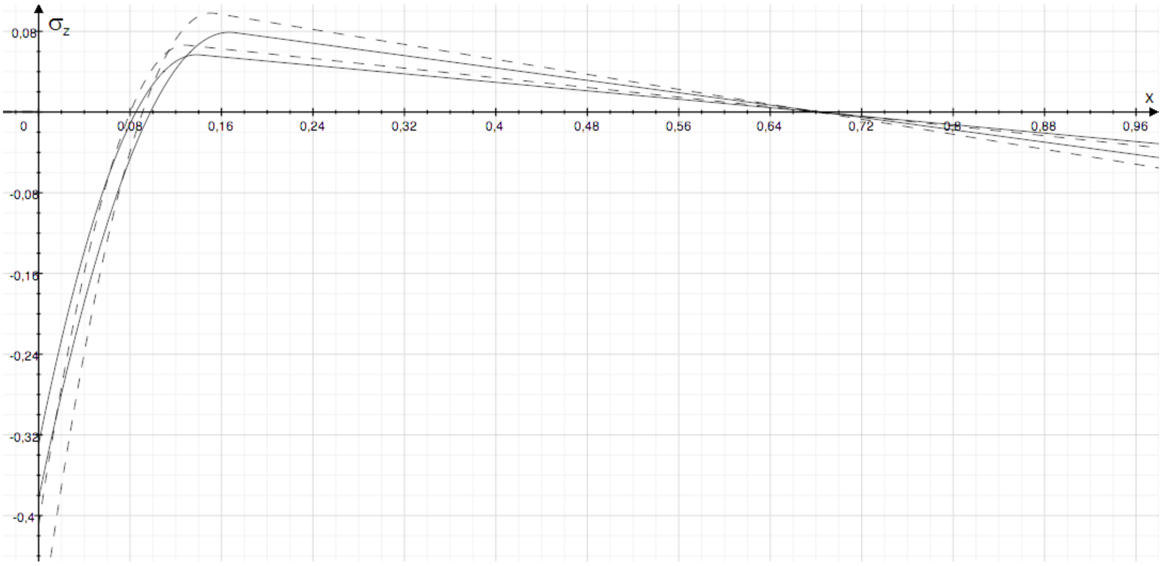

Рис. 2.3. Сравнение полученных полей напряжений для линейной (сплошная кривая, соотношение (2.13)) и нелинейной (штриховая кривая, соотношение (2.15)) задач теплопроводности. Рассмотрены два момента времени $t = 0.01$, $t = 0.03$; $q_{00} = 2$; $p = 1/2$.

На рисунке 2.4. построена зависимость кривизны образца $\kappa_0 = \kappa_0(t)$ в случаях $K(T) = 1$ (соотношение (2.13)) и $K(T) = 1 - pT$ (соотношение (2.15)).

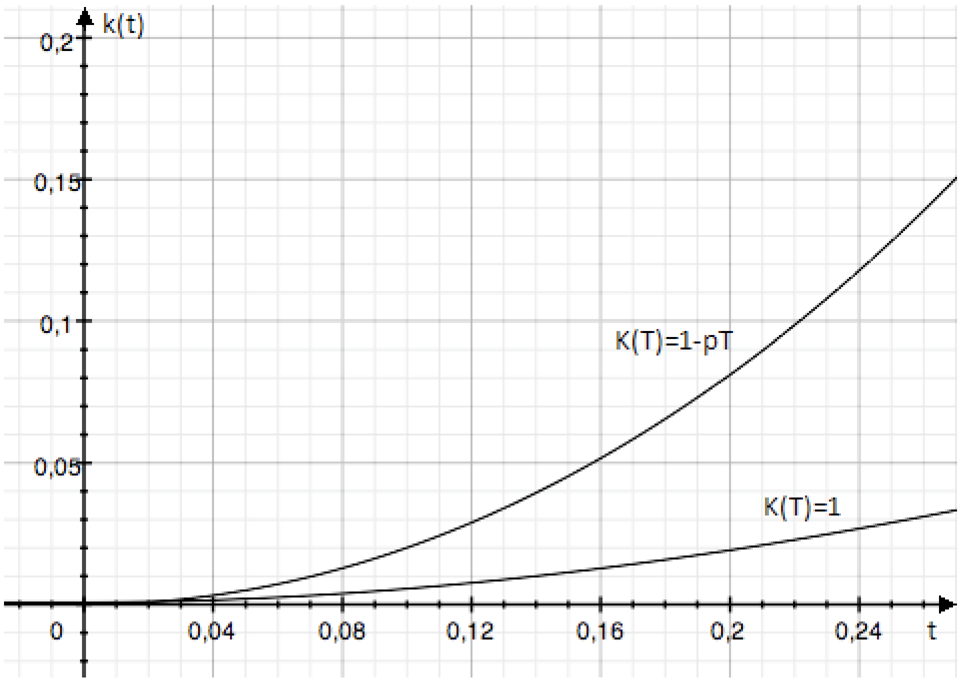

Рис. 2.4. Зависимость кривизны от времени в случаях $K(T) = 1$ и $K(T) = 1 - pT$.

Анализ полученных решений показывает, что для оценки прочности в условиях высокотемпературной обработки элементов конструкций балочного типа необходимо учитывать нелинейность теплофизических свойств материала.

§2.4. Задача термоупругости при высокотемпературном нагреве тонкого диска

Принимается, что распределение температуры в диске зависит только от радиальной координаты, а его поверхность свободна от механических нагрузок.

В размерных переменных для случая диска с центральным круговым отверстием радиуса $\tilde{r} = a$ (как показано, например, в работе [51]), радиальное перемещение $\tilde{u}$ будет являться решением уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{r}}\left(\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\mathrm{d}(\tilde{r}\tilde{u})}{\mathrm{d}\tilde{r}}\right) = \alpha(1+\nu)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tilde{r}}. \tag{2.16}$$

Общее решение уравнения (2.16) имеет вид

$$\tilde{u}(\tilde{r}) = \frac{(1+\nu)\alpha}{\tilde{r}} \int\limits_a^{\tilde{r}} (\theta - \theta_0)\, \tilde{r}\, \mathrm{d}\tilde{r} + C_1 \tilde{r} + \frac{C_2}{\tilde{r}}.$$

Деформации выражаются через радиальное перемещение следующим образом:

$$\widetilde{\varepsilon}_{\tilde{r}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}},\ \widetilde{\varepsilon}_{\tilde{\varphi}} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}}.$$

Из закона Гука получаем зависимости для радиального напряжения $\tilde{\sigma}_{\tilde{r}}$, окружного напряжения $\tilde{\sigma}_{\tilde{\varphi}}$, касательного напряжения $\tilde{\sigma}_{\tilde{r}\tilde{\varphi}}$:

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{r}} = -\alpha E \frac{1}{\tilde{r}^2} \int\limits_a^{\tilde{r}} (\theta - \theta_0)\, \tilde{r}\, \mathrm{d}\tilde{r} + \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu) \frac{1}{\tilde{r}^2} \right], \tag{2.17}$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{\varphi}} = \alpha E \frac{1}{\tilde{r}^2} \int\limits_a^{\tilde{r}} (\theta - \theta_0)\, \tilde{r}\, \mathrm{d}\tilde{r} - \alpha E\,(\theta - \theta_0) + \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu) \frac{1}{\tilde{r}^2} \right], \tag{2.18}$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{r}\tilde{\varphi}} = 0. \tag{2.19}$$

Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{r}}\big|_{\tilde{r}=a} = 0,$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{r}}\big|_{\tilde{r}\to\infty} = 0.$$

При учете этих граничных условий и вводя безразмерные переменные аналогично §1.1 и (2.7), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\tfrac{1}{r^2} \int\limits_1^r T r \,\mathrm{d}r, \\ \sigma_\varphi &= \tfrac{1}{r^2} \int\limits_1^r T r \,\mathrm{d}r - T. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Рассматриваемый элемент конструкции показан на рисунке 2.5.

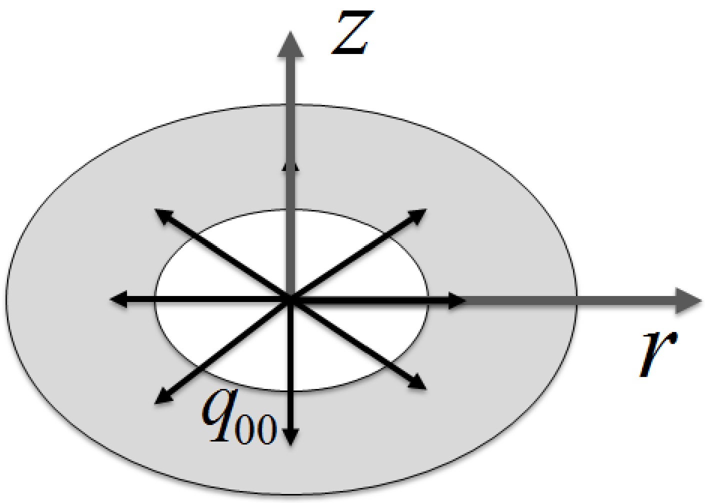

Рис. 2.5. Элемент конструкций в виде тонкого диска.

Если рассмотреть задачу локального нагрева диска без центрального отверстия в точке $r = 0$, с помощью аналогичных рассуждений (считая $a = 0$) получим

$$\sigma_r = -\frac{1}{r^2}\int_0^r Tr\,\mathrm{d}r,$$
$$\sigma_\varphi = \frac{1}{r^2}\int_0^r Tr\,\mathrm{d}r - T.$$

§2.5. Решение задачи термоупругости при высокотемпературном нагреве тонкого диска

На рисунке 2.6 построены окружные напряжения (2.20) для решения задачи теплопроводности (1.61), (1.63) (для задачи разрушения наиболее интересны окружные напряжения, поскольку именно они дают максимальные растягивающие напряжения, которые могут превысить предел прочности материала). Поскольку на границе материал в случае нелинейной задачи теплопроводности прогревается хуже (рис. 1.7), максимальные растягивающие напряжения меньше, чем в случае линейной задачи теплопроводности.

