Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Муромская Анастасия Андреевна

Некоторые стохастические модели актуарной математики

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей
механико–математического факультета ФГБОУ ВО
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Булинская Екатерина Вадимовна

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Белопольская Яна Исаевна,
профессор кафедры математики строительного факультета ФГБОУ ВО
«Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»,

кандидат физико-математических наук
Громов Александр Николаевич,
старший управляющий директор, начальник Управления
публичного акционерного общества «Сбербанк России».

Ведущая организация:
ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН»

Защита диссертации состоится «23» июня 2017 г. в 16^{45} на заседании
диссертационного совета Д 501.001.85 на базе МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу:
119234, Москва, ГСП–1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
(Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А)
и на сайте механико-математического факультета:
http://mech.math.msu.ru/~snark/index.cgi.

Автореферат разослан « » мая 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физико–математических наук,
профессор Власов В. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация подготовлена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова и посвящена исследованию математических моделей деятельности страховых компаний, использующих перестрахование и выплачивающих дивиденды.

Актуальность темы

Первые математические модели, основанные на принципах деятельности страховых компаний, появились в начале XX века. Значительный вклад в развитие теории риска внесли шведские математики Ф. Лундберг и Г. Крамер. Работы Крамера[1,2] и докторская диссертация Лундберга[3] положили начало изучению механизма функционирования страховых компаний на основе модели, в соответствии с которой процесс поступления страховых требований описывался с помощью пуассоновского потока. Данная модель впоследствии стала называться классической моделью риска Крамера-Лундберга. Именно в рамках модели Крамера-Лундберга многими учеными в XX и XXI веках исследовались математические задачи, посвященные различным аспектам страхового бизнеса. Основное предположение данной модели заключается в том, что капитал страховой компании в момент времени t имеет вид

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i,\ t \geq 0,$$

где x — это начальный капитал, c — интенсивность поступления премий, N_t — пуассоновский процесс с параметром λ. При этом случайные величины $\{X_i\}$, обозначающие размеры исков, независимы, одинаково распределены и имеют функцию распределения $F(y)$, такую, что $F(0) = 0$. Процесс N_t также не зависит от $\{X_i\}$.

Модель риска Крамера-Лундберга описывает процесс получения страховых премий от страхователей и определяет структуру выплат возмещений после наступления страховых случаев. В том числе данная модель отображает и возможность разорения страховой компании, которое наступает, когда средств, накопленных за счет поступающих премий, не хватает на покрытие всех убытков. Если после вычета некоторого требования X_i капитал страховой компании X_t оказывается отрицательным, данная компания считается разорившейся. Значение вероятности, с которой это может произойти, зависит от характеристик случайного процесса X_t. Оценке данного значения посвящено большое количество работ. Одним из первых результатов в этой области является неравенство Лундберга. Введем необходимые для формулировки данного неравенства обозначения. Пусть $\tau = \inf[t \geq 0 : X_t < 0]$ — момент разорения компании. Тогда $\psi(x) = P(\tau < \infty \mid X_0 = x)$ представляет собой вероятность разорения, в то время как $\delta(x) = 1 - \psi(x)$ — вероятность неразорения страховой компании. Будем

[1] *Cramer H.* On the mathematical theory of risk // Stockholm: Skandia Jubilee Volume. — 1930.

[2] *Cramer H.* Collective risk theory // Stockholm: Skandia Jubilee Volume. — 1955. — P. 1–92.

[3] *Lundberg F.* Approximations of the Probability Function / Reinsurance of Collective Risks. — Uppsala: Doctoral thesis, 1903.

также предполагать, что существует единственный положительный корень R уравнения

$$\lambda + Rc = \lambda \int_0^\infty e^{Ry} dF(y),$$

который называется характеристическим показателем или экспонентой Лундберга. В этом случае справедливо следующее неравенство для вероятности разорения (неравенство Лундберга):

$$\psi(x) \leq e^{-Rx}. \tag{1}$$

Позже были исследованы асимптотические свойства функции $\psi(x)$, получены двусторонние оценки для вероятности разорения в случае требований с тяжелыми хвостами (при которых не существует экспонента Лундберга), рассмотрены более сложные модели, являющиеся обобщениями классической модели Крамера-Лундберга. Среди таких моделей можно назвать, например, модель риска Спарре Андерсена[4], в рамках которой предполагается, что процесс N_t представляет собой произвольный процесс восстановления, не обязательно пуассоновский. Основные результаты, связанные с вероятностью разорения страховых компаний в рамках различных моделей риска, приведены в работах[5,6,7].

В процессе своей деятельности страховые компании имеют возможность прибегать к использованию различных финансовых инструментов, позволяющих уменьшить вероятность разорения. Таким инструментом является перестрахование. В общем случае при использовании перестрахования страховщик на согласованных условиях передает часть принятого под свою ответственность риска другому страховщику (которого называют перестраховщиком). В итоге поступающие к страховщику требования делятся между страховщиком и перестраховщиком в соответствии с типом договора и выбранными параметрами перестрахования. А именно, если поступает требование размера X и на момент поступления данного требования выбран параметр перестрахования d (быть может, многомерный), то страховщик покрывает часть иска $\rho(X, d) \leq X$ п.н., тогда как перестраховщик выплачивает часть $X - \rho(X, d)$. За то, что перестраховщик берет на себя часть ответственности, страховщик передает перестраховщику некоторую долю от полученной премии. Самыми распространенными типами договоров перестрахования являются договоры квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка. В случае использования квотного перестрахования $\rho(X, d) = dX,\ 0 \leq d \leq 1$, в то время как согласно перестрахованию эксцедента убытка мы имеем $\rho(X, d) = \min(d, X)$ для некоторого уровня собственного удержания $d \geq 0$. Подробное описание основных видов и механизмов перестрахования приведено в книге[8].

[4] *Sparre Andersen E.* On the collective theory of risk in case of contagion between the claims // Transactions of the XVth International Congress of Actuaries. — 1957. — Vol. 2, №6. — P. 219–229.

[5] *Калашников В.В., Константинидис Д.Г.* Вероятность разорения // Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т.2, №4. — С. 1055–1100.

[6] *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Математические основы теории риска. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[7] *Cai J.* Cramer–Lundberg Asymptotics // Wiley StatsRef: Statistics Reference Online. — 2014. — P. 1–6.

[8] *Булинская Е.В.* Теория риска и перестрахование. Часть 2. — М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2006.

