ОТЗЫВ
официального оппонента
на диссертацию Исмагилова Тимура Фаритовича
"Конструктивные характеристики и теоремы вложения обобщенных классов Никольского"

представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 –
"Вещественный, комплексный и функциональный анализ"

Представленная работа посвящена изучению круга вопросов, являющихся одними из основных вопросов анализа – оценки погрешности при замене достаточно произвольной функции более простыми, как и принципиальной возможности подобной замены. Эта задача идет от Вейерштрасса, Чебышева, Лебега, Бернштейна, Джексона, Колмогорова, Никольского. Уже этот весьма краткий перечень имен, легко продолжаемый до наших дней, свидетельствует о неиссякаемом интересе к этим вопросам и подтверждает тезис об актуальности исследований диссертанта.

Работа касается рассмотрения конструктивных характеристик классов действительнозначных функций нескольких переменных в зависимости от их дифференциальных (гладкостных) свойст, а также вложения таких классов (восходит к работам Харди и Литтлвуда, Соболева, Никольского, Ульянова и других). Для случая функций нескольких переменных, даже в ситуации приближения множествами тригонометрических функций, принципиальную роль, как оказалось, играет выбор множеств этих тригонометрических функций. В начале 70-х годов прошлого века М.К. Потапов предложил оказавшийся весьма удачным метод "приближения углом".

В диссертации Т.Ф. Исмагилова именно с помощью приближений углом находятся конструктивные характеристики различных классов функций нескольких переменных и условия вложения этих классов.

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Объем работы составляет 115 страниц текста. Список литературы содержит 23 наименования.

В главе 1 доказываются результаты, позволяющие использовать так называемый "метод распасовки"(термин С.М. Никольского и П.С. Лизоркина). В теореме 1.1. устанавливается представление функции n переменных в виде постоянной и сумм функций одной, двух и т.д. переменных, получающихся усреднениями по остальным переменным. При этом каждое слагаемое в соответствующей сумме оценивается по норме $L_p, \vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ через норму исходной функции. В теореме 1.2 доказываются оценки наилучших приближений соответствующим многомерным углом, а в теореме 1.3 – модулей непрерывности (естественно многомерных) слагаемых "распасовки". Эти три теоремы используются для получения конструктивных характеристик классов $SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \{f(x_1, x_2) \in L_{p_1,p_2}(\mathbb{R}^2) : 1 \leq p_i \leq \infty, \alpha_i > 0, \beta_i > 0, k_i \in \mathbb{N}, \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \geq 1,\ \omega_{k_1}(f, \delta_1)_{p_1,p_2} \leq C\delta_1^{\alpha_1}, 0 < \delta_1 < 1,$ $k_1 > \alpha_1;\ \omega_{k_2}(f, \delta_2)_{p_1,p_2} \leq C\delta_2^{\alpha_2}, 0 < \delta_2 < 1$ (на стр. 7 опечатка – вместо δ_2 написано δ_1), $k_2 > \alpha_2;\ \omega_{k_1,k_2}(f, \delta_1, \delta_2)_{p_1,p_2} \leq C\delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}, k_3 > \beta_1, k_4 > \beta_2\}$. Класс является обобщением класса $SH^{r_1,r_2}_{p_1,p_2}$ Никольского.

В теореме 2.1 через наилучшее приближение с помощью "углов"установлен критерий принадлежности функции f классу $SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$.

В теоремах 2.2-2.9 находятся условия вложения классов $SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ в $SH(q_1, q_2, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$ при определенных соотношениях между $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ и $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*$ для $p_i < q_i$.

К сожалению, не выясняется вопрос насколько эти условия являются необходимыми.

В теоремах 2.10-2.17 обсуждается гладкость следов $f(x_1, x_2)$ на координатных осях. И здесь окончательность утверждений не выясняется.

В главе 3 рассматривается класс $S_n^m H_p^r$, обобщающий класс Никольского SH_p^r:
$S_n^m H_p^r = \{f(x_1, \dots, x_n),\ 1 \le p \le \infty,\ r > 0,\ 1 \le m \le n,\ \delta_{i_j} \in (0,1),\ j = 1, \dots, n$:
$\|f\|_{L_{\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)}} = \left(\int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n)|^p \, dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p} < \infty$;
$\omega_{k_{i_1}}(f, \delta_{i_1})_p \le C\delta_{i_1}^r,\ i_1 \in \{1, \dots, n\},\ k_{i_1} > r$;
$\omega_{k_{i_1} k_{i_2}}(f, \delta_{i_1}, \delta_{i_2})_p \le C(\delta_{i_1}\delta_{i_2})^r,\ \forall i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\},\ k_{i_1} > r,\ k_{i_2} > r$;
$\vdots$
$\omega_{k_{i_1} \dots k_{i_m}}(f, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_m})_p \le C\left(\delta_{i_1} \dots \delta_{i_m}\right)^r,\ \forall i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}, k_{i_j} > r$.

В теореме 3.1 устанавливается аналогичный теореме 2.1 критерий принадлежности f классу $S_n^m H_p^r$.

Заметим, что в формулировке теоремы 3.1 пристутствует параметр q, которого ни в утверждении ни в доказательстве нет.

В теореме 3.2 находятся достаточные условия вложения класса $S_n^m H_p^r$ в класс $S_n^m H_q^{r^*}$, $r^* = r - \frac{n}{m}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, $q > p$.

В теореме 3.3 рассматриваются следы функции из $S_n^m H_p^r$ на любом k-мерном подпространстве $\mathbb{R}_n$.

Все результаты диссертации являются новыми, снабжены достаточно подробными доказательствами, получены автором самостоятельно и опубликованы в пяти статьях (три в "Вестнике московского университета. Серия 1 (Математика, Механика)" и две в трудах механико-математического факультета).

Работа носит теоретический характер и ее результаты могут найти применение в научных учреждениях, где ведутся исследования по теории функций многих переменных.

Как замечание, следует отметить отсутствие доказательств окончательности условий большинства теорем, использование только гельедровских модулей непрерывности $\delta^\alpha, 0 < \alpha < 1$, а не общено случая $\omega(\delta)$ Лебега-Никольского. Впрочем это, возможно, не замечание, а пожелание автору на будущее.

О некоторых опечатках было сказано выше. Все это не влияет на общее благоприятное впечатление от работы в целом.

Можно сказать, что по нашему мнению, работа «Конструктивные характеристики и теоремы вложения обобщенных классов Никольского» удовлетворяет требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор – Тимур Фаритович Исмагилов заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по указанной специальности.

Официальный оппонент -
доктор физико-математических наук, профессор
__________________ А.И. Рубинштейн
11.05.2017

Подпись А.И. Рубинштейна удостоверяю

Место работы: Рубинштейн Александр Иосифович, доктор физико-математических наук (01.01.01), профессор кафедры высшей математики Мытищенского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: rubinshtein_aleksandr@mail.ru.
Тел. 8 (498) 687-43-94
Адрес: 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1.