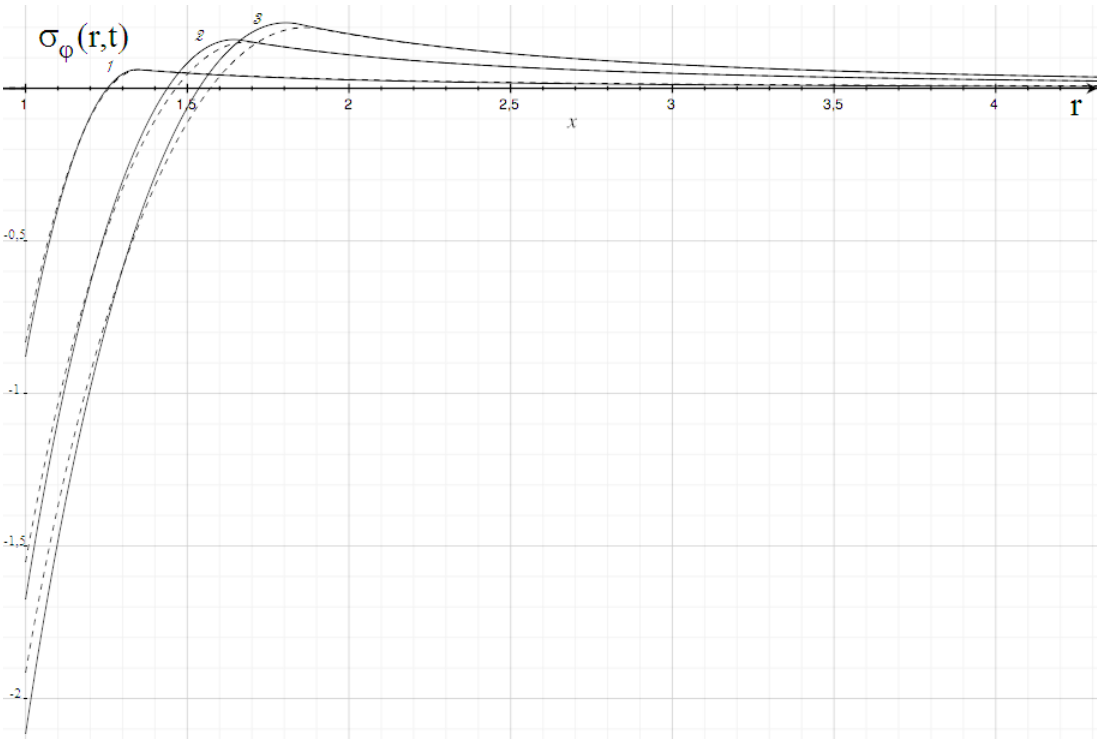

Рис. 2.6. Окружные напряжения $\sigma_\varphi(r,t)$ в моменты безразмерного времени $t = 0.02$ — *1*, $t = 0.09$ — *2*, $t = 0.14$ — *3*. Задан тепловой поток $q_{00} = 5$ на границе внутреннего отверстия $r = 1$. Сплошная линия — напряжения для линейной задачи теплопроводности ($K(T) = 1$), штриховая — для нелинейной задачи теплопроводности с коэффициентом теплопроводности $K(T) = 1 + \frac{1}{10}T$.

На рисунке 2.7 построены окружные напряжения (2.20) для решения задачи теплопроводности (1.61), (1.62). В этом случае при учете нелинейности происходит перегрев поверхности (рис. 1.6), из-за чего максимальные растягивающие напряжения намного больше, чем в случае линейной задачи теплопроводности.

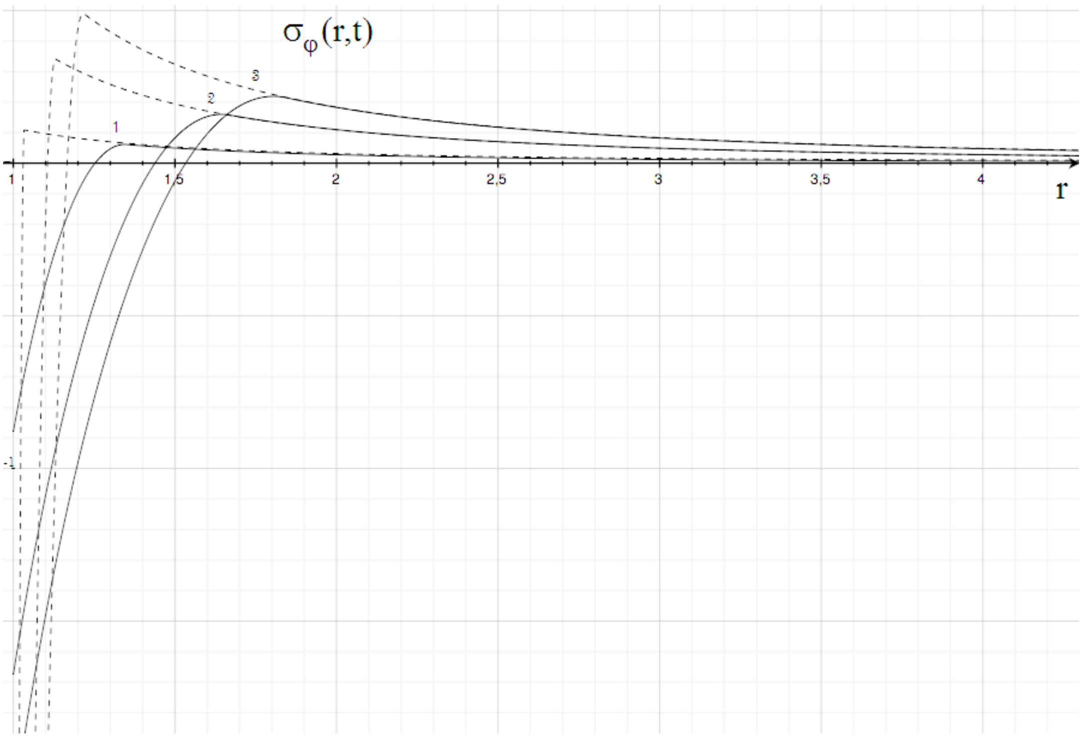

Рис. 2.7. Окружные напряжения $\sigma_\varphi(r,t)$ в моменты безразмерного времени $t = 0.02$ — *1*, $t = 0.09$ — *2*, $t = 0.14$ — *3*. Задан тепловой поток $q_{00} = 5$ на границе внутреннего отверстия $r = 1$. Сплошная линия — напряжения для линейной задачи теплопроводности ($K(T) = 1$), штриховая — для нелинейной задачи теплопроводности с коэффициентом теплопроводности $K(T) = 1 - \frac{1}{10}T$.

Анализ полученного решения показывает, что для оценки прочности в условиях лазерной обработки элементов конструкций необходимо учитывать нелинейность теплофизических свойств материала.

§2.6. Сравнение с экспериментом по обработке образца импульсом лазера

Рассмотрим процесс обработки элементов конструкций лазерным импульсом. Для того, чтобы поставить задачу, необходимо совместить два типа граничных условий. В то время, когда на образец действует импульс, на нагреваемой поверхности задан тепловой поток. Когда лазер выключают (безразмерное время действия импульса обозначим за t_1), тепловой поток становится равным нулю.

На поверхности образца в результате действия лазера образуется тонкий слой расплавленного материала. Поэтому после окончания действия лазера какой-то промежуток времени на границе температура будет оставаться равной температуре плавления.

При $t \leq t_1$ задача имеет вид

$$T_1 = \begin{cases} \frac{q_{00}l}{2}(1-\frac{x}{l})^2, & \text{если } 0 \leq x \leq l(t) \\ 0, & \text{если } x > l(t). \end{cases} \tag{2.21}$$

Для учета окончания воздействия лазерного импульса, необходимо при $t > t_1$ добавить решение с граничными условиями вида $-T_x|_{x=0} = -q_{00}$:

$$T_2 = \begin{cases} -\frac{q_{00}l_1}{2}(1-\frac{x}{l_1})^2, & \text{если } 0 \leq x \leq l_1(t) \\ 0, & \text{если } x > l_1(t). \end{cases} \tag{2.22}$$

Здесь $l_1 = l(t - t_1)$, а $l(t_1)$ — граница температурного фронта в момент прекращения действия лазерного луча.

Когда лазер отключается, прогрев продолжается за счет сильно разогретого материала на поверхности образца. Поэтому при $t > t_1$ нужно ставить еще одно граничное условие $T|_{x=0} = T_0$ и добавить решение

$$T_3 = \begin{cases} \frac{q_{00}l(t_1)}{2}(1-\frac{x}{l_1})^2, & \text{если } 0 \leq x \leq l_1(t) \\ 0, & \text{если } x > l_1(t). \end{cases} \tag{2.23}$$

В рассматриваемом случае (как получено в первой главе (1.39)) $l(t) = \sqrt{6t}$.

На рисунке 2.8 показано распределение температуры при различных моментах времени.

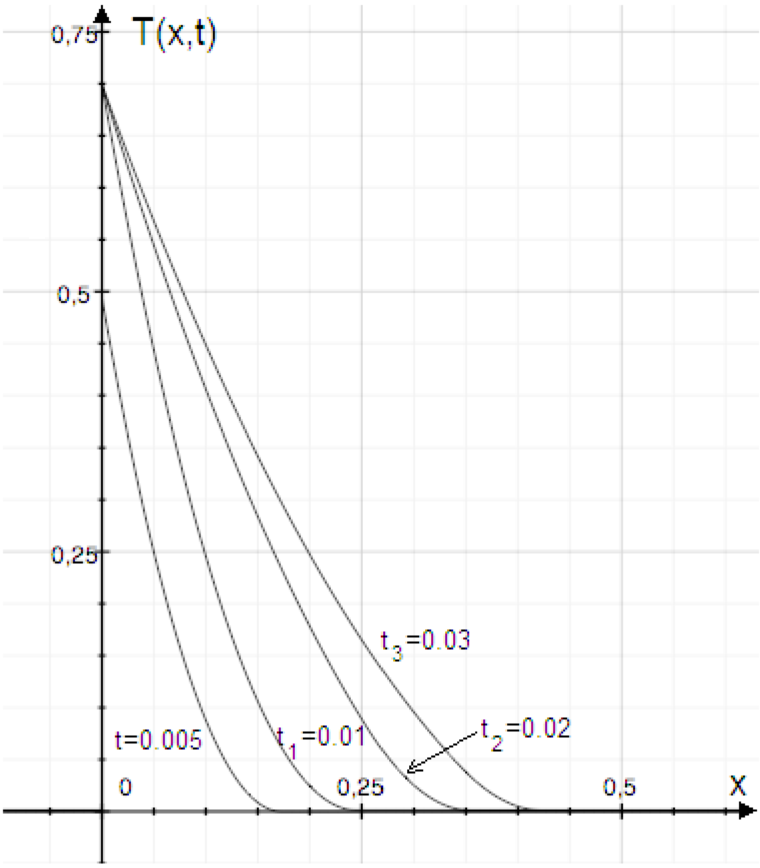

Рис. 2.8. Температура при импульсной обработке образца балочного типа при $q_{00} = 5.7$ в моменты безразмерного времени $t_1 = 0.01$, $t_2 = 0.02$, $t_3 = 0.03$. В момент времени t_1 происходит отключение лазера.