Отдельный интерес представляют модели риска, в рамках которых страховая компания имеет возможность выбирать параметры перестрахования в каждый момент времени, руководствуясь при этом информацией о поступивших ранее убытках. Основной целью компании является тогда поиск оптимальной (в некотором смысле) стратегии перестрахования. Задачи такого рода, связанные с поиском наилучшей и при этом динамически изменяющейся стратегии перестрахования, могут быть охарактеризованы как задачи оптимального стохастического управления. В качестве одного из критериев оптимальности стратегии перестрахования может быть выбрана минимальная вероятность разорения (см. другие подходы к определению оптимальной стратегии в работах[9,10]). При этом выбор стратегии перестрахования осуществляется из некоторого класса стратегий, задаваемого типом перестрахования. Так Шмидли посвятил статью[11] поиску оптимальной стратегии квотного перестрахования в модели Крамера-Лундберга, в то время как Хиппа и Вогта[12] интересовал вопрос о существовании оптимальной перестраховочной стратегии эксцедента убытка. В работе Громова[13] был рассмотрен договор перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика. Ли и Лиу[14] обобщили работу[11] и рассмотрели модель Крамера-Лундберга с договором страхования, покрывавшим сразу два риска, к каждому из которых применялось квотное перестрахование. Существуют также работы, посвященные поиску оптимальных стратегий перестрахования в модели с диффузионной аппроксимацией процесса риска, среди них, например, статьи Белкиной и Матвеевой[15] и Хойгаарда и Таксара[16].

Еще одним важным аспектом деятельности страховой компании является выплата дивидендов акционерам. В классических моделях риска не учитывается тот факт, что страховая компания может являться акционерным обществом, однако выплата дивидендов наряду с использованием перестрахования имеет большое значение при определении вероятности неразорения. Впервые изучать механизм выплаты дивидендов предложил итальянский ученый Бруно де Финетти[17] в 1957 году. Де Финетти рассмотрел процесс выплаты дивидендов в самой простой дискретной модели, согласно которой каждый год капитал компании мог изменяться на плюс или минус единицу. В настоящее время основной интерес ученых прикован

[9] *Cani A., Thonhauser S.* An optimal reinsurance problem in the Cramer–Lundberg model // Mathematical Methods of Operations Research. — 2016. — P. 1–27.

[10] *Liang Z., Yuen K.C.* Optimal dynamic reinsurance with dependent risks: variance premium principle // Scandinavian Actuarial Journal. — 2016. — Vol. 2016, №1. — P. 18–36.

[11] *Schmidli H.* Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting // Scandinavian Actuarial Journal. — 2001. — Vol. 2001, №1. — P. 55–68.

[12] *Hipp C., Vogt M.* Optimal dynamic XL reinsurance // ASTIN Bulletin. — 2003. — Vol. 33, №2. — P. 193–207.

[13] *Громов А.Н.* Оптимальная стратегия перестрахования эксцедента убытка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2011. — №4. — С. 17–22.

[14] *Li Y., Liu G.* Dynamic proportional reinsurance and approximations for ruin probabilities in the two-dimensional compound Poisson risk model // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2012. — Vol. 2012. — P. 1–26.

[15] *Белкина Т.А., Матвеева М.В.* Об оптимальных стратегиях перестрахования в моделях с диффузной аппроксимацией процесса риска // Сборник научных трудов «Инновационная система государства и перспективы ее развития». Гомель: ЦИИР. — 2010. — С. 43–54.

[16] *Hojgaard B., Taksar M.* Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models // Scandinavian Actuarial Journal. — 1998. — Vol. 1998, №2. — P. 166–180.

[17] *De Finetti B.* Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio // Transactions of the XVth International Congress of Actuaries. — 1957. — Vol. 2, №1. — P. 433–443.

к моделям с непрерывным временем. Так в рамках классической модели Крамера-Лундберга изменение капитала акционерной страховой компании с течением времени описывает процесс $U_t = X_t - D_t$, где D_t — это совокупные дивиденды, выплаченные к моменту времени t. Величина $T = \inf[t \geq 0 : \ U_t < 0]$ является моментом разорения акционерной страховой компании, а дисконтированные дивиденды, выплаченные до момента разорения T, вычисляются как

$$D = \int_0^T e^{-\delta t} dD_t,$$

где δ — это ставка дисконтирования. Исследование математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения компании, является одним из важных направлений в теории риска. Определяющую роль при проведении исследования играет выбор стратегии выплаты дивидендов. В течение нескольких последних десятилетий было изучено большое количество различных дивидендных стратегий. Многие результаты приведены в обзорах[18,19]. Одними из первых были исследованы так называемые барьерные стратегии с постоянным уровнем барьера (часто их сокращенно называют просто барьерными стратегиями). Согласно барьерной стратегии с уровнем барьера b дивиденды не выплачиваются, когда $U_t < b$, и выплачиваются с интенсивностью c, когда $U_t = b$. Если же $U_t > b$, то сразу в качестве дивидендов выплачивается сумма, равная $U_t - b$ (заметим, что тогда неравенство $U_t > b$ может выполняться только при $t = 0$). Барьерные стратегии с постоянным барьером рассматривались, например, в монографии Бюльмана[20] и в статьях Гербера, Шиу и Смита[21,22]. Отдельное внимание в указанных работах уделялось именно изучению математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения. Данная величина рассматривалась как функция от начального капитала x и чаще всего обозначалась как $V(x, b)$. Было доказано, что $V(x, b)$ удовлетворяет уравнению

$$cV'(x,b) - (\lambda + \delta)V(x,b) + \lambda \int_0^x V(x-y,b)dF(y) = 0, \quad 0 < x < b, \tag{2}$$

и граничному условию

$$V'(b,b) = 1.$$

Для некоторых распределений требований[21,23] путем сведения интегро-дифференциального уравнения (2) к дифференциальному уравнению второго порядка был получен явный вид

[18] *Albrecher H., Thonhauser S.* Optimality results for dividend problems in insurance // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas. — 2009. — Vol. 103, №2. — P. 295–320.

[19] *Avanzi B.* Strategies for dividend distribution: a review // North American Actuarial Journal. — 2009. — Vol. 13, №2. — P. 217–251.

[20] *Bühlmann H.* Mathematical Methods in Risk Theory. — Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1970.

[21] *Gerber H. U., Shiu E. S. W., Smith N.* Maximizing dividends without bankruptcy // ASTIN Bulletin. — 2006. — Vol. 36, №1. — P. 5–23.

