

На правах рукописи

Исмагилов Тимур Фаритович

**КОНСТРУКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И
ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ
КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО**

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор

Потапов Михаил Константинович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор,

Рубинштейн Александр Иосифович,
Мытищинский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана, факультет фундаментальных наук,
профессор кафедры высшей математики

кандидат физико-математических наук,
доцент,

Симонов Борис Витальевич,
Волгоградский государственный технический университет, факультет технологии пищевых производств,
доцент кафедры прикладной математики

Ведущая организация: Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Защита состоится 16 июня 2017 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8-й этаж), и на сайте <http://mech.math.msu.ru/~snark/index.cgi>.

Автореферат разослан ____ 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
501.001.85,
д-р физ.-мат. наук, проф.

Виктор Валентинович Власов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая работа посвящена изучению некоторых классов функций нескольких переменных. При этом основное внимание уделяется получению для этих классов конструктивных характеристик и теорем вложения.

Впервые задачу о наилучшем приближении функций поставил в середине прошлого века П.Л. Чебышев¹.

В начале 20 века в работах Лебега², Валле-Пуссена³, Джексона⁴ и С.Н. Бернштейна⁵ возник вопрос о получении конструктивных характеристик для функций, обладающих теми или иными структурными свойствами (дифференцируемостью, условием Липшица, и т.п.); то есть возник вопрос о получении для этих функций порядка их наилучшего приближения при помощи тех или иных агрегатов.

В дальнейшем ответу на этот вопрос было посвящено большое число работ. Однако и до настоящего времени в этом направлении имеется целый ряд нерешенных задач.

Хотя получение конструктивных характеристик для тех или иных классов функций представляет самостоятельный интерес, в данной работе они, кроме того, играют существенную роль при доказательстве теорем вложения.

Первая теорема вложения была доказана Харди и Литтлвудом⁶ в 1927 году.

Начало общей теории вложения пространств функций многих переменных было положено в 30-х годах С.Л. Соболевым⁷, который рассматривал пространства W -функций, имеющих ограниченные производные.

¹Чебышев П. Л. Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций // ПСС Чебышева. 1947. № 2. С. 152–236; Чебышев П. Л. Теория механизмов, известных под именем параллелограммов // ПСС Чебышева. 1947. № 2. С. 23–51.

²Lebesgue H. Sur la représentation approchée des fonctions // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1908. No. 26. Pp. 325–328.

³Vallée Poussin C. J. d. l. Note sur l'approximation par un polynôme d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée // Bull. Soc. Math. Belgo. 1908. No. 3. Pp. 403–410.

⁴Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Göttingen : Dieterich, 1911.

⁵Бернштейн С. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1912. С. 49–194.

⁶Hardy G. H., Littlewood J. E. A convergence criterion for Fourier series // Math. Z. 1928. Vol. 28, no. 4. Pp. 612–634.

⁷Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / под ред. О. А. Олейник. 3-е изд. Москва : Наука, 1988. 336 с.

Принципиально новый вклад в развитие этой теории был сделан С.М. Никольским⁸, создавшим теорию вложения H -классов и привлечшим для её исследования конструктивные характеристики рассматриваемых классов.

С этого времени теория вложения начинает быстро развиваться. Вводятся и изучаются новые классы функций, интерес к которым вызван как различными задачами математической физики, так и естественными обобщениями изученных ранее пространств.

В 1963 г. С. М. Никольским⁹ и Н. С. Бахваловым¹⁰ были введены в рассмотрение SH -классы функций с доминирующим смешанным модулем гладкости. Для этих классов функций уже не удавалось найти конструктивные характеристики в терминах приближения функций полиномами и поэтому С.М. Никольский предложил новый метод исследования таких функций: он предложил заменить теоремы о конструктивных характеристиках теоремами о представлении функций рядами из тригонометрических полиномов. В дальнейшем этим методом исследовались и некоторые другие классы функций с доминирующим смешанным модулем гладкости.

Однако попытка доказать этим методом теоремы вложения для некоторых классов функций (смешанный модуль гладкости которых удовлетворяет другим условиям) либо не приводит к цели, либо приводит к результатам, которые уже не являются точными. Поэтому встал вопрос об изучении таких классов функций каким-либо другим методом. М.К. Потаповым было предложено изучать такие классы функций при помощи приближения углом¹¹.

