Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Муромская Анастасия Андреевна

Некоторые стохастические модели актуарной математики

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Булинская Екатерина Вадимовна

Москва — 2017

Оглавление

Введение

Настоящая диссертация подготовлена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова и посвящена исследованию математических моделей деятельности страховых компаний, использующих перестрахование и выплачивающих дивиденды.

Актуальность и история вопроса

Страхование имеет долгую историю. Еще несколько тысяч лет назад в Вавилонии, Древней Греции и Римской империи возникло взаимное страхование, основанное на поддержке и взаимопомощи при непредвиденных обстоятельствах. Длительное время страхование оставалось натуральным, но позже, по мере развития товарно-денежных отношений, стало появляться страхование и в денежной форме. Некоторые историки предполагают, что возникновение коммерческого страхования, схожего с тем страхованием, которое распространено в современном мире, можно отнести к XIV веку. В XVII – XVIII веках в Европе были организованы первые страховые общества, занимавшиеся сначала только морским страхованием, а позже и другими рисками — уже к концу XVIII века существовало более ста различных видов страхования. В течение последних столетий значимость страхования в жизни общества неуклонно росла, и в настоящее время страхование является неотъемлемой частью мировой экономики.

Первые математические модели, основанные на принципах деятельности страховых компаний, появились в начале XX века. Значительный вклад в развитие теории риска внесли шведские математики Ф. Лундберг и Г. Крамер. Статьи Крамера [31], [32], [33] и докторская диссертация Лундберга [52] положили начало изучению механизма функционирования страховых компаний на основе модели, в соответствии с которой процесс поступления страховых требований описывался с помощью пуассоновского потока. Данная модель впоследствии стала называться классической моделью риска Крамера-Лундберга. Именно в рамках модели Крамера-Лундберга многими учеными в XX и XXI веках исследовались математические задачи, посвященные различным аспектам страхового бизнеса. Основное предположение данной модели заключается в том, что капитал страховой компании в момент времени t имеет вид

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \ t \geq 0,$$

где x — это начальный капитал, c — интенсивность поступления премии, N_t — пуассоновский процесс с параметром λ. При этом случайные величины $\{X_i\}$, обозначающие размеры исков, независимы, одинаково распределены и имеют функцию распределения $F(y)$, такую, что $F(0) = 0$. Процесс N_t также не зависит от $\{X_i\}$.

Модель риска Крамера-Лундберга описывает процесс получения страховой премии от страхователей и определяет структуру выплат возмещений после наступления страховых случаев. В том числе данная модель отображает и возможность разорения страховой компании, которое наступает, когда средств, накопленных за счет поступающей премии, не хватает на покрытие всех убытков. Если после вычета некоторого требования X_i капитал страховой компании X_t оказывается отрицательным, данная компания считается разорившейся. Значение вероятности, с которой это может произойти, зависит от характеристик случайного процесса X_t. Оценке данного значения посвящено большое количество работ (см., например, [28], [34], [46]). Одним из первых результатов в этой области является неравенство Лундберга. Введем необходимые для формулировки данного неравенства обозначения. Пусть $\tau = \inf[t \geq 0 : X_t < 0]$ — момент разорения компании. Тогда $\psi(x) = P(\tau < \infty \mid X_0 = x)$ представляет собой вероятность разорения, в то время как $\delta(x) = 1 - \psi(x)$ — вероятность неразорения страховой компании. Будем также предполагать, что существует единственный положительный корень R уравнения

$$\lambda + Rc = \lambda \int_0^\infty e^{Ry} dF(y),$$

который называется характеристическим показателем или экспонентой Лундберга. В этом случае справедливо следующее неравенство для вероятности разорения (неравенство Лундберга):

$$\psi(x) \leq e^{-Rx}. \tag{1}$$

Позже были исследованы асимптотические свойства функции $\psi(x)$, получены двусторонние оценки для вероятности разорения в случае требований с тяжелыми хвостами (при которых не существует экспонента Лундберга), рассмотрены более сложные модели, являющиеся обобщениями классической модели Крамера-Лундберга. Среди таких моделей можно назвать, например, модель риска Спарре Андерсена (см. [61]), в рамках которой предполагается, что процесс N_t представляет собой произвольный процесс восстановления, не обязательно пуассоновский. Основные результаты, связанные с вероятностью разорения страховых компаний в рамках различных моделей риска, приведены в работах [6], [10] и [27].

В процессе своей деятельности страховые компании имеют возможность прибегать к использованию различных финансовых инструментов, позволяющих уменьшить вероятность разорения. Таким инструментом является перестрахование. В общем случае при использовании перестрахования страховщик на согласованных условиях передает часть принятого под свою ответственность риска другому страховщику (которого называют перестраховщиком). В итоге поступающие к страховщику требования делятся между страховщиком и перестраховщиком в соответствии с типом договора и выбранными параметрами перестрахования. А именно, если поступает требование размера X и на момент поступления данного требования выбран параметр перестрахования d (быть может, многомерный), то страховщик покрывает часть иска $\rho(X,d) \leq X$ п.н., тогда как перестраховщик выплачивает часть $X-\rho(X,d)$. За то, что перестраховщик берет на себя часть ответственности, страховщик передает перестраховщику некоторую долю от полученной премии. Самыми распространенными типами договоров перестрахования являются договоры квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка. В случае использования квотного перестрахования $\rho(X,d) = dX,\ 0 \leq d \leq 1$, в то время как согласно перестрахованию эксцедента убытка мы имеем $\rho(X,d) = \min(d,X)$ для некоторого уровня собственного удержания $d \geq 0$. Подробное описание основных видов и механизмов перестрахования приведено в книге [2].

Отдельный интерес представляют модели риска, в рамках которых страховая компания имеет возможность выбирать параметры перестрахования в каждый момент времени $t \geq 0$, руководствуясь при этом информацией о поступивших ранее убытках. Основной целью компании является тогда поиск оптимальной (в некотором смысле) стратегии перестрахования. Задачи такого рода, связанные с поиском наилучшей и при этом динамически изменяющейся стратегии перестрахования, могут быть охарактеризованы как задачи оптимального стохастического управления. В качестве одного из критериев оптимальности стратегии перестрахования может быть выбрана минимальная вероятность разорения (см. другие подходы к определению оптимальной стратегии в работах [29], [36] и [49]). При этом выбор стратегии перестрахования осуществляется из некоторого класса стратегий, задаваемого типом перестрахования. Так Шмидли посвятил статью [59] поиску оптимальной стратегии квотного перестрахования в условиях модели Крамера-Лундберга, в то время как Хиппа и Вогта [43] интересовал вопрос о существовании оптимальной перестраховочной стратегии эксцедента убытка. В работе Громова [4] был рассмотрен договор перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика. Ли и Лиу [48] обобщили работу [59] и рассмотрели модель с договором страхования, покрывавшим сразу два риска, к каждому из которых применялось квотное перестрахование. Алгоритмы поиска оптимальных стратегий в приведенных работах похожи и состоят из нескольких этапов. Сначала устанавливается вид уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, которому удовлетворяет максимальная возможная вероятность неразорения (вычисляющаяся путем нахождения супремума по всем допустимым стратегиям перестрахования). Далее доказывается существование и единственность решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, описываются основные свойства данного решения и определяется вид оптимальной стратегии перестрахования. В конце приводятся численные результаты. Существует также ряд работ, посвященных поиску оптимальной стратегии перестрахования в модели с диффузионной аппроксимацией процесса риска, среди них, например, [1], [44] и [62].

Еще одним важным аспектом деятельности страховой компании является выплата дивидендов акционерам. В классических моделях риска не учитывается тот факт, что страховая компания может являться акционерным обществом, однако выплата дивидендов на ряду с использованием перестрахования имеет большое значение при определении вероятности неразорения. Впервые изучать механизм выплаты дивидендов предложил итальянский ученый Бруно де Финетти [38] в 1957 году. Де Финетти рассмотрел процесс выплаты дивидендов в самой простой дискретной модели, согласно которой каждый год капитал компании мог изменяться на плюс или минус единицу. В настоящее время основной интерес ученых прикован к моделям с непрерывным временем. Так в рамках классической модели Крамера-Лундберга изменение капитала акционерной страховой компании с течением времени описывает процесс $U_t = X_t - D_t$, где D_t — это совокупные дивиденды, выплаченные к моменту времени t. Величина $T = \inf[t \geq 0 : \ U_t < 0]$ является моментом разорения акционерной страховой компании, а дисконтированные дивиденды, выплаченные до момента разорения T, вычисляются как

$$D = \int_0^T e^{-\delta t} dD_t,$$

где δ — это ставка дисконтирования. Исследование математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения компании, является одним из важных направлений в теории риска. Определяющую роль при проведении исследования играет выбор стратегии выплаты дивидендов. В течение нескольких последних десятилетий было изучено большое количество различных дивидендных стратегий. Многие результаты приведены в обзорах [18] и [20]. Одними из первых были исследованы так называемые барьерные стратегии с постоянным уровнем барьера (часто их сокращенно называют просто барьерными стратегиями). Согласно барьерной стратегии с уровнем барьера b дивиденды не выплачиваются, когда $U_t < b$, и выплачиваются с интенсивностью c, когда $U_t = b$. Если же $U_t > b$, то сразу в качестве дивидендов выплачивается сумма, равная $U_t - b$ (заметим, что тогда неравенство $U_t > b$ может выполняться только при $t = 0$). Барьерные стратегии с постоянным барьером рассматривались, например, в монографии Бюльмана [26] и в статьях Гербера, Шиу и Смита [40], [41]. Отдельное внимание в указанных работах уделялось именно изучению математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения. Данная величина рассматривалась как функция от начального капитала x и чаще всего обозначалась как $V(x, b)$. Было доказано, что $V(x, b)$ удовлетворяет уравнению

$$cV'(x,b) - (\lambda + \delta)V(x,b) + \lambda \int\limits_0^x V(x-y,b)dF(y) = 0, \quad 0 < x < b, \tag{2}$$

и граничному условию

$$V'(b,b) = 1.$$

Заметим, что уравнение (2) является линейным интегро-дифференциальным уравнением первого порядка типа Вольтерра (подробно об интегро-дифференциальных уравнениях типа Вольтерра рассказано, например, в [3] и [9]). Для некоторых распределений требований путем сведения интегро-дифференциального уравнения (2) к дифференциальному уравнению второго порядка был получен явный вид функции $V(x, b)$ (см. [7] и [40]). Диксон и Уотерс [35] нашли в рамках использования барьерных стратегий интегро-дифференциальные уравнения для других моментов случайной величины D. Лин, Уиллмот и Дрекик [50] изучали функцию Гербера-Шиу и связанные с ней различные показатели модели, такие как среднее время до разорения, капитал компании перед разорением и дефицит капитала после разорения. Стоит отдельно отметить, что несмотря на простую структуру барьерных стратегий, пристальное внимание, которое уделяется им в научной литературе, вполне оправдано. Как было показано в статье [51], оптимальная (в смысле максимизации выплаченных до разорения дивидендов) стратегия в модели Крамера-Лундберга будет именно барьерной, если, например, иски имеют строго монотонную плотность распределения. Доказательству оптимальности стратегий барьерного типа в рамках модели с броуновским движением посвящена статья Жанблан-Пике и Ширяева [5]. Оптимальность барьерных стратегий в условиях дуальной модели риска (согласно которой капитал страховой компании в момент времени $t \geq 0$ имеет вид $X_t = x - ct + \sum_{i=1}^{N_t} X_i$) и в различных обобщениях данной модели доказана в работах [21], [22] и [24]. Достаточные условия оптимальности барьерных стратегий для моделей, в которых интенсивность поступления премии зависит от процесса капитала, получили Марчиняк и Палмовски в статьях [53] и [54]. В то же время Азкью и Мюлер [23] привели пример (с гамма-распределением исков), подтверждающий, что в классической модели риска оптимальная дивидендная стратегия не всегда сводится к барьерной. Барьерные стратегии также изучались и в рамках моделей с дискретным временем (см., например, статью Ярцевой [13]).

После появления первых работ, посвященных барьерным стратегиям с постоянным уровнем барьера, были рассмотрены различные обобщения данных дивидендных стратегий. Одним из таких обобщений являются линейные барьерные стратегии. Согласно линейной барьерной стратегии с параметрами a и b, где a и b — это некоторые неотрицательные числа, $0 \leq a < c$, дивиденды выплачиваются со скоростью $c - a$, когда $U_t = b + at$, и не выплачиваются совсем, если $U_t < b + at$. Линейные стратегии подробно рассматривались в статьях [15] и [39]. В работе [39] в рамках модели Крамера-Лундберга были получены интегро-дифференциальные уравнения для математического ожидания выплаченных дивидендов и для вероятности неразорения как функций от начального капитала x и параметра b. Данные уравнения были решены в явном виде в случае экспоненциального распределения требований.

В литературе исследовались и более сложные функции барьеров, нежели $b_t = b + at$. Так в статье [16] были изучены дивидендные стратегии с функциями барьера вида

$$b_t = \left(b^m + \frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \alpha, b > 0, m > 1.$$

Для подобных стратегий также были получены уравнения для вероятности неразорения и математического ожидания дисконтированных дивидендов, однако даже при условии экспоненциального распределения требований решить данные уравнения в явном виде не представлялось возможным, поэтому авторы [16] привели только численные результаты.