[22] *Gerber H. U., Shiu E. S. W., Smith N.* Methods for estimating the optimal dividend barrier and the probability of ruin // Insurance: Mathematics and Economics. — 2008. — Vol. 42, №1. — P. 243–254.

[23] *Карапетян Н.В.* Оптимизация барьера выплаты дивидендов при гамма-распределении требований // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2009. — №5. — С. 57–60.

функции $V(x,b)$. Диксон и Уотерс[24] нашли в рамках использования барьерных стратегий интегро-дифференциальные уравнения для моментов случайной величины D более высокого порядка. Лин, Уиллмот и Дрекик[25] изучали функцию Гербера-Шиу и связанные с ней различные показатели модели, такие как среднее время до разорения, капитал компании перед разорением и дефицит капитала после разорения. Стоит отдельно отметить, что несмотря на простую структуру барьерных стратегий, пристальное внимание, которое уделяется им в научной литературе, вполне оправдано. Как было показано в статье[26], оптимальная (в смысле максимизации выплаченных до разорения дивидендов) стратегия в модели Крамера-Лундберга будет именно барьерной, если, например, иски имеют строго монотонную плотность распределения. Доказательству оптимальности стратегий барьерного типа в рамках модели с броуновским движением посвящена статья Жанблан-Пике и Ширяева[27]. Оптимальность барьерных стратегий в условиях дуальной модели риска (согласно которой капитал компании в момент времени $t \geq 0$ имеет вид $X_t = x - ct + \sum_{i=1}^{N_t} X_i$) и в различных обобщениях данной модели доказана в работах[28,29]. Достаточные условия оптимальности барьерных стратегий для моделей, в которых интенсивность поступления премий зависит от процесса капитала, получили Марчиняк и Палмовски[30,31]. В то же время Азкью и Мюлер[32] привели пример (с гамма-распределением исков), подтверждающий, что в классической модели риска оптимальная дивидендная стратегия не всегда сводится к барьерной. Барьерные стратегии также изучались и в рамках моделей с дискретным временем (см., например, статью Ярцевой[33]).

После появления первых работ, посвященных барьерным стратегиям с постоянным уровнем барьера, были рассмотрены различные обобщения данных дивидендных стратегий. Одним из таких обобщений являются линейные барьерные стратегии. Согласно линейной барьерной стратегии с параметрами a и b, где a и b — это некоторые неотрицательные числа, $0 \leq a < c$, дивиденды выплачиваются со скоростью $c - a$, когда $U_t = b + at$, и не выпла-

[24] *Dickson D.C.M., Waters H.R.* Some optimal dividends problems // ASTIN Bulletin. — 2004. — Vol. 34, №1. — P. 49–74.

[25] *Lin X.S., Willmot G.E., Drekic S.* The classical risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function // Insurance: Mathematics and Economics. — 2003. — Vol. 33, №3. — P. 551–566.

[26] *Loeffen R.L.* On optimality of the barrier strategy in de Finetti's dividend problem for spectrally negative Lévy processes // The Annals of Applied Probability. — 2008. — Vol. 18, №5. — P. 1669–1680.

[27] *Жанблан-Пике М., Ширяев А.Н.* Оптимизация потока дивидендов // Успехи математических наук. — 1995. — Т. 50, №2 (302). — С. 25–46.

[28] *Avanzi B., Shen J., Wong B.* Optimal dividends and capital injections in the dual model with diffusion // ASTIN Bulletin. — 2011. — Vol. 41, №2. — P. 611–644.

[29] *Bayraktar E., Kyprianou A.E., Yamazaki K.* On optimal dividends in the dual model // ASTIN Bulletin. — 2013. — Vol. 43, №3. — P. 359–372.

[30] *Marciniak E., Palmowski Z.* On the optimal dividend problem for insurance risk models with surplus-dependent premiums // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2016. — Vol. 168, №2. — P. 723–742.

[31] *Marciniak E., Palmowski Z.* On the optimal dividend problem in the dual model with surplus-dependent premiums // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2017. — P. 1–20 (doi: 10.1007/s10957-016-1050-7).

[32] *Azcue P., Muler N.* Optimal reinsurance and dividend distribution policies in the Cramer-Lundberg model // Mathematical Finance. — 2005. — Vol. 15, №2. — P. 261–308.

[33] *Ярцева Д.А.* Верхние и нижние оценки дивидендов в дискретной модели // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2009. — №5. — С. 60–62.

чиваются совсем, если $U_t < b + at$. Линейные стратегии подробно рассматривались в статьях[34,35]. В работе Гербера[35] в рамках модели Крамера-Лундберга были получены интегро-дифференциальные уравнения для математического ожидания выплаченных дивидендов и для вероятности неразорения как функций от начального капитала x и параметра b. Данные уравнения были решены в явном виде в случае экспоненциального распределения требований.

В литературе исследовались и более сложные функции барьеров, нежели $b_t = b + at$. Так в статье[36] были изучены дивидендные стратегии с функциями барьера вида

$$b_t = \left(b^m + \frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \alpha, b > 0, m > 1.$$

Для подобных стратегий также были получены уравнения для вероятности неразорения и математического ожидания дисконтированных дивидендов, однако даже при условии экспоненциального распределения требований решить данные уравнения в явном виде не представлялось возможным, поэтому авторы[36] привели только численные результаты.

Существует также ряд статей[37,38,39], в которых изучаются модели страхования, включающие в себя как использование стратегий перестрахования, так и процесс выплаты дивидендов. Как правило в таких работах рассматривается или только квотное перестрахование, или только перестрахование эксцедента убытка. В то же время Азкью и Мюлер[32] рассмотрели случай произвольного типа перестрахования и доказали, что в модели Крамера-Лундберга при условии неограниченной скорости выплаты дивидендов оптимальными дивидендными стратегиями (в смысле максимизации выплаченных дивидендов до разорения) всегда являются так называемые полосовые стратегии ("band strategies"). В рамках данных стратегий в зависимости от размера капитала компании в тот или иной момент времени дивиденды либо выплачиваются со скоростью c, либо не выплачиваются совсем, либо в качестве дивидендов сразу же выплачивается та часть капитала, которая превышает некий заданный уровень. Частным случаем полосовых дивидендных стратегий очевидно являются барьерные стратегии, однако отметим, что задача поиска явного вида для среднего значения выплаченных дивидендов в работе[32] не затрагивалась.

