ФГБОУ ВО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ПАХОМОВА АНАСТАСИЯ СЕРГЕЕВНА

УДК 514.74 + 515.124.4 + 519.176

ОТНОШЕНИЯ ТИПА ШТЕЙНЕРА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., доцент А. О. Иванов

Москва 2016

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена изучению свойств отношений типа Штейнера метрических пространств. Исследуются граничные значения для отношений типа Штейнера и условия непрерывности отношений типа Штейнера как функций на пространстве всех компактных метрических пространств с метрикой Громова–Хаусдорфа.

Отношения типа Штейнера тесно связаны с задачей поиска кратчайшей сети для конечного множества точек метрического пространства. Сетью мы называем геометрическую реализацию (абстрактного) связного графа, т. е. представление вершин графа точками некоторого пространства, а ребер — кривыми, соединяющими соответствующие точки. Существует несколько различных подходов к решению этой задачи. В простейшем случае разрешается соединять кривыми только точки исходного множества, а добавление новых вершин запрещено. Из соображений минимальности следует, что граф, соответствующий такой кратчайшей сети, является деревом. Этот объект называется минимальным остовным деревом для данного множества точек. Задача о поиске минимального остовного дерева хорошо известна в теории графов. Хорошо известно, что минимальное остовное дерево существует для любого конечного множества точек и может быть найдено за полиномиальное время.

Оказалось, что добавляя новые точки к исходному множеству, иногда можно построить сеть, длина которой меньше, чем длина минимального остовного дерева. Первые шаги в этом направлении сделал П. Ферма, который сформулировал задачу ([1]): для заданной тройки точек на плоскости найти такую точку, суммарное расстояние от которой до данных трех было бы наименьшим. Эта задача была частично решена Э. Торричелли ([2]), позже его конструкция была модифицирована Т. Симпсоном ([3]). Я. Штейнер обобщил задачу Ферма для случая произвольного конечного множества, предлагая найти точку на плоскости, сумма расстояний от которой до точек этого множества минимальна. В. Ярник и О. Кесслер ([4]) предложили новое обобщение, поставив задачу поиска кратчайшей сети, проходящей через данное конечное множество точек на плоскости. В настоящее время задача Ярника и Кесслера и ее всевозможные обобщения на метрические пространства известны как задача Штейнера.

Сеть, являющуюся решением задачи, принято называть минимальным деревом Штейнера. Задачу Штейнера можно ставить не только для множества точек на плоскости, но и для произвольного метрического пространства.

Заметим, что в отличие от минимального остовного дерева, минимальное дерево Штейнера существует, вообще говоря, не всегда. Одной из возможных причин этого может служить неполнота объемлющего метрического пространства. Полнота пространства, однако, не является достаточным условием существования минимального дерева Штейнера для произвольного его конечного подмножества. По-видимому, первый пример полного метрического (и даже банахова) пространства, в котором для некоторого набора точек не существует кратчайшего дерева Штейнера, был построен в 1974 в работе [5]. Подобные примеры строились позднее и в других работах, например, в [6], [7]. Тем не менее, даже если для данного множества точек минимальное дерево Штейнера все-таки существует, задача поиска такого дерева или определения его длины имеет большую вычислительную сложность. Например, алгоритм Мелзака ([8]) позволяет построить дерево Штейнера для множества точек евклидовой плоскости лишь за экспоненциальное время. Быстро работают только алгоритмы, дающие приближенное решение, например, алгоритм Краскала, строящий минимальное остовное дерево (см., например, [9]).

Перечисленные выше трудности вынуждают искать новые подходы к решению проблемы поиска кратчайшей сети. Один из таких подходов был предложен А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в работе [10]. В этой работе было введено понятие минимального заполнения конечного метрического пространства. Это понятие тесно связано с конструкцией, предложенной М. Громовым для римановых многообразий (см., например, [11]). Громов рассматривал гладкие замкнутые многообразия M с заданными на них функциями расстояния ρ и все возможные компактные многообразия W, с краем равным M. Метрическое пространство (W, d) называется заполнением в смысле Громова для метрического пространства (M, ρ), если d — функция расстояния на W, не уменьшающая расстояние между точками M. Определение, предложенное Ивановым и Тужилиным, получается естественным образом, если в качестве M рассматриваются конечные метрические пространства. В этом случае заполнениями будут являться одномерные стратифицированные многообразия, которые можно рассматривать как взвешенные графы с неотрицательной весовой функцией.

В дальнейшем, говоря о минимальных заполнениях, мы будем подразумевать минимальные заполнения конечных метрических пространств. В работе [10] показано, что минимальное заполнение существует для любого граничного множества, т.е. любого конечного метрического пространства.

Для произвольного метрического пространства можно определить величины, показывающие, насколько сильно отличаются длины минимальных сетей из разных классов в самом «худшем» случае. В шестидесятых годах прошлого века в работе Э. Джилберта и Г. Поллака ([12]) было предложено для каждого конечного подмножества метрического пространства вычислять вес минимального дерева Штейнера и минимального остовного дерева, а затем находить отношение полученных величин. Точная нижняя грань этих отношений, взятая по всем конечным подмножествам метрического пространства, была названа отношением Штейнера этого пространства. Таким образом, отношение Штейнера показывает, насколько близкими являются минимальные остовные деревья и минимальные деревья Штейнера. Введя в рассмотрение понятие минимального заполнения, А. О. Иванов и А. А. Тужилин предложили наряду с отношением Штейнера рассмотреть два других отношения. Отношение Штейнера–Громова характеризует близость минимальных заполнений и минимальных остовных деревьев, а суботношение Штейнера — близость минимальных заполнений и минимальных деревьев Штейнера. Эти три величины называются отношениями типа Штейнера. Отношения типа Штейнера могут быть использованы для оценки погрешности приближенных алгоритмов, а потому их изучение представляет интерес.

Нахождение значения того или иного отношения типа Штейнера, вообще говоря, является очень сложной задачей. Так, например, до сих пор не известно, чему равно отношение Штейнера для евклидовой плоскости. Джилберт и Поллак ([12]) выдвинули гипотезу, что это отношение равно $\sqrt{3}/2$ и достигается на вершинах правильного треугольника. Стоит заметить, однако, что многочисленные попытки доказать этот факт так и не привели к успеху, оставив данный вопрос открытым для исследования [13]. Тем не менее, существует много работ, в которых были получены оценки для отношения Штейнера различных частных множеств граничных точек (например, [14], [15], [16]), для евклидового пространства ([17]), пространств Банаха–Минковского ([18]) и многих других метрических пространств. Иногда удается найти и точное значение.

Например, было вычислено значение отношения Штейнера для манхэттенской плоскости ([19]), для плоскости Лобачевского ([20]), для поверхностей Александрова отрицательной кривизны ([21]). Отношение Штейнера–Громова и субботношение Штейнера также удалось вычислить для некоторых метрических пространств. Например, З. Н. Овсянников вычислил отношения типа Штейнера для пространства компактов в евклидовой плоскости с расстоянием Хаусдорфа ([22]), В. А. Мищенко вычислила отношение Штейнера–Громова для плоскости Лобачевского ([23]).

Структура работы

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка публикаций по теме диссертации и списка литературы.

В первой главе вводятся основные определения, а также сформулированы необходимые результаты из теории минимальных заполнений конечных метрических пространств.

Во второй главе доказываются точные оценки для отношений типа Штейнера произвольных метрических пространств, изучается вопрос существования пространств с заданным значением отношения типа Штейнера. Полученные оценки применяются для вычисления отношений типа Штейнера некоторых метрических пространств.

Третья глава посвящена пространствам с максимально возможным значением отношения Штейнера–Громова. Дана полная классификация таких пространств.

В четвертой главе отношения типа Штейнера рассматриваются как функции в пространстве Громова–Хаусдорфа. Изучается непрерывность и полунепрерывность этих функций. Рассматривается вопрос о мощности множества точек непрерывности.

Библиография содержит 36 наименований. Текст диссертации изложен на 60 страницах.

Список основных результатов, выносимых на защиту

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Теорема о точных оценках для отношений типа Штейнера произвольного метрического пространства (Теорема 8);
2. Теоремы существования метрического пространства с заданным значением отношения типа Штейнера (Теорема 9 и Теорема 10);
3. Классификация метрических пространств, отношение Штейнера–Громова которых равно единице (Теорема 22);
4. Теорема о полунепрерывности отношений типа Штейнера как функций в пространстве Громова–Хаусдорфа (Теорема 25);
5. Критерий непрерывности отношений типа Штейнера как функций в пространстве Громова–Хаусдорфа (Теорема 26).

Методы исследования

В диссертации применяются методы дифференциальной и дискретной геометрии, топологии, математического анализа, теории графов, теории минимальных сетей, теории минимальных заполнений конечных метрических пространств, теории геометрических оптимизационных задач, вариационного исчисления, метрической геометрии.

Аппробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2013» (МГУ, 8-13 апреля 2013)

– на Научной конференции «Ломоносовские чтения» (МГУ, 15 апреля 2013)
– на научном семинаре «Геометрическая теория приближений» под руководством проф. П.А. Бородина (МГУ, 7 мая 2013)
– на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2015» (МГУ, 13–17 апреля 2015)
– на XII Международном научном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова (МГУ, 22 июня 2016)
– на Международной конференции «Анализ, вероятность и геометрия» (МГУ, 28 сентября 2016)
– на научном семинаре «Оптимальные сети» под руководством проф. А.О. Иванова и проф. А.А. Тужилина (МГУ, 2012–2016)
– на научном семинаре «Экстремальные задачи и нелинейный анализ» под руководством проф. А.В. Арутюнова и доц. В.Н. Розовой (Москва, РУДН, декабрь 2016)
– на научном семинаре «Геометрический анализ и вычислительная геометрия» под руководством проф. А.А. Клячина и проф. В.А. Клячина (Волгоград, ВолГУ, декабрь 2016)

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в трех статьях автора [А.1, А.2, А.3] и четырех тезисах, из них в журналах из перечня ВАК — 3 статьи.

Благодарности

Автор благодарит профессора А.О. Иванова и профессора А.А. Тужилина за постановку задачу, научное руководство и постоянную поддержку. Автор выражает благодарность профессору П.А. Бородину за проявленный интерес к работе. Автор также благодарит всех участников семинара «Оптимальные сети» за ценные замечания и плодотворные обсуждения.

Глава 1. Определения и предварительные сведения

1.1 Определение отношений типа Штейнера

Для дальнейших определений нам потребуются некоторые сведения из теории графов. Пусть V и E — произвольные конечные множества. *Графом* G называется тройка (V,E,i), где i — *функция инцидентности*, сопоставляющая каждому элементу $e \in E$ неупорядоченную пару $a \in V$, $b \in V$. Элементы множества V называются *вершинами графа* G, а элементы множества E — *ребрами графа* G. Если задан граф G, то множество его вершин будем обозначать $V(G)$, а множество его ребер — $E(G)$. Ребро e и вершина v называются *инцидентными*, если $v \in i(e)$. Две вершины, инцидентные ребру, называются *концами этого ребра.* Количество ребер, инцидентных вершине v, называется *степенью вершины* v. Если некоторой паре вершин инцидентно несколько ребер, то все эти ребра называются кратными. *Кратностью ребра* e называется количество всех ребер e', для которых $i(e) = i(e')$.

Будем говорить, что существует *маршрут*, соединяющий вершины $a \in V(G)$ (*начало маршрута*) и $b \in V(G)$ (*конец маршрута*), если существует такое число n и такая последовательность ребер $\{e_i\}_{i=1}^n$, что $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$, где $a = v_1$ и $b = v_{n+1}$. Если все ребра, входящие в маршрут, различны, маршрут называется *путем.* Если начало и конец маршрута совпадают, то он называется *циклическим.* Циклический маршрут, все ребра которого различны будет называть *циклом.* Цикл называется *эйлеровым*, если он проходит по всем ребрам графа. Граф называется *связным*, если для любой пары различных вершин из $V(G)$ существует маршрут, их соединяющий. Связный граф без циклов называется *деревом.*

Если на ребрах графа G задана неотрицательная функция $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$, то граф G называют *взвешенным*, а функцию ω — *весовой функцией.* Число $\omega(e)$, где $e \in E(G)$, называют *весом ребра* e. Сумма весов всех ребер взвешенного графа G называется *весом графа* G и обозначается через $\omega(G)$.

Как упоминалось во введении, существует несколько подходов к определению оптимального графа, соединяющего данное конечное множество M точек метрического пространства $\mathbb{X}$. Предположим сначала, что все вершины искомого графа принадлежат исходному метрическому пространству $\mathbb{X}$. Тогда на ребрах графа можно задать естественную весовую функцию, сопоставляющую каждого ребру расстояние по метрике между вершинами, которые инцидентны данному ребру. Будем обозначать эту весовую функцию, как и метрику, буквой ρ. В простейшем случае мы придем к определению минимального остовного дерева для данного множества вершин M. Для этого определим величину

$$\operatorname{mst}(M) = \min_G \{\rho(G) \mid G - \text{дерево}, M = V(G)\}.$$

Заметим, что достаточно было бы потребовать, чтобы граф G в определении был связен, тогда ацикличность G следствие минимальности. Дерево G на M называется *минимальным остовным деревом*, если вес $\rho(G) = \operatorname{mst}(M)$.