Существует также ряд статей, в которых изучаются модели страхования, основанные на модели риска Крамера-Лундберга, но включающие в себя как использование стратегий перестрахования, так и процесс выплаты дивидендов. Как правило в таких работах рассматривается или только квотное перестрахование, или только перестрахование эксцедента убытка (см., например, работы [25], [47] и [55]). В то же время Азкью и Мюлер в статье [23] рассмотрели случай произвольного типа перестрахования и доказали, что в модели Крамера-Лундберга при условии неограниченной скорости выплаты дивидендов оптимальными дивидендными стратегиями (в смысле максимизации выплаченных дивидендов до разорения) всегда являются так называемые полосовые стратегии ("band strategies"). В рамках данных стратегий в зависимости от размера капитала компании в тот или иной момент времени дивиденды либо выплачиваются со скоростью c, либо не выплачиваются совсем, либо в качестве дивидендов сразу же выплачивается та часть капитала, которая превышает некий заданный уровень. Частным случаем полосовых дивидендных стратегий очевидно являются барьерные стратегии, однако отметим, что задача поиска явного вида для среднего значения выплаченных дивидендов в работе [23] не затрагивалась. Помимо указанных работ, в которых за основу была взята модель Крамера-Лундберга, деятельность акционерных страховых компаний, использующих перестрахование, рассматривалась также, например, в рамках модели с диффузионной аппроксимацией процесса риска (см. статьи [19], [30], [45]).

Цели работы

Целями диссертационной работы являются:

- Исследование оптимальных стратегий перестрахования в модели Крамера-Лундберга с несколькими рисками в рамках одного договора страхования, в частности, доказательство существования оптимальной стратегии и вывод уравнения для наибольшей возможной вероятности неразорения;
- Нахождение в условиях модели Крамера-Лундберга математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения страховой компанией, использующей комбинацию квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика;
- Изучение в условиях моделей риска Спарре Андерсена и Крамера-Лундберга показателей деятельности акционерных страховых компаний, выплачивающих дивиденды согласно барьерным стратегиям со ступенчатой функцией барьера.

Научная новизна работы

Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. В рамках модели деятельности компании, использующей перестрахование и заключающей договоры страхования, покрывающие сразу несколько рисков:

- Найден вид уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, соответствующего задаче поиска наибольшей возможной вероятности неразорения;

- Доказаны существование и единственность решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана и определены основные свойства данного решения;

- Установлена связь между решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана и максимальной вероятностью неразорения и доказано существование оптимальной стратегии перестрахования;

- Получены численные результаты для случая двух независимых показательно распределенных рисков и для случая двух зависимых рисков, совместное распределение которых построено с помощью копулы.

2. В рамках модели деятельности страховой компании, выплачивающей дивиденды согласно барьерной стратегии с постоянным уровнем барьера и использующей комбинацию квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика:

- Установлен вид интегро-дифференциальных уравнений, которым в зависимости от соотношения между начальным капиталом и параметрами перестрахования удовлетворяет математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения компании;

- В случае экспоненциального распределения и в случае равномерного распределения требований полученные интегро-дифференциальные уравнения сведены к дифференциальным уравнениям второго порядка, часть из которых представляет собой дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом;

- Для каждого из указанных распределений требований приведен и проиллюстрирован на примерах алгоритм поиска решений найденных дифференциальных уравнений.

3. В рамках модели деятельности акционерной страховой компании, выплачивающей дивиденды согласно барьерной дивидендной стратегии со ступенчатой функцией барьера:

- Получены оценки вероятности разорения компании, представляющие собой обобщения неравенства Лундберга;

- Приведены примеры стратегий со ступенчатой функцией барьера, при которых вероятность разорения страховой компании строго меньше единицы;

- Получена формула для вычисления математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения;

- Определены условия, при которых барьерная стратегия со ступенчатой функцией барьера оказывается более предпочтительной с точки зрения суммарно выплаченных дивидендов, чем барьерная стратегия с постоянным уровнем барьера.

Методы исследования

В работе используются различные методы и результаты теории вероятностей, теории случайных процессов и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, привлекаются методы оптимального управления.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут представлять интерес для специалистов в области страховой математики как при теоретических исследованиях, так и на практике.

Апробация диссертации

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова:

- Большом семинаре кафедры теории вероятностей под руководством академика РАН, профессора А. Н. Ширяева (2016 г.);
- Семинаре «Стохастические модели в теории запасов и страховании» под руководством профессора Е. В. Булинской (2013 – 2016 гг., неоднократно).

Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- The Tenth Bachelier Colloquium on Mathematical Finance and Stochastic Calculus (France, Metabief, 2016);
- Международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Россия, МГУ, 2014 – 2016 гг.);
- Международной конференции по стохастическим методам (Россия, пос. Абрау-Дюрсо, 2016 г.);
- VIII Московской международной конференции по исследованию операций (Россия, Москва, 2016 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации содержатся в работах [63] – [74]. Среди них 3 статьи и одни тезисы конференции в журналах из перечня ВАК.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 92 страницы. Список литературы содержит 74 наименования, включая работы автора.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** дан краткий исторический обзор предыдущих исследований, посвященных математическим моделям деятельности страховых компаний, использующих перестрахование и выплачивающих дивиденды, а также приведено основное содержание диссертационной работы, ее апробация, цели и другие характеристики.

Далее нумерация утверждений совпадает с их нумерацией в соответствующих главах.

В **первой главе** на основе классической модели риска Крамера-Лундберга изучается деятельность компании, занимающейся комбинированным страхованием. Предполагается, что компания заключает договоры страхования, которые покрывают сразу несколько ($k \geq 2$) рисков. При этом компания имеет возможность передавать каждый из данных рисков в перестрахование, параметры которого изменяются со временем. Целью компании является поиск оптимальной стратегии перестрахования, максимизирующей вероятность неразорения. Поиску оптимальных стратегий в моделях с фиксированным типом договора перестрахования и с договорами страхования, покрывающими только один риск, посвящены статьи [4], [43] и [59]. Ли и Лиу [48] обобщили работу [59] и рассмотрели модель с двумя рисками и возможностью квотного перестрахования каждого из них. Мы в свою очередь предполагаем в первой главе диссертации, что каждый из $k \geq 2$ рисков может быть перестрахован в соответствии со своим произвольным типом перестрахования.

В начале главы в разделе 1.1 приводится подробное описание рассматриваемой модели. Считается, что в каждый момент времени $t \geq 0$ страховая компания имеет возможность выбрать параметры d_t^i перестрахования i-ого риска, руководствуясь при этом значением капитала $X_t^{\overline{d}}$. Таким образом, процесс $\overline{d}_t = (d_t^1, \ldots, d_t^k)$, где $d_t^i = d^i(X_t^{\overline{d}})$ являются измеримыми функциями от капитала компании, определяет стратегию перестрахования. Множества возможных значений параметров перестрахования d_t^i мы обозначаем через D_i, ограничиваясь при этом рассмотрением только компактных множеств D_i. Соответственно, в каждый фиксированный момент времени $\overline{d}_t \in D$, где $D = D_1 \times \ldots \times D_k$. С помощью $\mathfrak{D}$ обозначаем множество всех возможных стратегий перестрахования $\overline{d}_t$.

Поступившие требования по каждому из k рисков в рамках одного страхового случая делятся между страховщиком и перестраховщиком в соответствии с типом договора перестрахования (функцией ρ_j) и в соответствии с выбранными параметрами перестрахования $d_{T_n-}^j$, $j = \overline{1,k}$. С помощью T_n мы обозначаем моменты поступления совокупных исков. Функции ρ_j определяют тип договора перестрахования, то есть само правило, по которому производится деление требования по j-ому риску между страховщиком и перестраховщиком. Если по j-ому риску поступило требование Y_j и на момент поступления данного требования выбран параметр $d^j \in D_j$, то $\rho_j(Y_j, d^j)$ обозначает часть иска, которую должен покрыть страховщик. Перестраховщик тогда должен покрыть $Y_j - \rho_j(Y_j, d^j)$. В соответствии с типом перестрахования делятся не только требования, но и премии. После применения перестрахования интенсивности поступления премий страховщику по каждому из k рисков становятся равными $c_i(d_t^i)$, $i = \overline{1,k}$.

Итого капитал страховой компании согласно нашей модели в момент времени t имеет вид

$$X_t^{\overline{d}} = x + \int_0^t \sum_{i=1}^k c_i(d_s^i)ds - \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_{nj}, d_{T_n-}^j), \ t \geq 0,$$

где x — это начальный капитал, N_t — пуассоновский процесс с параметром λ, а Y_{nj} — случайные величины, обозначающие размеры требований по j-ому риску в рамках n-ого страхового случая. При этом $\{\overline{Y_n}\}_{n\geq 1} = \{(Y_{n1}, \ldots, Y_{nk})\}_{n\geq 1}$ представляет собой последовательность независимых и одинаково распределенных случайных векторов. Компоненты данных векторов $Y_{nj}, \ j = \overline{1,k}$, имеют непрерывную совместную функцию распределения $F(y_1, \ldots, y_k)$.

Основная задача компании состоит в том, чтобы выбрать наилучшую стратегию перестрахования, позволяющую максимально увеличить вероятность неразорения. При этом $\tau^{\overline{d}} = \inf[t \geq 0 : X_t^{\overline{d}} < 0]$ является моментом разорения, $\psi^{\overline{d}}(x) = P(\tau^{\overline{d}} < \infty | X_0^{\overline{d}} = x)$ — вероятностью разорения, а $\delta^{\overline{d}}(x) = 1 - \psi^{\overline{d}}(x)$ — вероятностью неразорения страховой компании, использующей стратегию перестрахования $\overline{d}_t$. Таким образом, цель состоит в том, чтобы найти $\delta(x) = \sup_{\overline{d}_t \in \mathfrak{D}} \delta^{\overline{d}}(x)$ и определить оптимальную стратегию перестрахования, если такая существует.

В разделе 1.2 доказывается, что для всех $\overline{d} \in D$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^k c_i(d^i)\delta'(x) - \lambda\delta(x) + \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \delta(x - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d^j)) \ dF(y_1, \ldots, y_k) \leq 0,$$

и задача поиска наибольшей возможной вероятности неразорения сводится к решению уравнения типа Гамильтона - Якоби - Беллмана:

$$\sup_{\overline{d}\in D} \left[\sum_{i=1}^k c_i(d^i)g'(x) - \lambda g(x) + \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d^j)) \ dF(y_1, \ldots, y_k) \right] = 0. \qquad (3)$$

При этом мы вводим новое обозначение $g(x)$, так как не знаем точно, удовлетворяет ли функция $\delta(x)$ уравнению (3) или нет. Связь между решением уравнения (3) и искомой функцией $\delta(x)$ мы определяем в разделе 1.4, однако в соответствии со свойствами функции $\delta(x)$ сразу в разделе 1.2 отмечаем, что нас интересует существование возрастающих решений $g(x)$ уравнения (3), таких, что $g(0) > 0$ и $g(x) = 0$ при $x < 0$. Здесь и далее, говоря о характеристиках функции $g(x)$, таких как, например, монотонность, мы имеем в виду характеристики данной функции на луче $[0, \infty)$ (определение $g(x)$ на $(-\infty, 0)$ необходимо нам только для удобства записи интегралов). Принимая во внимание наложенные на функцию $g(x)$ ограничения, в разделе 1.2 диссертации мы также доказываем,что уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$g'(x) = \inf_{\overline{d} \in \widetilde{D}} \left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)} \left(g(x) - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \dots, y_k) \right) \right], \tag{4}$$

где $\widetilde{D} = \{\overline{d} \in D : \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i) > 0\}$. При этом в качестве граничного условия выбираем равенство $g(0) = 1$.

В разделе 1.3 первой главы доказывается существование и единственность решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Теорема 1.1. *Существует единственное решение уравнения* (4)*, такое, что* $g(0) = 1$*. Данное решение является возрастающим, ограниченным и непрерывно дифференцируемым.*

Далее в разделе 1.4 устанавливается связь между решением уравнения (4) и наибольшей возможной вероятностью неразорения и определяется вид искомой оптимальной стратегии перестрахования:

Теорема 1.2. *Пусть* $g(x)$ *— единственное решение уравнения* (4)*, такое, что* $g(0) = 1$*. Тогда* $g(x) = \delta(x)/\delta(0) = \delta(x)g(\infty)$*, при этом оптимальная стратегия перестрахования имеет вид* $\overline{d}_t^* = \overline{d}^*(X_t^{\overline{d}^*})$*, где* $\overline{d}^*(x)$ *— это точка, в которой достигается инфимум в уравнении* (4)*, а* $X_t^{\overline{d}^*}$ *— это процесс капитала страховой компании, использующей оптимальную стратегию перестрахования* $\overline{d}_t^*$*.*

При этом в доказательстве теоремы 1.2 используются вспомогательные леммы, связанные с характеристиками случайного процесса капитала компании, справедливость которых также показана в главе 1:

Лемма 1.1. *Процесс*

$$g(X_t^{\overline{d}}) - \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{k} c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \dots, y_k) \right] ds$$

является мартингалом.

Лемма 1.2. *Пусть* $\overline{d}_t$ *— произвольная стратегия перестрахования. Тогда с вероятностью, равной 1, либо происходит разорение компании, либо* $X_t^{\overline{d}} \to \infty$ *при* $t \to \infty$*.*

В конце первой главы приводятся численные результаты для случая двух независимых показательно распределенных рисков и для случая двух зависимых рисков, совместное распределение которых моделируется с помощью копулы.