Поле напряжений в этом случае строится по формулам (2.11).

Результаты показаны на рис. 2.9. Для каждого рассматриваемого момента времени отмечены вертикальные линии $l(t_1)$, $l(t_2)$, $l(t_3)$ — положения температурного фронта. σ_p — безразмерный предел прочности материала.

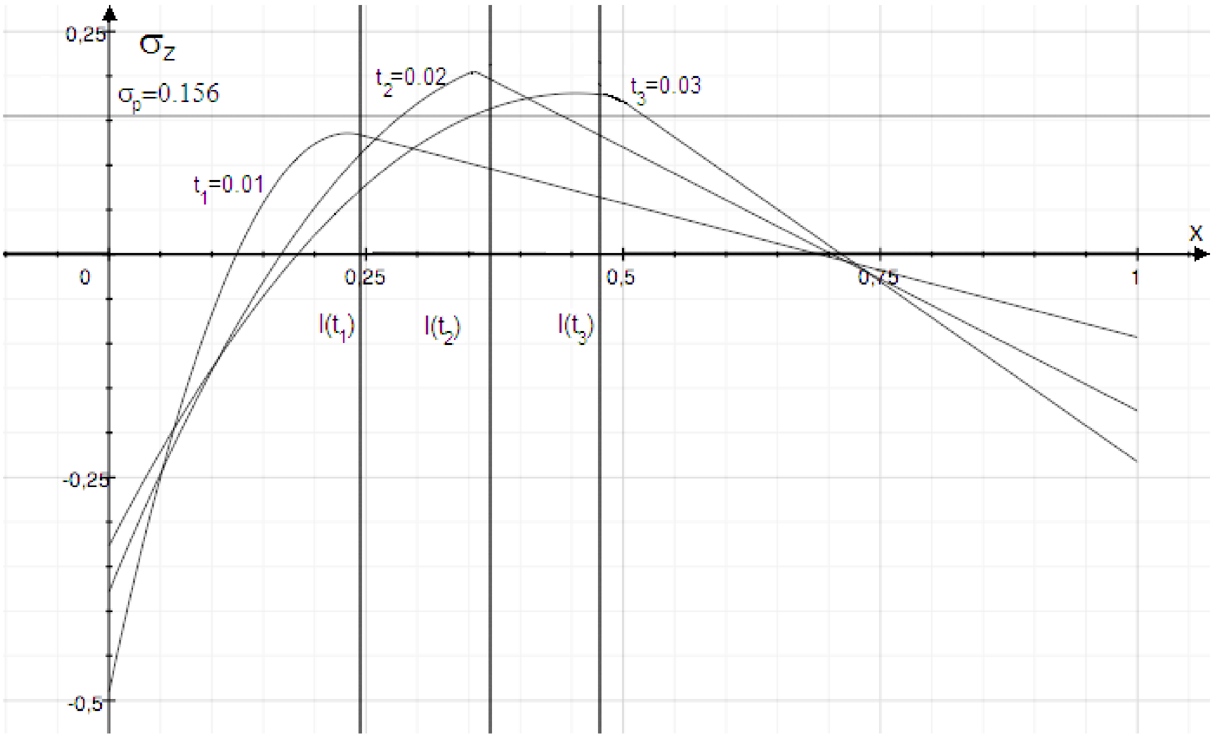

Рис. 2.9. Напряжения и температурный фронт при импульсной обработке образца балочного типа при $q_{00} = 5.7$ в моменты безразмерного времени $t_1 = 0.01$, $t_2 = 0.02$, $t_3 = 0.03$. В момент времени t_1 происходит отключение лазера.

Полученные поля напряжений подтверждают результаты экспериментов, упоминающиеся во введении к диссертации. В момент t_1 максимальные растягивающие напряжения еще не достигли значения, равного пределу прочности материала, но после отключения лазера все еще продолжается прогрев образца за счет нагретого материала на поверхности и растрескивание образца происходит через некоторое время. Этим и объясняется задержка в разрушении, обнаруженная в экспериментах.

§2.7. Учет пластических свойств материала

В этом параграфе принимаем, что во время нагрева материал меняет свойства и в разогретой области могут проявиться свойства пластичности. Материал в этой области считаем идеально упругопластическим [19]. Граница этой области $\lambda = \lambda(t)$ разделяет пластическую и упругую зоны в образце. Также считаем, что материал в пластической области подчиняется условию пластичности Треска:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma_T,$$

где σ_T — безразмерный предел текучести сильно нагретого материала; σ_1, σ_3 — максимальное и минимальное главные безразмерные напряжения.

1. При учете результатов упругого решения для тонкого диска (§§2.4-2.5), критерий Треска примет вид

$$|\sigma_\varphi| = \sigma_T. \tag{2.24}$$

Пусть также в пластической области $(1 \leq r < \lambda(t))$ выполняется уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0. \tag{2.25}$$

Решая (2.25) с учетом (2.24) и с граничным условием

$$\sigma_r|_{r=1} = 0, \tag{2.26}$$

получим распределение радиального напряжения в пластической области (индекс p соответствует области пластичности)

$$\sigma_r{}^p = \sigma_T \left(1 - \frac{1}{r}\right), \ 1 \leq r < l(t). \tag{2.27}$$

Таким образом, в упругой области выполняются соотношения типа (2.17)–(2.20) (индекс e соответствует области упругости)

$$\sigma_r^e = -\frac{1}{r^2}\int\limits_{\lambda}^{r} Tr\,\mathrm{d}r + C_1 - \frac{C_2}{r^2},$$

$$\sigma_\varphi^e = \frac{1}{r^2}\int\limits_{\lambda}^{r} Tr\,\mathrm{d}r - T + C_1 + \frac{C_2}{r^2},$$

а в области пластического течения, прилегающей к области нагрева, выполняются соотношения (2.24) и (2.27). Константы C_1, C_2 находятся из условий сопряжения на границе пластической и упругой областей $r = \lambda(t)$

$$\sigma_\varphi{}^e = \sigma_T,\ \sigma_r{}^e = \sigma_r{}^p \text{ при } r = \lambda.$$

Тогда напряжения в диске в упругопластическом случае будут описываться следующими соотношениями:

$$\sigma_r = \begin{cases} \sigma_T\left(1 - \frac{1}{r}\right),\ 1 \le r < \lambda \\ -\frac{1}{r^2}\int\limits_{1}^{r} Tr\,\mathrm{d}r + \sigma_T\left(1 - \frac{1}{r^2}\right), & \text{если } \lambda \le r \le l(t) \\ -\frac{1}{r^2}\int\limits_{1}^{l(t)} Tr\,\mathrm{d}r + \sigma_T\left(1 - \frac{1}{r^2}\right), & \text{если } r > l(t), \end{cases} \tag{2.28}$$

$$\sigma_\varphi = \begin{cases} \sigma_T,\ 1 \le r < \lambda \\ -T + \frac{1}{r^2}\int\limits_{1}^{r} Tr\,\mathrm{d}r + \sigma_T\left(1 + \frac{1}{r^2}\right), & \text{если } \lambda \le r \le l(t) \\ \frac{1}{r^2}\int\limits_{1}^{l(t)} Tr\,\mathrm{d}r + \sigma_T\left(1 + \frac{1}{r^2}\right), & \text{если } r > l(t). \end{cases} \tag{2.29}$$

На рис. 2.10 показано сравнение полученных полей напряжений при учете только упругих (2.20) (штриховая линия) и упругопластических (2.28), (2.29) (сплошная линия) свойств материала для одного момента безразмерного времени.

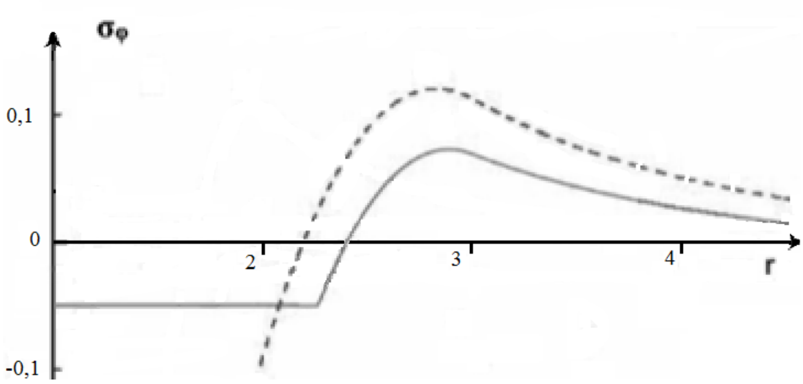

Рис. 2.10. Окружные напряжения при учете только упругих (штриховая линия) и упругопластических (сплошная линия) свойств материала для задачи высокотемпературного нагрева тонкого диска.

Сравнение упругого и упругопластического решений показывает, что окружные напряжения σ_φ, максимум которых достигается в области "холодного" материала, близкой к границе температурного фронта $l(t)$, могут превысить предельное значение и начнется процесс хрупкого разрушения. Учет пластичности в разогретой зоне приводит к уменьшению напряжений в диске, что сильно влияет на прочность образца.

Следует ожидать, что рассмотрение одновременно факта образования зоны разрушения в холодной области и появление пластического течения в зоне нагрева приведет к существенному изменению в кинетике роста зоны разрушения.

2. Для образца балочного типа при пластическом поведении материала (граница $x = \lambda(t)$ разделяет пластическую и упругую области образца) выражения для напряжений (аналогично предыдущему пункту текущего параграфа и при учете соотношений (2.8)-(2.9)) имеют вид

$$\sigma_z = \begin{cases} \sigma_T, & \text{если } 0 \leq x \leq \lambda(t) \\ \varepsilon_0 - \kappa_0 x - T, & \text{если } \lambda(t) \leq x \leq l(t) \\ \varepsilon_0 - \kappa_0 x, & \text{если } x > l(t). \end{cases}$$

Константы ε_0, κ_0 и дополнительная неизвестная функция времени $\lambda = \lambda(t)$ определяются из условий равенства нулю результирующей силы и результирующего момента на краях образца (2.9) и условия сопряжения на границе пластической и упругой областей

$$\sigma_z = \sigma_T \qquad \text{при} \qquad x = \lambda(t).$$

Аналогично предыдущему пункту, учет пластических свойств материала показывает уменьшение максимальных растягивающих напряжений в образце балочного типа по сравнению с решением упругой задачи.