Цель работы. При помощи приближения углом получить конструктивные характеристики и с их помощью теоремы вложения разных метрик

⁸ Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теоремах вложения в смешанной норме // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1951. № 38. С. 191—202.

⁹ Никольский С. М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. матем. журн. 1963. № 6. С. 1342—1364.

¹⁰ Бахвалов Н. С. Теоремы вложения для классов функций с несколькими ограниченными производными // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1963. № 3. С. 7—16.

¹¹ Потапов М. К. Приближение “углом” и теоремы вложения // Math. balk. 1972. № 2. С. 183—198; Потапов М. К. Теоремы вложения в смешанной метрике // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1980. № 156. С. 143—156; Потапов М. К. О приближении углом // Proc. Conf. on Constructive Theory of Functions (Approximation Theory). 1969. Budapest: Akad. Kiadó. 1972. С. 371—399; Потапов М. К., Симонов Б. В. О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках // Вестник московского университета, Серия 1 Матем. Механ. 2009. № 3. С. 36—43; Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Теоремы вложения классов С.М.Никольского // Современные проблемы анализа и преподавания математики, Материалы Международной научной конференции, посвященной 105-летию академика С.М.Никольского. Изд-во МГУ, 2010. С. 33—34; Potapov M., Simonov B., Tikhonov S. Mixed Moduli of Smoothness in L_p , $1 < p < \infty$ // Surveys in Approximation Theory. 2013. No. 8. Pp. 1—57; Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Дробные модули гладкости. Москва : МАКСПресс, 2016. 338 с.

и измерений для классов функций, представляющих из себя обобщение классов H и SH Никольского.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Получены оценки приближений углом и модулей гладкости для функций расписовки.
2. Получены конструктивные характеристики обобщённых классов Никольского $SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ и $S_n^m H_r^r$ при помощи приближений углом.
3. Для указанных классов функций получены теоремы вложения разных метрик.
4. Для указанных классов функций получены теоремы о следах.

Методология и методы исследования. В работе используются различные методы функционального анализа и теории приближений.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в функциональном анализе и теории приближений, теории дифференциальных уравнений с частными производными и в теории интегральных уравнений.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. семинаре механико-математического факультета по теории ортогональных и тригонометрических рядов под руководством профессора М. К. Потапова, профессора В. А. Скворцова, профессора Т. П. Лукашенко, профессора М. И. Дьяченко (2012–2017 г., неоднократно)
2. XIX международной научной конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", 9-13 апреля 2012;
3. XXI международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", 7-11 апреля 2014;
4. международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", Россия, Тула, 15-19 сентября 2014;

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в трудах механико-математического факультета 2 — в тезисах докладов. Список работ автора по теме диссертации приведен в конце автореферата. Работ в соавторстве нет.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объем диссертации 115 страниц текста с 24 рисунками. Список литературы содержит 23 наименования.

Краткое содержание работы. В главах 2 и 3 вводятся в рассмотрение классы функций, обобщающие классы H и SH Никольского, и для них доказываются конструктивные характеристики и теоремы вложения.

Для доказательства этих результатов применяется предложенный С.М. Никольским метод расписовки. Поэтому в главе 1 доказываются теоремы о расписовке.

Приведем краткое описание основных результатов. Основным результатом главы 1 диссертации являются теоремы 1.1 – 1.3.

Теорема 1.1. *Если $f \in L_{\vec{p}}$, $\vec{p} = \{p_1, \dots, p_n\}$, $p_i \in [1, \infty]$, то f можно представить в виде*

$$\begin{aligned} f = f_0 &+ \sum_{i_1=1}^n f_{i_1} + \sum_{i_2=2}^n \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1, i_2} + \dots + \sum_{i_s=s}^n \sum_{i_{s-1}=s-1}^{i_s-1} \dots \sum_{i_2=2}^{i_3-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1, \dots, i_s} + \dots + \\ &+ \sum_{i_{n-1}=n-1}^n \sum_{i_{n-2}=n-2}^{i_{n-1}-1} \dots \sum_{i_2=2}^{i_3-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1, \dots, i_{n-1}} + f_{1, \dots, n}, \end{aligned}$$