Во **второй главе** настоящей диссертации исследуется модель работы страховой компании, одновременно применяющей перестрахование и выплачивающей дивиденды своим акционерам. Предполагается, что компания использует программу перестрахования, включающую в себя комбинацию квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика. Параметры перестрахования при этом фиксируются в начальный момент времени. Выплата дивидендов осуществляется согласно барьерной стратегии с постоянным уровнем барьера. Как и в первой главе, за основу берется классическая модель риска Крамера-Лундберга, однако изучается теперь не вероятность разорения компании, а математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения.

Существует ряд статей, посвященных изучению процесса выплаты дивидендов страховыми компаниями, использующими перестрахование (см. [25], [47], [55]), однако во всех данных работах предполагается, что компании применяют или только квотное перестрахование, или только классическое перестрахование эксцедента убытка с неограниченной ответственностью перестраховщика. Рассматриваемая же в настоящей диссертации программа перестрахования не только является обобщением указанных типов перестрахования, но и чаще применяется на практике. В разделе 2.1 диссертации приводится описание данной программы. Предполагается, что страховщик заключил договор перестрахования эксцедента убытка с одним перестраховщиком, а оставшуюся часть риска перестраховал в соответствии с договором квотного перестрахования у другого перестраховщика. Коэффициент d является при этом уровнем собственного удержания перестрахования эксцедента убытка, l — ограничением на ответственность первого перестраховщика, a — параметром квотного перестрахования. Требование размера X, поступившее к страховщику, делится между страховщиком и перестраховщиками следующим образом: страховщик берет на себя обязанность выплатить часть

$$X_{ins} = a\big(\min(d, X) + \max(X - l - d, 0)\big),$$

в то время как первый перестраховщик выплачивает

$$X_{reins1} = \min\big(\max(X - d, 0), l\big),$$

а второй перестраховщик покрывает часть

$$X_{reins2} = (1 - a)\big(\min(d, X) + \max(X - l - d, 0)\big).$$

Таким образом, изменение капитала страховой компании, использующей перестрахование и выплачивающей дивиденды, описывается с помощью процесса

$$U_t = x + c_{ins}t - \sum_{i=1}^{N_t}(X_i)_{ins} - D_t, \ t \geq 0,$$

где D_t — это совокупные дивиденды, выплаченные к моменту времени t, в то время как $c_{ins} = c_{ins}(d, l, a)$ — это интенсивность поступления премии компании после применения описанной выше программы перестрахования. Если страховщик и перестраховщики используют премиальный принцип среднего с нагрузками соответственно θ, θ_1 и θ_2, то c_{ins} принимает вид

$$c_{ins} = \lambda(1+\theta)p_1 - \lambda(1+\theta_1)\int_d^{d+l}(1-F(x))\,dx - \\ - \lambda(1+\theta_2)(1-a)\left(\int_0^d (1-F(x))\,dx + \int_{d+l}^{\infty}(1-F(x))\,dx\right),$$

где $p_1 = \int_0^\infty xp(x)dx = \int_0^\infty (1-F(x))\,dx$ — это математическое ожидание, а $p(x)$ — плотность распределения исходных требований.

В разделе 2.2 устанавливается вид интегро-дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет математическое ожидание $V_{ins}(x,b)$ дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения компанией, использующей комбинацию перестрахования эксцедента убытка и квотного перестрахования.

Теорема 2.1. *Функция $V_{ins}(x,b)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению*

$$c_{ins}V'_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V_{ins}(x,b) + \lambda a^{-1}\int_0^x V_{ins}(y,b)p\left(\frac{x-y}{a}\right)dy = 0$$

при $0 < x < ad$ и интегро-дифференциальному уравнению

$$c_{ins}V'_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V_{ins}(x,b) + \lambda a^{-1}\int_{x-ad}^x V_{ins}(y,b)p\left(\frac{x-y}{a}\right)dy + \\ + \lambda V_{ins}(x-ad,b)(F(d+l)-F(d)) + \lambda a^{-1}\int_0^{x-ad} V_{ins}(y,b)p\left(l+\frac{x-y}{a}\right)dy = 0$$

при $ad \le x < b$. Граничное условие для $V_{ins}(x,b)$ выглядит следующим образом:

$$V'_{ins}(b,b) = 1.$$

В случае экспоненциального распределения и в случае равномерного распределения требований интегро-дифференциальные уравнения сводятся соответственно в разделах 2.3.1 и 2.4.1 к дифференциальным уравнениям второго порядка:

Теорема 2.2. *В случае экспоненциального распределения требований с параметром β при $0 < x < ad$ функция $V_{ins}(x,b)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка*

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b) + (\beta a^{-1}c_{ins} - (\lambda+\delta))V'_{ins}(x,b) - \delta\beta a^{-1}V_{ins}(x,b) = 0,$$

в то время как при $ad \le x < b$ функция $V_{ins}(x,b)$ удовлетворяет уравнению

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b) + (\beta a^{-1}c_{ins} - (\lambda+\delta))V'_{ins}(x,b) - \delta\beta a^{-1}V_{ins}(x,b) = \\ = -\lambda e^{-\beta d}(1-e^{-\beta l})V'_{ins}(x-ad,b).$$

Теорема 2.3. *В случае равномерного распределения требований на отрезке $[0,h]$ при $0 < x < ad$ функция $V_{ins}(x,b)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка*

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V'_{ins}(x,b) + \frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x,b) = 0,$$

при $ad \le x < (h-l)a$ уравнению

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V'_{ins}(x,b) + \frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x,b) = -\frac{\lambda l}{h}V'_{ins}(x-ad,b),$$

при $(h-l)a \le x < b$

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V'_{ins}(x,b) + \frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x,b) = -\frac{\lambda l}{h}V'_{ins}(x-ad,b) + \frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x-(h-l)a,b).$$

В разделах 2.3.2 и 2.4.2 для каждого из указанных распределений требований приводится алгоритм поиска решений полученных дифференциальных уравнений и производится иллюстрация данного алгоритма на примерах. Также изучается характер зависимости некоторых используемых величин от параметров перестрахования и приводятся численные результаты. В качестве численных результатов во второй главе представлены графики математического ожидания выплаченных дивидендов как функции от параметра перестрахования эксцедента убытка l.

Третья глава диссертации посвящена изучению барьерных дивидендных стратегий со ступенчатой функцией барьера, согласно которым страховая компания имеет возможность изменять уровень барьера после поступления каждого требования. Данные стратегии не рассматривались ранее в научной литературе. Исследование деятельности акционерных страховых компаний, использующих стратегии со ступенчатым барьером, осуществляется на основе модели Спарре Андерсена и на основе частного случая данной модели риска — модели Крамера–Лундберга. В рамках модели Спарре Андерсена предполагается, что капитал страховой компании, выплачивающей дивиденды, в момент времени t имеет вид

$$U_t = X_t - D_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i - D_t,\ t \ge 0,$$

где N_t — это процесс восстановления, x — начальный капитал компании, c — интенсивность поступления премий, D_t — сумма, выплаченная акционерам в качестве дивидендов к моменту времени t. Случайные величины $\{X_i\}$, обозначающие размеры исков, независимы, одинаково распределены и имеют функцию распределения $F(y)$, такую, что $F(0) = 0$. Кроме того, $\{X_i\}$

и процесс N_t также предполагаются независимыми. Функция $G(y)$ в свою очередь является функцией распределения интервалов между моментами $\{T_j\}$ поступления требований. Случайная величина $T = \inf[t \geq 0 : \ U_t < 0]$ представляет собой момент разорения акционерной компании.

В разделе 3.1 приводится подробное описание барьерных дивидендных стратегий со ступенчатой функцией барьера. Мы предполагаем, что уровень барьера b_t равен b_i на полуинтервалах вида $t \in [T_{i-1}, T_i)$, $i \geq 1$ (где $T_0 = 0$). Считаем также, что ступенчатая функция барьера является неубывающей: $b_{i+1} \geq b_i$, $i \geq 1$. Стратегия выплаты дивидендов состоит тогда в следующем: дивиденды не выплачиваются, когда $U_t < b_t$, и выплачиваются с интенсивностью c, когда $U_t = b_t$. Если же $U_t > b_t$, то сразу в качестве дивидендов выплачивается сумма, равная $U_t - b_t$, поэтому без ограничения общности мы далее полагаем, что $0 \leq x \leq b_1$. Отдельно в разделе 3.1 уточняется, что уровень барьера не обязательно должен быть изменен после поступления каждого требования. Важным преимуществом стратегий со ступенчатым барьером является то, что в них заложена возможность изменения условий выплаты дивидендов с течением времени. В то же время частным случаем данных дивидендных стратегий являются, например, барьерные стратегии с постоянным барьером, такие, что $b_{i+1} = b_i$ при всех значениях $i \geq 1$.

В разделе 3.2.1 представлена полученная в условиях модели Спарре Андерсена оценка вероятности разорения $\psi^b(x) = P(T < \infty | U_0 = x)$ страховой компании, использующей стратегию со ступенчатым барьером. Данный результат является обобщением знаменитого неравенства Лундберга (1). Предполагается, что существует единственный положительный корень R уравнения

$$\int_0^\infty e^{Ry} dF(y) \int_0^\infty e^{-cRt} dG(t) = 1,$$

который называется характеристическим показателем или экспонентой Лундберга. При таком условии доказывается справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Имеет место следующее неравенство для вероятности разорения акционерной страховой компании, использующей барьерную дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера:*

$$\psi^b(x) \leq e^{-Rx} + (L-1) \sum_{i=1}^{\infty} e^{-Rb_i}, \text{ где } L = \int_0^\infty e^{Ry} dF(y).$$

Отдельно в разделе 3.2.1 упоминаются примеры стратегий со ступенчатой функцией барьера, при которых вероятность разорения страховой компании строго меньше 1 (см. примеры 3.1 и 3.2). Отметим, что разорение страховой компании, использующей барьерную стратегию с постоянным уровнем барьера, всегда неизбежно.

Раздел 3.2.2 посвящен оценкам вероятности разорения, полученным в условиях модели риска Крамера–Лундберга. Согласно модели Крамера–Лундберга, N_t — это пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Уравнение для характеристического показателя R при этом условии принимает вид

$$\lambda + Rc = \lambda \int_0^\infty e^{Ry} dF(y),$$

а вероятность разорения $\psi^b(x)$ может быть оценена сверху согласно следствию из теоремы 3.1:

Следствие 3.1. *Пусть N_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Тогда имеет место следующее неравенство для вероятности разорения акционерной страховой компании, использующей барьерную дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера:*

$$\psi^b(x) \le e^{-Rx} + \frac{Rc}{\lambda} \sum_{i=1}^\infty e^{-Rb_i}.$$

Однако благодаря тому, что в рамках модели Крамера-Лундберга вычисление некоторых интегралов из доказательства теоремы 3.1 возможно в явном виде, удается доказать и более сильное неравенство для вероятности разорения $\psi^b(x)$:

Теорема 3.2. *Пусть N_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Тогда имеет место следующее неравенство для вероятности разорения $\psi^b(x)$ акционерной страховой компании, использующей барьерную дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера:*

$$\psi^b(x) \le e^{-Rx} + \frac{Rc}{\lambda} \sum_{i=1}^\infty e^{-Rb_i - \lambda c^{-1}(b_i - b_{i-1})}, \text{ где } b_0 = x.$$

В разделе 3.3 в условиях модели Крамера-Лундберга изучается математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения в соответствии с барьерной дивидендной стратегией со ступенчатой функцией барьера. При этом рассматриваются такие ступенчатые барьерные стратегии, согласно которым уровень барьера может меняться после каждого из первых $n-1$ требований (а далее до разорения должен оставаться неизменным). Сначала отдельно изучается случай $n = 2$, согласно которому барьер изменяется только один раз после момента T_1. Далее все полученные результаты для $n = 2$ переносятся на общий случай $n \ge 2$. Для математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения страховой компании в модели с барьерами $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ и начальным капиталом x, вводится обозначение $V(x, b_1, \ldots, b_n)$ и доказывается справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.4. *Для всех значений $0 \le x \le b_1$ и $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$, $n \ge 2$, имеет место следующее равенство для математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения в соответствии с барьерной стратегией со ступенчатой функцией барьера:*

$$V(x, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n) = V(x, b_1, \ldots, b_{n-2}, b_n) + [1 - V'(b_{n-1}, b_n)]\, V_{[T_{n-2}, T_{n-1})}(x, b_1, \ldots, b_{n-1}),$$

где $V_{[T_{n-2}, T_{n-1})}(x, b_1, \ldots, b_{n-1})$ — это математическое ожидание дисконтированных дивиден-

дов, выплаченных на полуинтервале $[T_{n-2}, T_{n-1})$.

Как и ранее, функция $V(x, b)$ обозначает здесь математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения согласно барьерной стратегии с постоянным уровнем барьера b.

В разделе 3.3 приводится также важное следствие из теоремы 3.4:

Следствие 3.2. *Для всех значений* $0 \leq x \leq b_1$ *и* $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, $n \geq 2$, *имеет место следующее равенство для математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения в соответствии с барьерной стратегией со ступенчатой функцией барьера:*

$$V(x, b_1, \ldots, b_n) = V(x, b_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[1 - V'(b_i, b_n)\right] V_{[T_{i-1}, T_i)}(x, b_1, \ldots, b_i).$$

Кроме того, в утверждении 3.2 определяются условия, при которых барьерная стратегия со ступенчатой функцией барьера оказывается более предпочтительной с точки зрения суммарно выплаченных дивидендов, чем барьерная стратегия с постоянным уровнем барьера.