---

[34] *Albrecher H., Hartinger J., Tichy R.F.* On the distribution of dividend payments and the discounted penalty function in a risk model with linear dividend barrier // Scandinavian Actuarial Journal. — 2005. — Vol. 2005, №2. — P. 103–126.

[35] *Gerber H. U.* On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier // Scandinavian Actuarial Journal. — 1981. — Vol. 1981, №2. — P. 105–115.

[36] *Albrecher H., Kainhofer R.* Risk theory with a non-linear dividend barrier // Computing. — 2002. — Vol. 68, №4. — P. 289–311.

[37] *Beveridge C.J., Dickson D.C.M., Wu X.* Optimal dividends under reinsurance // Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires. — 2008. — Vol. 1. — P. 149–166.

[38] *Karapetyan N.V.* Dividends and reinsurance // Proceedings of the 6th St. Petersburg Workshop on Simulation. — 2009. — P. 47–52.

[39] *Mnif M., Sulem A.* Optimal risk control and dividend policies under excess of loss reinsurance // Stochastics, An International Journal of Probability and Stochastic Processes. — 2005. — Vol. 77, №5. — P. 455–476.

Цели работы

Целями диссертационной работы являются:

- Исследование оптимальных стратегий перестрахования в модели Крамера-Лундберга с несколькими рисками в рамках одного договора страхования, в частности, доказательство существования оптимальной стратегии и вывод уравнения для наибольшей возможной вероятности неразорения;
- Нахождение в условиях модели Крамера-Лундберга математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения страховой компанией, использующей комбинацию квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика;
- Изучение в условиях моделей риска Спарре Андерсена и Крамера-Лундберга показателей деятельности акционерных страховых компаний, выплачивающих дивиденды согласно барьерным стратегиям со ступенчатой функцией барьера.

Научная новизна работы

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. В рамках модели деятельности компании, использующей перестрахование и заключающей договоры страхования, покрывающие сразу несколько рисков:

- Найден вид уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, соответствующего задаче поиска наибольшей возможной вероятности неразорения;
- Доказаны существование и единственность решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана и определены основные свойства данного решения;
- Установлена связь между решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана и максимальной вероятностью неразорения и доказано существование оптимальной стратегии перестрахования;
- Получены численные результаты для случая двух независимых показательно распределенных рисков и для случая двух зависимых рисков, совместное распределение которых построено с помощью копулы.

2. В рамках модели деятельности страховой компании, выплачивающей дивиденды согласно барьерной стратегии с постоянным уровнем барьера и использующей комбинацию квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика:

- Установлен вид интегро-дифференциальных уравнений, которым в зависимости от соотношения между начальным капиталом и параметрами перестрахования удовлетворяет математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения компании;

- В случае экспоненциального распределения и в случае равномерного распределения требований полученные интегро-дифференциальные уравнения сведены к дифференциальным уравнениям второго порядка, часть из которых представляет собой дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом;

- Для каждого из указанных распределений требований приведен и проиллюстрирован на примерах алгоритм поиска решений найденных дифференциальных уравнений.

3. В рамках модели деятельности акционерной страховой компании, выплачивающей дивиденды согласно барьерной дивидендной стратегии со ступенчатой функцией барьера:

- Получены оценки вероятности разорения компании, представляющие собой обобщения неравенства Лундберга;

- Приведены примеры стратегий со ступенчатой функцией барьера, при которых вероятность разорения страховой компании строго меньше единицы;

- Получена формула для вычисления математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения;

- Определены условия, при которых барьерная стратегия со ступенчатой функцией барьера оказывается более предпочтительной с точки зрения суммарно выплаченных дивидендов, чем барьерная стратегия с постоянным уровнем барьера.

Методы исследования

В работе используются различные методы и результаты теории вероятностей, теории случайных процессов и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, привлекаются методы оптимального управления.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут представлять интерес для специалистов в области страховой математики как при теоретических исследованиях, так и на практике.

Апробация диссертации

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова:

- Большом семинаре кафедры теории вероятностей под руководством академика РАН, профессора А. Н. Ширяева (2016 г.);
- Семинаре «Стохастические модели в теории запасов и страховании» под руководством профессора Е. В. Булинской (2013 – 2016 гг., неоднократно).

Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- The Tenth Bachelier Colloquium on Mathematical Finance and Stochastic Calculus (France, Metabief, 2016);
- Международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Россия, МГУ, 2014 – 2016 гг.);
- Международной конференции по стохастическим методам (Россия, пос. Абрау-Дюрсо, 2016 г.);
- VIII Московской международной конференции по исследованию операций (Россия, Москва, 2016 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации содержатся в работах [1] – [12]. Среди них 3 статьи [1] – [3] и одни тезисы конференции [10] в журналах из перечня ВАК. Список работ приведен в конце настоящего автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 92 страницы. Список литературы содержит 74 наименования, включая работы автора.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дан краткий исторический обзор предыдущих исследований, посвященных математическим моделям деятельности страховых компаний, использующих перестрахование и выплачивающих дивиденды, а также приведено основное содержание диссертационной работы, ее апробация, цели и другие характеристики.

В **первой главе** на основе классической модели риска Крамера-Лундберга изучается деятельность компании, занимающейся комбинированным страхованием. Предполагается, что компания заключает договоры страхования, которые покрывают сразу несколько ($k \geq 2$) рисков. При этом компания имеет возможность передавать каждый из данных рисков в перестрахование, параметры которого изменяются со временем. Целью компании является поиск оптимальной стратегии перестрахования, максимизирующей вероятность неразорения. Поиску оптимальных стратегий в моделях с фиксированным типом договора перестрахования и с договорами страхования, покрывающими только один риск, посвящены статьи[11,12,13]. Ли и Лиу[14] обобщили работу[11] и рассмотрели модель с двумя рисками и возможностью квотного перестрахования каждого из них. Мы в свою очередь предполагаем в первой главе диссертации, что каждый из $k \geq 2$ рисков может быть перестрахован в соответствии со своим произвольным типом перестрахования.

В начале главы в разделе 1.1 приводится подробное описание рассматриваемой модели. Считается, что в каждый момент времени $t \geq 0$ страховая компания имеет возможность выбрать параметры d_t^i перестрахования i-ого риска, руководствуясь при этом значением капитала $X_t^{\overline{d}}$. Таким образом, процесс $\overline{d}_t = (d_t^1, \ldots, d_t^k)$, где $d_t^i = d^i(X_t^{\overline{d}})$ являются измеримыми функциями от капитала компании, определяет стратегию перестрахования. Множества возможных значений параметров перестрахования d_t^i мы обозначаем через D_i, ограничиваясь при этом рассмотрением только компактных множеств D_i. Соответственно, в каждый фиксированный момент времени $\overline{d}_t \in D$, где $D = D_1 \times \ldots \times D_k$. С помощью $\mathfrak{D}$ обозначаем множество всех возможных стратегий перестрахования $\overline{d}_t$.