§2.8. Выводы по второй главе

Рассмотрены задачи определения упругих термонапряжений элементов конструкций при высокотемпературном нагреве в приближении несвязанной термоупругости.

На основе развитого в первой главе диссертации приближенного метода решения уравнения теплопроводности получены аналитические решения задач термоупругости для балки и тонкого диска.

Построено приближенное решение задачи однократного импульсного воздействия на образец и получено аналитическое решение задачи термоупругости, имеющее хорошее качественное согласование с результатами экспериментов.

В рамках идеально-пластического рассмотрения изучена возможность пластического течения материала в сильно прогретых областях элементов конструкций.

Показано, что учет нелинейности теплофизических и механических свойств материала оказывает значительное влияние на распределение напряжений.

Глава 3. Исследование деформирования и разрушения образца при высокотемпературном нагреве

§3.1. Исследование деформирования образца при высокотемпературном нагреве

Рассмотрим процесс высокотемпературного нагрева тонкого диска с центральным круговым отверстием.

Согласно закону Гука при плоском напряженном состоянии с учетом того, что деформация частично вызвана температурным расширением, а частично действием напряжения (работы [51], [42]), получаем

$$\widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{r}} = \alpha\left(\theta - \theta_0\right) + \frac{1}{E}\left(\widetilde{\sigma}_{\widetilde{r}} - \nu\widetilde{\sigma}_{\widetilde{\varphi}}\right),$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{\varphi}} = \alpha\left(\theta - \theta_0\right) + \frac{1}{E}\left(\widetilde{\sigma}_{\widetilde{\varphi}} - \nu\widetilde{\sigma}_{\widetilde{r}}\right),$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{z}} = \alpha\left(\theta - \theta_0\right) - \frac{\nu}{E}\left(\widetilde{\sigma}_{\widetilde{r}} + \widetilde{\sigma}_{\widetilde{\varphi}}\right).$$

Для исследования деформированного состояния образца наиболее интересны значения деформации выпучивания $\widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{z}}$.

Вводя безразмерные переменные (2.7) получаем

$$\varepsilon_z = T - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\varphi\right). \tag{3.1}$$

Напряжения вычисляются по формулам (2.20). Для упругого поведения материала на рис. 3.1 построены графики зависимости $\varepsilon_z = \varepsilon_z(r,t)$ (3.1) в случае линейной ($K(T) = 1$) и в случае нелинейной ($K(T) = 1 - pT$) задач теплопроводности.

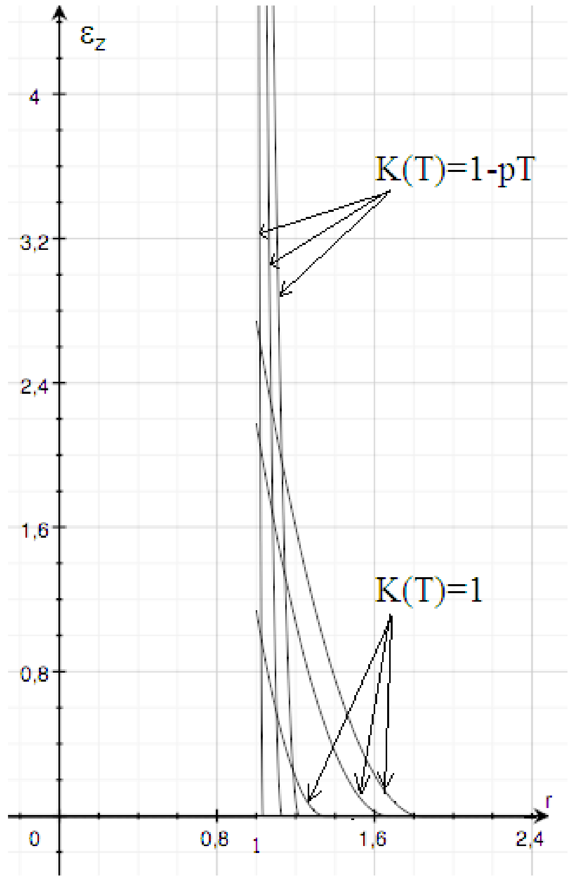

Рис. 3.1. Сравнение деформации выпучивания диска без учета нелинейности теплофизических свойств материала и с учетом нелинейности для трех моментов безразмерного времени $t = 0.02$, $t = 0.09$, $t = 0.14$. $p = 1/10$. Задан тепловой поток $q_{00} = 5$ на границе $r = 1$ внутреннего отверстия диска.

§3.2. Постановка задачи для упругого и упругопластического поведения материала

Будем рассматривать процесс хрупкого разрушения, исходя из идеи фронта разрушения, развитой в работах [4], [14], [35].

В работе [4] отмечено, что в ряде случаев достижение максимальным растягивающим напряжением предела прочности может привести к образованию конечных, но малых областей разрушения, наличие которых не приводит к глобальному разрушению тела.

В работе [14] строится модель для математического описания деформирования и движения твердых горных пород при действии на них интенсивных нагрузок и в рамках этой модели рассматривается задача о действии взрыва сосредоточенного заряда в хрупкой горной породе.

В работе [35] рассмотрено квазистатическое деформирование и разрушение материалов при высокотемпературном воздействии. В качестве критерия разрушения использовалось условие достижения напряжениями своих критических значений. Дальнейшие расчеты напряженного состояния и роста трещин проводились в рамках предположения, что на вновь образующихся свободных поверхностях соответствующие элементы поля напряжений равны нулю, а на концах трещины выполняются условия критерия разрушения.

Критическое состояние, предшествующее фактическому разрушению с образованием трещин может быть описано в виде некоторого инвариантного соотношения, связывающего компоненты тензора напряжений (условия прочности). В общем случае условие прочности для изотропного материала запишется в виде

$$\Phi\left(I_1, I_2, I_3\right) \leq 0, \tag{3.2}$$

где I_1, I_2, I_3 — некоторые независимые инварианты тензора напряжений (например, главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

Если напряженное состояние элемента таково, что в условии (3.2) имеет место неравенство, то будем считать состояние элемента прочным. При достижении равенства в (3.2) будет достигнут предел прочности в элементе и он разрушится — в нем возникнут трещины. Совокупность точек рассматриваемого объема образца, в которых достигнуто равенство (3.2) и которые в последующий момент окажутся разрушенными, образует границу между неразрушенной частью рассматриваемого элемента и разрушенной.

В рамках используемого подхода считаем, что равенство (3.2) выполняется на поверхности, отделяющей разрушенную часть элемента конструкций от неразрушенной, как предельное соотношение, вырабатывающееся при приближении к этой поверхности из неразрушенной области. За поверхностью разрушения образуется множество мелких трещин, поэтому разрушенный материал тоже можно рассматривать как сплошную среду и описывать его уравнениями механики сплошных сред.

Поверхность, разделяющая оба состояния (разрушенное и неразрушенное), называется фронтом разрушения.

Если свойства разрушенного и неразрушенного материалов известны, условия совместности на фронте разрушения (законы сохранения) вместе с равенством (3.2) образуют систему граничных соотношений, формулируемых на поверхности разрыва, достаточную для однозначного решения задачи в целом [14].

Наибольший интерес с точки зрения анализа возможности появления разрушения представляет окружное напряжение, поскольку оно становится растягивающим. В этом случае простейшим естественным ограничением для изотропного материала будет

$$\sigma_\varphi \leq \sigma_p. \tag{3.3}$$

При достижении предела прочности на растяжение (равенства в условии (3.3)) в диске возникает зона "разрушения", размеры которой определяются с использованием модели, представленной в работах [4], [35]. В этой зоне выполняется критериальное условие $\sigma_\varphi = 0$, тогда как σ_r определяется из условия равновесия.

Из анализа соотношений для напряжений, полученных в предыдущей главе, следует, что максимум растягивающего напряжения $\max\sigma_\varphi$ как функции безразмерной координаты достигается при условии $r < l(t)$. Абсолютный максимум безразмерного напряжения по переменным r и $l(t)$ может быть определен из решения системы уравнений

$$\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial r} = 0, \ \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial l} = 0,$$

откуда получаются два алгебраических уравнения для нахождения критических значений r и $l(t)$, при которых окружное напряжение имеет максимальное значение. Если в определенный момент времени, т.е. при определенном значении параметра $l = l_p$, напряжение σ_φ достигнет предела прочности σ_p, то происходит образование зоны "разрушения", границы которой

$a(t)$ и $b(t)$ определяются из условия сопряжения для напряжений, вводимых ниже. В работе [4] показано, что зона "разрушения" развивается мгновенно, охватывая некоторую область. Поэтому весь образец разбивается на три области: первая (индекс 1), соответствующая $1 < r < a(t)$ — сплошное тело с исходными характеристиками, вторая (индекс 2), соответствующая $a(t) < r < b(t)$ — зона материала, удовлетворяющего условию $\sigma_\varphi = 0$ и третья $r > b(t)$ — сплошное тело с исходными характеристиками (индекс 3).

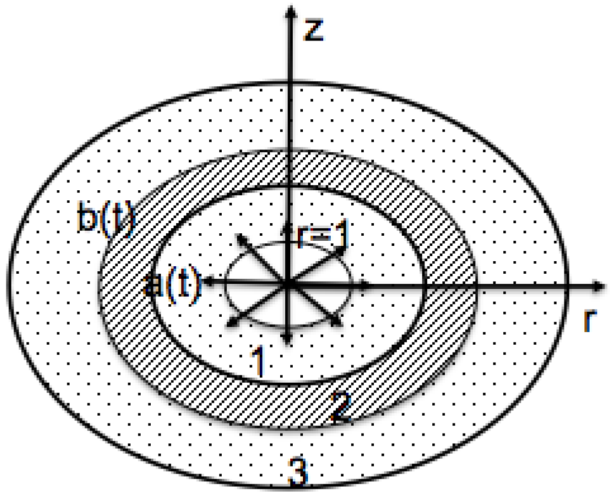

Рис. 3.2. Расположение трех расчетных зон для напряжений в диске с круговым отверстием.