В **заключении** к диссертации сформулированы основные результаты диссертационной работы и возможные направления дальнейших исследований.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Екатерине Вадимовне Булинской за постоянное внимание к работе и ценные рекомендации на всех этапах подготовки диссертации. Автор благодарен коллективу кафедры теории вероятностей за поддержку и дружественную, творческую атмосферу.

Глава 1. Оптимальная стратегия перестрахования в модели с комбинированным страхованием

В данной главе рассматривается деятельность компании, занимающейся комбинированным страхованием. Каждый из нескольких рисков в рамках договора комбинированного страхования может быть перестрахован отдельно в соответствии с произвольным типом перестрахования, параметры которого выбираются динамически. Основная задача заключается в поиске оптимальной стратегии перестрахования, максимизирующей вероятность неразорения страховой компании. В первом параграфе главы приводится описание модели и определяется цель исследований. Во втором параграфе выводится уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана. Далее соответственно в третьем и четвертом параграфах доказывается существование и единственность решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана и устанавливается вид оптимальной стратегии перестрахования. Для иллюстрации указанных теоретических результатов в пятом параграфе главы приводятся численные примеры, полученные в предположении экспоненциального распределения требований.

§1.1 Описание модели и постановка задачи

Основа деятельности любой страховой компании заключается в получении страховой премии от страхователей и выплате страховых возмещений в случае наступления страховых случаев. В то же время довольно часто получается, что наступление одного страхового случая ведет за собой выплаты сразу по нескольким рискам. Например, такая ситуация встречается в страховании имущества — в рамках одного договора могут быть отдельно застрахованы конструктив и отделка квартиры, движимое имущество и гражданская ответственность перед третьими лицами. Страхование такого вида, покрывающее сразу несколько рисков, называется комбинированным страхованием. Рассмотрим в данной главе модель работы компании, заключающей договоры комбинированного страхования, которые подразумевают возможность в случае наступления страхового случая выплат сразу по нескольким (а именно, $k \geq 2$) рискам. Пусть капитал компании в момент времени t имеет вид

$$X_t = x + \sum_{i=1}^{k} c_i t - \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{k} Y_{nj}, \ t \geq 0.$$

Здесь x — это начальный капитал, c_i — интенсивность поступления страховых премий по

i-ому риску, N_t — пуассоновский процесс с параметром λ, а Y_{nj} — случайные величины, обозначающие размеры требований по j-ому риску в рамках n-ого страхового случая. При этом

$$\{\overline{Y_n}\}_{n\geq 1} = \{(Y_{n1}, \dots, Y_{nk})\}_{n\geq 1}$$

представляет собой последовательность независимых и одинаково распределенных случайных векторов. Компоненты данных векторов $Y_{nj},\ j = \overline{1,k}$, имеют непрерывную совместную функцию распределения $F(y_1, \dots, y_k)$. Пусть также выполнено условие чистой прибыли (net profit condition): $\sum_{i=1}^k c_i > \lambda \sum_{j=1}^k EY_{nj}$.

Далее будем полагать, что страховая компания имеет возможность отдавать риски в перестрахование и выбирать параметры перестрахования в каждый момент времени $t \geq 0$. Целью компании будет являться поиск оптимальной стратегии перестрахования, максимизирующей вероятность неразорения. Поиску оптимальной стратегии в рамках классической модели с договорами страхования, покрывающими только один риск, посвящены статьи [4], [43] и [59]. Ли и Лиу [48] обобщили работу [59] и рассмотрели модель с двумя рисками и возможностью квотного перестрахования каждого из них. Мы в свою очередь будем предполагать, что каждый из $k \geq 2$ рисков может быть перестрахован в соответствии со своим произвольным типом перестрахования. А именно, пусть после применения перестрахования капитал компании выглядит следующим образом:

$$X_t^{\overline{d}} = x + \int_0^t \sum_{i=1}^k c_i(d_s^i)ds - \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_{nj}, d_{T_n-}^j),\ t \geq 0.$$

В каждый момент времени $t \geq 0$ компания имеет возможность выбрать параметры d_t^i перестрахования i-ого риска, руководствуясь при этом значением капитала $X_t^{\overline{d}}$. Таким образом, процесс $\overline{d}_t = (d_t^1, \dots, d_t^k)$, где $d_t^i = d^i(X_t^{\overline{d}})$ являются измеримыми функциями от капитала компании, определяет стратегию перестрахования. Множества возможных значений параметров перестрахования d_t^i обозначим через D_i, при этом будем ограничиваться рассмотрением только компактных множеств D_i. Соответственно, в каждый фиксированный момент времени $\overline{d}_t \in D$, где $D = D_1 \times \ldots \times D_k$. Пусть также $\mathfrak{D}$ — это множество всех возможных стратегий перестрахования $\overline{d}_t$.

Поступившие требования Y_{nj} по каждому из рисков в рамках одного страхового случая делятся между страховщиком и перестраховщиком в соответствии с типом договора перестрахования (функцией ρ_j) и в соответствии с выбранными параметрами перестрахования $d_{T_n-}^j$. С помощью T_n мы обозначаем моменты поступления совокупных исков. Отдельно отметим, что при определении части исков, которые остаются страховщику после применения перестрахования, используются значения параметров d_t^i именно в моменты $t = T_n-$, т.е. непосредственно перед поступлением исков, а не в $t = T_n$. Данное условие необходимо для того, чтобы страховщик не имел возможность в моменты поступления исков принимать решение полностью передавать их в перестрахование, получая при этом премию в остальные моменты времени.

Функции ρ_j определяют тип договора перестрахования, то есть само правило, по которому производится деление требования по j-ому риску между страховщиком и перестраховщиком. Если по j-ому риску поступило требование Y_j и на момент поступления данного требования выбран параметр $d^j \in D_j$, то $\rho_j(Y_j, d^j)$ обозначает часть иска, которую должен покрыть страховщик. Перестраховщик тогда должен покрыть $Y_j - \rho_j(Y_j, d^j)$. При этом функции $\rho_j(y_j, d^j)$ предполагаются неубывающими по y_j и непрерывными по y_j и d^j. Кроме того, верны неравенства $0 \leq \rho_j(y_j, d^j) \leq y_j$ для любого $y_j \geq 0$.

В соответствии с типом перестрахования делятся не только требования, но и премии. После применения перестрахования интенсивности поступления премий страховщику по каждому из k рисков меняются с c_i на $c_i(d_t^i)$. Все функции $c_i(d^i)$ являются непрерывными по переменным d^i и $c_i(d^i) \leq c_i$. Мы также предполагаем, что если страховщик выбирает полное перестрахование риска, то интенсивность поступления премии по этому риску становится отрицательной (чтобы не было возможности заработать безрисковую прибыль).

Для наглядности рассмотрим примеры двух основных типов перестрахования. Если к j-ому риску применено квотное перестрахование с параметром d^j, то $D_j = [0, 1]$, $\rho_j(y_j, d^j) = d^j y_j$. Если же используется перестрахование эксцедента убытка, то $D_j = [0, \infty]$ и $\rho_j(y_j, d^j) = \min(y_j, d^j)$. Вид функций $c_j(d^j)$ зависит от выбранного принципа подсчета премии.

Основная задача страховой компании состоит в том, чтобы выбрать наилучшую стратегию перестрахования, позволяющую максимально уменьшить вероятность разорения (или, что то же самое, увеличить вероятность неразорения). Пусть $\tau^{\overline{d}} = \inf[t \geq 0 : X_t^{\overline{d}} < 0]$ — момент разорения компании. Тогда $\psi^{\overline{d}}(x) = P(\tau^{\overline{d}} < \infty | X_0^{\overline{d}} = x)$ — вероятность разорения, в то время как $\delta^{\overline{d}}(x) = 1 - \psi^{\overline{d}}(x)$ — вероятность неразорения страховой компании, использующей стратегию перестрахования $\overline{d}_t$. Предполагаем, что $\delta^{\overline{d}}(x) = 0$ при $x < 0$. Таким образом, наша цель состоит в том, чтобы найти $\delta(x) = \sup_{\overline{d}_t \in \mathfrak{D}} \delta^{\overline{d}}(x)$ и определить оптимальную стратегию перестрахования, если такая существует.

§1.2 Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана

Пусть $h > 0$ — малый отрезок времени, $\overline{d} \in D$ — произвольный набор параметров перестрахования, $\varepsilon > 0$ — некоторое число. В момент времени $t = 0$ мы имеем капитал x. Если $x = 0$, то будем предполагать, что $\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i) \geq 0$, чтобы предотвратить ситуацию, когда разорение наступает немедленно из-за выплаты премий. Аналогично если $x > 0$, будем считать, что h настолько мало, что $x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i) h > 0$. Рассмотрим тогда следующую стратегию перестрахования (для удобства обозначим ее $\overline{r}_t$):

$$\overline{r}_t = \begin{cases} \overline{d} \ \text{ при } t \leq \min(T_1, h), \\ \overline{d}^{\varepsilon}_{t-\min(T_1,h)} \ \text{ при } t > \min(T_1, h). \end{cases}$$

На первом промежутке длиной не более чем h мы выбираем фиксированные произвольные параметры $\overline{d}$, а далее выбираем стратегию

$$\overline{d}^{\varepsilon}_{t-\min(T_1,h)} = (d^{1\varepsilon}_{t-\min(T_1,h)}, \ldots, d^{k\varepsilon}_{t-\min(T_1,h)}),$$

такую, что $\delta^{\overline{d}^{\varepsilon}}(x) > \delta(x) - \varepsilon$. Данная стратегия будет существовать по определению супремума. Заметим, что мы не можем сразу выбрать оптимальную стратегию на промежутке $(\min(T_1, h),\ \infty)$, так как не знаем точно, существует она или нет.

Далее воспользуемся формулой полной вероятности (будем учитывать, что $\delta(x) = 0$ при $x < 0$):

$$\delta(x) \geq \delta^{\overline{r}}(x) = e^{-\lambda h}\ \delta^{\overline{d}^{\varepsilon}}(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)h) +$$
$$+ \int_0^h \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \delta^{\overline{d}^{\varepsilon}}(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)t - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k)\lambda e^{-\lambda t}dt >$$
$$> e^{-\lambda h}\ \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)h) +$$
$$+ \int_0^h \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)t - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k)\lambda e^{-\lambda t}dt -$$
$$- e^{-\lambda h}\varepsilon - \int_0^h \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \varepsilon\ dF(y_1, \ldots, y_k)\lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda h}\ \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)h) +$$
$$+ \int_0^h \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)t - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k)\lambda e^{-\lambda t}dt - \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, мы можем далее положить $\varepsilon = 0$. Таким образом, после перегруппировки слагаемых мы имеем:

$$\delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)h) - \delta(x) - (1 - e^{-\lambda h})\ \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)h) +$$
$$+ \int_0^h \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)t - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k)\lambda e^{-\lambda t}dt \leq 0.$$

Поделим на $h > 0$:

$$\left[\delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)h) - \delta(x)\right] h^{-1} - (1 - e^{-\lambda h})h^{-1}\ \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)h) +$$
$$+ h^{-1} \int_0^h \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \delta(x + \sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)t - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k)\lambda e^{-\lambda t}dt \leq 0.$$

Устремим теперь h к 0 (предполагая, что функция $\delta(x)$ дифференцируема):

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)\delta'(x) - \lambda\delta(x) + \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \delta(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k) \le 0.$$

Получившееся неравенство справедливо для всех $\overline{d} \in D$. В связи с этим рассмотрим следующее уравнение (уравнение типа Гамильтона - Якоби - Беллмана):

$$\sup_{\overline{d} \in D} \left[\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i) g'(x) - \lambda g(x) + \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k) \right] = 0. \qquad (1.1)$$

Здесь мы ввели новое обозначение $g(x)$, так как мы не знаем точно, удовлетворяет ли функция $\delta(x)$ данному уравнению (1.1) или нет. Нам только предстоит изучить вопрос о существовании и единственности решения уравнения (1.1) и его связи с $\delta(x)$. Однако, забегая вперед, мы можем отметить, что в соответствии со свойствами функции $\delta(x)$, нас будет интересовать существование возрастающих решений $g(x)$ уравнения (1.1), таких, что $g(0) > 0$ и $g(x) = 0$ при $x < 0$. Здесь и далее, говоря о характеристиках функции $g(x)$, таких как, например, монотонность, мы будем иметь в виду характеристики данной функции на луче $[0, \infty)$ (определение $g(x)$ на $(-\infty, 0)$ необходимо нам только для удобства записи интегралов). Заметим также, что так как для каждого фиксированного значения $x \ge 0$ мы ищем супремум непрерывной по переменным $d^j \in D_j$ функции, а множества D_j являются компактами, то данный супремум при каждом $x \ge 0$ будет достигаться (в некоторой точке $\overline{d}^*(x) = (d^{*1}(x), \ldots, d^{*k}(x))$). Более того, при нахождении супремума мы можем сузить область D до $\widetilde{D} = \{\overline{d} \in D : \sum_{i=1}^k c_i(d^i) > 0\}$. Действительно, допустим $g(x)$ — возрастающее решение уравнения (1.1) и супремум в данном уравнении достигается в точке $\overline{d}^*(x)$. Отсюда мы получаем (в силу того, что под интегралом оказывается неотрицательная функция), что