Поступившие требования по каждому из k рисков в рамках одного страхового случая делятся между страховщиком и перестраховщиком в соответствии с типом договора перестрахования (функцией ρ_j) и в соответствии с выбранными параметрами перестрахования $d_{T_n-}^j$, $j = \overline{1,k}$. С помощью T_n мы обозначаем моменты поступления совокупных исков. Функции ρ_j определяют тип договора перестрахования, то есть само правило, по которому производится деление требования по j-ому риску между страховщиком и перестраховщиком. Если по j-ому риску поступило требование Y_j и на момент поступления данного требования выбран параметр $d^j \in D_j$, то $\rho_j(Y_j, d^j)$ обозначает часть иска, которую должен покрыть страховщик. Перестраховщик тогда должен покрыть $Y_j - \rho_j(Y_j, d^j)$. В соответствии с типом перестрахования делятся не только требования, но и премии. После применения перестрахования интенсивности поступления премий страховщику по каждому из k рисков становятся равными $c_i(d_t^i)$, $i = \overline{1,k}$.

Итого капитал страховой компании согласно нашей модели в момент времени t имеет вид

$$X_t^{\overline{d}} = x + \int_0^t \sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) ds - \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_{nj}, d_{T_n-}^j), \ t \geq 0,$$

где x — это начальный капитал, N_t — пуассоновский процесс с параметром λ, а Y_{nj} — случайные величины, обозначающие размеры требований по j-ому риску в рамках n-ого страхового случая. При этом $\{\overline{Y_n}\}_{n \geq 1} = \{(Y_{n1}, \ldots, Y_{nk})\}_{n \geq 1}$ представляет собой последовательность независимых и одинаково распределенных случайных векторов. Компоненты данных векторов Y_{nj}, $j = \overline{1,k}$, имеют непрерывную совместную функцию распределения $F(y_1, \ldots, y_k)$.

Основная задача компании состоит в том, чтобы выбрать наилучшую стратегию перестрахования, позволяющую максимально увеличить вероятность неразорения. При этом $\tau^{\overline{d}} = \inf[t \geq 0 : X_t^{\overline{d}} < 0]$ является моментом разорения, $\psi^{\overline{d}}(x) = P(\tau^{\overline{d}} < \infty | X_0^{\overline{d}} = x)$ — вероятностью разорения, а $\delta^{\overline{d}}(x) = 1 - \psi^{\overline{d}}(x)$ — вероятностью неразорения страховой компании, использующей стратегию перестрахования $\overline{d}_t$. Таким образом, цель состоит в том, чтобы найти $\delta(x) = \sup_{\overline{d}_t \in \mathfrak{D}} \delta^{\overline{d}}(x)$ и определить оптимальную стратегию перестрахования, если такая существует.

В разделе 1.2 доказывается, что для всех $\overline{d} \in D$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)\delta'(x) - \lambda\delta(x) + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \delta(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \dots, y_k) \le 0,$$

и задача поиска наибольшей возможной вероятности неразорения сводится к решению уравнения типа Гамильтона - Якоби - Беллмана:

$$\sup_{\overline{d} \in D} \left[\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)g'(x) - \lambda g(x) + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \dots, y_k) \right] = 0. \qquad (3)$$

При этом мы вводим новое обозначение $g(x)$, так как не знаем точно, удовлетворяет ли функция $\delta(x)$ уравнению (3) или нет. Связь между решением уравнения (3) и искомой функцией $\delta(x)$ мы определяем в разделе 1.4, однако в соответствии со свойствами функции $\delta(x)$ сразу в разделе 1.2 отмечаем, что нас интересует существование возрастающих решений $g(x)$ уравнения (3), таких, что $g(0) > 0$ и $g(x) = 0$ при $x < 0$. Здесь и далее, говоря о характеристиках функции $g(x)$, таких как, например, монотонность, мы имеем в виду характеристики данной функции на луче $[0, \infty)$ (определение $g(x)$ на $(-\infty, 0)$ необходимо нам только для удобства записи интегралов). Принимая во внимание наложенные на функцию $g(x)$ ограничения, в разделе 1.2 диссертации мы также доказываем,что уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$g'(x) = \inf_{\overline{d} \in \widetilde{D}} \left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)} \left(g(x) - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \dots, y_k) \right) \right], \qquad (4)$$

где $\widetilde{D} = \{\overline{d} \in D : \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i) > 0\}$. При этом в качестве граничного условия выбираем равенство $g(0) = 1$.

В разделе 1.3 первой главы доказывается существование и единственность решения уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана.

Теорема 1.1. *Существует единственное решение уравнения* (4)*, такое, что* $g(0) = 1$*. Данное решение является возрастающим, ограниченным и непрерывно дифференцируемым.*

Далее в разделе 1.4 устанавливается связь между решением уравнения (4) и наибольшей возможной вероятностью неразорения и определяется вид искомой оптимальной стратегии перестрахования:

Теорема 1.2. *Пусть* $g(x)$ *— единственное решение уравнения* (4)*, такое, что* $g(0) = 1$*. Тогда* $g(x) = \delta(x)/\delta(0) = \delta(x)g(\infty)$*, при этом оптимальная стратегия перестрахования имеет вид* $\overline{d}_t^* = \overline{d}^*(X_t^{\overline{d}^*})$*, где* $\overline{d}^*(x)$ *— это точка, в которой достигается инфимум в уравне-*

нии (4), а $X_t^{\overline{d}^*}$ — это процесс капитала страховой компании, использующей оптимальную стратегию перестрахования $\overline{d}_t^*$.

При этом в доказательстве теоремы 1.2 используются вспомогательные леммы, связанные с характеристиками случайного процесса капитала компании, справедливость которых также показана в главе 1:

Лемма 1.1. *Процесс*

$$g(X_t^{\overline{d}}) - \int_0^t \left[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) + \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \ldots, y_k) \right] ds$$

является мартингалом.