где

$$f_0 = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f dx_1 \dots dx_n,$$

$$f_{i_1} \equiv f_{i_1}(x_{i_1}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n-1} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f dx_{i_2} \dots dx_{i_n} - f_0, \forall i_1 \in (1, \dots, n),$$

$$f_{i_1, i_2} \equiv f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n-2} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f dx_{i_3} \dots dx_{i_n} - f_0 - f_{i_1} - f_{i_2},$$

$$\forall(i_1, i_2) \subset (1, \dots, n),$$

.....

$$f_{i_1, \dots, i_s} \equiv f_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n-s} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f dx_{i_{s+1}} \dots dx_{i_n} - f_0 -$$

$$- \sum_{j_1=1}^s f_{i_{j_1}} - \sum_{j_2=2}^s \sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1} i_{j_2}} - \dots \quad (1)$$

$$\dots - \sum_{j_{s-1}=s-1}^s \dots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1}, \dots, i_{j_{s-1}}},$$

$$\forall(i_1, \dots, i_s) \subset (1, \dots, n),$$

.....

$$f_{1, \dots, n} \equiv f_{1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n) = f - f_0 - \sum_{i_1=1}^n f_{i_1} - \sum_{i_2=2}^n \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1 i_2} - \dots -$$

$$- \sum_{i_{n-1}=n-1}^n \cdots \sum_{i_2=2}^{i_3-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1, \dots, i_{n-1}}.$$

и выполнены следующие соотношения:

$$1) \|f_{i_1, \dots, i_s}\|_{\bar{p}} \leq c_1 \|f\|_{\bar{p}}, \quad \forall (i_1, \dots, i_s) \subseteq (1, \dots, n),$$

$$2) \int_0^{2\pi} f_{i_1, \dots, i_s} dx_{i_j} = 0, \quad \forall j \in (1, \dots, s),$$

где постоянная c_1 не зависит от f .

Теорема 1.2. В условиях теоремы 1.1 для функций представления (1) и $\forall l_{i_j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливы соотношения:

$$1) Y_{l_1, \dots, l_n}(f)_{\bar{p}} = Y_{l_1, \dots, l_n}(f_{1, \dots, n})_{\bar{p}};$$

$$2) Y_{l_{i_1}, \dots, l_{i_s}}(f_{i_1, \dots, i_s})_{\bar{p}} \leq c_2 Y_{l_{i_1}, \dots, l_{i_s}}(f)_{\bar{p}}, \quad \forall (i_1, \dots, i_s) \subset (1, \dots, n);$$

$$3) Y_{l_{i_1}, \dots, l_{i_s}}(f)_{\bar{p}} \leq c_3 \left(Y_{l_{i_1}, \dots, l_{i_s}}(f_{i_1, \dots, i_s})_{\bar{p}} + \sum_{j_{s+1}=s+1}^n Y_{l_{i_1}, \dots, l_{i_s}}(f_{i_1, \dots, i_s, i_{j_{s+1}}})_{\bar{p}} + \right. \\ \left. + \sum_{j_{s+2}=s+2}^n \sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} Y_{l_{i_1}, \dots, l_{i_s}}(f_{i_1, \dots, i_s, i_{j_{s+1}}, i_{j_{s+2}}})_{\bar{p}} + \dots + \right. \\ \left. + \sum_{j_{n-1}=n-1}^n \cdots \sum_{j_{s+2}=s+2}^{j_{s+3}-1} \sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} Y_{l_{i_1}, \dots, l_{i_s}}(f_{i_1, \dots, i_s, i_{j_{s+1}}, \dots, i_{j_{n-1}}})_{\bar{p}} + Y_{l_{i_1}, \dots, l_{i_s}}(f_{1, \dots, n})_{\bar{p}} \right) \\ \forall (i_1, \dots, i_s) \subset (1, \dots, n),$$

где постоянные c_2 и c_3 не зависят от f и l_{i_j} .