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(d^{*i}(x)) g'(x) = \lambda \int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty \left[g(x) - g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^{*j}(x))) \right] dF(y_1, \ldots, y_k) \ge 0. \qquad (1.2)$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x)) \ge 0$, так как мы предположили, что $g'(x) > 0$. Но выполнение неравенства $\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x)) \ge 0$ означает, что в соответствии с выбранными параметрами $\overline{d}^*(x)$ страховая компания не отдает полностью требование (все риски) в перестрахование, так как в случае полного перестрахования мы условились, что интенсивность поступления премий должна стать отрицательной. А значит, $P\left(\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x)) > 0\right) > 0$ и в силу (1.2) мы получаем, что $\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x)) g'(x) > 0$ и тогда $\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x)) > 0$. Таким образом, мы можем переписать уравнение (1.1) в виде

$$\sup_{\overline{d} \in \widetilde{D}} \left[\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i) g'(x) - \lambda g(x) + \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \ldots, y_k) \right] = 0. \qquad (1.3)$$

В предположении, что $g(x)$ — возрастающая функция, уравнение (1.1) можно также привести к другому эквивалентному виду. А именно, так как для всех $\overline{d} \in \widetilde{D}$ верно неравенство $\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i) > 0$, то мы можем поделить обе части (1.3) на $\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)$:

$$\sup_{\overline{d} \in \widetilde{D}} \left[g'(x) - \frac{\lambda g(x) - \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j)) \; dF(y_1, \ldots, y_k)}{\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)} \right] = 0.$$

Иначе мы можем представить данное уравнение в виде

$$g'(x) = -\sup_{\overline{d} \in \widetilde{D}} \left[-\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)} \left(g(x) - \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j)) \; dF(y_1, \ldots, y_k) \right) \right].$$

Пользуясь тем, что $-\sup[-f(x)] = \inf f(x)$, мы окончательно получаем новое уравнение, эквивалентное (1.1):

$$g'(x) = \inf_{\overline{d} \in \widetilde{D}} \left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)} \left(g(x) - \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j)) \; dF(y_1, \ldots, y_k) \right) \right]. \tag{1.4}$$

В силу того, что уравнения (1.1) и (1.4) определяют функцию $g(x)$ с точностью до умножения на константу, нам необходимо выбрать граничное условие. Пусть, например, $g(0) = 1$.

Замечание 1.1. *Чтобы отдельно не оговаривать условие $g(x) = 0$ при $x < 0$, можно преобразовать интегралы в уравнениях* (1.1) *и* (1.4). *А именно, пусть*

$$\begin{aligned}
&p_1(x, d^1) = \inf[z : \rho_1(z, d^1) > x], \\
&p_2(x, y_1, d^1, d^2) = \inf[z : \rho_2(z, d^2) > x - \rho_1(y_1, d^1)], \\
&\ldots \\
&p_k(x, y_1, \ldots, y_{k-1}, d^1, \ldots, d^k) = \inf[z : \rho_k(z, d^k) > x - \rho_1(y_1, d^1) - \ldots - \rho_1(y_{k-1}, d^{k-1})].
\end{aligned}$$

Тогда

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j)) \; dF(y_1, \ldots, y_k) =$$
$$= \int_0^{p_1(x, d^1)} \ldots \int_0^{p_k(x, y_1, \ldots, y_{k-1}, d^1, \ldots, d^k)} g(x - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^j)) \; dF(y_1, \ldots, y_k).$$

§1.3 Существование и единственность решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана

Перейдем теперь к вопросу существования и единственности решения уравнения (1.4).

Теорема 1.1. *Существует единственное решение уравнения* (1.4), *такое, что* $g(0) = 1$. *Данное решение является возрастающим, ограниченным и непрерывно дифференцируемым.*

Доказательство. Сначала сразу покажем, что если существует решение $g(x)$ уравнения (1.4), то оно является непрерывно дифференцируемой функцией. Для этого воспользуемся равенством

$$g(x) - \int_0^{p_1(x,d^1)} \dots \int_0^{p_k(x,y_1,\dots,y_{k-1},d^1,\dots,d^k)} g(x - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d^j))\ dF(y_1, \dots, y_k) =$$
$$= g(x) - \int_0^x g(x-y) dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^j)}(y).$$

Здесь и далее функция $F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^j)}(x)$ обозначает функцию распределения случайной величины $\eta = \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)$. Уравнение (1.4) принимает соответственно вид

$$g'(x) = \inf_{\overline{d}\in\widetilde{D}} \left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^i)} \left(g(x) - \int_0^x g(x-y) dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^j)}(y) \right) \right]. \tag{1.5}$$

Еще раз отметим, что инфимум в уравнении (1.5), так же как и в уравнении (1.1), будет достигаться при каждом $x \geq 0$ в некоторой точке $\overline{d}^*(x) = (d^{*1}(x), \dots, d^{*k}(x))$, несмотря на то, что множество $\widetilde{D}$ не является компактом. Правая часть (1.5) непрерывна по переменным d^i и стремится к бесконечности на границе $\widetilde{D}$, то есть при приближении $\overline{d}$ к такому значению, что $\sum_{i=1}^k c_i(d^i) = 0$. Другими словами, инфимум не может достигаться на границе $\widetilde{D}$, поэтому фактически мы имеем задачу поиска инфимума на компакте $\{\overline{d} : \sum_{i=1}^k c_i(d^i) \geq 0\}$.

Итак, предположим, что функция $g'(x)$ имеет разрыв в некоторой точке $x_0 > 0$ и, например, $g'(x_0) > g'(x_0 - 0)$. Тогда существует $\Delta > 0$, такое, что для любого малого $\delta \in (0, x_0)$ верно неравенство $g'(x_0) - \Delta > g'(x_0 - \delta)$, т.е.

$$\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_0))} \left(g(x_0) - \int_0^{x_0} g(x_0 - y) dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0))}(y) \right) - \Delta >$$
$$> \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_0-\delta))} \left(g(x_0-\delta) - \int_0^{x_0-\delta} g(x_0 - \delta - y) dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y) \right). \tag{1.6}$$

Рассмотрим подробнее выражение в правой части неравенства (1.6). В частности, посмотрим, сильно ли изменится данное выражение, если заменить $x_0 - \delta$ на x_0 в аргументе функции $g(\cdot)$ и в верхнем пределе интеграла. Функция $g(x)$ является непрерывной на $[0, +\infty)$, а значит, равномерно непрерывной на отрезке $[0, x_0]$. Отсюда следует, что для любого $\widetilde{\varepsilon} > 0$ существует $\widetilde{\delta} > 0$, такое, что при всех $x_1, x_2 \in [0, x_0]$ и $|x_1 - x_2| < \widetilde{\delta}$ верно неравенство $|g(x_1) - g(x_2)| < \widetilde{\varepsilon}$. Соответственно, если $\delta < \widetilde{\delta}$, то $|g(x_0) - g(x_0 - \delta)| < \widetilde{\varepsilon}$. Перейдем теперь к интегралу в правой части (1.6). Имеем:

$$\int_0^{x_0} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y) = \int_0^{x_0-\delta} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y) + \\ + \int_{x_0-\delta}^{x_0} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y)$$

и

$$\left|\int_0^{x_0} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y) - \int_0^{x_0-\delta} g(x_0-\delta-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y)\right| \leq \\ \leq \left|\int_0^{x_0-\delta} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y) - \int_0^{x_0-\delta} g(x_0-\delta-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y)\right| + \\ + \left|\int_{x_0-\delta}^{x_0} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y)\right|.$$

При этом

$$\left|\int_0^{x_0-\delta} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y) - \int_0^{x_0-\delta} g(x_0-\delta-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y)\right| \leq \\ \leq \int_0^{x_0-\delta} |g(x_0-y)-g(x_0-\delta-y)|dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y) < \widetilde{\varepsilon}\, F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(x_0-\delta) \leq \widetilde{\varepsilon},$$

в то время как

$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y)\right| \leq \\ \leq (F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(x_0) - F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(x_0-\delta)) \max_{x\in[0,\delta]} g(x).$$

Отметим, что функция распределения $F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y)$ не может иметь точек разрыва на отрезке $[x_0-\delta, x_0]$. Действительно, если предположить обратное и допустить, что данная функция имеет разрыв в некоторой точке x_F из $[x_0-\delta, x_0]$, это означало бы, что в соответствии с выбранными параметрами $\overline{d}^*(x_0-\delta)$ при поступлении требования, превышающего x_F, в перестрахование полностью передалась бы некоторая часть данного требования свыше x_F. При этом убыток страховщика все равно остался бы больше капитала $x_0-\delta$, что привело бы его к неминуемому разорению. Однако подобный набор параметров, очевидно, не может доставлять инфимум, поскольку перестрахование с такими параметрами не увеличивает вероятность неразорения страховщика, но уменьшает его премию. Из-за полученного противоречия мы можем утверждать, что функция $F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(y)$ непрерывна на $[x_0-\delta, x_0]$, а значит, для любого $\widehat{\varepsilon} > 0$ существует такое $\widehat{\delta} > 0$, что при условии $\delta < \widehat{\delta}$ верно неравенство $(F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(x_0) - F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^{*j}(x_0-\delta))}(x_0-\delta)) < \widehat{\varepsilon}$.

Таким образом, если $\delta < \min(x_0, \widetilde{\delta}, \widehat{\delta})$, то

$$\left|\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_0-\delta))}\left(g(x_0) - \int_0^{x_0} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_0-\delta))}(y)\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_0-\delta))}\left(g(x_0-\delta) - \int_0^{x_0-\delta} g(x_0-\delta-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_0-\delta))}(y)\right)\right| <$$
$$< \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_0-\delta))}\left(2\widetilde{\varepsilon} + \widehat{\varepsilon}\max_{x\in[0,\delta]} g(x)\right).$$

Величины $\widetilde{\varepsilon}$ и $\widehat{\varepsilon}$ мы можем выбирать произвольно, в частности, можем выбрать их так, чтобы

$$\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_0-\delta))}\left(g(x_0) - \int_0^{x_0} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_0-\delta))}(y)\right) <$$
$$< \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_0-\delta))}\left(g(x_0-\delta) - \int_0^{x_0-\delta} g(x_0-\delta-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_0-\delta))}(y)\right) + \Delta/2.$$

Однако тогда получаем, что

$$g'(x_0) = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_0))}\left(g(x_0) - \int_0^{x_0} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_0))}(y)\right) \leq$$
$$\leq \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^{*i}(x_0-\delta))}\left(g(x_0) - \int_0^{x_0} g(x_0-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^{*j}(x_0-\delta))}(y)\right) < g'(x_0-\delta) + \Delta/2,$$

и приходим к противоречию с предположением $g'(x_0) - \Delta > g'(x_0-\delta)$. Следовательно, функция $g(x)$ является непрерывно дифференцируемой и мы можем далее произвести интегрирование по частям:

$$g(x) - \int_0^x g(x-y)dF_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(y) =$$
$$= g(x) - g(x-y)F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(y)\Big|_0^x - \int_0^x F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(y)g'(x-y)dy =$$
$$= g(x) - g(0)F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x) + g(x)F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(0) - \int_0^x F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(y)g'(x-y)dy =$$
$$= 1 + \int_0^x g'(z)dz - F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x) - \int_0^x F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(y)g'(x-y)dy =$$
$$= 1 - F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x) + \int_0^x g'(z)dz - \int_0^x F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x-z)g'(z)dz =$$
$$= 1 - F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x) + \int_0^x g'(z)\left(1 - F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x-z)\right)dz.$$

Таким образом, уравнение (1.4) примет вид

$$g'(x) = \inf_{\overline{d}\in\widetilde{D}}\left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^i)}\left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x) + \int\limits_0^x g'(z)\left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d^j)}(x-z)\right)dz\right)\right]. \tag{1.7}$$

Докажем сначала существование решения уравнения (1.7). Пусть A — это оператор, такой, что

$$Af(x) = \inf_{\overline{d}\in\widetilde{D}}\left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^i)}\left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^j)}(x) + \int\limits_0^x f(z)\left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^j)}(x-z)\right)dz\right)\right]. \quad (1.8)$$

Зададим также последовательность функций $f_n(x), n \geq 0$, следующим образом. Пусть

$$f_0(x) = \frac{\sum_{i=1}^k c_i\ \delta_0'(x)}{\sum_{i=1}^k c_i - \lambda\sum_{j=1}^k EY_j} = \frac{\delta_0'(x)}{\delta_0(0)},$$

где $\delta_0(x)$ — это вероятность неразорения в случае отсутствия какого-либо перестрахования (подробно о функции $\delta_0(x)$ рассказано, например, в лекциях Шмидли [58]). Далее определим $f_n(x) = Af_{n-1}(x)$. Отметим, что $f_n(x) \geq 0$. Кроме того, с помощью метода математической индукции докажем, что $f_n(x) \leq f_{n-1}(x), \forall n \geq 1, \forall x \geq 0$.