Согласно принятой модели в области разрушения $a(t) < r < b(t)$ напряжения σ_r определяются решением дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} + \frac{\sigma_r}{r} = 0, \tag{3.4}$$

которое получается из условия равновесия (2.25) при $\sigma_\varphi = 0$. Тогда из (3.4) получим, что при $a(t) < r < b(t)$

$$\sigma_r = \frac{C_1^{(2)}}{r}. \tag{3.5}$$

Радиальное перемещение u в области разрушения определим из первых соотношений закона Гука и кинематических соотношений. Тогда при учете (3.5) получим

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = T + \frac{C_1^{(2)}}{r},$$

откуда

$$u = \int\limits_1^r T\,\mathrm{d}r + C_1^{(2)}\ln r + C_2^{(2)}.$$

Таким образом, напряженное состояние диска в области "хрупкого разрушения" определяется системой формул

$$\sigma_r^{(1)} = -\frac{1}{r^2}\int\limits_1^r Tr\,\mathrm{d}r + C_1^{(1)} - \frac{C_2^{(1)}}{r^2},$$

$$\sigma_r^{(2)} = \frac{C_1^{(2)}}{r},$$

$$\sigma_r^{(3)} = -\frac{1}{r^2}\int\limits_1^r Tr\,\mathrm{d}r + C_1^{(3)} - \frac{C_2^{(3)}}{r^2},$$

$$\sigma_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r^2}\int\limits_1^r Tr\,\mathrm{d}r - T + C_1^{(1)} - \frac{C_2^{(1)}}{r^2},$$

$$\sigma_\varphi^{(2)} = 0,$$

$$\sigma_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r^2}\int\limits_1^r Tr\,\mathrm{d}r - T + C_1^{(3)} - \frac{C_2^{(3)}}{r^2}.$$

Константы $C_1^{(1)},\ C_2^{(1)},\ C_1^{(2)},\ C_2^{(2)},\ C_1^{(3)},\ C_2^{(3)}$ и функции времени $a(t),\ b(t)$ находим из алгебраической системы граничных условий и условий сопряжения на границах областей 1, 2, 3 (диаметр диска считается много большим, чем диаметр внутреннего кругового отверстия):

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} = 0,$$

$$\sigma_r^{(3)}\Big|_{r\to\infty} = 0,$$

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=a(t)} = \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=a(t)},$$

$$\sigma_r^{(2)}\Big|_{r=b(t)} = \sigma_r^{(3)}\Big|_{r=b(t)},$$

$$\sigma_\varphi^{(1)}\Big|_{r=a(t)} = \sigma_p,$$

$$\sigma_\varphi^{(3)}\Big|_{r=b(t)} = \sigma_p,$$

$$u^{(1)}\Big|_{r=a(t)} = u^{(2)}\Big|_{r=a(t)},$$

$$u^{(2)}\Big|_{r=b(t)} = u^{(3)}\Big|_{r=b(t)}.$$

§3.3. Решение задачи для упругого и упругопластического поведения материала

Результаты расчетов для окружных напряжений при учете упругопластического поведения материала с одновременным ростом зоны ”разрушения” показаны на рис. 3.1. Для наглядности выбраны два момента времени: при $t = 0.167$ и $t = 0.24$ показано развитие зоны разрушения в случае $K(T) = 1$; при $t = 0.24$ (кривая 3) построено решение в случае $K(T) = 1 - pT$.

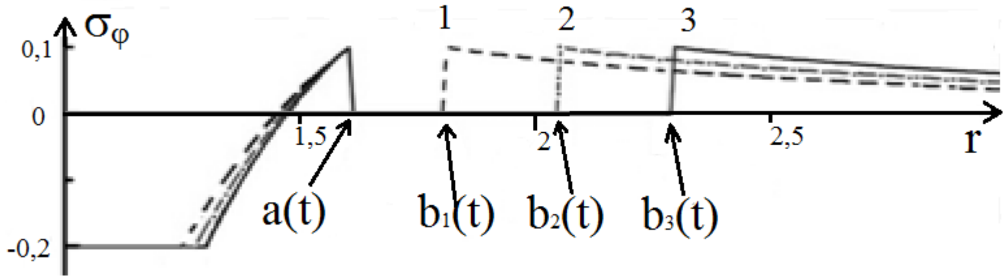

Рис. 3.3. Напряжения с учетом зоны "разрушения" (отрезки $[a(t), b_i(t)]$) для задачи высокотемпературного нагрева тонкого диска. Моменты безразмерного времени $t = 0.167$ (линия 1, линейная задача теплопроводности), $t = 0.24$ (линии 2 — линейная задача и 3 — нелинейная задача теплопроводности). $p = 1/10$.

§3.4. Выводы по третьей главе

На основании полученных в предыдущих главах результатов проведено исследование процессов деформирования и разрушения элементов конструкций при высокотемпературном воздействии с учетом нелинейности теплофизических и механических свойств материала.

Процесс разрушения рассматривался исходя из идеи фронта разрушения, используемой в работах Бахарева М.С., Григоряна С.С., Миркина Л.И., Юмашевой М.А.

Исследовано влияние нелинейности теплофизических и механических свойств материала на образование и развитие зон разрушения.

Глава 4. Методы предупреждения терморазрушений при быстром нагреве

Начало исследований по вопросу подавления и предупреждения терморазрушений было положено Шестериковым С.А. в работах [57]–[61].

§4.1. Уравнение теплопроводности при учете теплообмена на внешних поверхностях образца

Выведем линейное уравнение теплопроводности при теплообмене на наружных поверхностях образца аналогично [30], [41].

Рассмотрим элемент, ограниченный элементарными площадками $\mathrm{d}\xi$, $\mathrm{d}\beta$, высота которого равна толщине образца δ (рисунок 4.1).

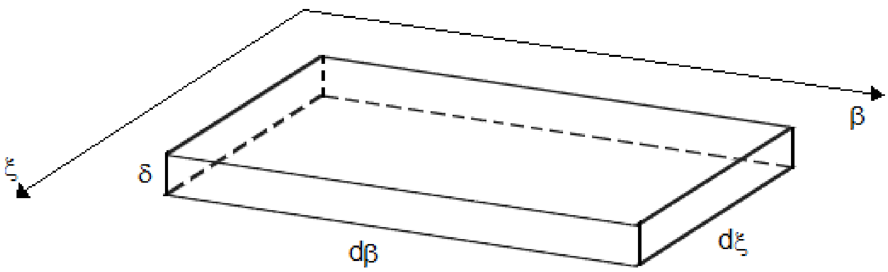

Рис. 4.1. Вид бесконечно малого элемента образца.

Составим тепловой баланс для этого элемента. Через боковую поверхность $\delta \mathrm{d}\beta$, ближайшую к началу координат, поступает количество тепла, равное $-\varkappa \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \delta \mathrm{d}\beta$, через противоположную поверхность (ее температура изменяется на величину $\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi$) поступает количество тепла $-\varkappa \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}\mathrm{d}\xi \right) \delta \mathrm{d}\beta$.

Таким образом, в направлении оси $O\xi$ поступает количество тепла, равное $\varkappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \delta \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\beta$. Те же рассуждения показывают, что в направлении оси $O\beta$ количество тепла будет равно $\varkappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} \delta \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\beta$.

На обоих элементах внешних поверхностей согласно закону теплообмена Ньютона отдается количество тепла $2H_f(\theta-\theta_0)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\beta$, где θ_0 — температура окружающей среды, H_f — коэффициент теплоотдачи.

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}-\frac{2H_f}{\varkappa\delta\rho c}(\theta-\theta_0).$$

После введения безразмерных переменных (аналогично §1.1 и (2.7)) в безразмерной форме получим

$$T_t=T_{xx}+T_{yy}-\eta T.$$

§4.2. Решение задачи теплопроводности при учете теплообмена на внешних поверхностях образца балочного типа

Рассмотрим прямоугольную балку (рисунок 4.2) толщиной $2h=1$, такую, что ее толщина и ширина малы по сравнению с ее длиной. Пусть температура меняется только по толщине, т.е. $T=T(x)$. Нагрев происходит по боковой поверхности $x=\frac{1}{2}$, на которой с момента времени $t=0$ задается перпендикулярный поверхности и направленный в глубь образца тепловой поток $q_{00}=\mathrm{const}$. На границе фронта $x=l(t)$ температура и тепловой поток равны нулю. Функция границы температурного фронта $l(t)$ в начальный момент времени принимает значение $\frac{1}{2}$ и монотонно уменьшается до значения $-\frac{1}{2}$.

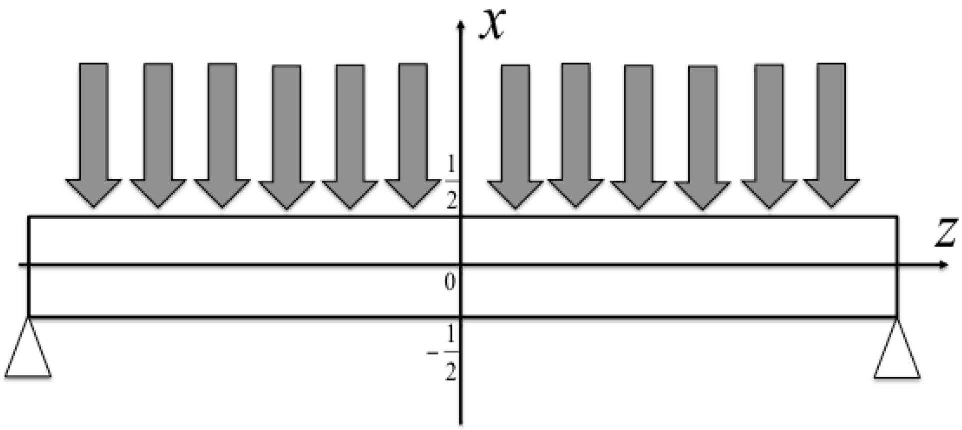

Рис. 4.2. Элемент конструкций балочного типа.

Задача теплопроводности в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{cases} T_t = T_{xx} - \eta T \\ -T_x|_{x=1/2} = q_{00} \\ T|_{x=l(t)} = 0 \\ T_x|_{x=l(t)} = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\eta = \text{const}$ — коэффициент теплообмена на внешних поверхностях.

С помощью метода приближенного вычисления температурных полей получаем выражение для температуры $T = T(x, t)$

$$T(x,t) = \begin{cases} \frac{q_{00}}{2(1/2 - l(t))} \left(l(t) - x\right)^2, & \text{если } l(t) \leq x \leq 1/2 \\ 0, & \text{если } x < l(t) \end{cases} \tag{4.2}$$

и дифференциальное уравнение относительно функции движения температурного фронта $l(t)$

$$-2(\frac{1}{2} - l)l' + \eta(\frac{1}{2} - l)^2 - 6 = 0. \tag{4.3}$$

Решение дифференциального уравнения (4.3) имеет вид

$$\begin{array}{ll} l(t) = \frac{1}{2} - \sqrt{6t}, & \text{если } \eta = 0; \\ l(t) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{6(1-\exp(-\eta t))}{\eta}}, & \text{если } \eta = \text{const} \neq 0. \end{array} \tag{4.4}$$

Выражения (4.2) и (4.4) полностью определяют температурное поле задачи (4.1) нагрева балки, которое построено на рисунке 4.3.