Минимальное остовное дерево не содержит никаких иных вершин, кроме точек множества M. Если же разрешить в качестве вершин графа брать произвольные точки пространства $\mathbb{X}$, мы придем к понятию минимального дерева Штейнера. Для этого определим величину

$$\operatorname{smt}(M) = \inf_G \{\rho(G) \mid G - \text{дерево}, M \subset V(G) \subset \mathbb{X}\}.$$

Дерево G на конечном подмножестве $V(G) \subset \mathbb{X}$, содержащем M, называется *минимальным деревом Штейнера, соединяющим* M, если $\rho(G) = \operatorname{smt}(M)$. Вершины этого дерева, принадлежащие множеству M, мы будем называть *граничными*, а само множество M — *границей* дерева G (или *граничным множеством*). Остальные вершины дерева G будем называть *внутренними* (или *добавленными*).

Ставя задачу о поиске минимального графа, можно и не требовать, чтобы все вершины графа принадлежали исходному объемлющему пространству. Рассмотрим произвольное конечное множество $M \subset (\mathbb{X}, \rho)$ и взвешенный граф G, соединяющий M, с некоторой весовой функцией ω. Функция ω задает на M псевдометрику d_ω следующим образом: расстоянием между вершинами графа G назовем наименьший из весов маршрутов, их соединяющих, где *весом маршрута* называется сумма весов ребер, входящих в маршрут. Если для любых точек p и q из M выполняется $\rho(p,q) \le d_\omega(p,q)$, то взвешенный граф G называется *заполнением* M. При этом M назовем *граничным множеством* заполнения или *границей.* Заполнение, вес которого равен $\mathrm{mf}(M) = \inf \omega(G)$, где точная нижняя грань берется по всем заполнениям M, назовем *минимальным заполнением.* Число $\mathrm{mf}(M)$ назовем *весом* минимального заполнения.

Для любого метрического пространства можно определить следующие три величины, связанные с минимальными графами.

Отношением Штейнера метрического пространства $(\mathbb{X}, \rho)$ назовем:

$$\mathrm{sr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M | M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{smt}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \mid 1 < \#M < \infty \right\},$$

где $\#M$ обозначает количество элементов в множестве M.

Аналогичным образом определим *отношение Штейнера–Громова*

$$\mathrm{sgr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M | M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \mid 1 < \#M < \infty \right\}.$$

Суботношением Штейнера будем называть величину

$$\mathrm{ssr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M | M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{smt}(M)} \mid 1 < \#M < \infty \right\}.$$

Введенные величины будем называть *отношениями типа Штейнера* или *общими отношениями типа Штейнера*, чтобы подчеркнуть различие с их n-точечными аналогами, которые определяются ниже.

Пусть $n \geq 2$ — фиксированное натуральное число. Определим *n-точечное отношение Штейнера*

$$\mathrm{sr}_n(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M | M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{smt}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \mid 1 < \#M \leq n \right\},$$

n-точечное суботношение Штейнера

$$\mathrm{ssr}_n(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M | M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{smt}(M)} \mid 1 < \#M \leq n \right\}.$$

и *n-точечное отношение Штейнера–Громова*

$$\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M | M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \mid 1 < \#M \leq n \right\}.$$

Эти три величины будем называть *n-точечными отношениями типа Штейнера.*

1.2 Свойства минимальных заполнений конечных метрических пространств

В работе [10] было показано, что для любого граничного множества существует минимальное заполнение, имеющее структуру дерева, все вершины степени 1 и 2 которого принадлежат границе. В дальнейшем мы будем рассматривать только минимальные заполнения, имеющие такую структуру.

Установить, является ли данный взвешенный граф минимальным заполнением для данного граничного множества, не всегда бывает просто. В некоторых случаях это позволяет сделать достаточное условие минимальности заполнения, доказанное А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным (см. [10]).

Теорема 1 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин)**.** *Пусть $\mathfrak{G} = (G,\omega)$ — взвешенное дерево, являющееся заполнением метрического пространства $\mathfrak{M} = (M,\rho)$. Предположим, что для любых p и q из M выполняется равенство $\rho(p,q) = d_\omega(p,q)$. Тогда $\mathfrak{G}$ — минимальное заполнение для $\mathfrak{M}$.*

Введем некоторые дополнительные определения. Пусть $G = (V,E)$ — произвольное дерево с границей M. Исключим из G некоторое ребро e, и пусть G_1 и G_2 — связные компоненты полученного графа. Положим $M_i = M \cap G_i$. Полученное разбиение $\{M_1, M_2\}$ множества M обозначим через $\mathcal{P}_G(e)$.

Пусть S — конечное множество. Назовем *циклическим порядком* на множестве S произвольную циклическую перестановку $\pi\colon S \to S$. Два элемента из множества S назовем *соседними относительно порядка* π, если один из них является π-образом другого. Циклический порядок назовем *планарным по отношению к G* или *обходом, порожденным деревом G, соединяющим M*, если для каждого $e \in E$ и $M_i \in \mathcal{P}_G(e)$ существует единственная точка $p \in M_i$, для которой $\pi(p) \notin M_i$.

Приведем эквивалентное определение планарного порядка в терминах укладок.

Определение. Пусть $G = (V, E, i)$ и $G' = (V', E', i')$ — два графа. *Отображением* $f : G \to G'$ из графа G в граф G' называется отображение $f : V \sqcup E \to V' \sqcup E'$ такое, что $f(V) \subset V'$, $f(E) \subset E'$ и для каждого $e \in E$ выполняется $f(i(e)) = i'(f(e))$. Здесь той же буквой f обозначено отображение, определенное на подмножествах V : если $\{v_1, ..., v_k\} \subset V$, то $f(\{v_1, ..., v_k\}) = \{f(v_1), ..., f(v_k)\}$. Взаимно однозначное f называется *изоморфизмом* графов G и G'. Графы называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

Определение. Будем говорить, что граф обладает *укладкой на плоскости*, если он изоморфен графу, вершинами которого являются некоторые точки плоскости, а ребрами — жордановы кривые, соединяющие соответствующие вершины, причем кривая, являющаяся ребром не проходит через другие вершины графа, кроме вершин, которые она соединяет; две кривые, являющиеся ребрами, пересекаются лишь в вершинах, инцидентных одновременно обоим этим ребрам.

Определение. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — множество ребер графа $G = (V, E, i)$ Добавим к множеству E ребра $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ и определим на них отображение i по правилу $i(e_j) = i(e'_j)$ для любого $j = 1, \ldots, n$. Полученный в результате этой операции граф будем называть *удвоением* графа G.

Пусть G' — некоторая укладка дерева G на плоскость. Циклический порядок назовем обходом дерева G', если он соответствует эйлерову циклу в удвоении графа G. Рассмотрим обход дерева G'. Изобразим последовательно встречающиеся при таком обходе точки из M последовательными точками на окружности S^1. Отметим, что каждая вершина p из M встречается столько раз, какова ее степень. Для каждой вершины $p \in M$ степени больше 1 из всех соответствующих ей точек окружности оставим одну произвольную. Тем самым, мы построили инъекцию $\nu : M \to S^1$. Определим циклическую перестановку π, положив $\pi(p) = q$, где $\nu(q)$ следует за $\nu(p)$ на окружности S^1. Будем говорить, что построенный циклический порядок π порожден укладкой G'.

Теорема 2 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин)**.** *Циклический порядок, порожденный на M укладкой G' дерева G, является планарным по отношению к G. Обратно, каждый планарный порядок на M по отношению к G порожден некоторой укладкой G' дерева G.*

Следующее утверждение показывает связь между обходами и заполнениями (см. [10]).

Теорема 3 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин)**.** *Пусть* $\mathfrak{G} = (G, \omega)$ *— произвольное заполнение псевдометрического пространства* $\mathfrak{M} = (M, \rho)$*, и* π *— обход* G*. Тогда*

$$\omega(G) \geq \sum_{p \in M} \rho(p, \pi(p))/2.$$

Заметим, что в некоторых случаях полезным может оказаться рассмотрение мультиобходов и мультициклических порядков.

Мультициклическим порядком кратности k на множестве S из n элементов назовем отображение $\pi \colon \mathbb{Z}_{nk} \to S$ такое, что:

1. Для любого $j \in \mathbb{Z}_{nk}$ $\pi(j) \neq \pi(j+1)$.
2. Для любого элемента $s \in S$ его прообраз при отображении π состоит ровно из k элементов.

Как и в случае обходов для граничного множества M и затягивающего его графа G рассмотрим разбиение $\mathcal{P}_G(e)$. Мультициклический порядок на M назовем *планарным по отношению к* G или *мультиобходом* G, если существует такое l, что для каждого $e \in E$ и $M_i \in \mathcal{P}_G(e)$ существует ровно l элементов $p \in \mathbb{Z}_{nk}$, для которых $\pi(p) \in M_i$, но $\pi(p+1) \notin M_i$. Такое l назовем *кратностью мультиобхода*. Множества всех мультиобходов G будем обозначать $\mathcal{T}(G)$. *Мультипериметром пространства* $\mathcal{M}$ *по отношению к порядку* π будем называть величину

$$p(\mathcal{M}, \pi) = \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^{nk-1} \rho(\pi(j), \pi(j+1)).$$

В своей работе [24] А. Ю. Еремин доказал формулу для вычисления веса минимального заполнения метрического пространства:

Теорема 4 (А. Ю. Еремин)**.** *Пусть* $\mathcal{M} = (M, \rho)$ *— метрическое пространство. Тогда*

$$\mathrm{mf}(\mathcal{M}) = \min_{G} \max_{\pi \in \mathcal{T}(G)} p(\mathcal{M}, \pi),$$

где минимум берется по всем графам G*, соединяющим* M*, а максимум — по всем мультиобходам* G*.*

Для пространств, состоящих из малого числа точек, есть более простые формулы, доказательство которых приведено в [10].

Теорема 5 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин)**.** *Пусть* $\mathcal{M} = (M, \rho)$ *— метрическое пространство, состоящее из трех точек* x_i $(i = 1, 2, 3)$*. Пусть* $\rho_{ij} = \rho(x_i, x_j)$*. Тогда вес минимального заполнения может быть вычислен по формуле*

$$\mathrm{mf}(\mathcal{M}) = \frac{1}{2}(\rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{23}).$$

Теорема 6 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин)**.** *Пусть* $\mathcal{M} = (M, \rho)$ *— метрическое пространство, состоящее из четырех точек* x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$*. Пусть* $\rho_{ij} = \rho(x_i, x_j)$*. Тогда вес минимального заполнения может быть вычислен по формуле*

$$\mathrm{mf}(\mathcal{M}) = \frac{1}{2}(\min\{\rho_{12}+\rho_{34}, \rho_{13}+\rho_{24}, \rho_{23}+\rho_{14}\}+\max\{\rho_{12}+\rho_{34}, \rho_{13}+\rho_{24}, \rho_{23}+\rho_{14}\}).$$

Глава 2. Оценки для отношений типа Штейнера

2.1 Основные результаты главы

Прежде всего заметим, что для любого конечного множества M верны неравенства
$$\mathrm{mf}(M) \le \mathrm{smt}(M) \le \mathrm{mst}(M).$$
Поэтому выполняется тривиальная верхняя оценка $r(\mathbb{X}) \le 1$, где $r(\mathbb{X})$ обозначает любое из отношений типа Штейнера. Кроме того, для любого натурального $n \ge 2$ выполняется неравенство $r_n(\mathbb{X}) \le 1$. Данные оценки являются точными и достигаются, например, на пространстве, состоящем только из двух точек.

Э. Ф. Мур получил нижние оценки для отношения Штейнера. Доказательство этого результата приведено, например, в [18, theorem 4.1.1, corollary 4.1.2].

Теорема 7 (Э. Ф. Мур). *Для произвольного метрического пространства* $\mathbb{X}$ *справедливы оценки:*

$$\mathrm{sr}_n(\mathbb{X}) \ge \frac{n}{2(n-1)}; \qquad \mathrm{sr}(\mathbb{X}) \ge \frac{1}{2}.$$

Более того, эти оценки являются точными.

Оказывается, аналогичные оценки справедливы для суботношения Штейнера и для отношения Штейнера–Громова. Одним из основных результатов данной главы является следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть функция* r *обозначает одно из трех отношений типа Штейнера:* sr, sgr *или* ssr. *Для произвольного метрического пространства* $\mathbb{X}$ *справедливы следующие оценки:*

$$\frac{n}{2(n-1)} \le r_n(\mathbb{X}) \le 1; \qquad \frac{1}{2} \le r(\mathbb{X}) \le 1.$$

Более того, эти оценки являются точными.

Данная теорема описывает отрезок возможных значений для отношения типа Штейнера. Возникает вопрос: любое ли значение из данного отрезка может являться отношением типа Штейнера некоторого метрического пространства. Ответ на этот вопрос дает следующие теоремы.

