ОТЗЫВ
официального оппонента
на диссертацию Исмагилова Тимура Фаритовича
"Конструктивные характеристики и теоремы вложения обобщенных классов Никольского"
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 –
"Вещественный, комплексный и функциональный анализ"

В диссертации Т.Ф. Исмагилова для функций многих переменных изучаются теоремы вложения для обобщенных классов Никольского, введенных автором. Эти классы являются обобщениями хорошо известных классов H и SH Никольского.

Первая теорема вложения была доказана в 1927 г. Г. Харди и Дж. Литтлвудом. Начало общей теории вложения пространств функций многих переменных было положено в 30-х годах XX века С.Л. Соболевым. Он изучал функции из соответствующих классов Соболева при помощи введенных им интегральных представлений. Интегральные представления получили в дальнейшем большое развитие в исследованиях В.П. Ильина, а затем О.В Бесова. Принципиально новый вклад в развитие этой теории был сделан С.М. Никольским, создавшим теорию $H-$ классов и применившим для исследования теорию приближений. Другой подход к теоремам вложения был предложен П.Л. Ульяновым,где он для функций одного переменного выяснил условия – необходимые и достаточные – для вложения одного класса в другой.

Впервые задачу о наилучшем приближении функций поставил в середине прошлого века П.Л. Чебышев. В начале XX века в работах Лебега, Валле-Пуссена, Джексона и С.Н. Бернштейна возник вопрос о получении конструктивных характеристик для функций, обладающих теми или иными структурными свойствами (дифференцируемостью, условием Липшица, и т.п.). То есть возник вопрос о нахождении для этих функций порядка их наилучшего приближения при помощи тех или иных агрегатов.

Для функций из $SH-$ классов, введенных в 1963 г. С.М. Никольским и Н.С. Бахваловым, не удавалось найти конструктивные характеристики функций в терминах их приближения полиномами. Поэтому встал вопрос об изучении таких классов функций каким-либо другим методом. М.К. Потаповым было предложено изучать такие классы функций при помощи приближения углом.

Дадим определения классов функций, введенных автором.

Определим класс функций двух переменных $SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$.

Будем писать $f \in SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, если $1 \le p_i \le \infty, \alpha_i > 0, \beta_i > 0, k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, k_3 \in \mathbb{N}, k_4 \in \mathbb{N}, \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \ge 1$, $f \in L_{p_1,p_2}$ и выполнены условия:

1) $\omega_{k_1}(f, \delta_1)_{p_1,p_2} \le c_1\delta_1^{\alpha_1}, \forall\delta_1 \in (0, 1), k_1 > \alpha_1$,

2) $\omega_{k_2}(f, \delta_2)_{p_1,p_2} \le c_2\delta_2^{\alpha_2}, \forall\delta_2 \in (0, 1), k_2 > \alpha_2$,

2) $\omega_{k_3k_4}(f, \delta_1, \delta_2)_{p_1,p_2} \le c_3\delta_1^{\beta_1}\delta_2^{\beta_2}, \forall\delta_i \in (0, 1), i = 1, 2, k_3 > \beta_1, k_4 > \beta_2$,

где положительные постоянные c_1, c_2 и c_3 не зависят от δ_1 и δ_2.

Класс $SH(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ является обобщением классов Никольского $H^{\alpha_1,\alpha_2}_{p_1,p_2}$ и $SH^{\alpha_1,\alpha_2}_{p_1,p_2}$.

Определим класс функций многих переменных $S^m_nH^r_p$.

Будем писать $f \in S^m_nH^r_p$, если $1 \le p \le \infty$, $f \in L_p(n)$, $r > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le n$, $\forall\delta i_j \in (0, 1)$ и выполнены условия:

1) $\omega_{k_{i_1}}(f, \delta_{i_1})_p \le c_4\delta^r_{i_1}, \forall i_1 = 1, ..., n$,

2) $\omega_{k_{i_1}k_{i_2}}(f, \delta_{i_1}, \delta_{i_2})_p \le c_5\delta^r_{i_1}\delta^r_{i_2}, \forall(i_1, i_2) \subset (1, ..., n)$,

$\vdots$

3) $\omega_{k_{i_1}\dots k_{i_m}}(f,\delta_{i_1},\dots,\delta_{i_m})_p \le c_6\delta_{i_1}^r\cdots\delta_{i_m}^r, \forall(i_1,\dots,i_2)\subset(1,...,n)$,
где $k_{i_j}>r$ и положительные постоянные c_4, c_5 и c_6 не зависят от δ_{i_j}.