Теорема 1.3. В условиях теоремы 1.1 для функций представления (1) и $\forall \delta_{i_j} \in (0, 1)$ справедливы соотношения:

$$1) \omega_{k_1, \dots, k_n}(f_{1, \dots, n}, \delta_1, \dots, \delta_n)_p = \omega_{k_1, \dots, k_n}(f, \delta_1, \dots, \delta_n)_p;$$

$$2) \omega_{k_{i_{j_1}}, \dots, k_{i_{j_m}}}(f_{i_1, \dots, i_s}, \delta_{i_{j_1}}, \dots, \delta_{i_{j_m}})_p \leq c_4 \omega_{k_{i_{j_1}}, \dots, k_{i_{j_m}}}(f, \delta_{i_{j_1}}, \dots, \delta_{i_{j_m}})_p, \\ \forall (j_1, \dots, j_m) \subset (1, \dots, s), \quad \forall (i_1, \dots, i_s) \subset (1, \dots, n) \text{ и } \forall s = 1, \dots, n-1;$$

$$3) \omega_{k_{i_1}, \dots, k_{i_s}}(f, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_s})_p \leq \omega_{k_{i_1}, \dots, k_{i_s}}(f_{i_1, \dots, i_s}, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_s})_p +$$

$$+ \sum_{j_{s+1}=s+1}^n \omega_{k_{i_1}, \dots, k_{i_s}}(f_{i_1, \dots, i_s, i_{j_{s+1}}}, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_s})_p + \\ + \sum_{j_{s+2}=s+2}^n \sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} \omega_{k_{i_1}, \dots, k_{i_s}}(f_{i_1, \dots, i_s, i_{j_{s+1}}, i_{j_{s+2}}}, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_s})_p + \dots + \\ + \sum_{j_{n-1}=n-1}^n \cdots \sum_{j_{s+2}=s+2}^{j_{s+3}-1} \sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} \omega_{k_{i_1}, \dots, k_{i_s}}(f_{i_1, \dots, i_s, i_{j_{s+1}}, \dots, i_{j_{n-1}}}, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_s})_p + \\ + \omega_{k_{i_1}, \dots, k_{i_s}}(f_{1, \dots, n}, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_s})_p,$$

$$\forall (i_1, \dots, i_s) \subset (1, \dots, n), \quad \forall s = 1, \dots, n-1,$$

где постоянная c_4 не зависит от f и δ_{i_j} .

Эти результаты используются при доказательстве основных результатов глав 2 и 3.

Глава 2 посвящена изучению класса $SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$. Этот класс является обобщением хорошо известных классов Никольского $H_{p_1, p_2}^{r_1, r_2}$ и $SH_{p_1, p_2}^{r_1, r_2}$.

Будем писать $f \in SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, если $1 \leq p_i \leq \infty$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \geq 1$ и выполнены условия:

$$0) f \in L_{p_1, p_2},$$

$$1) \omega_{k_1}(f, \delta_1)_{p_1, p_2} \leq c_5 \delta_1^{\alpha_1}, \forall \delta_1 \in (0, 1), k_1 > \alpha_1,$$

$$2) \omega_{k_2}(f, \delta_2)_{p_1, p_2} \leq c_6 \delta_2^{\alpha_2}, \forall \delta_2 \in (0, 1), k_2 > \alpha_2,$$

$$3) \omega_{k_3 k_4}(f, \delta_1, \delta_2)_{p_1, p_2} \leq c_7 \delta_1^{\beta_1} \delta_2^{\beta_2}, \forall \delta_i \in (0, 1), i = 1, 2, k_3 > \beta_1, k_4 > \beta_2,$$

где постоянные c_5, c_6 и c_7 не зависят от δ_1 и δ_2 .

В параграфе §2.2 для функций из этого класса получена конструктивная характеристика.

Теорема 2.1. *Для того чтобы функция $f \in SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, где $1 \leq p_i \leq \infty$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1, 2$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall l_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнялись следующие неравенства:*

$$Y_{l_i}(f)_{p_1, p_2} \leq c_8 \frac{1}{(l_i + 1)^{\alpha_i}}, i = 1, 2, Y_{l_1 l_2}(f)_{p_1, p_2} \leq c_9 \frac{1}{(l_1 + 1)^{\beta_1}} \frac{1}{(l_2 + 1)^{\beta_2}},$$

где постоянные c_8 и c_9 не зависят от l_1 и l_2 .

В параграфе §2.3 доказываются теоремы вложения разных метрик для функций из этого класса. Далее приведены основные теоремы этого параграфа.