Теорема 9. *Пусть функция r обозначает одно из трех отношений типа Штейнера:* sr, sgr *или* ssr. *Пусть $s \in [\frac{1}{2},1]$ — некоторое фиксированное действительное число. Тогда существует метрическое пространство $\mathbb{X}$, такое что $r(\mathbb{X}) = s$.*

Теорема 10. *Пусть функция r_n обозначает одно из трех n-точечных отношений типа Штейнера:* sr_n, sgr_n *или* ssr_n. *Пусть $s \in [\frac{n}{2(n-1)},1]$ — некоторое фиксированное действительное число. Тогда существует метрическое пространство $\mathbb{X}$, такое что $r_n(\mathbb{X}) = s$.*

Замечание. Подразумевается, что s может являться одним из отношений типа Штейнера для некоторого метрического пространства. Вообще говоря, не утверждается, что для этого метрического пространства все остальные отношения типа Штейнера также равны s.

А. О. Иванов и А. А. Тужилин доказали справедливость этого результата для отношения Штейнера в [25]. Доказательство для отношения Штейнера–Громова и для суботношения Штейнера проведено автором и составляет основное содержание раздела 2.3.

2.2 Доказательство оценок для отношений типа Штейнера

Учитывая замечания, сделанные в предыдущем разделе, для доказательства теоремы 8 необходимо показать, что нижние оценки справедливы и точны для отношения Штейнера–Громова и для суботношения Штейнера.

Лемма 11. *Для произвольного метрического пространства $\mathbb{X}$ верна оценка:*

$$\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) \geq \frac{n}{2(n-1)}.$$

Доказательство. Для множеств M, состоящих только из двух точек x и y,

$$\mathrm{mf}(M) = \mathrm{smt}(M) = \mathrm{mst}(M) = \rho(x, y).$$

Поэтому для любого двухточечного множества

$$\frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} = \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{smt}(M)} = 1.$$

Таким образом при $n = 2$ доказываемое утверждение верно.

Будем считать, что оценка верна для $\mathrm{sgr}_k(\mathbb{X})$, где $k = 2, \ldots, n-1$. Докажем, что оценка верна для $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X})$. Рассмотрим произвольное множество M, состоящее из $n > 2$ точек. Рассмотрим G, являющееся минимальным заполнением этого множества. Пусть π — некоторый обход на M, порожденный G. Тогда в силу Теоремы 3 справедлива оценка:

$$2\,\mathrm{mf}(M) \geq \sum_{p \in M} \rho(p, \pi(p));$$

Пусть вершины $\{a_i\}$ (где $i = 1, \ldots, n$) являются последовательными относительно π. Выберем такую вершину $p \in M$, что $\rho(p, \pi(p))$ наибольшее. Без ограничения общности $p = a_n$, т.е. $\rho(a_n, a_1) \geq \rho(a_i, a_{i+1})$ для любого $i = 1, \ldots, n-1$. Отсюда следует, что

$$\rho(a_n, a_1) \geq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \rho(a_i, a_{i+1})}{n-1}.$$

Тогда верно неравенство

$$\frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \geq \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \rho(a_i, a_{i+1}) + \rho(a_n, a_1)}{\mathrm{mst}(M)}.$$

Заметим, что дерево на M с ребрами $\{a_i, a_{i+1}\}$, где $i = 1, \ldots, n-1$, является остовным, а значит для него верно:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \rho(a_i, a_{i+1}) \geq \mathrm{mst}(M).$$

Тогда имеем:

$$\frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \geq \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \rho(a_i, a_{i+1}) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \rho(a_i, a_{i+1})}{\sum_{i=1}^{n-1} \rho(a_i, a_{i+1})} = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Данная оценка справедлива для любого n - точечного множества M. Кроме того, по предположению индукции для всех множеств M' с меньшим числом точек выполняется оценка:

$$\frac{\mathrm{mf}(M')}{\mathrm{mst}(M')} \geq \frac{n-1}{2(n-2)} > \frac{n}{2(n-1)}.$$

Значит для всех множеств M'', содержащих не более чем n вершин выполняется оценка:

$$\frac{\mathrm{mf}(M'')}{\mathrm{mst}(M'')} \geq \frac{n}{2(n-1)},$$

следовательно

$$\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) = \inf_{\{M'' \mid M'' \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{mf}(M'')}{\mathrm{mst}(M'')} \mid 1 < \#M'' \leq n \right\} \geq \frac{n}{2(n-1)}.$$

Лемма 12. *Для произвольного метрического пространства* $\mathbb{X}$ *верна оценка:*

$$\mathrm{ssr}_n(\mathbb{X}) \geq \frac{n}{2(n-1)}.$$

Доказательство. Данная лемма является следствием предыдущей. Действительно, для любого множества M имеем:

$$\mathrm{mst}(M) \geq \mathrm{smt}(M), \text{ поэтому}$$

$$\mathrm{ssr}_n(\mathbb{X}) \geq \mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) \geq \frac{n}{2(n-1)}.$$

Лемма доказана.

Определение. Назовем *n-мерным правильным симплексом* со стороной S множество из $n+1$ точки метрического пространства, попарные расстояния между которыми равны S. Указанные точки назовем *вершинами симплекса.*

Правильный симплекс с n вершинами и стороной S будем обозначать $S\Delta_n$. Симплекс $1\Delta_n$ будем обозначать Δ_n.

Лемма 13. *Существует метрическое пространство $\mathbb{X}$, для которого нижние оценки для ssr_n и sgr_n достигаются, то есть*

$$\mathrm{ssr}_n(\mathbb{X}) = \mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Доказательство. В качестве $\mathbb{X}$ рассмотрим пространство Δ_n. Рассмотрим множество M, состоящее из всех точек данного пространства. Для этого множества

$$\mathrm{mst}(M) = n - 1.$$

Рассмотрим заполнение данной границы, которое содержит одну дополнительную вершину, расстояние от которой до любой граничной точки равно $\frac{1}{2}$. Для данного заполнения выполняется достаточное условие минимальности заполнения (Теорема 1), а значит

$$\mathrm{mf}(M) = \frac{n}{2}.$$

Таким образом

$$\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) \le \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Поскольку для любого метрического пространства, в частности для $\mathbb{X}$, выполняется оценка

$$\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) \ge \frac{n}{2(n-1)},$$

то имеет место равенство.

Поскольку множество M содержит все точки пространства $\mathbb{X}$, минимальное дерево Штейнера не может содержать точек, не входящих в множество M. Следовательно, минимальное дерево Штейнера совпадает с минимальным остовным деревом и

$$\mathrm{smt}(M) = n - 1.$$

Проведя аналогичные рассуждения для суботношения Штейнера получим, что

$$\mathrm{ssr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Лемма доказана.

Доказательство лемм 11, 12, 13 завершает доказательство теоремы 8.

2.3 Доказательство теорем существования

Зафиксируем число s из допустимого отрезка значений. Покажем, как построить метрическое пространство, у которого $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \mathrm{ssr}(\mathbb{X}) = s$.

Если $s = 1$, то в качестве $\mathbb{X}$ можно взять произвольное метрическое пространство, состоящее из двух точек.

Если $\frac{3}{4} \leq s < 1$, то рассмотрим пространство, состоящее из трех точек x, y, z. Положим

$$\rho(x,y) = \rho(x,z) = 1,$$

$$\rho(y,z) = R, \text{ где } R \in [1,2).$$

Для множества M, состоящего из этих трех точек, $\mathrm{mst}(M) = 2$. Более того, $\mathrm{smt}(M) = 2$, поскольку пространство $\mathbb{X}$ не содержит других точек помимо вершин из M, которые можно было бы добавить для построения минимального дерева Штейнера. Вес минимального заполнения для M равен $\frac{1+1+R}{2}$ по теореме 5 (формула для вычисления веса минимального заполнения трехточечных множеств).

Таким образом,

$$\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \frac{2+R}{4} = s.$$

Изменяя параметр R от 1 до 2, получим произвольное s из промежутка $[\frac{3}{4}, 1)$.

Пусть теперь задано некоторое $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Найдем такое число $n > 3$, что

$$\frac{n-1}{2(n-2)} > s \geq \frac{n}{2(n-1)}.$$

Решая неравенство получим, что нужно взять

$$n = 2 + \left[\frac{1}{2s-1}\right],$$

где квадратные скобки обозначают целую часть.

Рассмотрим множество $\mathbb{X}$, состоящее из n точек. Выделим некоторую точку x и определим расстояния между точками следующим образом:

$$\rho(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{если } p = q; \\ R & \text{если } p = x \text{ или } q = x,\ p \neq q; \\ 1 & \text{если } p \neq x,\ q \neq x,\ p \neq q. \end{cases}$$

Здесь $R \geq 1$ выступает в качестве параметра.

Найдем отношение Штейнера–Громова для данного метрического пространства и убедимся, что существует такое значение R, что $\operatorname{sgr}(\mathbb{X}) = s$.

Рассмотрим множество M, состоящее из всех точек пространства $\mathbb{X}$. Так как $R \geq 1$, то для этого множества

$$\operatorname{mst}(M) = \operatorname{smt}(M) = R + n - 2.$$

В качестве заполнения множества M рассмотрим граф, содержащий помимо вершин из M одну вершину y, которая соединена ребрами со всеми граничными точками. Выберем веса ребер так, чтобы вес ребра, соединяющего y и x, равнялся $R - \frac{1}{2}$, а вес любого другого ребра, выходящего из y, равнялся бы $\frac{1}{2}$. Для данного заполнения выполняется достаточное условие минимальности (Теорема 1), а значит

$$\operatorname{mf}(M) = R + \frac{n}{2} - 1.$$

Рассмотрим сначала отношение Штейнера–Громова данного метрического пространства. Имеем, что

$$\frac{\operatorname{mf}(M)}{\operatorname{mst}(M)} = \frac{R + \frac{n}{2} - 1}{R + n - 2} = 1 - \frac{n-2}{2(R+n-2)}.$$

При $R = 2 - n + \frac{n-2}{2(1-s)}$ значение дроби в правой части равно s, а значит выполняется оценка: $\operatorname{sgr}(\mathbb{X}) \leq s$. Стоит отметить, что данное R действительно не меньше 1, как мы и требовали.

Заметим, что в силу конечности пространства $\mathbb{X}$, точную нижнюю грань в определении отношения Штейнера–Громова можно заменить на минимум. Кроме того, из Леммы 11 следует, что для любого множества M', состоящего менее чем из n точек,

$$\frac{\mathrm{mf}(M')}{\mathrm{mst}(M')} \geq \frac{n-1}{2(n-2)} > s, \text{ и}$$

$$\frac{\mathrm{mf}(M')}{\mathrm{smt}(M')} \geq \frac{n-1}{2(n-2)} > s.$$

Поскольку уже доказано, что $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) \leq s$, минимум в определении отношения Штейнера–Громова не может достигаться на множествах, состоящих менее чем из n точек. Следовательно, он достигается на единственном n – точечном множестве M. Таким образом, если $R = 2 - n + \frac{n-2}{2(1-s)}$, то

$$\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} = s.$$

Аналогичным образом при помощи Леммы 12 доказывается, что точная нижняя грань в определении суботношения Штейнера достигается на множестве M и $\mathrm{ssr}(\mathbb{X}) = s$ при том же значении параметра R. Таким образом полностью рассмотрен случай $s \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Пусть теперь $s = \frac{1}{2}$. Из Леммы 11 и Леммы 12 следует, что не существует метрического пространства, состоящего из конечного числа точек, для которого $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}$ или $\mathrm{ssr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}$. Рассмотрим пространство $\mathbb{X}$, состоящее из счетного числа точек, такое что расстояние между любыми попарно различными точками этого пространство равно 1. Тогда для любого n - точечного множества $M \subset \mathbb{X}$:

$$\frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} = \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{smt}(M)} = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Устремляя n к бесконечности получим, что:

$$\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \mathrm{ssr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что на каждом шаге доказательства, исключая последний, строилось пространство $\mathbb{X}$, содержащее n точек, причем $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \mathrm{ssr}(\mathbb{X}) = s$. Но для пространства из n точек $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \mathrm{sgr}_n(\mathbb{X})$, а $\mathrm{ssr}(\mathbb{X}) = \mathrm{ssr}_n(\mathbb{X})$, поэтому построенные пространства также служат примерами для доказательства Теоремы 10.

Тем самым доказаны теоремы существования для отношений типа Штейнера (Теорема 9) и для n-точечных отношений типа Штейнера (Теорема 10).

2.4 Примеры и следствия

2.4.1 Пространства, содержащие симплекс

Из доказательства леммы 13 следует, что $\mathrm{sgr}_n(\Delta_n) = \mathrm{ssr}_n(\Delta_n) = \frac{n}{2(n-1)}$. Равенство останется верным и для правильного симплекса с произвольной стороной S. Заметим, что при доказательстве равенства в случае суботношения Штейнера мы пользовались тем, что пространство не содержит иных точек, кроме множества M вершин симплекса. Если бы такие точки были, вес минимального дерева Штейнера для M мог бы оказаться меньше веса минимального остовного дерева, и тогда отношение $\mathrm{mf}(M)$ к $\mathrm{smt}(M)$ было бы больше, чем $\frac{n}{2(n-1)}$. Поэтому, вообще говоря, существования правильного симплекса $S\Delta_n$ в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ недостаточно для того, чтобы $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}$. Однако для отношения Штейнера–Громова такой проблемы не возникает, а потому верна следующая теорема.

Теорема 14. *Пусть метрическое пространство* $(\mathbb{X}, \rho)$ *содержит правильный симплекс* $S\Delta_n$*. Тогда* $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}$*. Если пространство* $(\mathbb{X}, \rho)$ *содержит правильный симплекс* $S\Delta_n$ *для любого* n*, то* $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}$.