Лемма 1.2. *Пусть $\overline{d}_t$ — произвольная стратегия перестрахования. Тогда с вероятностью, равной 1, либо происходит разорение компании, либо $X_t^{\overline{d}} \to \infty$ при $t \to \infty$.*

В конце первой главы приводятся численные результаты для случая двух независимых показательно распределенных рисков и для случая двух зависимых рисков, совместное распределение которых моделируется с помощью копулы Гумбеля-Хоугаарда[40].

Во **второй главе** диссертации исследуется модель работы страховой компании, одновременно применяющей перестрахование и выплачивающей дивиденды своим акционерам. Предполагается, что компания использует программу перестрахования, включающую в себя комбинацию квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика. Параметры перестрахования при этом фиксируются в начальный момент времени. Выплата дивидендов осуществляется согласно барьерной стратегии с постоянным уровнем барьера. Как и в первой главе, за основу берется классическая модель риска Крамера-Лундберга, однако изучается теперь не вероятность неразорения компании, а математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения.

Как было отмечено, существуют статьи[37,38,39], посвященные изучению процесса выплаты дивидендов страховыми компаниями, использующими перестрахование, однако во всех данных работах предполагается, что компании применяют или только квотное перестрахование, или только классическое перестрахование эксцедента убытка с неограниченной ответственностью перестраховщика. Рассматриваемая же в диссертации программа перестрахования не только является обобщением указанных типов перестрахования, но и чаще применяется на практике. В разделе 2.1 диссертации приводится описание данной программы. Предполагается, что страховщик заключил договор перестрахования эксцедента убытка с одним перестраховщиком, а оставшуюся часть риска перестраховал в соответствии с договором квотного перестрахования у другого перестраховщика. Коэффициент d является при этом уровнем собственного удержания перестрахования эксцедента убытка, l — ограничением на

[40] *Nelsen R.B.* An Introduction to Copulas. — N. Y.: Springer, 2006.

ответственность первого перестраховщика, a — параметром квотного перестрахования. Требование размера X, поступившее к страховщику, делится между страховщиком и перестраховщиками следующим образом: страховщик берет на себя обязанность выплатить часть

$$X_{ins} = a\big(\min(d, X) + \max(X - l - d, 0)\big),$$

в то время как первый перестраховщик выплачивает

$$X_{reins1} = \min\big(\max(X - d, 0), l\big),$$

а второй перестраховщик покрывает часть

$$X_{reins2} = (1 - a)\big(\min(d, X) + \max(X - l - d, 0)\big).$$

Таким образом, изменение капитала страховой компании, использующей перестрахование и выплачивающей дивиденды, описывается с помощью процесса

$$U_t = x + c_{ins}t - \sum_{i=1}^{N_t}(X_i)_{ins} - D_t,\ t \geq 0,$$

где D_t — это совокупные дивиденды, выплаченные к моменту времени t, в то время как $c_{ins} = c_{ins}(d, l, a)$ — это интенсивность поступления премий компании после применения описанной выше программы перестрахования. Если страховщик и перестраховщики используют премиальный принцип среднего с нагрузками соответственно θ, θ_1 и θ_2, то c_{ins} принимает вид

$$c_{ins} = \lambda(1 + \theta)p_1 - \lambda(1 + \theta_1)\int_d^{d+l}(1 - F(x))\,dx -$$
$$- \lambda(1 + \theta_2)(1 - a)\left(\int_0^d(1 - F(x))\,dx + \int_{d+l}^{\infty}(1 - F(x))\,dx\right),$$

где $p_1 = \int_0^\infty xp(x)dx = \int_0^\infty(1 - F(x))\,dx$ — это математическое ожидание, а $p(x)$ — плотность распределения исходных требований.

В разделе 2.2 устанавливается вид интегро-дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет математическое ожидание $V_{ins}(x, b)$ дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения компанией, использующей комбинацию перестрахования эксцедента убытка и квотного перестрахования и барьерную дивидендную стратегию с уровнем барьера b.

Теорема 2.1. *Функция $V_{ins}(x, b)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению*

$$c_{ins}V'_{ins}(x, b) - (\lambda + \delta)V_{ins}(x, b) + \lambda a^{-1}\int_0^x V_{ins}(y, b)p\left(\frac{x - y}{a}\right)\,dy = 0$$

при $0 < x < ad$ *и интегро-дифференциальному уравнению*

$$c_{ins}V'_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V_{ins}(x,b) + \lambda a^{-1}\int\limits_{x-ad}^{x} V_{ins}(y,b)p\left(\frac{x-y}{a}\right)dy +$$
$$+ \lambda V_{ins}(x-ad,b)(F(d+l)-F(d)) + \lambda a^{-1}\int\limits_{0}^{x-ad} V_{ins}(y,b)p\left(l+\frac{x-y}{a}\right)dy = 0$$

при $ad \le x < b$. *Граничное условие для* $V_{ins}(x,b)$ *выглядит следующим образом:*

$$V'_{ins}(b,b) = 1.$$

В случае экспоненциального распределения и в случае равномерного распределения требований интегро-дифференциальные уравнения сводятся соответственно в разделах 2.3.1 и 2.4.1 к дифференциальным уравнениям второго порядка:

Теорема 2.2. *В случае экспоненциального распределения требований с параметром* β *при* $0 < x < ad$ *функция* $V_{ins}(x,b)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка*

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b) + (\beta a^{-1}c_{ins} - (\lambda+\delta))V'_{ins}(x,b) - \delta\beta a^{-1}V_{ins}(x,b) = 0,$$

в то время как при $ad \le x < b$ *функция* $V_{ins}(x,b)$ *удовлетворяет уравнению*

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b) + (\beta a^{-1}c_{ins} - (\lambda+\delta))V'_{ins}(x,b) - \delta\beta a^{-1}V_{ins}(x,b) =$$
$$= -\lambda e^{-\beta d}(1-e^{-\beta l})V'_{ins}(x-ad,b).$$

Теорема 2.3. *В случае равномерного распределения требований на отрезке* $[0,h]$ *при* $0 < x < ad$ *функция* $V_{ins}(x,b)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка*

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V'_{ins}(x,b) + \frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x,b) = 0,$$

при $ad \le x < (h-l)a$ *уравнению*

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V'_{ins}(x,b) + \frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x,b) = -\frac{\lambda l}{h}V'_{ins}(x-ad,b),$$

при $(h-l)a \le x < b$

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V'_{ins}(x,b) + \frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x,b) = -\frac{\lambda l}{h}V'_{ins}(x-ad,b) + \frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x-(h-l)a,b).$$

В разделах 2.3.2 и 2.4.2 для каждого из указанных распределений требований приводится алгоритм поиска решений полученных дифференциальных уравнений и производится иллюстрация данного алгоритма на примерах. Также изучается характер зависимости некоторых используемых величин от параметров перестрахования и приводятся численные результаты.