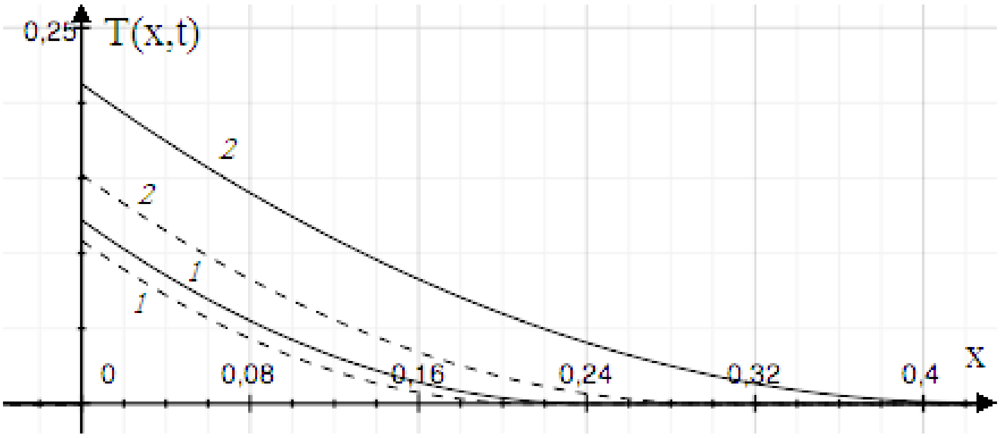

Рис. 4.3. Безразмерная температура в моменты безразмерного времени $t = 0.01$ — *1*, $t = 0.03$ — *2*. Задан поток на нагреваемой поверхности $q_{00} = 1$. Сплошная линия — задача при $\eta = 0$, штриховая — задача при $\eta = 50$.

Анализ полученного решения показывает, что при отсутствии теплообмена ($\eta = 0$) градиент температуры между поверхностными и внутренними областями больше, чем при $\eta \neq 0$. Коэффициент η может достигать различных величин, например, для теплообмена воздух-гладкая поверхность [54] коэффициент равен $5,6 + 4v$, где v — скорость потока воздуха.

§4.3. Расчет полей напряжений для задачи теплопроводности с учетом теплообмена на внешних поверхностях образца балочного типа

В этом параграфе все выражения записываются в безразмерных переменных. В размерном виде основные соотношения рассматриваются в параграфах 2.1 и 2.2. В параграфе 2.2 введены безразмерные переменные.

Так как балка тонкая, предполагается, что имеет место плоское напряженное состояние (аналогично §2.1) $\sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{zy} = 0$. Температурное поле задачи теплопроводности (4.1) полностью определяется соотношениями (4.2) и (4.4).

Решение задачи термоупругости можно найти полуобратным методом, делая предположение, что $\sigma_x = \sigma_{zx} = 0$, $\sigma_z = \sigma_z(x)$ и показывая, что точное решение действительно имеет такой вид (т.е. компоненты напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия, уравнениям совместности и граничным условиям).

Уравнения равновесия удовлетворяются тождественно, уравнение совместности в напряжениях сводится к уравнению (аналогичному (2.6))

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\sigma_z + T) = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = -T + \varepsilon_0 - \kappa_0 x. \tag{4.5}$$

Постоянные ε_0, κ_0 должны быть определены из нулевых граничных условий для напряжений на торцах балки.

Условия равенства нулю соответственно результирующей силы и результирующего момента на торцах для рассматриваемой задачи имеют вид $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_z\,\mathrm{d}x = 0$, $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\sigma_z\,\mathrm{d}x = 0$, откуда с учетом (4.5) получаем выражения для безразмерных напряжений:

$$\sigma_z = -T + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T\,\mathrm{d}x + 3x\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Tx\,\mathrm{d}x.$$

Для рассматриваемой термоупругой задачи, учитывая, что $T = 0$ при $x < l(t)$, имеем

$$\sigma_z = \begin{cases} -T + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T\,\mathrm{d}x + 3x\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Tx\,\mathrm{d}x, & \text{если } l(t) \le x \le 1/2 \\ \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T\,\mathrm{d}x + 3x\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Tx\,\mathrm{d}x, & \text{если } -\frac{1}{2} < x < l(t). \end{cases} \tag{4.6}$$

Подставив (4.2) и (4.4) в (4.6), получим искомые выражения для напряжений, анализ которых показывает, что в зависимости от момента времени максимальные растягивающие напряжения при $\eta = 0$ больше на $15 - 30\%$, чем при $\eta = 50$. Более того, при увеличении константы η (например, в два раза) максимальные напряжения уменьшаются на $10 - 25\%$. На рис. 4.4 показано различие максимальных напряжений в непрогретой зоне материала в момент безразмерного времени $t = 0,02$ при разных значениях коэффициента теплообмена η, что характеризует различные степени воздействия на образец при помощи обдува поверхностей.

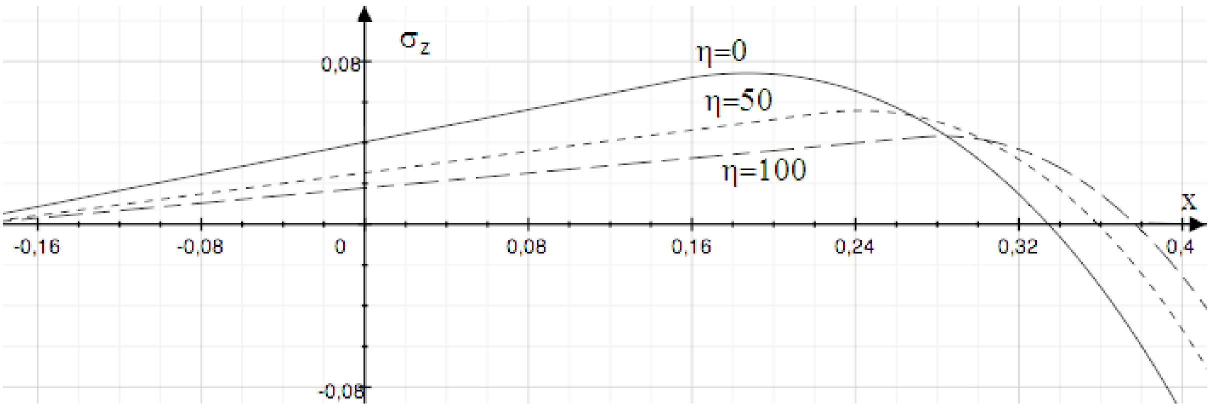

Рис. 4.4. Сравнение напряжений при лазерном воздействии с учетом теплообмена на поверхности образца балочного типа для одного момента безразмерного времени $t = 0.02$ для значений $\eta = 0$, $\eta = 50$, $\eta = 100$.

Для наглядности показан график не по всей толщине балки, однако напряжения уравновешены (площади под кривой в отрицательных и положительных областях равны).

Увеличение коэффициента теплообмена η влечет за собой уменьшение градиентов температуры, что влияет на максимальные растягивающие напряжения. Таким образом при лазерной обработке элементов конструкций можно уменьшить нежелательные термонапряжения с помощью обдува образца.

§4.4. Решение задачи теплопроводности при учете теплообмена на внешних поверхностях тонкого диска

Рассмотрим процесс нагрева тонкого бесконечного диска по центральному круговому отверстию радиуса $r = 1$. На внутренней границе задается тепловой поток $q_{00} = \mathrm{const}$, на границе фронта $r = l(t)$ температура и тепловой поток считаются равными нулю. В этом случае одномерная задача теплопроводности в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{cases} T_t = T_{rr} + \frac{1}{r}T_r - \eta T \\ -T_r\big|_{r=1} = q_{00} \\ T\big|_{r=l(t)} = 0 \\ T_r\big|_{r=l(t)} = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Решение температурной задачи (4.7) при $\eta = 0$ дает соотношения (1.39), (1.40), определяющие температурное поле в тонком бесконечном диске с центральным круговым отверстием (работа [80]):

$$T(r,t) = \begin{cases} \frac{q_{00}}{2(l(t)-1)}\left(r - l(t)\right)^2, & \text{если } 1 \le r \le l(t) \\ 0, & \text{если } r > l(t), \end{cases} \tag{4.8}$$

$$l^3(t) + l^2(t) - 5l(t) + 3 = 24t. \tag{4.9}$$

В случае учета обдува боковой поверхности при помощи метода приближенного определения температурных полей получаем зависимость $l(t)$ от времени t и коэффициента η (при этом зависимость (4.8) останется неизменной):

$$l^3(t) + l^2(t) - 5l(t) + 3 = \frac{24}{\eta} - \exp(-\eta t)\frac{24}{\eta}. \tag{4.10}$$

Аналогично задаче для образца балочного типа, выражения (4.8)–(4.10) определяют температурное поле задачи (4.7).

§4.5. Расчет полей напряжений для задачи теплопроводности с учетом теплообмена на внешних поверхностях тонкого диска

Аналитические выражения напряжений $\sigma = \sigma(T, r, l(t))$ для термоупругой задачи в безразмерных переменных имеют вид (2.20). Для наглядности запишем их в виде

$$\sigma_r = \begin{cases} -\frac{1}{r^2}\int\limits_1^r Tr\,\mathrm{d}r, & \text{если } 1 \le r \le l(t) \\ -\frac{1}{r^2}\int\limits_1^{l(t)} Tr\,\mathrm{d}r, & \text{если } r > l(t), \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\sigma_\varphi = \begin{cases} -T + \frac{1}{r^2}\int\limits_1^r Tr\,\mathrm{d}r, & \text{если } 1 \le r \le l(t) \\ \frac{1}{r^2}\int\limits_1^{l(t)} Tr\,\mathrm{d}r, & \text{если } r > l(t). \end{cases} \tag{4.12}$$

Подставляя (4.8)–(4.10) в (4.11)–(4.12), получаем напряжения, учитывающие обдув боковой поверхности. Как и в задаче по обработке балки, можно сделать вывод, что в различные моменты времени максимальные растягивающие напряжения при $\eta = 0$ больше на $30 - 70\%$, чем при учете обдува поверхности ($\eta \neq 0$). Также происходит уменьшение максимальных напряжений при увеличении коэффициента, отвечающего за обдув. На рис. 4.5 показано различие максимальных растягивающих напряжений в области хрупкого разрушения в момент безразмерного времени $t = 0,029$ при различных η.