Класс $S_n^m H_p^r$ совпадает с классом H_p^r, если $m=1$, и совпадает с классом SH_p^r если $m=n$.

Для доказательства теорем вложения автор использует полученные для этих классов конструктивные характеристики (при помощи приближения углом).

Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых в общей сложности на 14 параграфов. Объем диссертации составляет 115 страниц с 24 рисунками, список библиографии насчитывает 23 наименования. Во введении изложена краткая история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные задачи и результаты диссертации. В первой главе показано представление функции $f\in L_{\overline{p}}$ в виде суммы функций, имеющих определенные свойства (так называемая теорема о распасовке функций), получены оценки для приближения углом, а также для модулей гладкости для функций распасовки. Во второй главе изучаются классы $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$. Здесь изложены вспомогательные результаты, которые используются в дальнейшем при доказательстве основных теорем. Получена конструктивная характеристика класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, получены теоремы вложения для разных метрик. Основными результатами второй главы являются следующие теоремы.

Теорема 2.2. Пусть $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, где $1\le p_i\le q_i\le\infty$, $\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}<\beta_i\le\alpha_i$, $i=1,2$, тогда $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, где

$$\alpha_1^*=\alpha_1\vartheta_1,\ \alpha_2^*=\alpha_2\vartheta_2,\ \beta_1^*=\beta_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right),\ \beta_2^*=\beta_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right),$$

$$\vartheta_1=1-\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+\frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right),\ \vartheta_2=1-\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)+\frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_2\beta_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right).$$

Теорема 2.3. Пусть $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, где $1\le p_i\le q_i\le\infty$, $\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}<\alpha_i\le\beta_i$, $i=1,2$, тогда $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, где

$$\alpha_i^*=\alpha_i-\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}\right),\ \beta_i^*=\beta_i-\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}\right),\ i=1,2.$$

Теорема 2.4. Пусть $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, где $1\le p_i\le q_i\le\infty$, $i=1,2$, $\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}<\beta_1\le\alpha_1$, $\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}<\alpha_2\le\beta_2$, тогда $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, где

$$\alpha_1^*=\alpha_1\vartheta_1,\ \alpha_2^*=\alpha_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right),\ \beta_i^*=\beta_i-\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}\right),\ i=1,2,$$

$$\vartheta_1=1-\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+\frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right).$$

Теорема 2.5. Пусть $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, где $1\le p_i\le q_i\le\infty$, $i=1,2$, $\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}<\alpha_1\le\beta_1$, $\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}<\beta_2\le\alpha_2$, тогда $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, где

$$\alpha_1^*=\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right),\ \alpha_2^*=\alpha_2\vartheta_2,\ \beta_i^*=\beta_i-\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}\right),\ i=1,2,$$

$$\vartheta_2=1-\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)+\frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_2\beta_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right).$$

В теоремах 2.2-2.5 предполагалось, что $\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}<\alpha_i$ и $\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}<\beta_i$, $i=1,2$. В §2.4 рассмотрены теоремы вложения для случая, когда хотя бы одно из этих условий не выполнено.

Во второй главе для функций из класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ доказаны также теоремы о следах на оси Ox_1 и Ox_2.

Теорема 2.10. Пусть $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, где $1\le p_i\le\infty$, $i=1,2$, $\alpha_2>\frac{1}{p_2}$, $\beta_2>\frac{1}{p_2}$, $\alpha_1\ge\beta_1>0$, тогда f имеет на оси Ox_1 след $\varphi(x_1)\in H_{p_1}^{\alpha_1^*}$, где $\alpha_1^*=\alpha_1-\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2 p_2}$.

Теорема 2.11. Пусть $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, где $1\le p_i\le\infty$, $i=1,2$, $\alpha_2>\frac{1}{p_2}$, $\beta_2>\frac{1}{p_2}$, $\beta_1>\alpha_1>0$. Тогда f имеет на оси Ox_1 след $\varphi(x_1)\in H_{p_1}^{\alpha_1}$.

Аналогичные теоремы справедливы и для следа на ось Ox_2.

В теоремах 2.10-2.13 предполагалось, что $\beta_i > \frac{1}{p_i}$ для следа на ось Ox_i. В §2.6 рассмотрены теоремы о существовании следа на эту ось для случая, когда это условие не выполнено.