Пример 1. Рассмотрим пространство ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ всех последовательностей $\{a^i\}_{i=0,1,\ldots}$ для которых

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

В качестве правильного n - мерного симплекса можно взять следующий набор $\{z_k\}$ из $n+1$ точки: у z_i координата $a^i = 1$, а все прочие координаты равны нулю. Тогда расстояние между любыми двумя различными точками из этого набора будет равно:

$$|z_i - z_j|_{\ell_p} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

Поскольку правильный n - мерный симплекс существует для произвольного n, для всех n верно равенство:

$$\operatorname{sgr}_n(\ell_p) = \frac{n}{2(n-1)},$$

и следовательно

$$\operatorname{sgr}(\ell_p) = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Аналогично можно рассуждать и в случае пространства ℓ_∞ последовательностей $\{a^i\}_{i=0,1,\ldots}$ для которых

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_i |a^i| < \infty$$

Тогда

$$\operatorname{sgr}_n(\ell_\infty) = \frac{n}{2(n-1)},$$

$$\operatorname{sgr}(\ell_\infty) = \frac{1}{2}.$$

Пример 3. Пространство всех ограниченных действительных функций $\mathbb{B}[0,1]$ на отрезке $[0,1]$ с метрикой

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

содержит правильный n-мерный симплекс для любого n. В качестве вершин данного симплекса можно взять функции

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x = 1/2^i \\ 0, \text{ при } x \neq 1/2^i \end{cases}$$

Аналогичную конструкцию можно построить и для пространства функций, заданных на произвольном отрезке $[a,b]$.

Следовательно,

$$\operatorname{sgr}_n(\mathbb{B}[a,b]) = \frac{n}{2(n-1)},$$

$$\operatorname{sgr}(\mathbb{B}[a,b]) = \frac{1}{2}.$$

Пример 4. Пространство действительных функций $C[a, b]$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ с метрикой

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

также содержит правильный симплекс для любого n. Покажем, как его построить. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей, каждую их которых обозначим $w_i = \left[a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1); a + \frac{b-a}{n} \cdot i\right]$, где $i = 1, \ldots, n$. Выберем произвольную непрерывную функцию f_1, тождественно не равную нулю, которая обращается в ноль на всех отрезках w_i, кроме первого, причем на концах отрезка w_1 функция обращается в ноль. Определим остальные f_i $(i = 2, \ldots, n)$ по правилу $f_{i+1}(x) = f_i\left(x - \dfrac{b-a}{n}\right)$ для всех допустимых x и доопределим нулем во всех остальных случаях. По сути это означает, что график каждой следующей функции получен из графика предыдущей сдвигом на $\frac{b-a}{n}$ вдоль оси абсцисс. Таким образом, мы получим набор из функций f_i, каждая из которых может быть отлична от нуля только во внутренних точках соответствующего отрезка w_i. Заметим, что расстояние между двумя такими функциями равно $\rho(f_i, f_j) = \sup_{x\in w_1} |f_1(x)|$ для $i \neq j$. Функцию f_1 выберем так, чтобы соответствующий супремум был отличен от нуля и равнялся некоторому числу d. Но это означает, что расстояния между любой парой функций из набора $\{f_i\}$ равно d, т.е. f_i являются вершинами правильного симплекса. Описанная конструкция работает для любого значения n, а значит

$$\mathrm{sgr}_n(C[a, b]) = \frac{n}{2(n-1)},$$

$$\mathrm{sgr}(C[a, b]) = \frac{1}{2}.$$

Пример 5. Заметим, что конструкция, описанная в предыдущем примере может быть обобщена для пространства функций заданного класса гладкости с супремум-метрикой. Симплекс строится аналогичным образом. Необходимо дополнительно потребовать, чтобы функция f_1 принадлежала заданному классу гладкости.

Пример 6. Пространство действительных функций $C_1[a,b]$, непрерывных на отрезке $[a,b]$ с интегральной метрикой

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

также обладает симплексом для любого n. Конструкция аналогична описанной в примере с супремум-метрикой. В качестве f_1 нужно взять функцию с дополнительным свойством $\int_a^b |f_1(x)| dx > 0$. Обозначим, значение данного интеграла d. Тогда

$$\int_a^b |f_1(x)| dx = \int_{w_1} |f_1(x)| dx = \int_{w_i} |f_i(x)| dx = d.$$

Поскольку носители функций f_i и f_j не пересекаются при $i \neq j$, имеем

$$\int_a^b |f_i(x) - f_j(x)| dx = \int_a^b |f_i(x)| dx + \int_a^b |f_j(x)| dx = 2d.$$

Расстояния между любой парой функций равно $2d$, а значит $\{f_i\}$ образуют множество вершин правильного симплекса. Следовательно,

$$\mathrm{sgr}_n(C_1[a,b]) = \frac{n}{2(n-1)},$$

$$\mathrm{sgr}(C_1[a,b]) = \frac{1}{2}.$$

Еще один пример пространства, в котором содержится $S\Delta_n$ для любого n, связан с метрикой Громова–Хаусдорфа и будет приведен в разделе 4.1.

2.4.2 Теорема о симплексе

В предыдущем разделе было показано, что пространства, содержащие правильный симплекс, обладают минимально возможным значением отношения Штейнера–Громова. Оказывается, справедлива следующая теорема.

Теорема 15. *Пусть* $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}$ *и достигается на некотором множестве, тогда это множество является правильным* $(n-1)$*-мерным симплексом.*

Доказательство. Вспомним основные шаги доказательства Леммы 11 о нижних оценках для отношения Штейнера–Громова. Мы рассматривали произвольное множество $M = \{a_i\}$, состоящее из $n > 2$ точек и дерево G, являющееся минимальным заполнением этого множества. Мы предполагали, что вершины $\{a_i\}$ (где $i = 1, \ldots, n$) являются последовательными относительно обхода π, порожденного G. Без ограничения общности мы полагали, что для любого $i = 1, \ldots, n-1$ выполнено равенство $\rho(a_n, a_1) \geq \rho(a_i, a_{i+1})$. Позже мы использовали оценку

$$\sum_{i=1}^{n-1} \rho(a_i, a_{i+1}) \geq \mathrm{mst}(M).$$

Если для рассматриваемого пространства оценка для sgr_n является точной и достигается на множестве M, значит все промежуточные неравенства должны обратиться в равенства. В частности для любого $i = 1, \ldots, n-1$ выполняются равенства $\rho(a_n, a_1) = \rho(a_i, a_{i+1})$ и $\sum_{i=1}^{n-1} \rho(a_i, a_{i+1}) = \mathrm{mst}(M)$. Отсюда получаем, что расстояние между вершинами, последовательными относительно обхода π, равно $\mathrm{mst}(M)/(n-1)$. Если π' — другой обход, порожденный графом G, то для него верны те же рассуждения, а потому если $\pi'(a_i) = a_j$ для некоторых $i \neq j$, то $\rho(a_i, a_j) = \mathrm{mst}(M)/(n-1)$.

Остается заметить, что для любых двух точек a_i и a_j множества M существует обход, относительно которого эти точки являются последовательными. Покажем, как построить такой обход π''. Пусть G' — укладка дерева G на плоскость. Поскольку G' — связный граф, вершины a_i и a_j можно соединить путем W^1. Пусть $E^1 \subset E(G')$ — множество ребер, входящих в этот путь. Рассмотрим удвоение графа G'. Однократно удалим из него ребра, входящие в множество E^1. В результате получим связный граф, соединяющий множество $\{a_1, \ldots, a_n\}$, у которого вершины a_i и a_j имеют нечетную степень, а все остальные вершины имеют четную степень. В таком графе существует путь W^2 с началом в точке a_j и концом в точке a_i, который содержит все ребра данного графа ровно по одному разу (доказательство этого факта можно найти, например, в [18, Remark 2.1.5]). Таким образом, на удвоении графа G' можно построить эйлеров цикл, сначала осуществляя движение от a_i к a_j по пути W^1, а после двигаясь от a_j

к a_i по пути W^2. При этом можно считать, что при движении по этому циклу мы сначала посещаем вершины a_i и a_j, а потом посещаем все остальные вершины во время прохождения пути W^2. Описанный циклический порядок на M задает искомый обход π'' графа G, поскольку для него выполняется требуемое равенство $\pi''(a_i) = a_j$.

Отсюда следует, что для любой пары различных точек a_i и a_j выполняется равенство $\rho(a_i, a_j) = \mathrm{mst}(M)/(n-1)$, а значит M — правильный симплекс, что и требовалось доказать.

Заметим, что, вообще говоря, из равенства $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}$ еще не следует, что в пространстве $\mathbb{X}$ есть правильный симплекс.

Пример 7. Рассмотрим пространство $\mathbb{X}$, состоящее из точек $a, b, c_1, c_2, c_3, \ldots$ и метрикой ρ, определяемой следующими соотношениями:

$$\rho(a,b) = 1, \quad \rho(a, c_i) = \rho(b, c_i) = 1 - \frac{1}{2^i}, \quad \rho(c_i, c_j) = \left|\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^j}\right|.$$

Вычислим $\mathrm{sgr}_3(\mathbb{X})$. Рассмотрим множество $M_i = \{a, b, c_i\}$. Для этого множества

$$\mathrm{mst}(M_i) = 1 + 1 - \frac{1}{2^i}$$

$$\mathrm{mf}(M_i) = \frac{1}{2}\left(1 + 1 + 1 - \frac{1}{2^i}\right)$$

Отношение $\mathrm{mf}(M_i)$ к $\mathrm{mst}(M_i)$ стремится к $\frac{3}{4}$ при $i \to \infty$. Следовательно, $\mathrm{sgr}_3(\mathbb{X}) \le \frac{3}{4}$. Но по теореме об оценках (Теорема 8) $\mathrm{sgr}_3(\mathbb{X}) \ge \frac{3}{4}$. Отсюда следует, что $\mathrm{sgr}_3(\mathbb{X}) = \frac{3}{4}$. Однако пространство $\mathbb{X}$ не содержит правильного симплекса.

2.4.3 Филогенетические пространства

Рассмотрим конечное множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Элементы a_i этого множества будем называть *буквами*, а само множество A — *алфавитом*. Рассмотрим все конечные последовательности, составленные из букв a_i, включая пустую последовательность. Всякую такую последовательность будем называть *словом.* Слово, не содержащее букв, назовем *пустым* и будем обозначать его λ. Для каждого слова определим его *длину* как количество букв в его записи. При этом будем полагать, что длина пустого слова равна нулю.

Определим следующие операции на множестве всех слов:

– *удаление* некоторой буквы из слова;
– *вставка* или *добавление* некоторой буквы алфавита на некоторую позицию в записи слова;
– *замена* одной буквы слова на некоторую другую букву алфавита.

Нетрудно заметить, что за конечное число подобных операций из любого слова можно получить любое другое. Наименьшее число операций, необходимых для получения слова α из слова β, назовем *расстоянием* между этими словами. Заметим, что введенное расстояние удовлетворяет свойствам метрики. Таким образом, множество всех слов, полученных из букв данного алфавита, можно рассматривать, как метрическое пространство. Это пространство будем называть *филогенетическим пространством*, а введенную на нем функцию расстояния — *расстоянием Левенштейна.*

Если алфавит A содержит только одну букву, то в этом случае слова имеют вид $a\ldots a$ (k раз), а само филогенетическое пространство изометрично пространству натуральных чисел с метрикой $\rho(m,n) = |m-n|$. В этом случае значение всех отношений типа Штейнера, в том числе и n - точечных, равно 1. Изучим более подробно отношения типа Штейнера филогенетических пространств, алфавит которых содержит более одной буквы.

Отношение Штейнера для филогенетических пространств вычислено в работе Цислика (см.[18, Theorem 4.4.1]).

Теорема 16 (Д. Цислик)**.** *Отношение Штейнера филогенетического пространства $\mathbb{X}$, для которого $N \geq\ 2$, равно $\frac{1}{2}$.*

Теорема 17. *Отношение Штейнера–Громова филогенетического пространства $\mathbb{X}$, для которого $N \geq\ 2$, равно $\frac{1}{2}$.*

Доказательство. Выделим две буквы из алфавита. Без ограничения общности, назовем их a и b. Рассмотрим слово, состоящее из n букв a, т.е.

$$\alpha_0 = \underbrace{a\ldots a}_{n \text{ раз}}.$$

образуем из слова α_0 новые n слов следующим образом: слово α_i получается из α_0 путем замены i-ого символа в записи α_0 на букву b. Тогда для любых $i \neq j$, таких что $i > 0$, $j > 0$, расстояние между α_i и α_j равно 2. Рассмотрим множество M всех α_i, где $i = 1, \ldots, n$. Множество M является $n-1$ - мерным правильным симплексом, значит в силу Теоремы 14 справедливо равенство:

$$\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Учитывая, что n можно выбрать сколь угодно большим, получим:

$$\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}.$$

Стоит заметить, что существование правильного симплекса с n вершинами в метрическом пространстве $\mathbb{X}$, вообще говоря, не гарантирует, что и $\mathrm{ssr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}$. Однако в некоторых случаях это условие может оказаться достаточным.