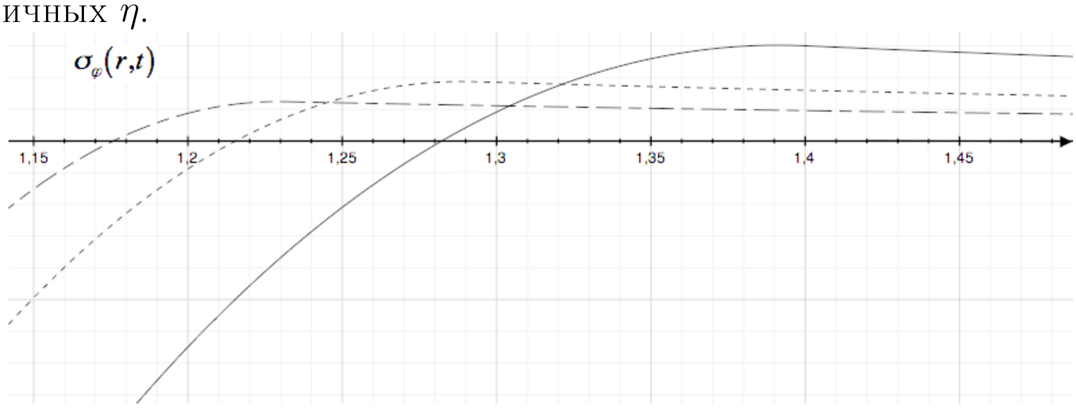

Рис. 4.5. Безразмерные напряжения $\sigma_\varphi(r,t)$ при лазерной обработке диска в момент безразмерного времени $t = 0,029$ при $\eta = 0$ (сплошная кривая), при $\eta = 50$ (пунктир) и при $\eta = 100$ (штрих-пунктир); $q_{00} = 2$.

Анализ напряженного состояния в обоих случаях показывает, что обдув образцов, подвергающихся лазерному воздействию, позволяет уменьшить термомеханические напряжения и тем самым предотвратить возможное внутреннее растрескивание.

§4.6. Расчет полей напряжений в тонком диске с учетом механического преднагружения

Рассмотрим процесс высокотемпературного нагрева тонкого диска по внутреннему круговому отверстию радиуса $r = 1$ при дополнительном механическом преднагружении (рисунок 4.6). Будем считать, что на внешнем радиусе диска задано давление σ_0.

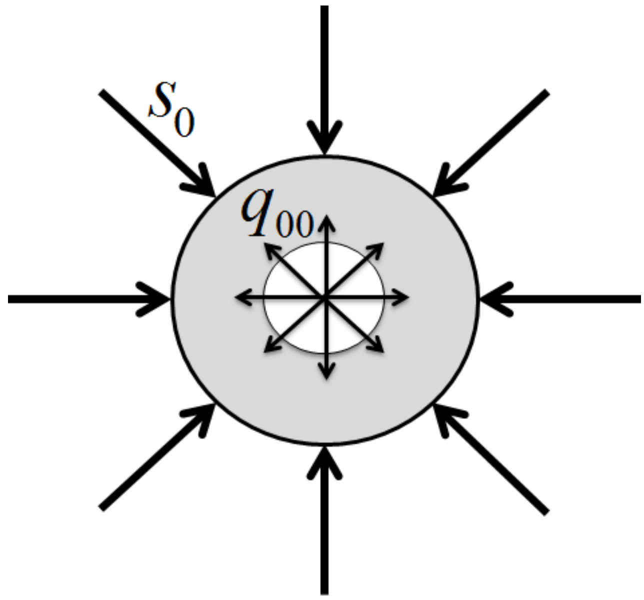

Рис. 4.6. Нагрев диска при дополнительном механическом преднагружении.

Аналитические выражения для полей напряжений в задаче без учета давления имеют вид (2.20) или (для наглядности) (4.11)-(4.12).

Механическая задача с заданным равномерно распределенным давлением по границе диска является задачей Ламе. Граничные условия имеют вид $\sigma_r|_{r\to\infty} = \sigma_0,\ \sigma_r|_{r\to 1} = 0$; решение имеет вид

$$\sigma_r = \sigma_0 \left(1 - \frac{1}{r^2}\right),$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_0 \left(1 + \frac{1}{r^2}\right).$$

Для получения решения задачи о нагреве диска с заданным давлением на внешней границе надо прибавить к выражениям для напряжений решение механической задачи:

$$\sigma_r = \begin{cases} -\frac{1}{r^2}\int\limits_1^r Tr\,\mathrm{d}r + \sigma_0\left(1-\frac{1}{r^2}\right), & \text{если } 1 \le r \le l(t) \\ -\frac{1}{r^2}\int\limits_1^{l(t)} Tr\,\mathrm{d}r + \sigma_0\left(1-\frac{1}{r^2}\right), & \text{если } r > l(t), \end{cases}$$

$$\sigma_\varphi = \begin{cases} -T + \frac{1}{r^2}\int\limits_1^r Tr\,\mathrm{d}r + \sigma_0\left(1+\frac{1}{r^2}\right), & \text{если } 1 \le r \le l(t) \\ \frac{1}{r^2}\int\limits_1^{l(t)} Tr\,\mathrm{d}r + \sigma_0\left(1+\frac{1}{r^2}\right), & \text{если } r > l(t). \end{cases} \tag{4.13}$$

На рис. 4.7 построены поля окружных напряжений (4.13) для рассматриваемой термоупругой задачи. Температурная задача решалась с граничными условиями второго рода при заданном тепловом потоке на нагреваемой поверхности.

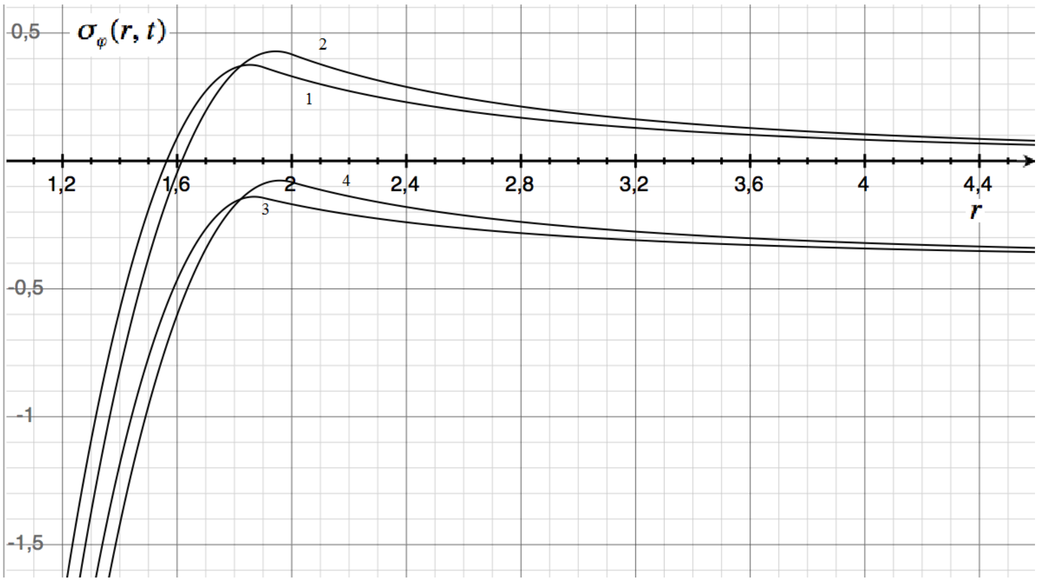

Рис. 4.7. Сравнение окружных напряжений для модели высокотемпературного нагрева диска без учета дополнительного механического преднагружения (линии 1, 2) и при его учете (линии 3, 4) в моменты безразмерного времени $t = 0.01$ (линии 1, 3) и $t = 0.02$ (линии 2, 4).

Таким образом, для модели высокотемпературного нагрева тонкого диска возможно существенное уменьшение максимальных напряжений с помощью дополнительного преднагружения. Влияние предложенного метода (как и метода обдува образцов) может быть значительным, но конкретные рекомендации можно дать только в результате проведения соответствующих экспериментов.

§4.7. Выводы по четвертой главе

Рассмотрены способы уменьшения температурных напряжений при обработке элементов конструкций лазерным лучом.

Исследованы два способа: обдув поверхности образца теплопроводным носителем и механическое преднагружение.

Расчеты проведены для задачи нагрева образца балочного типа по боковой поверхности и тонкого диска по центральной круговой области.

Показано (рисунки 4.4, 4.5, 4.7), что влияние предложенных методов может быть значительным, но конкретные рекомендации можно дать только в результате проведения соответствующих экспериментов.

Заключение

Основные результаты выполненного исследования заключаются в следующем:

- модифицирован аналитический приближенный метод нахождения нестационарных температурных полей на случай нелинейного уравнения теплопроводности для граничных условий первого и второго рода (рассмотрены монотонно возрастающие, монотонно убывающие и немонотонный варианты зависимости коэффициента теплопроводности от температуры);

- определены аналитические выражения для полей напряжений (с использованием найденных распределений температуры) в случаях упругого и упругопластического материалов и проведен анализ влияния нелинейных теплофизических свойств материала на разрушение образца;

- исследовано влияние понижения температуры с помощью теплообмена на напряженно-деформированное состояние при лазерной обработке элементов конструкций (балки, стержни, полосы, диски).

В дальнейшем предполагается с помощью двумерной модели высокотемпературного нагрева более точно учитывать свойства пластичности и вязкости материала в разогретой области и локальность воздействия лазерного луча на образец.

Список литературы

[1] Андреев В.Т., Уляков П.И. Температурные напряжения и разрушение при быстром нагреве // ИФЖ. 1968. №6. С. 1093–1099.

[2] Ашмарин И.И., Быковский Ю.А., Ларкин А.И. Динамические характеристики лазерного разрушения в стекле // ЖТФ. 1973. №11. С. 2397–2401.

[3] Баренблатт Г.И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме // Изв. АН СССР, ОТН. 1954. №9. С. 35–49.

[4] Бахарев М.С., Миркин Л.И., Шестериков С.А., Юмашева М.А. Структура и прочность материалов при лазерных воздействиях. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 224 с.

[5] Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 88 с.

[6] Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. – М.: Наука, 1965. – 468 с.

[7] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.