В третьей главе изучаются классы $S^m_n H^r_p$. Здесь изложены вспомогательные результаты, которые используются в дальнейшем при доказательстве основных теорем, получена конструктивная характеристика класса $S^m_n H^r_p$, доказана теорема о следах функций из этого класса, получена теорема вложения разных метрик. Основными результатами второй главы являются следующие теоремы.

Теорема 3.2. Если $f \in S^m_n H^r_p$, где $1 \le p < q \le \infty$, $r^* = r - \frac{n}{m}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$, то $f \in S^m_n H^{r^*}_q$.

Теорема 3.3. Пусть на R_n задана функция $f \in S^m_n H^r_p$, где $1 \le p \le \infty$, $1 \le m \le n$, $r > \frac{n}{mp}$, тогда на любом подпространстве $R_k = R_k(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$, где $(i_1, ..., i_k) \subset (1, ..., n)$, $1 \le k \le n$, у функции f существует след $\phi = \phi(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$, такой, что

1) если $k \le m$, то $\phi \in S^k_k H^{r^*}_p$, $\forall r^* \in \left(0, r - \frac{n-m}{mp}\right]$,

2) если $k > m$, то $\phi \in S^m_k H^{r^*}_p$, $\forall r^* \in \left(0, r - \frac{n-k}{mp}\right)$.

Переходя к оценке диссертации в целом, следует отметить, что решаемые в ней задачи являются актуальными. Результаты диссертации являются новыми. Для установления результатов применялись как и новые идеи, так и ранее известные методы. Достоверность результатов подтверждается полными доказательствами. Все результаты опубликованы в семи работах и неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре механико-математического факультета по теории ортогональных и тригонометрических рядов под руководством профессора М.К. Потапова, профессора В.А. Скворцова, профессора Т.П. Лукашенко, профессора М.И. Дьяченко, а также на XIX и XXI международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов"в 2012 и 2014 годах, на международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики"в г. Тула в 2014 году. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в функциональном анализе и теории приближений, теории дифференциальных уравнений и в теории интегральных уравнений.

К недостаткам диссертации можно отнести нижеследующие:

1. В автореферате не отмечены теоремы, формулируемые в §2.4 и §2.6, которые, на мой взгляд, являются важными, а именно:

В теоремах 2.2-2.5 предполагалось, что $\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} < \alpha_i$ и $\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} < \beta_i$, $i = 1, 2$. В §2.4 дополнительно доказаны теоремы вложения для случая, когда хотя бы одно из этих условий не выполнено.

В теоремах 2.10-2.13 предполагалось, что $\beta_i > \frac{1}{p_i}$ для следа на ось Ox_i. В §2.6 дополнительно доказаны теоремы о существовании следа на эту ось, когда это условие не выполнено.

2. Стоит отметить, что результаты §2.4 и §2.6, не являются следствиями из теорем, приведенных в §2.3 и §2.5, хотя бы потому, что в них содержатся существенно иные ограничения на параметры α_i и β_i. Поэтому неудачно выбраны названия §2.4 и §2.6. "Следствия теорем ...". Содержанию §2.4 и §2.6, по моему мнению, более соответствует название "Дополнения к теоремам ... ".

3. Наличие некоторого количества опечаток. Так на странице 49 пропущена постоянная C_3, поставлена лишняя точка, пропущены $k_3 \in \mathbb{N}$ и $k_4 \in \mathbb{N}$; на странице 52 поставлено лишнее равенство; на странице 58 нужно $2^{i+1} - 1, 2^{j+1} - 1, 2^N - 1$; на странице 69 нужно $\alpha_2, \alpha_1 - \gamma$; в автореферате на странице 10 нужно §2.5.

Однако эти недостатки не умаляют достоинств данной диссертации. По моему мнению, она удовлетворяет всем требованиям Постановления Правительства РФ от 24.09.2013 N 842 (ред. от 21.04.2016) "О порядке присуждения ученых степеней", предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Т.Ф. Исмагилов, достоин присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент -
кандидат физико-математических наук, доцент
_______________ Б.В. Симонов
18.05.2017

Подпись Б.В. Симонова удостоверяю

Подпись Симонова Б.В
УДОСТОВЕРЯЮ 19 мая 2017.
Нач. общего отдела
(подпись)

Место работы:
Симонов Борис Витальевич,
кандидат физико-математических наук (01.01.01),
доцент кафедры прикладной математики факультета технологии пищевых производств Волгоградского государственного технического университета
e-mail: simonov-b2002@yandex.ru
Тел.: 8 (8442) 24-81-24
Адрес: 400005, г. Волгоград, пр. им. Ленина, 28.