База индукции. Покажем сначала, что $f_1(x) \leq f_0(x)$. Согласно работе [58], функция $\delta_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\delta_0'(x) = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i}\left(\delta_0(x) - \int_0^x \delta_0(x-y)dF_{\sum_{j=1}^k Y_j}(y)\right).$$

А значит, после интегрирования по частям и замены переменной мы можем получить для $\delta_0(x)$ эквивалентное уравнение вида

$$\delta_0'(x) = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i}\left(\left[1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x)\right]\delta_0(0) + \int_0^x \delta_0'(z)\left(1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x-z)\right)dz\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&f_1(x) = Af_0(x) = \\
&= \inf_{\overline{d}\in\widetilde{D}}\left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^i)}\left(1 - F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^j)}(x) + \int_0^x f_0(z)\left(1 - F_{\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^j)}(x-z)\right)dz\right)\right] \leq \\
&\leq \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i}\left(1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x) + \int_0^x f_0(z)\left(1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x-z)\right)dz\right) = \\
&= \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i}\left(1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x) + \int_0^x \frac{\delta_0'(z)}{\delta_0(0)}\left(1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x-z)\right)dz\right) = \\
&= \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i\ \delta_0(0)}\left(\left[1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x)\right]\delta_0(0) + \int_0^x \delta_0'(z)\left(1 - F_{\sum_{j=1}^k Y_j}(x-z)\right)dz\right) = \\
&= \frac{\delta_0'(x)}{\delta_0(0)} = f_0(x).
\end{aligned}$$

Шаг индукции. Допустим, что мы уже доказали, что $f_{n-1}(x) \geq f_n(x)$ для некоторого n. Покажем тогда, что $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Пусть инфимумы функций $f_{n+1}(x) = Af_n(x)$ достигаются соответственно в точках $\overline{d}_n^*(x)$. Отсюда имеем

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = Af_{n-1}(x) - Af_n(x) =$$

$$= \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d_{n-1}^{*i}(x))} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_{n-1}^{*j}(x))}(x) + \int\limits_0^x f_{n-1}(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_{n-1}^{*j}(x))}(x-z) \right) dz \right) -$$

$$- \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d_n^{*i}(x))} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_n^{*j}(x))}(x) + \int\limits_0^x f_n(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_n^{*j}(x))}(x-z) \right) dz \right) \geq$$

$$\geq \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d_{n-1}^{*i}(x))} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_{n-1}^{*j}(x))}(x) + \int\limits_0^x f_{n-1}(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_{n-1}^{*j}(x))}(x-z) \right) dz \right) -$$

$$- \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d_{n-1}^{*i}(x))} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_{n-1}^{*j}(x))}(x) + \int\limits_0^x f_n(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_{n-1}^{*j}(x))}(x-z) \right) dz \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d_{n-1}^{*i}(x))} \int\limits_0^x (f_{n-1}(z) - f_n(z)) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_{n-1}^{*j}(x))}(x-z) \right) dz \geq 0.$$

Таким образом, $f_n(x)$ — это невозрастающая по n последовательность функций, ограниченная снизу 0. Следовательно, при каждом фиксированном значении $x \geq 0$ существует предел $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Пусть $\overline{d}_\infty^*(x)$ — это точка, в которой достигается инфимум функции $Af(x)$. Докажем, что справедливо равенство $Af(x) = f(x)$. С одной стороны, мы имеем:

$$f_n(x) = Af_{n-1}(x) =$$

$$= \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d_{n-1}^{*i}(x))} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_{n-1}^{*j}(x))}(x) + \int\limits_0^x f_{n-1}(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_{n-1}^{*j}(x))}(x-z) \right) dz \right) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d_\infty^{*i}(x))} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_\infty^{*j}(x))}(x) + \int\limits_0^x f_{n-1}(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_\infty^{*j}(x))}(x-z) \right) dz \right).$$

Отсюда, после перехода к пределу при $n \to \infty$, мы получим $f(x) \leq Af(x)$. Действительно, в силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла верно равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^x f_{n-1}(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_\infty^{*j}(x))}(x-z) \right) dz = \int\limits_0^x f(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d_\infty^{*j}(x))}(x-z) \right) dz.$$

С другой стороны, поскольку $f(x) \le f_{n-1}(x)$,

$$f_n(x) = Af_{n-1}(x) =$$

$$= \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d^{*i}_{n-1}(x))} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d^{*j}_{n-1}(x))}(x) + \int\limits_0^x f_{n-1}(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d^{*j}_{n-1}(x))}(x-z) \right) dz \right) \ge$$

$$\ge \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d^{*i}_{n-1}(x))} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d^{*j}_{n-1}(x))}(x) + \int\limits_0^x f(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d^{*j}_{n-1}(x))}(x-z) \right) dz \right) \ge$$

$$\ge \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d^{*i}_{\infty}(x))} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d^{*j}_{\infty}(x))}(x) + \int\limits_0^x f(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d^{*j}_{\infty}(x))}(x-z) \right) dz \right) = Af(x).$$

Следовательно, $f(x) \ge Af(x)$. Учитывая предыдущие выкладки, мы приходим к равенству $Af(x) = f(x)$. Таким образом, $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f(x) = \inf_{\overline{d} \in \widetilde{D}} \left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d^j)}(x) + \int\limits_0^x f(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j, d^j)}(x-z) \right) dz \right) \right].$$

Применяя рассуждения, аналогичные тем, что были приведены в начале доказательства текущей теоремы, приходим к выводу, что функция $f(x)$ непрерывна. Рассмотрим теперь $g(x) = 1 + \int_0^x f(z)dz$. Несложно проверить, что функция $g(x)$ будет являться решением уравнения (1.7).

Изучим свойства функции $g(x)$. Из того, как мы определили $g(x)$ через $f(x)$, сразу следует, что $g(0) = 1$ и что $g(x)$ является неубывающей (так как подынтегральная функция $f(x) \ge 0$). Мы уже показали ранее, что $g(x)$ является непрерывно дифференцируемой. Более того, $g(x)$ является ограниченной сверху:

$$g(x) = 1 + \int_0^x f(z)dz \le 1 + \int_0^x \frac{\delta_0'(z)}{\delta_0(0)} dz = 1 + \frac{\delta_0(x) - \delta_0(0)}{\delta_0(0)} \le 1 + \frac{1 - \delta_0(0)}{\delta_0(0)} = \frac{1}{\delta_0(0)}.$$

Покажем теперь, что $g(x)$ — строго возрастающая функция. Допустим, что это не так. Мы уже знаем, что $g'(x) \ge 0$. Из (1.7) следует, что $g'(0) > 0$. Пусть тогда $x_0 = \inf[z : g'(z) = 0]$. В силу того, что функция $g(x)$ является решением уравнения (1.4), получаем

$$g'(x_0) = \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(d^{*i}(x_0))} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left(g(x_0) - g(x_0 - \sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^{*j}(x_0))) \right) dF(y_1, \dots, y_k) = 0.$$

Чтобы интеграл такого вида был равен 0, необходимо, чтобы $\sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j, d^{*j}(x_0)) = 0$ во всех точках y_j возрастания функции $F(y_1, \dots, y_k)$, но это будет означать, что страховая компания передала в перестрахование полностью все риски и тогда $\overline{d}^*(x_0) \notin \widetilde{D}$. Мы пришли к противоречию, значит, $g(x)$ — строго возрастающая функция.

Таким образом, мы доказали существование решения уравнения (1.4) и описали все основные свойства данного решения. Докажем далее единственность решения уравнения (1.4) (также через единственность решения уравнения (1.7)). Предположим, что $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — два решения уравнения (1.7), такие, что $g_1(0) = g_2(0) = 1$. Пусть $f_j(x) = g_j'(x)$ и пусть теперь $\overline{d}_j^*(x)$ — это точки, в которых достигаются инфимумы в уравнениях для функций $f_j(x)$ соответственно, $j = 1, 2$. Зафиксируем точку $\widetilde{x} > 0$. Поскольку правая часть уравнения (1.7) непрерывна по переменным $d_1, \ldots, d_k$ и стремится к бесконечности при $\sum_{i=1}^k c_i(d^i) \to 0$, то функции $\sum_{i=1}^k c_i(d_1^{*i}(x))$ и $\sum_{i=1}^k c_i(d_2^{*i}(x))$ отделены от 0 на отрезке $[0, \widetilde{x}]$. Пусть тогда

$$x_1 = \inf_{0 \le x \le \widetilde{x}} \left[\min \left(\sum_{i=1}^k c_i(d_1^{*i}(x)), \sum_{i=1}^k c_i(d_2^{*i}(x)) \right) \right] / (2\lambda)$$

и $x_n = \min(nx_1, \widetilde{x})$. Без ограничения общности будем считать, что $x_1 \le \widetilde{x}$. С помощью метода математической индукции покажем, что для $\forall n \ge 0$ функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ совпадают на отрезке $[0, x_n]$. Базой индукции является случай $n = 0$, который очевиден. Далее допустим, что мы доказали, что $g_1(x) = g_2(x)$ на отрезке $[0, x_n]$ для некоторого n. Теперь докажем, что $g_1(x) = g_2(x)$ на $[x_n, x_{n+1}]$. Пусть $m = \sup_{x_n \le x \le x_{n+1}} |f_1(x) - f_2(x)|$. Тогда для всех $x \in [x_n, x_{n+1}]$

$$\begin{aligned}
&f_1(x) - f_2(x) = Af_1(x) - Af_2(x) = \\
&= \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^k c_i(d_1^{*i}(x))} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d_1^{*j}(x))}(x) + \int\limits_0^x f_1(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d_1^{*j}(x))}(x-z) \right) dz \right) - \\
&- \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^k c_i(d_2^{*i}(x))} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d_2^{*j}(x))}(x) + \int\limits_0^x f_2(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d_2^{*j}(x))}(x-z) \right) dz \right) \le \\
&\le \frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^k c_i(d_2^{*i}(x))} \int\limits_{x_n}^x (f_1(z) - f_2(z)) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j, d_2^{*j}(x))}(x-z) \right) dz \le \\
&\le \frac{\lambda m (x - x_n)}{\sum\limits_{i=1}^k c_i(d_2^{*i}(x))} \le \frac{\lambda m x_1}{\sum\limits_{i=1}^k c_i(d_2^{*i}(x))} \le \frac{m}{2}.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что $f_2(x) - f_1(x) \le \frac{m}{2}$, а значит, $|f_1(x) - f_2(x)| \le \frac{m}{2}$. Такое возможно только при $m = 0$. Отсюда следует, что при всех $x \in [x_n, x_{n+1}]$ справедливы равенства $f_1(x) = f_2(x)$ и $g_1(x) = g_2(x)$. Таким образом, мы доказали, что $g_1(x) = g_2(x)$ на всех отрезках вида $[0, x_n]$. Следовательно, $g_1(x) = g_2(x)$ на $[0, \widetilde{x}]$, а поскольку мы выбирали $\widetilde{x}$ произвольным образом, мы получаем, что функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ полностью совпадают при всех $x \ge 0$ и решение уравнения (1.7) единственно. □

§1.4 Связь между решением уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана и максимальной вероятностью неразорения

Прежде чем перейти к теореме, устанавливающей связь между решением уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана и вероятностью неразорения $\delta(x)$, остановимся на нескольких важных свойствах процесса капитала страховой компании $X_t^{\overline{d}}$. В первую очередь заметим, что процесс $X_t^{\overline{d}}$ является кусочно-детерминированным марковским процессом. Поведение процесса капитала $X_t^{\overline{d}}$ характеризуется резкими скачками в случайные моменты поступления страховых требований и детерминированным изменением между скачками, определяемым интенсивностью поступления страховой премии. Соответственно далее мы воспользуемся понятиями и результатами из общей теории марковских и кусочно-детерминированных марковских случайных процессов. Так одной из интересующих нас характеристик марковских процессов являются их генераторы. Генераторы марковских процессов часто используются для построения новых случайных процессов, являющихся в свою очередь мартингалами. Именно необходимость обоснования мартингальности некоторого процесса, задействованного в доказательстве основной теоремы текущего раздела, и привела нас к изучению генераторов. Отдельно отметим, что существует несколько различных видов и, соответственно, определений генераторов марковских процессов. Так в научной литературе часто встречается понятие инфинитезимального генератора (точное определение и свойства инфинитезимальных генераторов подробно описаны в книге Рольски и соавторов [57]). Мы же, чтобы рассуждения, приведенные в настоящей диссертации, были более универсальными и имели более широкое применение для дальнейших исследований, будем пользоваться более общим понятием — понятием полного генератора марковского процесса. Приведем определение полного генератора. Пусть E — некоторое подмножество $\mathbb{R}^n$ и множество $M(E)$ состоит из всех вещественнозначных измеримых функций на E. Многозначным линейным оператором будем называть набор функций $\mathbf{G} \subset \{(p, \widetilde{p}) : p, \widetilde{p} \in M(E)\}$, такой, что из $(p_i, \widetilde{p_i}) \in \mathbf{G},\ i \in \{1, 2\}$, следует, что $(ap_1 + bp_2, a\widetilde{p}_1 + b\widetilde{p}_2) \in \mathbf{G}$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$. Областью определения оператора $\mathbf{G}$ назовем

$$\mathcal{D}(\mathbf{G}) = \{p \in M(E) : (p, \widetilde{p}) \in \mathbf{G} \text{ для некоторой } \widetilde{p} \in M(E)\}$$

и с помощью $\mathbf{G}p$ будем обозначать функцию $\widetilde{p}$ (возможно, одну из многих), такую, что $(p, \widetilde{p}) \in \mathbf{G}$. Пусть далее есть некоторый марковский процесс Y_t, принимающий значения из E. Тогда многозначный линейный оператор $\mathbf{G}$, состоящий из всех пар $(p, \widetilde{p}) \in M(E) \times M(E)$, таких, что процесс

$$\{p(Y_t) - p(Y_0) - \int_0^t \widetilde{p}(Y_s)ds,\ t \geq 0\}$$

является мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \geq 0}$, называется полным генератором марковского процесса Y_t. Таким образом, если мы знаем некоторую функцию p, которая принадлежит области определения полного генератора марковского процесса, мы можем построить мартингал, связанный с данным марковским процессом. С построением такого мартингала в случае, когда процесс Y_t является кусочно-детерминированным марковским процессом, нам может помочь теорема 2.2 книги [57]. Введем несколько используемых в данной теореме обозначений. Пусть Y_t — кусочно-детерминированный марковский процесс, поведение которого между скачками определяется неслучайной функцией $\varphi(t,z)$, такой, что $\varphi(0,z)=z$. Пусть также механизм появления скачков процесса Y_t определяется интенсивностью скачков $\lambda(x)$ и функцией перехода $Q: E\cup\Gamma\times\mathcal{B}(E)\to[0,1]$, где

$$\Gamma=\{\widetilde{z}\in\partial E:\widetilde{z}=\varphi(t,z)\text{ для некоторых }(t,z)\in\mathbb{R}^+\times E\}$$

и $Q(x,\cdot)$ обозначает распределение процесса сразу после скачка, если непосредственно перед скачком процесс был на уровне $x\in E\cup\Gamma$. Моменты скачков обозначим через T_i. Кроме того, определим величину

$$t^*(z)=\sup\{t>0:\text{существует }\varphi(t,z)\text{ и }\varphi(t,z)\in E\}$$

и введем дифференциальный оператор $\mathbf{X}$, который удовлетворяет равенству

$$(\mathbf{X}p)(\varphi(t,z))=\frac{\partial}{\partial t}p(\varphi(t,z)). \tag{1.9}$$

В указанных обозначениях верна следующая теорема.