Теорема 18. *Пусть $\mathbb{X}$ — филогенетическое пространство, содержащее правильный симплекс Δ_n со стороной 1. Тогда*

$$\mathrm{ssr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Доказательство. Пусть M — множество вершин Δ_n. Покажем, что для множества M минимальное дерево Штейнера совпадает с минимальным остовным деревом. Действительно, если бы дерево Штейнера содержало еще какие-то дополнительные вершины, то вес построенного дерева был бы не меньше, чем n, т.к. в филогенетическом пространстве расстояние между любыми различными словами не меньше 1. Значит

$$\mathrm{mst}(M) = \mathrm{smt}(M) = n - 1,$$

и следовательно

$$\frac{n}{2(n-1)} \leq \mathrm{ssr}_n(\mathbb{X}) \leq \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{smt}(M)} = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Откуда получаем требуемое утверждение.

Если в качестве граничного множества M рассмотреть все однобуквенные слова данного алфавита, объединенные с пустым словом, то, воспользовавшись предыдущей теоремой, будем иметь:

Теорема 19. *Пусть X — филогенетическое пространство, с алфавитом из $n-1$ или более букв. Тогда* $\operatorname{ssr}_n(X) = \frac{n}{2(n-1)}$.

В свою очередь из данной теоремы непосредственно следует:

Теорема 20.
$$\inf_X \operatorname{ssr}(X) = \frac{1}{2},$$
где точная нижняя грань берется по всем филогенетическим пространствам.

Теорему 18 можно обобщить до случая произвольного метрического пространства.

Теорема 21. *Пусть $\mathbb{X}$ пространство с метрикой ρ. Пусть $\rho(x,y) \geq C > 0$ для любых $x,y \in \mathbb{X}$, и в пространстве $\mathbb{X}$ существует правильный симплекс $C\Delta_n$. Тогда*
$$\operatorname{ssr}_n(\mathbb{X}, \rho) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Глава 3. Классификация пространств, отношение Штейнера–Громова которых равно единице

3.1 Основной результат главы

Теорема 8 позволяет понять, в каких границах может изменяться значение отношений типа Штейнера. Особый интерес представляет изучение «граничных случаев», то есть метрических пространств, у которых значение того или иного отношения равно максимально или минимально возможному. В предыдущей главе были приведены примеры пространств, у которых отношения типа Штейнера равны минимально возможному значению. Некоторые замечания относительно таких пространств будут сделаны и в следующей главе.

Известны примеры пространств, для которых отношение Штейнера равно единице. Например, таковым является любое ультраметрическое пространство. Доказательство этого факта (см.[18, observation 4.1.10]) и другие примеры можно найти в работе Цислика. Говоря о работах, посвященных изучению пространств с максимально возможным значением отношения, хочется отметить работу [26], в которой описаны все банаховы пространства, для которых суботношение Штейнера равно единице. В данном разделе рассматривается отношение Штейнера–Громова и классифицируются все пространства, у которых $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}) = 1$ для некоторого $n > 2$, и пространства, у которых $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = 1$.

Определение. Назовем множество $\{x_1, x_2, x_3\} \subset (\mathbb{X}, \rho)$ *вырожденным треугольником*, если для некоторой перестановки (i, j, k) индексов $(1, 2, 3)$ выполнено равенство $\rho(x_i, x_j) = \rho(x_i, x_k) + \rho(x_k, x_j)$.

Пример 8. Зафиксируем два положительных числа a и b. Построим пространство $(\mathbb{D}_{\{a,b\}}, \rho_d)$, состоящее из четырех точек $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, расстояния между которыми заданы следующим образом:

$$\rho_d(x_1, x_2) = \rho_d(x_3, x_4) = a;$$

$$\rho_d(x_2, x_3) = \rho_d(x_1, x_4) = b;$$

$$\rho_d(x_1, x_3) = \rho_d(x_2, x_4) = a + b.$$

Любое трехточечное множество данного пространства является вырожденным треугольником.

Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 22. *Пусть* $(\mathbb{X}, \rho)$ — *метрическое пространство. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}, \rho) = 1$.
2. *Одновременно выполнены условия:* $\mathrm{sr}(\mathbb{X}, \rho) = 1$ *и* $\mathrm{ssr}(\mathbb{X}, \rho) = 1$.
3. *Для любого конечного множества* $M \subset \mathbb{X}$ *выполняется равенство* $\mathrm{mf}(M) = \mathrm{smt}(M) = \mathrm{mst}(M)$.
4. *Все треугольники в* $\mathbb{X}$ *вырождены.*
5. *Пространство* $(\mathbb{X}, \rho)$ *изометрично подмножеству евклидовой прямой или изометрично* $(\mathbb{D}_{\{a,b\}}, \rho_d)$ *для некоторых* a *и* b.
6. *Для любого* $n \geq 2$ *выполняется* $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}, \rho) = 1$.
7. *Существует* $n \geq 3$, *такое что* $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}, \rho) = 1$.

3.2 Доказательство теоремы

Доказательство эквивалентности пунктов организуем следующим образом. Сначала докажем эквивалентность первых пяти пунктов, показав, что выполняется цепочка следствий $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$. После этого докажем, что $1 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7$. Для завершения доказательства покажем, что из пункта 7 следует один из первых пяти пунктов. Нам будем удобнее доказать, что $7 \Rightarrow 4$.

1 ⇒ 2

Для любого метрического пространства верны оценки $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) \leq \mathrm{sr}(\mathbb{X}) \leq 1$ и $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) \leq \mathrm{ssr}(\mathbb{X}) \leq 1$. Если отношение Штейнера–Громова равно единице, то и два других отношения тоже.

2 ⇒ 3

Предположим, что найдется конечное подмножество $M_0 \subset \mathbb{X}$, для которого $\mathrm{mf}(M_0) < \mathrm{smt}(M_0)$. Но в этом случае

$$\mathrm{ssr}(\mathbb{X}) = \inf_{\{M | M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \mid 1 < \#M < \infty \right\} \leq \frac{\mathrm{mf}(M_0)}{\mathrm{mst}(M_0)} < 1,$$

что противоречит условию $\mathrm{ssr}(\mathbb{X}) = 1$.

Аналогично, существование множества M_1, для которого $\mathrm{smt}(M_1) < \mathrm{mst}(M_1)$ противоречит условию $\mathrm{sr}(\mathbb{X}) = 1$. Следовательно, для любого конечного множества M выполняется $\mathrm{mf}(M) = \mathrm{smt}(M) = \mathrm{mst}(M)$.

3 ⇒ 4

Предположим противное. Пусть найдутся три точки x_1, x_2, x_3, принадлежащие пространству $\mathbb{X}$, для которых

$$\rho(x_i, x_j) < \rho(x_i, x_k) + \rho(x_k, x_j),$$

где (i, j, k) — любая перестановка индексов (1, 2, 3). Далее для определенности будем считать, что

$$\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_2, x_3) \leq \rho(x_1, x_3)$$

Рассмотрим множество M, состоящее из этих трех точек. Тогда

$$\mathrm{mst}(M) = \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3).$$

С другой стороны, по формуле для вычисления веса минимального заполнения трехточечного множества (теорема 5)

$$\mathrm{mf}(M) = \frac{1}{2}(\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_1, x_3)).$$

Учитывая сделанные предположения, имеем:

$$\rho(x_1, x_3) < \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3).$$

А значит, подставив эту оценку в выражение для $\mathrm{mst}(M)$ получим

$$\mathrm{mf}(M) < \frac{1}{2}(\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3)) = \mathrm{mst}(M),$$

что противоречит условию $\mathrm{mf}(M) = \mathrm{mst}(M)$ для любого $M \subset \mathbb{X}$.

4 ⇒ 5

Это переход является одним из основных результатов в работе [27].

Перечислим основные шаги доказательства. Очевидно, что пространства, содержащие одну, две или три точки, образующие вырожденный треугольник, изометрично вкладываются в евклидову прямую. Если пространство содержит четыре точки, метрика этого пространства описывается шестью попарными расстояниями между этими точками. Условие вырожденности всех треугольников накладывает некоторые дополнительные ограничения на эти расстояния. В работе [27] в результате аккуратного разбора случаев доказано, что существуют только две различные конфигурации: одна из них изометрична подмножеству евклидовой прямой, а вторая изометрична $(\mathbb{D}_{\{a,b\}}, \rho_d)$ для некоторых a и b. Далее рассматривается случай пространств $\mathbb{X}$, содержащих более четырех точек. Оказывается, что пространство $(\mathbb{D}_{\{a,b\}}, \rho_d)$ нельзя расширить, добавив еще одну точку и сохранив условие вырожденности всех треугольников. Это значит, что все четырехточечные множества пространства $\mathbb{X}$ изометричны множеству точек на евклидовой прямой. Но тогда и само пространство $\mathbb{X}$ изометрично некоторому подмножеству прямой. В работе [27] при помощи формул показано, как построить искомую изометрию.

5 ⇒ 1

Если пространство $\mathbb{X}$ изометрично вкладывается в прямую $\mathbb{R}^1$, то его отношение Штейнера–Громова не меньше, чем аналогичное отношение для прямой. Покажем, что в случае прямой отношение Штейнера–Громова равно единице. Пусть $M_n = \{z_1, \ldots, z_n\}$ — некоторое n-точечное множество на прямой. Для точек, расположенных на прямой, введем отношение порядка и в дальнейшем будем предполагать, что точка z_k расположена на прямой между точками z_i и z_j, если и только если $i < k < j$. В этом случае ребрами минимального остовного дерева для множества M являются ребра $z_i z_{i+1}$, где $i = 1, \ldots, n-1$. Для точек z_k и z_j, где $k < j$, выполняется равенство $\rho(z_k, z_j) = \sum_{i=k}^{j-1} \rho(z_i, z_{i+1})$. В силу достаточного условия (Теорема 1) минимальное остовное дерево также является минимальных заполнением для множества M. Поскольку для любого конечного множества $M \subset \mathbb{R}^1$ выполняется $\mathrm{mf}(M)/\,\mathrm{mst}(M) = 1$, для евклидовой прямой $\mathrm{sgr}(\mathbb{R}^1) = 1$. Поскольку это максимально возможное значение отношения, отношение Штейнера–Громова для исходного пространства $\mathbb{X}$ также равно единице.

Если же пространство $(\mathbb{X}, \rho)$ изометрично пространству $(\mathbb{D}_{\{a,b\}}, \rho_d)$, то получить утверждение можно применив формулу для вычисления веса минимального заполнения четырехточечного пространства (теорема 6). Для четырехточечного множества $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ верна следующая формула

$$2\,\mathrm{mf}(M) = \min\left(\rho(x_i, x_j) + \rho(x_k, x_l)\right) + \max\left(\rho(x_i, x_j) + \rho(x_k, x_l)\right),$$

где (i,j,k,l) — произвольная перестановка индексов (1,2,3,4), а минимум и максимум берутся по всем (i,j,k,l).

Будем полагать, что точки множества M занумерованы так, что выполняются равенства $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_3, x_4) = a$, $\rho(x_2, x_3) = \rho(x_1, x_4) = b$, $\rho(x_1, x_3) = \rho(x_2, x_4) = a + b$

Без ограничения общности, $a \le b$. Кроме того, $b < a + b$. Тогда

$$\mathrm{mst}(M) = a + b + a;$$

$$2\,\mathrm{mf}(M) = (a + a) + (a + b + a + b).$$

Таким образом, $\mathrm{mst}(M) = \mathrm{mf}(M) = 2a + b$. Для единственного четырехточечного множества $\mathrm{mf}(M)/\,\mathrm{mst}(M) = 1$. Для множеств, состоящих из трех точек, аналогичное равенство следует из условия вырожденности всех треугольников. Значит, и для такого пространства $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = 1$.

1 ⇒ 6

Действительно, равенство

$$\mathrm{sgr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M | M \subset \mathbb{X}\}} \left\{\frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \mid 1 < \#M < \infty\right\} = 1$$

влечет за собой выполнение равенства

$$\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M | M \subset \mathbb{X}\}} \left\{\frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} \mid 1 < \#M \le n\right\} = 1$$

для любого $n \ge 2$.

6 ⇒ 7

Если равенство $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}, \rho) = 1$ выполняется для всех n, оно очевидно выполняется и для некоторого $n_0 \ge 3$.

7 ⇒ 4

Пусть дано, что для некоторого n_0 выполняется равенство $\mathrm{sgr}_{n_0}(\mathbb{X}) = 1$. Это означает, что аналогичное равенство выполнено и для всех $n \le n_0$, в частности для $n = 3$.

Пусть в пространстве $\mathbb{X}$ существует хотя бы один невырожденный треугольник $x_1x_2x_3$ (причем сторона x_1x_3 — наибольшая). Тогда для множества M вершин треугольника выполнено

$$\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) > \rho(x_1, x_3);$$

$$\mathrm{mf}(M) = \frac{\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_1, x_3)}{2} < \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) = \mathrm{mst}(M).$$

Это значит, что $\mathrm{sgr}_3(\mathbb{X}) \leq \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)} < 1$, что противоречит условию $\mathrm{sgr}_3(\mathbb{X}) = 1$. Следовательно, в пространстве $\mathbb{X}$ не может быть невырожденных треугольников.

Доказательство данного перехода завершает доказательство Теоремы 22.