В качестве численных результатов во второй главе представлены графики математического ожидания выплаченных дивидендов как функции от параметра перестрахования эксцедента убытка l.

Третья глава диссертации посвящена изучению барьерных дивидендных стратегий со ступенчатой функцией барьера, согласно которым страховая компания имеет возможность изменять уровень барьера после поступления каждого требования. Стратегии такого вида не рассматривались ранее в научной литературе. Исследование деятельности акционерных страховых компаний, использующих стратегии со ступенчатым барьером, осуществляется на основе модели Спарре Андерсена и на основе частного случая данной модели риска — модели Крамера–Лундберга. В рамках модели Спарре Андерсена предполагается, что капитал страховой компании, выплачивающей дивиденды, в момент времени t имеет вид

$$U_t = X_t - D_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i - D_t, \ t \geq 0,$$

где N_t — это процесс восстановления, x — начальный капитал компании, c — интенсивность поступления премий, D_t — сумма, выплаченная акционерам в качестве дивидендов к моменту времени t. Случайные величины $\{X_i\}$, обозначающие размеры исков, независимы, одинаково распределены и имеют функцию распределения $F(y)$, такую, что $F(0) = 0$. Кроме того, $\{X_i\}$ и процесс N_t также предполагаются независимыми. Функция $G(y)$ в свою очередь является функцией распределения интервалов между моментами $\{T_j\}$ поступления требований. Случайная величина $T = \inf[t \geq 0 : \ U_t < 0]$ представляет собой момент разорения акционерной компании.

В разделе 3.1 приводится подробное описание барьерных дивидендных стратегий со ступенчатой функцией барьера. Мы предполагаем, что уровень барьера b_t равен b_i на полуинтервалах вида $t \in [T_{i-1}, T_i)$, $i \geq 1$ (где $T_0 = 0$). Считаем также, что ступенчатая функция барьера является неубывающей: $b_{i+1} \geq b_i, \ i \geq 1$. Стратегия выплаты дивидендов состоит тогда в следующем: дивиденды не выплачиваются, когда $U_t < b_t$, и выплачиваются с интенсивностью c, когда $U_t = b_t$. Если же $U_t > b_t$, то сразу в качестве дивидендов выплачивается сумма, равная $U_t - b_t$, поэтому без ограничения общности мы далее полагаем, что $0 \leq x \leq b_1$. Отдельно в разделе 3.1 уточняется, что уровень барьера не обязательно должен быть изменен после поступления каждого требования. Важным преимуществом стратегий со ступенчатым барьером является то, что в них заложена возможность изменения условий выплаты дивидендов с течением времени. В то же время частным случаем данных дивидендных стратегий являются, например, барьерные стратегии с постоянным барьером, такие, что $b_{i+1} = b_i$ при всех значениях $i \geq 1$.

В разделе 3.2.1 представлена полученная в условиях модели Спарре Андерсена оценка вероятности разорения $\psi^b(x) = P(T < \infty | U_0 = x)$ страховой компании, использующей стратегию со ступенчатым барьером. Данный результат является обобщением знаменитого неравенства Лундберга (1). Предполагается, что существует единственный положительный корень R уравнения

$$\int_0^\infty e^{Ry} dF(y) \int_0^\infty e^{-cRt} dG(t) = 1,$$

который называется характеристическим показателем или экспонентой Лундберга. При таком условии доказывается справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Имеет место следующее неравенство для вероятности разорения акционерной страховой компании, использующей барьерную дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера:*

$$\psi^b(x) \le e^{-Rx} + (L-1) \sum_{i=1}^\infty e^{-Rb_i}, \text{ где } L = \int_0^\infty e^{Ry} dF(y).$$

Отдельно в разделе 3.2.1 упоминаются примеры стратегий со ступенчатой функцией барьера, при которых вероятность разорения страховой компании строго меньше 1. Отметим, что разорение страховой компании, использующей барьерную стратегию с постоянным уровнем барьера, всегда неизбежно.

Раздел 3.2.2 посвящен оценкам вероятности разорения, полученным в условиях модели риска Крамера–Лундберга. Согласно модели Крамера–Лундберга, N_t — это пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Уравнение для характеристического показателя R при этом условии принимает вид

$$\lambda + Rc = \lambda \int_0^\infty e^{Ry} dF(y),$$

а вероятность разорения $\psi^b(x)$ может быть оценена сверху согласно следствию из теоремы 3.1:

Следствие 3.1. *Пусть N_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Тогда имеет место следующее неравенство для вероятности разорения акционерной страховой компании, использующей барьерную дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера:*

$$\psi^b(x) \le e^{-Rx} + \frac{Rc}{\lambda} \sum_{i=1}^\infty e^{-Rb_i}.$$

Однако благодаря тому, что в рамках модели Крамера-Лундберга вычисление некоторых интегралов из доказательства теоремы 3.1 возможно в явном виде, удается доказать и более сильное неравенство для вероятности разорения $\psi^b(x)$:

Теорема 3.2. *Пусть N_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Тогда имеет место следующее неравенство для вероятности разорения $\psi^b(x)$ акционерной страховой компании, использующей барьерную дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера:*

$$\psi^b(x) \le e^{-Rx} + \frac{Rc}{\lambda} \sum_{i=1}^\infty e^{-Rb_i - \lambda c^{-1}(b_i - b_{i-1})}, \text{ где } b_0 = x.$$

В разделе 3.3 в условиях модели Крамера-Лундберга изучается математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения в соответствии с барьерной дивидендной стратегией со ступенчатой функцией барьера. При этом рассматриваются такие ступенчатые барьерные стратегии, согласно которым уровень барьера может меняться после каждого из первых $n-1$ требований (а далее до разорения должен оставаться неизменным). Сначала отдельно изучается случай $n=2$, согласно которому барьер изменяется только один раз после момента T_1. Далее все полученные результаты для $n=2$ переносятся на общий случай $n \geq 2$. Для математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения страховой компании в модели с барьерами $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ и начальным капиталом x, вводится обозначение $V(x, b_1, \ldots, b_n)$ и доказывается справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.4. *Для всех значений $0 \leq x \leq b_1$ и $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, $n \geq 2$, имеет место следующее равенство для математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения в соответствии с барьерной стратегией со ступенчатой функцией барьера:*

$$V(x, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n) = V(x, b_1, \ldots, b_{n-2}, b_n) + [1 - V'(b_{n-1}, b_n)]\, V_{[T_{n-2}, T_{n-1})}(x, b_1, \ldots, b_{n-1}),$$

где $V_{[T_{n-2}, T_{n-1})}(x, b_1, \ldots, b_{n-1})$ — это математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных на полуинтервале $[T_{n-2}, T_{n-1})$.