Теорема. *Пусть Y_t — кусочно-детерминированный марковский процесс и пусть также $p^*: E\cup\Gamma\to\mathbb{R}$ — измеримая функция, удовлетворяющая следующим условиям:*
(a) при всех $z\in E$ функция $t\mapsto p^*(\varphi(t,z))$ абсолютно непрерывна на интервале $(0,t^*(z))$,
(b) для всех x на границе Γ верно равенство

$$p^*(x)=\int_E p^*(y)Q(x,dy),$$

(c) для любого $t\geq 0$ справедливо неравенство

$$E\left(\sum_{i:\,T_i\leq t}|p^*(Y_{T_i})-p^*(Y_{T_i-})|\right)<\infty.$$

Тогда $p\in\mathcal{D}(\mathbf{G})$, где p обозначает ограничение функции p^* на E, и $(p,\mathbf{G}p)\in\mathbf{G}$, где $\mathbf{G}p$ задается равенством

$$(\mathbf{G}p)(x)=(\mathbf{X}p)(x)+\lambda(x)\int_E(p(y)-p(x))Q(x,dy).$$

С помощью данной теоремы мы можем доказать справедливость первой вспомогательной леммы:

Лемма 1.1. *Процесс*

$$g(X_t^{\overline{d}}) - \int_0^t \left[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \dots, y_k) \right] ds$$

является мартингалом.

Доказательство. Процесс капитала страховой компании $X_t^{\overline{d}}$ и функция g, являющаяся единственным решением уравнения (1.4), удовлетворяют всем условиям приведенной выше теоремы 2.2 из [57]. Применительно к процессу $X_t^{\overline{d}}$, мы получаем, что функция $\varphi(t,z)$ задается уравнением $\varphi(t,z) = z + \int_0^t \sum_{i=1}^k c_i(d^i(\varphi(s,z)))ds$, а интенсивность скачков $\lambda(\cdot)$ постоянна и равна λ. Кроме того, в нашей модели $E = \mathbb{R}$, $t^*(z) = \infty$, $\Gamma = \emptyset$, а соотношение (1.9) принимает вид

$$(\mathbf{X}p)(\varphi(t,z)) = \sum_{i=1}^k c_i(d^i(\varphi(t,z)))p'(\varphi(t,z)).$$

Следовательно, мы можем сделать вывод, что функция g лежит в $\mathcal{D}(\mathbf{G})$, где $\mathbf{G}$ — это полный генератор марковского процесса $X_t^{\overline{d}}$, и

$$(\mathbf{G}g)(x) = (\mathbf{X}g)(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} (g(y) - g(x))Q(x, dy).$$

Тогда из определения полного генератора мы имеем, что процесс

$$\{g(X_t^{\overline{d}}) - g(X_0^{\overline{d}}) - \int_0^t \left[(\mathbf{X}g)(X_s^{\overline{d}}) + \lambda \int_{\mathbb{R}} (g(y) - g(X_s^{\overline{d}}))Q(X_s^{\overline{d}}, dy) \right] ds, \ t \geq 0\}$$

является мартингалом. Но в то же время справедливы равенства

$$\begin{aligned}
g(X_t^{\overline{d}}) - g(X_0^{\overline{d}}) - \int_0^t \left[(\mathbf{X}g)(X_s^{\overline{d}}) + \lambda \int_{\mathbb{R}} (g(y) - g(X_s^{\overline{d}}))Q(X_s^{\overline{d}}, dy) \right] ds = \\
= g(X_t^{\overline{d}}) - g(x) - \int_0^t \left[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) + \lambda \int_{\mathbb{R}} (g(y) - g(X_s^{\overline{d}}))Q(X_s^{\overline{d}}, dy) \right] ds = \\
= g(X_t^{\overline{d}}) - g(x) - \int_0^t \left[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) + \lambda \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)Q(X_s^{\overline{d}}, dy) - g(X_s^{\overline{d}}) \right) \right] ds = \\
= g(X_t^{\overline{d}}) - g(x) - \int_0^t \left[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) + \right. \\
\left. + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \dots, y_k) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) \right] ds,
\end{aligned}$$

из которых следует то, что требовалось доказать. □

Перейдем теперь ко второй вспомогательной лемме, посвященной свойствам процесса $X_t^{\overline{d}}$ и необходимой нам для доказательства существования связи между между решением уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана и вероятностью неразорения $\delta(x)$.

Лемма 1.2. *Пусть $\overline{d}_t$ — произвольная стратегия перестрахования. Тогда с вероятностью, равной 1, либо происходит разорение компании, либо $X_t^{\overline{d}} \to \infty$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $c_i^0 < 0$ — это интенсивность поступления премий по i-ому риску в случае, если данный риск полностью передан в перестрахование. Рассмотрим множество параметров перестрахования $B = \{\overline{d} : \sum_{i=1}^k c_i(d^i) \geq \sum_{i=1}^k c_i^0/2\}$, через $\overline{B}$ обозначим дополнение данного множества. Выберем далее произвольное $0 < \varepsilon < -\sum_{i=1}^k c_i^0/2$ и положим

$$\mathfrak{q} = \frac{-\sum_{i=1}^k c_i^0 - 2\varepsilon}{2\sum_{i=1}^k c_i - \sum_{i=1}^k c_i^0}.$$

Как и ранее, c_i — это интенсивность поступления страховых премий по i-ому риску в случае отсутствия перестрахования. Зафиксируем также произвольное $a > 0$ и определим рекуррентно последовательность $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$t_1 = \inf[t \geq 0 : X_t^{\overline{d}} < a]$$

и

$$t_{m+1} = \inf[t \geq t_m + 1 : X_t^{\overline{d}} < a].$$

При этом если $\varliminf\limits_{t\to\infty} X_t^{\overline{d}} < a$, то все величины t_m будут конечны. Если $X_t^{\overline{d}} \geq a$ для всех $t \geq 0$, то мы считаем, что $t_m = \infty$ для $\forall m \geq 1$. Если же $X_t^{\overline{d}} \geq a$ при всех $t \geq t_m + 1$, тогда $t_n = \infty$ для $\forall n \geq m + 1$.

Пусть для некоторого $m \geq 1$ и $\omega \in \Omega$ выполнено, что $t_m(\omega) < \infty$. Пусть также Σ_m — это σ-алгебра, порожденная $\left(X_{t\wedge t_m}^{\overline{d}}\right)_{t\geq 0}$. Наша цель состоит в том, чтобы оценить математическое ожидание $E(\mathbb{I}_{\{t_m<\infty\}\,\cap\,\{X_{t_m+1}^{\overline{d}}\leq a-\varepsilon\}}|\Sigma_m)(\omega)$. Для этого рассмотрим два случая. Покажем сначала, что если для некоторого произвольного $t \geq 0$ верно, что $\int_t^{t+1} \mathbb{I}_{\{\overline{d}_s\in B\}}ds \leq \mathfrak{q}$, тогда $X_{t+1}^{\overline{d}} \leq X_t^{\overline{d}} - \varepsilon$ п.н. Действительно,

$$X_{t+1}^{\overline{d}} = X_t^{\overline{d}} + \int_t^{t+1}\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i)ds - \sum_{n=N_t+1}^{N_{t+1}}\sum_{j=1}^k \rho_j(Y_{nj}, d_{T_n-}^j) \leq X_t^{\overline{d}} + \int_t^{t+1}\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i)ds =$$

$$= X_t^{\overline{d}} + \int_t^{t+1}\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i)\mathbb{I}_{\{\overline{d}_s\in B\}}ds + \int_t^{t+1}\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i)\mathbb{I}_{\{\overline{d}_s\in \overline{B}\}}ds \leq$$

$$\leq X_t^{\overline{d}} + \sum_{i=1}^k c_i \int_t^{t+1}\mathbb{I}_{\{\overline{d}_s\in B\}}ds + \sum_{i=1}^k c_i^0/2\int_t^{t+1}\mathbb{I}_{\{\overline{d}_s\in \overline{B}\}}ds \leq X_t^{\overline{d}} + \sum_{i=1}^k c_i\mathfrak{q} + (1-\mathfrak{q})\sum_{i=1}^k c_i^0/2 = X_t^{\overline{d}} - \varepsilon.$$

Следовательно, если для $t_m(\omega) < \infty$ справедливо условие $\int_{t_m(\omega)}^{t_m(\omega)+1}\mathbb{I}_{\{\overline{d}_s\in B\}}ds \leq \mathfrak{q}$, то

$$E(\mathbb{I}_{\{t_m<\infty\}\,\cap\,\{X_{t_m+1}^{\overline{d}}\leq a-\varepsilon\}}|\Sigma_m)(\omega) = 1.$$

Перейдем теперь ко второму случаю, когда для величины $t_m(\omega) < \infty$ выполнено неравенство

$$\int_{t_m(\omega)}^{t_m(\omega)+1} \mathbb{I}_{\{\overline{d}_s\in B\}} ds > \mathfrak{q}.$$

Имеем:

$$E(\mathbb{I}_{\{t_m<\infty\}\,\cap\,\{X^{\overline{d}}_{t_m+1}\le a-\varepsilon\}}|\Sigma_m)(\omega) \ge P(X^{\overline{d}}_{t_m+1}\le a-\varepsilon|X^{\overline{d}}_{t_m}=a) =$$

$$= P\Big(\sum_{T_i\in(t_m,\ t_{m+1}]}\sum_{j=1}^{k}\rho_j(Y_{ij}, d^j_{T_i-}) \ge \int_{t_m}^{t_m+1}\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i_s)ds+\varepsilon\Big) \ge$$

$$\ge P\Big(\sum_{T_i\in(t_m,\ t_{m+1}]}\sum_{j=1}^{k}\rho_j(Y_{ij}, d^j_{T_i-}) \ge \sum_{i=1}^{k} c_i+\varepsilon\Big).$$

Отметим, что для любого $t\ge 0$, такого, что $\int_t^{t+1}\mathbb{I}_{\{\overline{d}_s\in B\}}ds > \mathfrak{q}$, верно неравенство

$$P\Big(\int_t^{t+1}\mathbb{I}_{\{\overline{d}_s\in B\}}dN_s \ge \Big\lceil 1+\sum_{i=1}^{k}c_i/\varepsilon\Big\rceil\Big) \ge P\Big(N_{\mathfrak{q}}\ge\Big\lceil 1+\sum_{i=1}^{k}c_i/\varepsilon\Big\rceil\Big).$$

Пусть далее

$$P\Big(N_{\mathfrak{q}}\ge\Big\lceil 1+\sum_{i=1}^{k}c_i/\varepsilon\Big\rceil\Big) = \mathrm{r} > 0.$$

Отсюда следует, что

$$P\Big(\sum_{T_i\in(t_m,\ t_{m+1}]}\sum_{j=1}^{k}\rho_j(Y_{ij}, d^j_{T_i-}) \ge \sum_{i=1}^{k} c_i+\varepsilon\Big) \ge \mathrm{r}\cdot P\Big(\sum_{j=1}^{k}\rho_j(Y_{ij}, d^j_{T_i-}) > \varepsilon \text{ для}$$

$$\Big\lceil 1+\sum_{l=1}^{k}c_l/\varepsilon\Big\rceil \text{ убытков, таких, что } T_i\in(t_m,\ t_{m+1}] \text{ и } \overline{d}_{T_i}\in B\Big). \quad (1.10)$$

В силу того, что функции $c_i(d^i)$ и $\rho_j(y_j, d^j)$, $i,j=\overline{1,k}$, являются непрерывными, можно взять $\varepsilon>0$ такое, что

$$P\Big(\sum_{j=1}^{k}\rho_j(Y_j, d^j)\ge\varepsilon\Big) > 0 \text{ для любых параметров перестрахования } \overline{d}\in B.$$

При этом у данной вероятности есть строго положительная нижняя грань по параметрам перестрахования $\overline{d}\in B$. А значит, существует $\delta>0$, такое, что правая часть (1.10) будет не меньше δ. Для данного $\delta>0$ и для $t_m(\omega)<\infty$, для которого выполнено условие $\int_{t_m(\omega)}^{t_m(\omega)+1}\mathbb{I}_{\{\overline{d}_s\in B\}}ds > \mathfrak{q}$, мы имеем

$$E(\mathbb{I}_{\{t_m<\infty\}\,\cap\,\{X^{\overline{d}}_{t_m+1}\le a-\varepsilon\}}|\Sigma_m)(\omega) \ge \delta.$$

Таким образом, мы окончательно получаем, что для всех $m \geq 1$

$$E(\mathbb{I}_{\{t_m<\infty\} \,\cap\, \{X^{\overline{d}}_{t_m+1} \leq a-\varepsilon\}} - \delta \mathbb{I}_{\{t_m<\infty\}} | \Sigma_m) \geq 0 \ \text{ п.н.} \tag{1.11}$$

Действительно, для тех $\omega \in \Omega$, для которых $t_m(\omega) < \infty$, данное неравенство выполняется в силу рассуждений, приведенных выше. Для тех же $\omega \in \Omega$, для которых $t_m(\omega) = \infty$, обе части (1.11) равны нулю и неравенство также остается справедливым.