[8] Ворович И.И. О методе Бубнова-Галеркина в нелинейной теории колебания пологих оболочек // Доклады АН СССР. 1956. Т. 110. №5. С. 723–726.

[9] Газуко И.В., Грязнов И.М., Миркин Л.И. О разрушении карбида циркония лазером // Проблемы прочности. 1978. №2. С. 105–107.

[10] Газуко И.В., Шестериков С.А., Юмашев М.В. Хрупкое разрушение керамики при изгибе в условиях импульсного нагрева // Проблемы прочности. 1983. №4. С. 66–70.

[11] Гайвась И.В., Кит Г.С. Нестандартная задача термоупругости для пластинки с полубесконечным термоизолированным разрывом // Проблемы прочности. 1974. №6. С. 72–75.

[12] Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация тепла в нелинейных средах // Дифференциальные уравнения. Октябрь 1981. Т. XVII. №10. С. 1826–1841.

[13] Галёркин Б.Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок // Вестник инженеров. 1915. Т. 1. С. 897–908.

[14] Григорян С.С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // ПММ. 1967. Т. 31. №4. С. 643–669.

[15] Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К. Численное моделирование процессов тепломассопереноса и кинетики напряжений в термодеструктирующих композиционных оболочках // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17. №2. С. 43–59.

[16] Калашников А.С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений // Вестн. Моск. ун-та. 1972. №6. С. 45–49.

[17] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

[18] Каск Н.Е., Корниенко Л.С., Федоров Г.М. Разрушение оптического стекла излучением ОКГ // ЖТФ. 1973. №11. С. 2388–2396.

[19] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

[20] Кит Г.С., Побережный О.В. Нестационарная задача термоупругости для пластин с трещиной при наличии теплоотдачи с боковых поверхностей // Физико-химическая механика материалов. 1976. №4. С. 73–78.

[21] Краснова П.А. Аналитическая модель разрушения хрупких материалов при интенсивном локальном нагреве: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Моск. гос. университет, Москва, 2011.

[22] Кузнецов В.Н., Агахи К.А. Приближенный метод решения задач теплопроводности и диффузии // Изв. АзербССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук. 1985. №1. С. 130–135.

[23] Кудрявцев В.А., Партон В.З. Квазистатическая температурная задача для плоскости с разрезом // Проблемы прочности. 1970. №2. С. 46–51.

[24] Кулиев В.Д., Черепанов Г.П. К теории «горячих» трещин // ПМТФ. 1974. №2. С. 103–109.

[25] Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. – Новосибирск: Наука, 1970. – 659 с.

[26] Ларина Р.Р., Миркин Л.И. Деформация и разрушение материалов лучами лазера // Научные труды Института Механики МГУ. 1977. №46. С. 1–120.

[27] Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 178 с.

[28] Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 504 с.

[29] Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.

[30] Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз, 1958. – 168 с.

[31] Москвитин В.В., Овчинский А.С. Динамика перераспределения напряжений в разрушившемся волокне при упругом деформировании компонентов композиционного материала // Изв. АН СССР. МТТ. №1. 1979. С. 120–124.

[32] Морозов Е.М., Фридман Я.Б. Некоторые закономерности в теории трещин // Прочность и деформация материалов в неравномерных физических полях. Вып. 2. М.: Атомиздат. 1968. С. 216–253.

[33] Морозов Е.М. Двухкритериальные подходы в механике разрушения // Проблемы прочности. 1985. №10. С.103–108.

[34] Минин О.В., Ярышев Н.А. Использование краевого эффекта, возникающего при нагреве конца цилиндра, для сравнительной оценки термостойкости хрупких материалов // Проблемы прочности. 1972. №3. С. 57–62.

[35] Миркин Л.И., Шестериков С.А., Юмашев М.В., Юмашева М.А. Неустойчивость терморазрушения при стесненной деформации. // Физико-химическая механика материалов. 2006. №6. С. 55–60.

[36] Нейбер Г. Концентрация напряжений. – Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1947. – 204 с.

[37] Новацкий В.К. Вопросы термоупругости. – Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.

[38] Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 212–222.

[39] Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1958. Т. 22. С. 667–704.

[40] Панферов В.М., Кузнецов В.Н., Король Е.З. Приближенные методы решения нестационарной задачи // Тепловые напряжения в элементах конструкций. Вып. 10. Киев.: Наукова Думка. 1970. С. 195–200.

[41] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1963. – 252 с.

[42] Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1974. – 416 с.

[43] Петров Ю.В., Смирнов В.И. О прочности материала с малыми дефектами // М.: Механика твердого тела. 2006. С. 165–177.

[44] Петров Ю.В., Тарабан В.В. О двухкритериальных моделях разрушения для хрупких материалов // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1997. Вып. 2. С. 78–81.

[45] Петров Ю.В., Тарабан В.В. Двухкритериальный анализ разрушения хрупких образцов с малым поверхностным повреждением // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1999. Вып. 1. С. 89–91.

[46] Побережный О.В., Гайвась И.В. Влияние нестационарного температурного поля и теплоотдачи пластин на коэффициенты интенсивности напряжений // Прикладная механика. 1982. №6. С. 124–127.

[47] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.

[48] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

[49] Рэди Дж. Действие мощного лазерного излучения на вещество. – М.: Мир, 1975. – 360 с.

[50] Седов Л.И. Механика сплошной среды (учебник в 2-х томах). — 6-е изд. — СПб.: Лань, 2004. Т. 1. – 528 с.

[51] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

[52] Финкель В.М., Савельев А.М., Муравин Г.В. О возможности управления трещиной термоупругими полями // Проблемы прочности. 1975. №10. С. 35–40.

[53] Черепанов Г.П., Кулиев В.Д., Габдуллин Б.Ж. К разрушению хрупких тел от нагрева // МДТТ. Алма-Ата. 1982. С. 69–76.

[54] Физические величины. Справочник. Под редакцией Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

[55] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 176 с.

[56] Черепанов Г.П. Саморазрушение // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2006. 823–828 с.

[57] Шестериков С.А., Юмашева М.А. К проблеме терморазрушения при быстром нагреве // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №1. С. 128–135.

[58] Шестериков С.А., Юмашева М.А. Приближенный метод оценки нестационарных температурных полей // Институт механики МГУ. Научные труды. Деформирование и разрушение твердых тел. Вып. 23. М.: Изд-во МГУ. 1973. С. 15–20.

[59] Шестериков С.А., Юмашев М.В., Юмашева М.А. Терморазрушение упругого пространства при быстром нагреве // Институт механики МГУ. Научные труды. Деформирование и разрушение твердых тел. Изд-во МГУ. 1985. С. 106–111.

[60] Шестериков С.А., Юмашев М.В., Юмашева М.А. Хрупкое разрушение диска и сферы при быстром нагреве // Смешанные задачи механики деформируемого тела. Всесоюзная конференция. Харьков. 1985. С. 108.

[61] Шестериков С.А., Юмашев М.В., Юмашева М.А. Терморазрушение при лазерном нагреве балки с зависящими от температуры характеристиками // Механика неоднородных структур. Труды Всесоюзной конференции. Киев.: Наукова Думка. 1983. С. 93.

[62] Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред. – М.: МГУ, 2008. – 318 с.

[63] Юмашев М.В., Юмашева М.А., Краснова П.А. Моделирование процесса нагрева тела при интенсивном тепловом воздействии на поверхность // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2010. №4. С. 44–54.

[64] Biot M.A. Generalized Variational Principles for Convective Heat Transfer and Irreversible Thermodynamics // Journal of Mathematics and Mechanics. Vol. 15. №2. 1966. P. 177–186.

[65] Biot M.A. New Methods in Heat Flow Analysis with Application to Flight Structures // Journal of the Aeronautical Sciences. Vol. 24. №12. 1957. P. 857 – 873.

[66] Biot M.A. Further Developments of New Methods in Heat-Flow Analysis // Journal of the Aero/Space Sciences. Vol. 26. №6. 1959. P. 367–381.

[67] Biot M.A. Lagrangian Thermodynamics of Heat Transfer in Systems Including Fluid Motion // Journal of the Aerospace Sciences. Vol. 29. №5. 1962. P. 568 – 577.

[68] Goodier J.N. Thermal stress in long cylindrical shells due to temperature variation round the circumference, and through the wall // Canadian Journal of Research. Vol. 15a. №4. 1937. P. 49–58.

[69] Lessen M. The Motion of a Thermoelastic Solid // Quart. Appl. Math. Vol. 15. №1. 1957. P. 105–108.

[70] Lorenz R. Thermal Stresses in a Cylinder with a Concentric Circular Hole. // Z. Ver. deut. Ing. Vol. 51. 1907. P. 743.

[71] Skelton R.P., Miles L. Crack propagation in thick cylinders of $\frac{1}{2}$ − Cr-Mo-V steel during thermal shock // High Temp. Technol. 1984. Vol. 2. №1. P. 23–34.

[72] Weiner J.H. A uniqueness theorem for the coupled thermoelastic problem // Quart. Appl. Math. Vol. 15. №1. 1957. P. 102–105.

[73] Yumashev M.V., Yumasheva M.A., Krasnova P.A. Irreversible effects during thermal treatment of surface of materials // Acta Astronautica. 2009. Vol. 65. P. 519–524.

[74] Беднова В.Б. Методы подавления термомеханических повреждений в элементах конструкций в условиях технологической обработки лазером //

Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Том 1. Материалы X Международного симпозиума, посвященного 70-летию Победы. М.: РАН. 2015. С. 26–32.

[75] Беднова В.Б. Об одном методе подавления термомеханических повреждений при лазерной обработке элементов конструкций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. №6. С. 62–66.

[76] Беднова В.Б. Об одном методе приближенного решения нелинейного уравнения теплопроводности // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. Вып. 4. С. 11–22.

[77] Беднова В.Б. Приближенный метод определения температурного поля при быстром локальном нагреве образца // Труды конференции-конкурса молодых ученых. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2013. С. 78–83.

[78] Беднова В.Б. Приближенный метод определения температурного поля при быстром нагреве образца в двумерной постановке // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2012» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, К.К. Андреев, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2012.

[79] Беднова В.Б. Приближенный метод определения температурного поля при лазерном воздействии с учетом физической нелинейности и локальности нагрева // Труды конференции-конкурса молодых ученых. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2014. С. 84–88.

[80] Юмашев М.В., Беднова В.Б., Вергазов М.М., Юмашева М.А. Разрушение хрупких материалов в условиях локального воздействия на поверхность энергетическим потоком // Машиностроение и инженерное образование. 2014. №4. С. 52–58.