Теорема 2.2. *Пусть $f \in SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, где $1 \leq p_i < q_i \leq \infty$,*

$$\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} < \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, 2,$$

тогда $f \in SH(q_1, q_2, \alpha_1^, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$, где*

$$\alpha_1^* = \alpha_1 \vartheta_1, \alpha_2^* = \alpha_2 \vartheta_2, \beta_1^* = \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right), \beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right),$$

$$\vartheta_1 = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right) + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right) \right),$$

$$\vartheta_2 = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right) + \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2 \beta_1} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right) \right).$$

Условиям теоремы соответствуют пары чисел (β_1, β_2) , лежащие в области I, изображенной на рисунках 1 - 3.

Теорема 2.3. *Пусть $f \in SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, где $1 \leq p_i < q_i \leq \infty$, $i = 1, 2$,*

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < \alpha_1 \leq \beta_1, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \alpha_2 \leq \beta_2,$$

тогда $f \in SH(q_1, q_2, \alpha_1^, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$, где*

$$\alpha_1^* = \alpha_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right), \alpha_2^* = \alpha_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right),$$

$$\beta_1^* = \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right), \beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right).$$

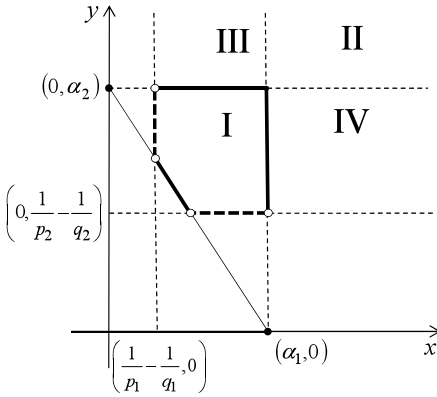


Рис. 1

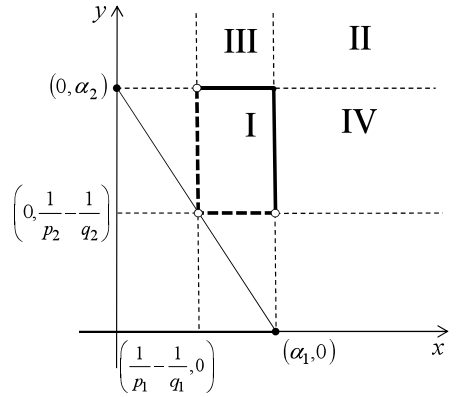


Рис. 2

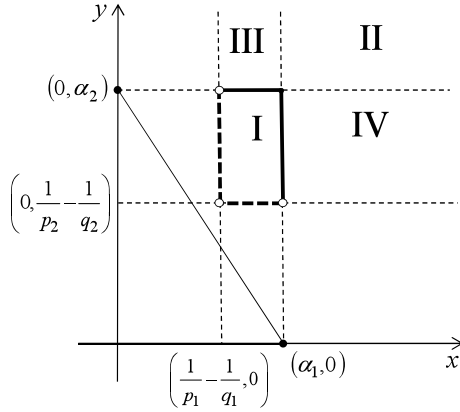


Рис. 3

Условиям теоремы соответствуют пары чисел (β_1, β_2) , лежащие в области II, изображенной на рисунках 1 - 3.

Теорема 2.4. Пусть $f \in SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, где $1 \leq p_i < q_i \leq \infty$, $i = 1, 2$,

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < \beta_1 \leq \alpha_1, \quad \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \alpha_2 \leq \beta_2,$$

тогда $f \in SH(q_1, q_2, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$, где

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &= \alpha_1 \vartheta_1, \quad \alpha_2^* = \alpha_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right), \\ \beta_1^* &= \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right), \quad \beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right), \\ \vartheta_1 &= 1 - \left(\frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right) + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right) \right), \end{aligned}$$

Условиям теоремы соответствуют пары чисел (β_1, β_2) , лежащие в области III, изображенной на рисунках 1 - 3.

Теорема 2.5. Пусть $f \in SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, где $1 \leq p_i < q_i \leq \infty$, $i = 1, 2$,

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < \alpha_1 \leq \beta_1, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \beta_2 \leq \alpha_2,$$

тогда $f \in SH(q_1, q_2, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$, где

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &= \alpha_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right), \alpha_2^* = \alpha_2 \vartheta_2, \\ \beta_1^* &= \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right), \beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right), \\ \vartheta_2 &= 1 - \left(\frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right) + \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2 \beta_1} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right) \right). \end{aligned}$$

Условиям теоремы соответствуют пары чисел (β_1, β_2) , лежащие в области IV, изображенной на рисунках 1 - 3.