3.3 Примеры и следствия

Из теоремы следует, что метрические пространства, отношение Штейнера–Громова которых равно единице, либо конечны, либо изометричны евклидовой прямой или ее подмножеству. Так как пространство $\mathbb{R}^1$ содержит континуум точек, никакие пространства $\mathbb{X}$ большей мощности не могут быть подмножествами $\mathbb{R}^1$, а значит $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) \neq 1$.

Следствие 1. *Пусть* $(\mathbb{X}, \rho)$ *— метрическое пространство. Если его мощность больше мощности континуума, то* $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}, \rho) < 1$

Пример 9. Пространство всех ограниченных действительных функций $\mathbb{B}(\mathfrak{N})$, определенных на некотором континуальном множестве $\mathfrak{N}$ с метрикой

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in \mathfrak{N}} |f(x) - g(x)|$$

имеет мощность большую, чем мощность континуума. Значит $\mathrm{sgr}(\mathbb{B}(\mathfrak{N})) < 1$.

Заметим, что в примере 3 уже было показано, как непосредственно вычислить значение отношения Штейнера–Громова для пространства функций, ограниченных на отрезке. Описанную в этом примере конструкцию можно применить и для построения правильного симплекса в пространстве всех ограниченных функций на произвольном континуальном подмножестве. В результате получим, что $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{B}(\mathfrak{N})) = \frac{n}{2(n-1)}$ для любого n, а $\mathrm{sgr}(\mathbb{B}(\mathfrak{N})) = \frac{1}{2}$.

Прежде чем сформулировать следующее следствие дадим определение.

Определение. Конечное метрическое пространство $(M,\ \rho)$ называется *аддитивным*, если M можно соединить взвешенным деревом $G = (G,\omega)$, для которого ρ совпадает с функцией, ставящей в соответствие каждой паре точек из M вес единственного пути в графе G, соединяющего эти точки. Дерево G называется *порождающим* для пространства M.

Заметим, что любое конечное подмножество евклидовой прямой является аддитивным пространством. Четырехточечное пространство $(\mathbb{D}_{\{a,b\}}, \rho_d)$, описанное в теореме классификации, наоборот, является неаддитивным. Убедиться в этом позволяет критерий четырех точек (см. [28]): пространство аддитивно, если и только если для любых четырех точек x_i, x_j, x_k, x_l величины $\rho(x_i, x_j) + \rho(x_k, x_l)$, $\rho(x_i, x_k) + \rho(x_j, x_l)$ и $\rho(x_i, x_l) + \rho(x_k, x_j)$ являются длинами сторон равнобедренного треугольника с основанием, не превосходящим боковой стороны. В пространстве $(\mathbb{D}_{\{a,b\}}, \rho_d)$ всего четыре точки, значит проверить условие критерия нужно только для одного множества.

$$\rho_d(x_1, x_2) + \rho_d(x_3, x_4) = a + a = 2a$$

$$\rho_d(x_2, x_3) + \rho_d(x_1, x_4) = b + b = 2b$$

$$\rho_d(x_1, x_3) + \rho_d(x_2, x_4) = a + b + a + b = 2a + 2b$$

Величины $2a$, $2b$, $2a + 2b$ могут являться сторонами равнобедренного треугольника только при $a = b$, однако в этом случае основание треугольнике больше длины боковой стороны. Следовательно, условия критерия четырех точек не выполняются и пространство $(\mathbb{D}_{\{a,b\}}, \rho_d)$ не аддитивно.

Следствие 2. *Пусть* $(\mathbb{X}, \rho)$ *— метрическое пространство. Если* $\mathbb{X}$ *не аддитивно и содержит более* 4 *точек, то* $\mathrm{sgr}((\mathbb{X}, \rho)) < 1$

Глава 4. Изучение непрерывности отношений типа Штейнера

4.1 Определение метрики Громова–Хаусдорфа и формулировки основных результатов

При изучении отношений типа Штейнера различных метрических пространств возникает вопрос: насколько сильно могут отличаться отношения типа Штейнера у близких пространств. Близость пространств при этом понимается в смысле некоторой метрики. В данном разделе в качестве такой метрики предлагается использовать метрику Громова–Хаусдорфа. Для ее определения введем сначала понятие расстояния между множествами одного пространства.

Пусть $(\mathbb{X}, \rho)$ — метрическое пространство с метрикой $\rho(a,b)$. Назовем *ε–окрестностью точки a* множество $U_\varepsilon(a)$, состоящее из точек b таких, что $\rho(a,b) < \varepsilon$. Объединение всех ε–окрестностей точек множества $A \subset \mathbb{X}$ назовем *ε–окрестностью множества* и обозначим через $U_\varepsilon(A)$.

Пусть A и B — замкнутые подмножества $\mathbb{X}$. Определим между ними *расстояние по Хаусдорфу* следующим образом:

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subset U_\varepsilon(B) \text{ и } B \subset U_\varepsilon(A)\}.$$

Данное расстояние задает метрику на множестве всех замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства. Впервые данную метрику использовал в своей работе Ф. Хаусдорф ([29]).

Перейдем к определению расстояния между метрическими пространствами. Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — два метрических пространства. *Реализацией* этих пространств назовем такую тройку метрических пространств $(\mathbb{X}', \mathbb{Y}', \mathbb{Z}')$, что $\mathbb{X}'$ и $\mathbb{Y}'$ — подпространства $\mathbb{Z}'$, причем $\mathbb{X}'$ изометрично $\mathbb{X}$, а $\mathbb{Y}'$ изометрично $\mathbb{Y}$. *Расстоянием по Громову–Хаусдорфу* между $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ назовем

$$d_{GH} = \inf\{r \in \mathbb{R} \mid \exists (\mathbb{X}', \mathbb{Y}', \mathbb{Z}'), \text{ такая что } d_H(\mathbb{X}', \mathbb{Y}') \le r\}.$$

Расстояние по Громову–Хаусдорфу появилось впервые в 1981 году в работе [30]. Эта функция задает конечную метрику на пространстве классов изометричных компактных метрических пространств. (Доказательство этого факта приведено, например, в [31, теорема 7.3.30]). Пространство классов изометричных компактных метрических пространств с метрикой Громова–Хаусдорфа будем называть *пространством Громова–Хаусдорфа.*

В настоящее время существует много работ, посвященных метрике Громова–Хаусдорфа и ее свойствам (например, [32], [33], [34]). Также активно разрабатываются методы вычисления расстояния по Громову–Хаусдорфу между различными метрическими пространствами. Например, в работе [35] изучаются расстояния между метрическим пространством и правильными симплексами. Приведем один из результатов данной работы ([35, theorem 4.1]).

Теорема 23 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин)**.** *Пусть* $(\mathbb{X}, \rho)$ *— конечное метрическое пространство, содержащее* n *точек. Для любого натурального числа* $m > n$ *и действительного числа* $S > 0$ *выполняется равенство*

$$2d_{GH}(S\Delta_m, \mathbb{X}) = \max\{S, \operatorname{diam}\mathbb{X} - S\},$$

где $\operatorname{diam}\mathbb{X} = \sup_{p,q\in\mathbb{X}} \rho(p,q)$ *— диаметр пространства* $\mathbb{X}$*.*

Пример 10. Пользуясь приведенной теоремой, вычислим расстояние по Громову–Хаусдорфу между симплексами $S\Delta_i$ и $S\Delta_j$ при $i \neq j$. Без ограничения общности будем считать, что $i < j$. Диаметр симплекса со стороной S равен S, поэтому

$$2d_{GH}(S\Delta_i, S\Delta_j) = \max\{S, \operatorname{diam}(S\Delta_j) - S\} = \max\{S, 0\} = S.$$

Это означает, что расстояние по Громову–Хаусдорфу между любыми неизометричными правильными симплексами со стороной S равно $S/2$.

Выберем натуральное число n. Рассмотрим множество $A_n = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n\}$. Элементы этого множества можно рассматривать как точки в пространстве Громова–Хаусдорфа, причем расстояние между любыми двумя точками равно $1/2$. Следовательно, A_n является правильным симплексом с n вершинами в пространстве Громова–Хаусдорфа. Симплекс A_n можно построить для любого n, значит можно применить теорему 14 и вычислить отношение Штейнера–Громова для пространства Громова–Хаусдофа. Следующий результат приведен в работе [36].

Теорема 24 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин)**.** *Пусть* $(\mathbb{X}_{GH}, d_{GH})$ *— пространство Громова–Хаусдорфа. Тогда для любого натурального* $n \geq 2$

$$\operatorname{sgr}_n(\mathbb{X}_{GH}, d_{GH}) = \frac{n}{2(n-1)},$$

$$\operatorname{sgr}(\mathbb{X}_{GH}, d_{GH}) = \frac{1}{2}.$$

В настоящей работе изучается непрерывность и полунепрерывность отношений типа Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа. Цель настоящего раздела — доказать теорему о полунепрерывности и критерий непрерывности для отношений. Напомним, что числовая функция $f(x)$, определенная на некотором множестве метрического пространства $(\mathbb{X},\rho)$, называется *полунепрерывной сверху* в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ т.ч. } \forall x : \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Теорема 25. *Пусть* $(\mathbb{X}_0, \rho)$ *— компактное метрическое пространство, рассматриваемое как точка в пространстве Громова–Хаусдорфа. Тогда функция* r*, сопоставляющая пространству отношение типа Штейнера, и функция* r_n*, сопоставляющая пространству* n*-точечное отношение типа Штейнера, являются полунепрерывными сверху в точке* $\mathbb{X}_0$*.*

Теорема 26. *Пусть* $(\mathbb{X}_0, \rho)$ *— компактное метрическое пространство, рассматриваемое как точка в пространстве Громова–Хаусдорфа. Пусть функция* r *обозначает одно из трех отношений типа Штейнера:* sr, sgr *или* ssr*. Тогда*

1. *Функция* r_n *является непрерывной в точке* $\mathbb{X}_0$*, если и только если*

$$r_n(\mathbb{X}_0) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

2. *Функция* r *является непрерывной в точке* $\mathbb{X}_0$*, если и только если*

$$r(\mathbb{X}_0) = \frac{1}{2}.$$

Доказательство теорем проведем для каждого отношения в отдельности.

4.2 Полунепрерывность отношения Штейнера

Начнем с рассмотрения функции, сопоставляющей метрическому пространству его n-точечное отношение Штейнера. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $\mathbb{X}$ с условием: $d_{GH}(\mathbb{X}, \mathbb{X}_0) < \delta$ выполнено: $\mathrm{sr}_n(\mathbb{X}) - \mathrm{sr}_n(\mathbb{X}_0) < \varepsilon$.

Напомним, что по определению

$$d_{GH}(\mathbb{X}_0, \mathbb{X}) = \inf_{(\mathbb{X}_0', \mathbb{X}', \mathbb{Z}')} d_H(\mathbb{X}_0', \mathbb{X}'),$$

где точная нижняя грань берется по всем реализациям пространств $(\mathbb{X}_0, \mathbb{X})$. Из определения точной нижней грани следует, что для любого $h > 0$ (в частности для $h = \delta$) существует такая реализация $(\mathbb{X}_0'$, $\mathbb{X}'$, $\mathbb{Z}')$ пространств $(\mathbb{X}_0$, $\mathbb{X})$, что

$$d_H(\mathbb{X}_0', \mathbb{X}') < d_{GH}(\mathbb{X}, \mathbb{X}_0) + h < 2\delta.$$

В дальнейшем для упрощения обозначений будем опускать штрихи. Метрику в $\mathbb{Z}$, и как следствие в $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}_0$, будем обозначать буквой ρ.

Зафиксируем ε. Из определения отношения Штейнера следует, что в $\mathbb{X}_0$ существует такое множество A, состоящее из $m \le n$ различных вершин, для которого

$$\frac{\mathrm{smt}(A)}{\mathrm{mst}(A)} < \mathrm{sr}_n(\mathbb{X}_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что и в случае рассмотрения общего отношения Штейнера можно найти такое множество A, состоящее из конечного числа точек. Поэтому дальнейшие рассуждения справедливы и для n-точечного и для общего отношения Штейнера.

Так как $\mathbb{X}_0$ лежит в 2δ-окрестности $\mathbb{X}$, то для любой $a_i \in A$ найдется такая $b_l \in \mathbb{X}$, что $\rho(a_i, b_l) < 2\delta$. Пусть

$$R = \min_{i \ne j}\{\rho(a_i, a_j)\}.$$

Пусть δ_1 настолько мало, что $2\delta_1 < \frac{R}{2}$. Тогда если $\delta < \delta_1$, то все b_l различны, то есть в $\mathbb{X}$ существует такое множество $B = \{b_i \in \mathbb{X} \mid i = 1, \ldots, m\}$, что $\rho(a_i, b_i) < 2\delta$.

Оценим расстояния между точками множества B:

$$\rho(b_i, b_j) \le \rho(b_i, a_i) + \rho(a_i, a_j) + \rho(a_j, b_j) < \rho(a_i, a_j) + 4\delta.$$

С другой стороны:

$$\rho(a_i, a_j) \le \rho(a_i, b_i) + \rho(b_i, b_j) + \rho(b_j, a_j) < \rho(b_i, b_j) + 4\delta;$$

$$\rho(b_i, b_j) > \rho(a_i, a_j) - 4\delta.$$

Пусть E_B — множество ребер минимального остовного дерева для множества B. Построим множество E_A, состоящее из пар (a_i, a_j), причем (a_i, a_j) входит в E_A если и только если (b_i, b_j) входит в E_B. В этом случае E_A — множество ребер некоторого дерева, множество вершин которого совпадает с A. Оценим длину минимального остовного дерева, построенного для множества B.

$$\mathrm{mst}(B) = \sum_{(b_i, b_j) \in E_B} \rho(b_i, b_j) > \sum_{(a_i, a_j) \in E_A} (\rho(a_i, a_j) - 4\delta) \ge \mathrm{mst}(A) - 4\delta(m-1).$$

Здесь мы воспользовались тем, что у дерева с m вершинами $m-1$ ребро.