Как и ранее, функция $V(x, b)$ обозначает здесь математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения согласно барьерной стратегии с постоянным уровнем барьера b.

В разделе 3.3 приводится также важное следствие из теоремы 3.4:

Следствие 3.2. *Для всех значений $0 \leq x \leq b_1$ и $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, $n \geq 2$, имеет место следующее равенство для математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения в соответствии с барьерной стратегией со ступенчатой функцией барьера:*

$$V(x, b_1, \ldots, b_n) = V(x, b_n) + \sum_{i=1}^{n-1} [1 - V'(b_i, b_n)]\, V_{[T_{i-1}, T_i)}(x, b_1, \ldots, b_i).$$

Кроме того, в разделе 3.3 определяются условия, при которых барьерная стратегия со ступенчатой функцией барьера оказывается более предпочтительной с точки зрения суммарно выплаченных дивидендов, чем барьерная стратегия с постоянным уровнем барьера:

Утверждение 3.2. *Пусть $b_1 \leq \ldots \leq b_n$, $n \geq 2$, и $V(u, b_i) > V(u, b_{i-1})$ при любом начальном капитале u, таком, что $0 \leq u \leq b_{i-1}$, $i = \overline{2, n}$. Тогда выполняются неравенства $V(x, b_1, \ldots, b_j) > V(x, b_1, \ldots, b_{j-1})$, $j = \overline{2, n}$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

- В рамках модели с комбинированным страхованием получено уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, соответствующее задаче поиска наибольшей возможной вероятности неразорения, и доказаны существование и единственность решения данного уравнения. Кроме того, определена связь между решением данного уравнения и искомой наибольшей вероятностью неразорения. При этом также доказано существование оптимальной стратегии перестрахования, при использовании которой вероятность неразорения компании максимальна. Для иллюстрации указанных теоретических результатов приведены численные примеры.

- Установлен вид интегро-дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения страховой компанией, использующей комбинацию квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика. В случае экспоненциального распределения и в случае равномерного распределения требований интегро-дифференциальные уравнения сведены к дифференциальным уравнениям второго порядка и построены алгоритмы поиска решений данных дифференциальных уравнений. Полученные алгоритмы подкреплены примерами и численными результатами.

- Для акционерной страховой компании, использующей барьерную дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера, получены оценки вероятности разорения. Приведены примеры стратегий, при использовании которых вероятность разорения компании строго меньше единицы. Кроме того, найдена формула для вычисления математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с доказательством существования оптимальных стратегий перестрахования в модели с комбинированным страхованием и случайными премиями. Задача поиска наибольшей возможной вероятности неразорения в модели, согласно которой не только поступление страховых требований, но и поступление премий описывается с помощью составного пуассоновского процесса, остается открытой.

Логичным следующим шагом в изучении барьерных дивидендных стратегий со ступенчатым барьером является отмена условия неубывания функции барьера.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Екатерине Вадимовне Булинской за постоянное внимание к работе и ценные рекомендации на всех этапах подготовки диссертации. Автор благо-

дарен коллективу кафедры теории вероятностей за поддержку и дружественную, творческую атмосферу.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Муромская А.А.* Дисконтированные дивиденды в модели со ступенчатой функцией барьера // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2016. — №5. — С. 41–44 (перевод: *Muromskaya A.* Discounted dividends in a strategy with a step barrier function // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2016. — Vol. 71, №5. — P. 200–203).

[2] *Муромская А.А.* Оптимальное перестрахование в модели со страхованием нескольких рисков в рамках одного договора // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2016. — №4. — С. 79–97.

[3] *Муромская А.А.* Обобщение неравенства Лундберга для случая акционерной страховой компании // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2017. — №1. — С. 32–36.

[4] *Bulinskaya E., Muromskaya A.* Optimization of multi-component insurance systems // SMTDA 2014 Conference Proceedings. ISAST. — 2014. — Vol. 1. — P. 145–155 [Булинской Е.В. была поставлена задача и намечена методика ее решения; Муромской А.А. принадлежат результаты, представленные в разделе 3].

[5] *Bulinskaya E., Muromskaya A.* Optimization of multi-component insurance system with dividend payments // New Trends in Stochastic Modeling and Data Analysis, Eds. R. Manca, S. McClean, Ch. H. Skiadas. ISAST. — 2015. — Vol. 1. — P. 27–42 [Булинской Е.В. принадлежат постановка задачи и следствия 2 и 3; Муромской А.А. принадлежат теоремы 1, 2, 3, 4 и 5 и следствие 1].

[6] *Муромская А.А.* Оптимальная дивидендная стратегия в случае перестрахования с ограниченной ответственностью перестраховщика // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014». М.: МАКС Пресс. — 2014 (ISBN 978-5-317-04715-3).

[7] *Муромская А.А.* Оптимальное перестрахование в модели с пороговой дивидендной стратегией // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015». М.: МАКС Пресс. — 2015 (ISBN 978-5-317-04946-1).

[8] *Муромская А.А.* Дисконтированные дивиденды в модели со ступенчатой функцией барьера // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016». М.: МАКС Пресс. — 2016 (ISBN 978-5-317-05237-9).

[9] *Муромская А.А.* Модель работы акционерной страховой компании, использующей дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера // Материалы Международной конференции по стохастическим методам. Ростов н/Д: Издательство Фонд науки и образования. — 2016. — С. 63–64.

[10] *Муромская А.А.* Модель работы акционерной страховой компании, использующей дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера // Теория вероятностей и ее применения. — 2016. — Т. 61, №3. — С. 613.

[11] *Муромская А.А.* Оптимальное перестрахование в модели с комбинированным страхованием // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа». Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2017. — С. 151–152.

[12] *Muromskaya A.* On a classical risk model with a step barrier dividend strategy // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2016). Conference Proceedings. M.: MAKS Press. — 2016. — Vol. 1. — P. 213–216.