В параграфе §2.3 для функций из класса $SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ доказаны теоремы о следах на оси Ox_1 и Ox_2 . Далее приведены основные теоремы этого параграфа.

Теорема 2.10. Пусть $f \in SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, где $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1, 2$,

$$\alpha_2 > \frac{1}{p_2}, \beta_2 > \frac{1}{p_2}, \alpha_1 \geq \beta_1 > 0,$$

тогда f имеет на оси Ox_1 след $\varphi(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1^*}$, где $\alpha_1^* = \alpha_1 - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\beta_2 p_2}$.

Теорема 2.11. Пусть $f \in SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, где $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1, 2$,

$$\alpha_2 > \frac{1}{p_2}, \beta_2 > \frac{1}{p_2}, \beta_1 > \alpha_1 > 0.$$

Тогда f имеет на оси Ox_1 след $\varphi(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1}$.

Условиям теорем 2.10 и 2.11 удовлетворяют пары чисел (β_1, β_2) лежащие в областях I (рис. 4) и II (рис. 5) соответственно.

Аналогичные теоремы справедливы и для следа на ось Ox_2 .

В главе 3 рассматривается класс $S_n^m H_p^r$. Этот класс является обобщением классов Никольского H_p^r и SH_p^r .

Будем писать $f \in S_n^m H_p^r$, если $1 \leq p \leq \infty$, $r > 0$, $1 \leq m \leq n$ и выполнены условия:

$$0) f \in L_p(n);$$

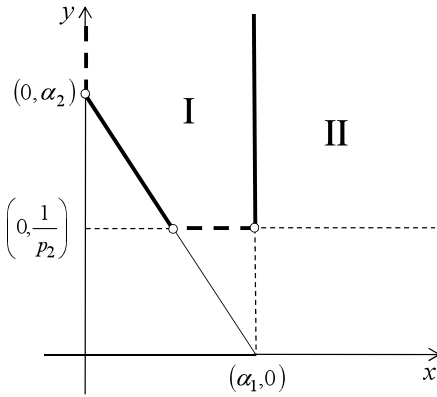


Рис. 4

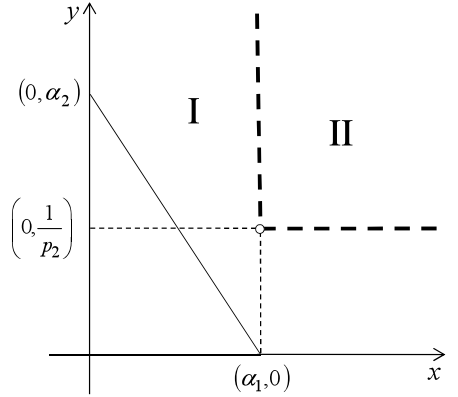


Рис. 5

- 1) $\omega_{k_{i_1}}(f, \delta_{i_1})_p \leq c_{10} \delta_{i_1}^r, \forall i_1 = 1, \dots, n;$
- 2) $\omega_{k_{i_1} k_{i_2}}(f, \delta_{i_1}, \delta_{i_2})_p \leq c_{11} \delta_{i_1}^r \delta_{i_2}^r, \forall (i_1, i_2) \subset (1, \dots, n);$

...

m) $\omega_{k_{i_1} \dots k_{i_m}}(f, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_m})_p \leq c_{12} \delta_{i_1}^r \dots \delta_{i_m}^r, \forall (i_1, \dots, i_m) \subset (1, \dots, n),$
где $k_{i_j} > r, \delta_{i_j} \in (0, 1)$ и постоянные c_{10}, c_{11} и c_{12} не зависят от δ_{i_j} .

В параграфе §3.2 для функций из этого класса получена конструктивная характеристика.