Теперь оценим длину минимального дерева Штейнера для B. Пусть $A' = \{a_i \in \mathbb{X}_0 \mid i = 1, \ldots, m+k\}$ — множество вершин некоторого дерева T, длина которого не превышает $\mathrm{smt}(A) + 4\delta$, причем это дерево содержит все вершины множества A и $k \ge 0$ дополнительных вершин. Существование такого дерева для любого δ следует из определения $\mathrm{smt}(A)$. Так как $\mathbb{X}_0$ лежит в 2δ-окрестности $\mathbb{X}$, то для любой $a_i \in A'$ найдется такая $b_l \in \mathbb{X}$, что $\rho(a_i, b_l) < 2\delta$. Вообще говоря, какие-то из точек b_i и b_j, где $i,j > m$ могут совпасть. Можно наложить дополнительные ограничения на δ и добиться того, чтобы все b_i были различны, но мы этого делать не будем.

Рассмотрим множество $E_{A'}$, состоящее из ребер дерева T. Построим множество $E_{B'}$, состоящее из пар (b_i, b_j), причем (b_i, b_j) входит в $E_{B'}$ если и только если (a_i, a_j) входит в $E_{A'}$. Тогда

$$\operatorname{smt}(B) \le \sum_{(b_i,b_j)\in E_{B'}} \rho(b_i, b_j) \le \sum_{(a_i,a_j)\in E_{A'}} (\rho(a_i, a_j) + 4\delta) \le \operatorname{smt}(A) + 4\delta(m + k).$$

Здесь мы воспользовались тем, что T содержит $m + k - 1$ ребро, а также соотношением

$$\sum_{(a_i,a_j)\in E_{A'}} \rho(a_i, a_j) \le \operatorname{smt}(A) + 4\delta.$$

Учитывая оценки для $\operatorname{mst} B$, получим, что

$$\frac{\operatorname{smt}(B)}{\operatorname{mst}(B)} \le \frac{\operatorname{smt}(A) + 4\delta(m + k)}{\operatorname{mst}(A) - 4\delta(m - 1)}.$$

При стремлении δ к нулю правая часть неравенства стремится к $\frac{\operatorname{smt}(A)}{\operatorname{mst}(A)}$, поэтому существует такое значение δ_2, для которого выполняется

$$\frac{\operatorname{smt}(B)}{\operatorname{mst}(B)} \le \frac{\operatorname{smt}(A)}{\operatorname{mst}(A)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, если выбрать $\delta < \min(\delta_1, \delta_2)$, то выполняется

$$\frac{\operatorname{smt}(B)}{\operatorname{mst}(B)} < \operatorname{sr}_n(\mathbb{X}_0) + \varepsilon.$$

Отсюда получим, что

$$\operatorname{sr}_n(\mathbb{X}) \le \frac{\operatorname{smt}(B)}{\operatorname{mst}(B)} < \operatorname{sr}_n(\mathbb{X}_0) + \varepsilon,$$

что и означает полунепрерывность функции сверху.

4.3 Полунепрерывность отношения Штейнера–Громова

Из определения следует, что в $\mathbb{X}_0$ существует такое множество A'', состоящее из $m' \leq n$ различных вершин, для которого

$$\frac{\mathrm{mf}(A'')}{\mathrm{mst}(A'')} < \mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вообще говоря, множество A'' не совпадает с множеством A из предыдущего пункта и $m' \neq m$. Однако для упрощения обозначений и вследствие того, что оценки, полученные в предыдущем случае, легко переносятся на случай отношения Штейнера–Громова, мы будем обозначать множество A'' буквой A, а близкое к нему множество в $\mathbb{X}$ буквой B.

Оценим теперь вес минимального заполнения для B. Рассмотрим граф G, являющийся минимальным заполнением для A. Рассмотрим новый граф, содержащий все ребра графа G, и содержащий ребра (a_i, b_i) с весом $\rho(a_i, b_i)$. Полученный граф является заполнением для B. Отсюда

$$\mathrm{mf}(B) \leq \mathrm{mf}(A) + \sum_{i=1}^{m} \rho(a_i, b_i) \leq \mathrm{mf}(A) + 2\delta m.$$

Рассматривая оценки для отношения $\frac{\mathrm{mf}(B)}{\mathrm{mst}(B)}$ и устремляя δ к нулю, аналогичным образом получим справедливость утверждения для отношения Штейнера–Громова, как n-точечного, так и общего.

4.4 Полунепрерывность суботношения Штейнера

Для проведения тех же рассуждений в случае суботношения Штейнера не хватает оценок снизу для $\mathrm{smt}(B)$. Покажем, как их получить. По определению $\mathrm{smt}(B)$ в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ найдется такое множество $B' = B \cup \{b_i \mid i = m+1, \ldots, m+q\}$, что длина минимального остовного дерева для этого множества не превосходит $\mathrm{smt}(B) + 4\delta$ для любого $\delta > 0$. Отметим, что q — это число внутренних вершин дерева, которое не превосходит $m-2$ (см.[18, observation 3.1.1]). E_B — множество ребер минимального остовного дерева для множества B'. В пространстве $\mathbb{X}_0$ найдем такие точки a_j $(j = m+1, \dots, m+q)$, что $\rho(a_i, b_i) < 2\delta$. Возможно, что какие-то a_j при этом совпадут. Объединим все a_i $(i = 1, \dots, m+q)$ в множество A'. Построим множество E_A, состоящее из пар (a_i, a_j), причем (a_i, a_j) входит в E_A, если и только если (b_i, b_j) входит в E_B. В этом случае E_A — множество ребер некоторого дерева, причем A является подмножеством его вершин. Оценим длину минимального дерева Штейнера, построенного для множества B.

$$\operatorname{smt}(B) \geq \sum_{(b_i,b_j)\in E_B} \rho(b_i, b_j) - 4\delta > \sum_{(a_i,a_j)\in E_A} (\rho(a_i, a_j) - 4\delta) - 4\delta \geq \operatorname{smt}(A) - 4\delta(2m-2).$$

Здесь мы воспользовались тем, что q, число внутренних вершин, не превосходит $m - 2$.

Завершение доказательства такое же, как и в предыдущих случаях.

4.5 Доказательство критерия непрерывности

Заметим сначала, что достаточность сразу следует из нижних оценок для отношений типа Штейнера (Теорема 8) и доказанной полунепрерывности сверху.

Перейдем к доказательству необходимости. Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 27. *Пусть функция r_n обозначает одно из трех n-точечных отношений типа Штейнера: sr_n, sgr_n или ssr_n. Множество, состоящее из компактных метрических пространств $(\mathbb{X}, \rho)$, для которых*

$$r_n(X) = \frac{n}{2(n-1)},$$

всюду плотно в пространстве Громова—Хаусдорфа.

Доказательство. Начнем с рассмотрения n-точечного отношения Штейнера. Покажем, что в любой окрестности любого пространства $(\mathbb{X}_0,\rho)$ существует $\mathbb{X}$, для которого $\operatorname{sr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}$.

Выберем точку $x \in \mathbb{X}_0$ и рассмотрим пространство $\mathbb{X}$, полученное из $\mathbb{X}_0$ добавлением к нему конечного числа точек a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Доопределим расстояния между новыми точками следующим образом:

$$\rho(a_i, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b = a_i; \\ \delta, & \text{если } b = x; \\ 2\delta, & \text{если } b = a_j,\ i \neq j; \\ \delta + \rho(x, b), & \text{если } b \in \mathbb{X}_0. \end{cases}$$

Заметим, что построенное пространство компактно и $d_{GH}(\mathbb{X}_0, \mathbb{X}) \leq \delta$. Действительно, для пространств $\mathbb{X}_0$ и $\mathbb{X}$ рассмотрим реализацию $(\mathbb{X}_0, \mathbb{X}, \mathbb{X})$: пространство $\mathbb{X}_0$ целиком содержится в $\mathbb{X}$, а точки $a_i \in \mathbb{X}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ находятся на расстоянии δ от точки $x \in \mathbb{X}_0$.

Вычислим теперь значение $\mathrm{sr}_n(\mathbb{X})$. Рассмотрим граничное множество M_n, состоящее из a_i $(i = 1, \ldots, n)$. Для этого множества

$$\mathrm{mst}(M_n) = 2\delta(n-1).$$

Минимальное дерево Штейнера для этого множества — это «звезда» с вершиной x, т.е. ребра дерева соединяют x и каждое из a_i $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$\mathrm{smt}(M_n) = \delta n.$$

Таким образом

$$\mathrm{sr}_n(\mathbb{X}) \leq \frac{\mathrm{smt}(M_n)}{\mathrm{mst}(M_n)} = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Но в силу Теоремы 8

$$\frac{n}{2(n-1)} \leq \mathrm{sr}_n(\mathbb{X}),$$

значит имеет место равенство.

Заметим, что для пространства X также выполнено равенство $\mathrm{sgr}_n(X) = \frac{n}{2(n-1)}$. Поэтому для случая n-точечного отношения Штейнера—Громова все доказано.

Покажем, как построить требуемое пространство в случае рассмотрения n-точечного суботношения Штейнера. Выберем точку $x \in \mathbb{X}_0$ и построим $\mathbb{X}$, исключив из него точку x и добавив точки $\{a_i\}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ с условиями:

$$\rho(a_i, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b = a_i; \\ 2\delta, & \text{если } b = a_j,\ i \neq j; \\ 2\delta + \rho(x, b), & \text{если } b \in \mathbb{X}_0. \end{cases}$$

Для построенного пространства $d_{GH}(\mathbb{X}_0, \mathbb{X}) \leq \delta$.

Рассмотрим множество $M_n = \{a_i \in \mathbb{X}\}$ $(i = 1,\ldots,n)$. Минимальным заполнением для данного множества является «звезда», расстояние от центра которой до граничных вершин равно δ. Убедиться в этом можно, воспользовавшись достаточным условием минимальности заполнения (Теорема 1). В этом случае $\mathrm{mf}(M_n) = \delta n$. Покажем, что $\mathrm{mst}(M_n) = \mathrm{smt}(M_n) = 2\delta(n-1)$. Действительно, расстояние между любыми различными точками в пространстве $\mathbb{X}$ не меньше 2δ. Значит, если бы дерево Штейнера содержало какие-то дополнительные вершины, его вес был бы не меньше, чем $2\delta n$. Таким образом,

$$\mathrm{ssr}_n(\mathbb{X}) \leq \frac{\mathrm{mf}(M_n)}{\mathrm{smt}(M_n)} = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Используя Теорему 8 получим, что

$$\mathrm{ssr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Теорема доказана.

Доказанная только что теорема показывает, что если $r_n(\mathbb{X}_0) \neq \frac{n}{2(n-1)}$, то в любой окрестности окрестности $\mathbb{X}_0$ найдется $\mathbb{X}$, для которого $r_n(\mathbb{X}_0) = \frac{n}{2(n-1)}$. Значит, в таких $\mathbb{X}_0$ функция r_n претерпевает разрыв.

Рассмотрим теперь общие отношения типа Штейнера.

Теорема 28. *Пусть функция r побозначает одно из трех отношений типа Штейнера:* sr, sgr *или* ssr. *Пусть $(\mathbb{X}_0, \rho)$ — компактное метрическое пространство, для которого*

$$r_n(X) \neq \frac{1}{2}.$$

Тогда функция r разрывна в точке $(\mathbb{X}_0)$

Доказательство. Так как $r(\mathbb{X}_0) > \frac{1}{2}$, найдется такое N, что

$$r(\mathbb{X}_0) > \frac{N}{2(N-1)} > \frac{1}{2}.$$

Из доказанного ранее Теоремы 27 следует, что в любой окрестности $\mathbb{X}_0$ существует $\mathbb{X}$, для которого $r_N(\mathbb{X}) = \frac{N}{2(N-1)}$. Для этого пространства

$$r(\mathbb{X}) < r_N(\mathbb{X}) = \frac{N}{2(N-1)} \leq r(\mathbb{X}_0).$$

Значит для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon = \frac{1}{2}(r(\mathbb{X}_0) - r(\mathbb{X}))$, что выполняется условие:

$$|r(\mathbb{X}) - r(\mathbb{X}_0)| > \varepsilon,$$

что и означает отсутствие непрерывности.

4.6 Замечание о точках непрерывности

В предыдущем разделе было показано, что множество точек непрерывности n-точечных отношений типа Штейнера всюду плотно в пространстве Громова–Хаусдорфа. Возниакет вопрос: верен ли этот факт для общих отношений типа Штейнера.