Теорема 3.1. Для того, чтобы функция $f \in S_n^m H_p^r$, где $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq m \leq n$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall l_{i_j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнялись следующие условия:

- 0) $f \in L_p(n);$
- 1) $Y_{l_{i_1}}(f)_p \leq c_{13} \frac{1}{(l_{i_1}+1)^r}, \forall i_1 = 1, \dots, n;$
- 2) $Y_{l_{i_1}, l_{i_2}}(f)_p \leq c_{14} \frac{1}{(l_{i_1}+1)^r (l_{i_2}+1)^r}, \forall (i_1, i_2) \subset (1, \dots, n);$

...

- m) $Y_{l_{i_1} \dots l_{i_m}}(f)_p \leq c_{15} \frac{1}{(l_{i_1}+1)^r \dots (l_{i_m}+1)^r}, \forall (i_1, \dots, i_m) \subset (1, \dots, n),$

где постоянные c_{13}, c_{14} и c_{15} не зависят от δ_{i_j} .

В параграфе §3.3 для функций класса $S_n^m H_p^r$ доказана теорема вложения разных метрик.

Теорема 3.2. Если $f \in S_n^m H_p^r$, где $1 \leq p < q \leq \infty, r^* = r - \frac{n}{m} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) > 0$, то $f \in S_n^m H_q^{r^*}$.

В параграфе §3.4 для класса $S_n^m H_p^r$ доказана теорема о следах функций из этого класса.

Теорема 3.3. Пусть на R_n задана функция $f \in S_n^m H_p^r$, где $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq m \leq n, r > \frac{n}{mp}$, тогда на любом подпространстве $R_k = R_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}),$ где $(i_1, \dots, i_k) \subset (1, \dots, n), 1 \leq k < n$, у функции f существует след $\phi = \phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}),$ такой, что:

1. если $k \leq m$, то $\phi \in S_k^k H_p^{r*}$, $\forall r^* \in \left(0, r - \frac{n-m}{mp}\right]$;
2. если $k > m$, то $\phi \in S_k^m H_p^{r*}$, $\forall r^* \in \left(0, r - \frac{n-k}{mp}\right)$.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем: получены оценки приближений углом и модулей гладкости для функций расписовки; при помощи приближений углом получены конструктивные характеристики обобщённых классов Никольского $SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ и $S_n^m H_p^r$; для указанных классов функций получены теоремы вложения разных метрик; для указанных классов функций получены теоремы о следах.

В дальнейшем для исследуемых классов могут быть получены теоремы о продолжении. Класс $S_n^m H_p^r$ может быть обобщён на случай смешанной метрики. Вопрос об обобщении результатов, полученных для класса $SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, на n -мерный случай также открыт.

Автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Потапову Михаилу Константиновичу, за постановку интересных задач, неоценимую помощь и постоянное внимание.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Исмагилов Т. Ф.* Теоремы вложения классов функций с доминирующим смешанным модулем гладкости // Вестник московского университета, Серия 1 Матем. Механ. — 2013. — № 5. — С. 3—9.
2. *Исмагилов Т. Ф.* Теоремы вложения разных метрик для классов функций с доминирующим смешанным модулем гладкости // Вестник московского университета, Серия 1 Матем. Механ. — 2014. — № 6. — С. 59—62.
3. *Исмагилов Т. Ф.* Теорема вложения разных метрик для обобщенного класса Никольского // Вестник московского университета, Серия 1 Матем. Механ. — 2015. — № 4. — С. 27—31.
4. *Исмагилов Т. Ф.* Теоремы о следах функций из обобщенных классов Никольского // Труды механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова "Современные проблемы математики и механики". Математика. Выпуск 1. К 60-летию семинара тригонометрические и ортогональные ряды. Т. 10. — 2014. — С. 12—25.
5. *Исмагилов Т. Ф.* О свойствах расписовки функций из пространства L_p // Труды механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова "Современные проблемы математики и механики". Математика. Выпуск 2. К столетию лужинского семинара по теории функций. Т. 10. — 2015. — С. 69—92.

6. *Исмагилов Т. Ф.* О вложении разных метрик обобщенных классов Никольского // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". — Россия, Тула. — 15-19 сентября 2014.
7. *Исмагилов Т. Ф.* О вложении класса функций с доминирующим смешанным модулем гладкости // Материалы XIX международной молодёжной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов". — Россия, Москва, 2012. — URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2012/1790/41352_7005.pdf.

Исмагилов Тимур Фаритович

КОНСТРУКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ
ОБОВЩЁННЫХ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____