Построим пример компактного пространства $\mathbb{X}$, для которого выполняются равенства $\mathrm{sr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}$ и $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}$. Пространство $\mathbb{X}$ будет содержать некоторую выделенную точку x и счетное число точек a_{kn}, где $k = 1, \ldots, n$, а n — произвольное натуральное число. Метрика ρ в данном пространстве определяется следующим образом. Выберем $\delta > 0$. Для любого натурального n и $k \leq n$ и для любого натурального m и $l \leq m$

$$\rho(a_{kn}, x) = \frac{\delta}{2^n},$$

$$\rho(a_{kn}, a_{lm}) = \rho(a_{kn}, x) + \rho(a_{lm}, x).$$

Построенное пространство $\mathbb{X}$ является компактным.

Покажем, что два указанных отношения типа Штейнера достигают своего минимума на этом пространстве. Рассмотрим множества $M_n = \{a_{kn} \mid k = 1, \ldots, n\}$. Минимальное дерево Штейнера для множества M_n — это «звезда» с центром в точке x. В этом случае

$$\frac{\mathrm{mst}(M_n)}{\mathrm{smt}(M_n)} = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Взяв точную нижнюю грань по всем таким множествам M_n ($n = 1{,}2, \ldots$), получим, что $\mathrm{sr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}$. Поскольку для любого конечного множества M выполнено соотношение $\mathrm{mf}(M) \le \mathrm{smt}(M)$, для отношения Штейнера – Громова данного метрического пространства справедливы оценки

$$\frac{1}{2} \le \mathrm{sgr}(\mathbb{X}) \le \mathrm{sr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}) = \mathrm{sr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}$.

Пусть теперь $\mathbb{X}_0$ — произвольное компактное метрическое пространство с метрикой ρ. Выделим некоторую точку x в нем. Добавим к пространству $\mathbb{X}_0$ счетное число точек a_{kn}, где $k = 1, \ldots, n$, а n — произвольное натуральное число. Расстояния между точками исходного пространства $\mathbb{X}_0$ оставим без изменений. Определим расстояния между добавленными точками так же, как и при построении пространства $\mathbb{X}$.

$$\rho(a_{kn}, x) = \frac{\delta}{2^n},$$

$$\rho(a_{kn}, a_{lm}) = \rho(a_{kn}, x) + \rho(a_{lm}, x),$$

$$\rho(a_{kn}, x_0) = \rho(a_{kn}, x) + \rho(x_0, x),$$

где x_0 — произвольная точка из $\mathbb{X}_0$.

Полученное метрическое пространство назовем $\mathbb{Y}$. Оно компактно и для него $\mathrm{sgr}(\mathbb{Y}) = \mathrm{sr}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{2}$. Заметим, что $d_{GH}(\mathbb{X}_0, \mathbb{Y}) \le \delta$. Значит мы показали, что в любой окрестности любого метрического пространства можно указать компактное метрическое пространство, для которого отношение Штейнера и отношение Штейнера–Громова достигают своих минимальных значений. Тем самым доказаны следующие теоремы.

Теорема 29. *Множество точек непрерывности функции* sr *всюду плотно в пространстве Громова–Хаусдорфа.*

Теорема 30. *Множество точек непрерывности функции* sgr *всюду плотно в пространстве Громова–Хаусдорфа.*

Однако приведенные в этом разделе утверждения не позволяют сделать вывод о том, насколько велико множество точек непрерывности функции ssr. Вообще говоря, автор работы не знает ни одного примера компактного метрического пространства, для которого $\mathrm{ssr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}$. Возможно, таких компактных метрических пространств не существует. Это означало бы, что функция, сопоставляющая компактному метрическому пространству его суботношение Штейнера, имеет разрыв в каждой точке.

Если же существует хотя бы одно компактное метрическое пространство $\mathbb{X}$, для которого $\mathrm{ssr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}$, то при помощи него в δ-окрестности любого пространства $\mathbb{X}_0$ можно построить компактное $\mathbb{Y}$, для которого $\mathrm{ssr}(\mathbb{Y})$ также равно $\frac{1}{2}$. Покажем, как это сделать. Суботношение Штейнера не меняется, если уменьшить или увеличить все расстояния между точками пространства в одно и то же количество раз. Диаметром пространства $(\mathbb{X}, \rho)$ назовем величину $\sup_{p,q\in\mathbb{X}} \rho(p, q)$. Пусть пространство $\mathbb{X}$ имеет диаметр равный D. Так как $\mathbb{X}$ компактно, то $D < \infty$. Уменьшим все расстояния в пространстве $\mathbb{X}$ в $2D/\delta$ раз. Получим новое пространство $\mathbb{X}_1$, диаметр которого равен $\delta/2$. Выберем некоторую точку $x_0 \in (\mathbb{X}_0, \rho_0)$ и точку $x_1 \in (\mathbb{X}_1, \rho_1)$. Отождествим точки x_0 и x_1 (назовем полученную точку x) и добавим все остальные точки пространства $\mathbb{X}_0$ и точки пространства $\mathbb{X}_1$. На полученном множестве точек зададим метрику ρ. Если точки p и q исходно принадлежали $\mathbb{X}_i$, то метрика $\rho(p, q)$ совпадает с метрикой $\rho_i(p, q)$. Если p и q исходно принадлежали разным пространствам, то $\rho(p, q) = \rho(p, x) + \rho(q, x)$. Получившееся пространство назовем $(\mathbb{Y}, \rho)$. Это пространство компактно, так как пространства X_0 и X_1 компактны. Для этого пространства $\mathrm{ssr}(\mathbb{Y}) = \mathrm{ssr}(\mathbb{X}_1) = \frac{1}{2}$. Более того, в силу того, что диаметр $\mathbb{X}_1$ равен $\delta/2$, все точки, добавленные из пространства $\mathbb{X}_1$ лежат в δ-окрестности точки x, из чего следует, что $d_{GH}(\mathbb{X}_0, \mathbb{Y}) \le \delta$. Таким образом, мы показали, как найти в окрестности любого компактного пространства $\mathbb{X}_0$ пространство $\mathbb{Y}$ с условием $\mathrm{ssr}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{2}$.

Теорема 31. *Если существует хотя бы одно компактное пространство* $\mathbb{X}$*, для которого* $\operatorname{ssr}(X) = \frac{1}{2}$*, то множество точек непрерывности функции* ssr *всюду плотно в пространстве Громова–Хаусдорфа.*

Если таких пространств нет, то функция ssr *всюду разрывна.*

Заключение

В этом разделе мы еще раз перечислим основные результаты работы и возможные дальнейшие пути исследования.

В главе 2 доказаны точные оценки для отношений типа Штейнера и теоремы существования пространств с заданным значением отношения типа Штейнера. Также приведены примеры вычисления отношений типа Штейнера для некоторых метрических пространств.

В главе 3 классифицированы пространства, для которых отношение Штейнера–Громова равно максимально возможному значению.

В главе 4 доказаны теоремы о полунепрерывности и критерий непрерывности отношений типа Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа.

Перечислим несколько возможных направлений дальнейшего исследования и задач, которые хотелось бы решить:

1. Классифицировать метрические пространства, отношение Штейнера которых равно единице.
2. Классифицировать метрические пространства, суботношение Штейнера которых равно единице.
3. Классифицировать метрические пространства, отношения типа Штейнера которых равны минимально возможному значению.
4. Существует ли компактное метрическое пространство, для которого суботношение Штейнера равно $\frac{1}{2}$?

Список публикаций по теме диссертации

[A.1] Пахомова А. С. Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера—Громова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.– 2014. – № 1 – С. 17—25
[Pakhomova A. S. Estimates of Steiner subratio and Steiner—Gromov ratio // Moscow Univ. Math. Bull.– 2014. – 69:1 – P. 16–23]

[A.2] Пахомова А. С. Критерий непрерывности отношений типа Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа // Матем. заметки – 2014. – 96:1 – С. 126—137
[Pakhomova A. S. A continuity criterion for Steiner-type ratios in the Gromov-Hausdorff space // Mathematical Notes – 2014. – 96:1 – P. 130–139]

[A.3] Пахомова А. С. Классификация метрических пространств, отношение Штейнера–Громова которых равно единице // Фундамент. и прикл. матем. – 2016. – 21:5 – С. 181–189

[A.4] Пахомова А. С. Отношения типа Штейнера метрических пространств // тезисы Международной научной конференции «Ломоносов–2013»

[A.5] Пахомова А. С. Классификация метрических пространств, отношение Штейнера–Громова которых равно единице // тезисы Международной научной конференции «Ломоносов–2015»

[A.6] Пахомова А. С. Граничные значения для отношений типа Штейнера // материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова – МГУ, 2016. – С. 365–368

[A.7] Pakhomova A. S. Steiner type ratios and their properties // 4-th international workshop «Analysis, Geometry and Probability», book of abstracts – MSU, 2016. – P. 53–54

Литература

1. Fermat P. Oeuvres /ed. P. Tannery – Paris, 1891. – vol. 1
2. Krarup J., Vajda S. On Torricelli's geometrical solution to a problem of Fermat // IMA J. Math. Appl. Bus. Indust. – 1997. – 8 (3) – P. 215–224
3. Simpson T. The Doctrine and Application of Fluxions – 1750.
4. Jarnik V., Kossler M., O minimalnich grafeth obeahujicich n danich bodu // Cas. Pet. Mat. a Fys. – 1934. – 63 – P. 223–235
5. Гаркави А. Л., Шматков В. А. О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Матем. сб. – 1974. – 95(137):2(10) – С. 272–293
6. Papini P. L. Two new examples of sets without medians and centers // Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Top – 2005. – 13:2 – P. 315–320
7. Бородин П. А. Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве // Матем. заметки – 2010. – 87:4 – С. 514–518
8. Melzak Z. A. On the problem of Steiner // Canad. Math. Bull. – 1961. – №4 – P. 143–148
9. Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Дискретная математика / М.: МГТУ, 2006. – С. 306–311
10. Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем.сб. – 2012. – 203:5 – С. 65–118
11. Gromov M. Filling Riemannian manifolds // J. Diff. Geom. – 1983. – №18 – P. 1–147
12. Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. – 1968. – 16:1 – P. 1–29
13. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Steiner Ratio Gilbert–Pollak Conjecture Is Still Open // Algorithmica – 2012. – Vol. 62, № 1-2 – P. 630–632

14. Rubinstein J. H., Thomas D. A. A variational approach to the Steiner network problem // Annals of Operations Research – 1991. – 33 – P. 481–499

15. De Wet P. O. Geometric Steiner minimal trees / Ph.D. thesis, Univ. of South Africa, Pretoria – 2008.

16. Kirszenblat D. The Steiner ratio conjecture for eight points / M. Thesis, Uni. Melbourne – 2014.

17. Du D. Z., Smith W. D. Disproofs of Generalized Gilbert–Pollak Conjecture on the Steiner Ratio in Three or More Dimensions // J. of Comb. Th. Series A – 1996. – 74 – P. 115–130

18. Cieslik D. The Steiner Ratio / Kluwer Academic Publishers, Boston–London–Dordrecht – 2001.

19. Hwang F. K. On Steiner minimal trees with rectilinear distance // SIAM Journal of Applied Mathematics –1976. – 30 – P. 104–114

20. Innami N., Kim B. H. Steiner ratio for hyperbolic surfaces // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 2006. – 82:6 – P. 77—79

21. Zavalnyuk E. Steiner Ratio for Hadamard Surfaces of Curvature at Most $k < 0$. // J. of Math. Sci. – 2014. – 203:6 – P. 777–788

22. Овсянников З. Н. Отношения Штейнера, Штейнера–Громова и суботношения Штейнера для пространства компактов в евклидовой плоскости с расстоянием Хаусдорфа // Фундамент. и прикл. матем. – 2013. – 18:2 – С. 157–165

23. Мищенко В. А. Оценки отношения Штейнера–Громова римановых многообразий // Фундамент. и прикл. матем. – 2013. – 18:2 – С. 119–124

24. Еремин А. Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Матем. сб. – 2013. – 204:9 – С. 51–72

25. Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей / Москва–Ижевск, Современная математика, ИКИ – 2003.

26. Беднов Б. Б., Бородин П. А. Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. –2014. – 205:4 – С. 3–20

27. Richmond B., Richmond T. Metric Spaces in which All Triangles Are Degenerate // American Mathematical Monthly – 1997. – Vol. 104, № 8 – P. 713–719

28. Зарецкий К. А. Построение дерева по набору расстояний между висячими вершинами // УМН – 1965. – 20:6 – С. 90–92

29. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre / Leipzig: Veit – Reprinted by Chelsea in 1949.

30. Gromov M. Groups of Polynomial growth and Expanding Maps // Publications mathematiques I.H.E.S. –1981. – 53

31. Д. Ю. Бураго, Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии / Москва–Ижевск, Современная математика, ИКИ – 2004.

32. Mémoli F. On the use of Gromov-Hausdorff distances for shape comparison // Proceedings of Point Based Graphics, Prague, Czech Republic – 2007.

33. Kim Y. W. On the Gromov-Hausdorff convergence of geodesics // Bull. Korean Math. Soc. – 1998. – 35:1 – P. 189–193

34. Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. Метрика Громова—Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя // Матем. заметки – 2016. – 100:6 – С. 947–950

35. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes // ArXiv e-prints – 2016. – 1607.06655

36. Ivanov. A., Tuzhilin A. Steiner ratio and Steiner–Gromov ratio of Gromov–Hausdorff space // ArXiv e-prints – 2016. – no. 1605.01094