Рассмотрим теперь случайные величины

$$W_m = \mathbb{I}_{\{t_m<\infty\} \,\cap\, \{X^{\overline{d}}_{t_m+1} \leq a-\varepsilon\}}, \quad Z_m = \delta \mathbb{I}_{\{t_m<\infty\}}, \quad A_n = \sum_{m=1}^{n} (W_m - Z_m). \tag{1.12}$$

Заметим, что $A_1, \ldots, A_n$ являются Σ_{n+1}–измеримыми. Покажем, что в силу (1.11) процесс $\{A_n\}_{n \geq 1}$ является субмартингалом относительно фильтрации $\widetilde{\Sigma}_n$, такой, что $\widetilde{\Sigma}_n \equiv \Sigma_{n+1}$:

$$\begin{aligned} E(A_{n+1}|\widetilde{\Sigma}_n) = E(A_{n+1}|\Sigma_{n+1}) = E(A_n + W_{n+1} - Z_{n+1}|\Sigma_{n+1}) = A_n + E(W_{n+1} - Z_{n+1}|\Sigma_{n+1}) = \\ = A_n + E(\mathbb{I}_{\{t_{n+1}<\infty\} \,\cap\, \{X^{\overline{d}}_{t_{n+1}+1} \leq a-\varepsilon\}} - \delta \mathbb{I}_{\{t_{n+1}<\infty\}}|\Sigma_{n+1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда из леммы 1.15, приведенной в книге [60], следует, что верно равенство

$$P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \infty, \ \sum_{m=1}^{\infty} W_m < \infty\Big) = 0, \tag{1.13}$$

а значит,

$$P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \infty, \ \sum_{m=1}^{\infty} W_m = \infty\Big) + P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} Z_m < \infty, \ \sum_{m=1}^{\infty} W_m < \infty\Big) = 1,$$

так как случай $\sum_{m=1}^{\infty} Z_m < \infty$ и $\sum_{m=1}^{\infty} W_m = \infty$ невозможен. Событие $\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \infty$, $\sum_{m=1}^{\infty} W_m = \infty$ означает, что величин t_m, для которых выполняется только условие $t_m < \infty$, и величин t_m, таких, что одновременно $t_m < \infty$ и $X^{\overline{d}}_{t_m+1} \leq a - \varepsilon$, бесконечное количество. Другими словами, $\varliminf\limits_{t\to\infty} X^{\overline{d}}_t < a$ и $\varliminf\limits_{t\to\infty} X^{\overline{d}}_t \leq a - \varepsilon$. В то же время

$$\begin{aligned} P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} W_m = \infty | \sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \infty\Big) = \frac{P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \infty, \ \sum_{m=1}^{\infty} W_m = \infty\Big)}{P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \infty\Big)} = \\ = \frac{P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \infty, \ \sum_{m=1}^{\infty} W_m = \infty\Big) + P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \infty, \ \sum_{m=1}^{\infty} W_m < \infty\Big)}{P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \infty\Big)} = 1, \end{aligned}$$

то есть если $\varliminf\limits_{t\to\infty} X^{\overline{d}}_t < a$, то с вероятностью, равной 1, $\varliminf\limits_{t\to\infty} X^{\overline{d}}_t \leq a - \varepsilon$. С другой стороны, событие $\sum_{m=1}^{\infty} Z_m < \infty$, $\sum_{m=1}^{\infty} W_m < \infty$ означает, что процесс $X^{\overline{d}}_t$ опустился ниже уровня

a только конечное количество раз, но тогда с вероятностью 1 процесс $X_t^{\overline{d}}$ опустится ниже $a + \varepsilon/2$ тоже только конечное количество раз (иначе мы получим противоречие с (1.13)). В силу произвольного выбора параметра $a > 0$ мы можем сделать вывод, что с вероятностью, равной 1, либо происходит разорение компании, либо $X_t^{\overline{d}} \to \infty$ при $t \to \infty$. $\square$

Итак, приступим теперь к доказательству основной теоремы данного раздела.

Теорема 1.2. *Пусть $g(x)$ — единственное решение уравнения (1.4), такое, что $g(0) = 1$. Тогда $g(x) = \delta(x)/\delta(0) = \delta(x)g(\infty)$, при этом оптимальная стратегия перестрахования имеет вид $\overline{d}_t^* = \overline{d}^*(X_t^{\overline{d}^*})$, где $\overline{d}^*(x)$ — это точка, в которой достигается инфимум в уравнении (1.4), а $X_t^{\overline{d}^*}$ — это процесс капитала страховой компании, использующей оптимальную стратегию перестрахования $\overline{d}_t^*$.*

Доказательство. Пусть $\overline{d}_t$ — произвольная стратегия перестрахования вида $\overline{d}_t = \overline{d}(X_t^{\overline{d}})$. Из леммы 1.1 и теоремы об остановке следует, что случайный процесс

$$g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge t}) - \int_0^{\tau^{\overline{d}}\wedge t} \left[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) + \right.$$
$$\left. + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \dots, y_k) \right] ds$$

является мартингалом. Отсюда мы имеем, что процесс $g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge t})$ в свою очередь является супермартингалом. Действительно, пусть $v < t$. Тогда

$$E\Big(g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge t}) \;\Big|\; \mathcal{F}_v^{X^{\overline{d}}}\Big) = E\left(g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge t}) - \int_0^{\tau^{\overline{d}}\wedge t} \left[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) + \right.\right.$$
$$\left. + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \dots, y_k) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) \right] ds \; + \int_0^{\tau^{\overline{d}}\wedge t} \left[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) + \right.$$
$$\left.\left. + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \dots, y_k) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) \right] ds \;\middle|\; \mathcal{F}_v^{X^{\overline{d}}} \right) =$$
$$= g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge v}) - \int_0^{\tau^{\overline{d}}\wedge v} \left[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) + \right.$$
$$\left. + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \dots, y_k) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) \right] ds +$$
$$+ E\left(\int_0^{\tau^{\overline{d}}\wedge t} \left[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \dots, y_k) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) \right] ds \;\middle|\; \mathcal{F}_v^{X^{\overline{d}}} \right) =$$

$$= g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge v}) + E\Bigg(\int_0^{\tau^{\overline{d}}\wedge t} \Bigg[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) +$$

$$+ \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \ldots, y_k) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) \Bigg] ds -$$

$$- \int_0^{\tau^{\overline{d}}\wedge v} \Bigg[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) +$$

$$+ \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \ldots, y_k) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) \Bigg] ds \;\Bigg|\; \mathcal{F}_v^{X^{\overline{d}}} \Bigg) =$$

$$= g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge v}) + E\Bigg(\int_{\tau^{\overline{d}}\wedge v}^{\tau^{\overline{d}}\wedge t} \Bigg[\sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) g'(X_s^{\overline{d}}) +$$

$$+ \lambda \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(X_s^{\overline{d}} - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d_s^j)) dF(y_1, \ldots, y_k) - \lambda g(X_s^{\overline{d}}) \Bigg] ds \;\Bigg|\; \mathcal{F}_v^{X^{\overline{d}}} \Bigg) \le g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge v})$$

в силу равенства (1.1) (т.к. подынтегральная функция [...] меньше либо равна нуля почти наверное). Следовательно,

$$E\left(g(X^{\overline{d}}_{\tau^{\overline{d}}\wedge t})\right) = E\left(g(X_t^{\overline{d}})\; \mathbb{I}_{\{\tau^{\overline{d}} > t\}}\right) \le g(x). \tag{1.14}$$

Аналогично можно доказать, что процесс $g(X^{\overline{d}^*}_{\tau^{\overline{d}^*}\wedge t})$ является мартингалом, а значит,

$$E\left(g(X^{\overline{d}^*}_{\tau^{\overline{d}^*}\wedge t})\right) = E\left(g(X_t^{\overline{d}^*})\; \mathbb{I}_{\{\tau^{\overline{d}^*} > t\}}\right) = g(x). \tag{1.15}$$

Устремим теперь t к бесконечности (функция $g(x)$ ограничена, поэтому мы можем сделать это без опасений). В силу леммы 1.2 мы имеем, что $X_t^{\overline{d}} \to \infty$, если $\tau^{\overline{d}} = \infty$. Поэтому мы получаем из (1.14) и (1.15), что $g(x) \ge g(\infty) P(\tau^{\overline{d}} = \infty) = g(\infty)\delta^{\overline{d}}(x)$, т.е. $\delta^{\overline{d}}(x) \le g(x)/g(\infty)$, и $\delta^{\overline{d}^*}(x) = g(x)/g(\infty)$. Отсюда следует, что $\delta^{\overline{d}^*}(x) = \delta(x) = g(x)/g(\infty)$ и оптимальной стратегией является $\overline{d}_t^*$. При этом также верно равенство $\delta(0) = 1/g(\infty)$, которое получается после подстановки $x = 0$. □

§1.5 Численные результаты

§1.5.1 Случай двух независимых рисков

Рассмотрим частный случай описанной выше модели. Пусть договор страхования покрывает два риска. Размеры убытков по данным рискам Y_1 и Y_2 являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами соответственно с параметрами β_1 и β_2. К первому риску применяется перестрахование эксцедента убытка, ко второму — квотное. Метод последовательных приближений, описанный в доказательстве теоремы 1.1 и основанный на соотношении

$$f_n(x) = \inf_{\overline{d}\in\widetilde{D}} \left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)} \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j,d^j)}(x) + \int\limits_0^x f_{n-1}(z) \left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j,d^j)}(x-z) \right) dz \right) \right], \; n \geq 1,$$

позволяет строить графики функции $\delta(x)$ и оптимальных стратегий перестрахования для фиксированных числовых значений параметров модели. Для таких построений необходимо знать явный вид $\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i)$ и $F_{\sum_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j,d^j)}(x)$. Покажем, как данные выражения будут выглядеть в случае $k = 2$ независимых экспоненциально распределенных рисков. Пусть для удобства параметр перестрахования эксцедента убытка $d^1 = d$, а параметр квотного перестрахования $d^2 = a$, где $a \in (0, 1]$ (случай $a = 0$ будет упомянут позднее). Тогда

$$F_{\rho_1(Y_1,d^1)}(x) = F_{\min(Y_1,d)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\beta_1 x}, & x \in [0, d), \\ 1, & x \geq d, \end{cases}$$

и

$$F_{\rho_2(Y_2,d^2)}(x) = F_{aY_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\beta_2 x a^{-1}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой свертки, мы получим явный вид $F_{\sum_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j,d^j)}(x)$. А именно, пусть сначала $x \in [0, d)$. При таких значениях x мы имеем:

$$\begin{aligned} F_{\sum_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j,d^j)}(x) &= F_{\rho_1(Y_1,d^1)+\rho_2(Y_2,d^2)}(x) = F_{\min(Y_1,d)+aY_2}(x) = \\ &= \int_0^x \left(1 - e^{-\beta_1(x-z)}\right) \beta_2 a^{-1} e^{-\beta_2 z a^{-1}} dz = 1 - e^{-\beta_2 x a^{-1}} + \frac{\beta_2}{a\beta_1 - \beta_2} \left(e^{-\beta_1 x} - e^{-\beta_2 x a^{-1}} \right). \end{aligned}$$

Если же $x \geq d$, то

$$\begin{aligned} F_{\sum_{j=1}^{k} \rho_j(Y_j,d^j)}(x) &= F_{\min(Y_1,d)+aY_2}(x) = \\ &= \int_0^{x-d} \beta_2 a^{-1} e^{-\beta_2 z a^{-1}} dz + \int_{x-d}^{x} \left(1 - e^{-\beta_1(x-z)}\right) \beta_2 a^{-1} e^{-\beta_2 z a^{-1}} dz = \\ &= 1 - e^{-\beta_2 x a^{-1}} + \frac{\beta_2}{a\beta_1 - \beta_2} \left(e^{-\beta_2 a^{-1}(x-d) - \beta_1 d} - e^{-\beta_2 x a^{-1}} \right). \end{aligned}$$

Итого окончательно делаем вывод, что в случае двух независимых экспоненциальных рисков с параметрами β_1 и β_2 верно равенство

$$F_{\min(Y_1,d)+aY_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\beta_2 x a^{-1}} + \frac{\beta_2}{a\beta_1 - \beta_2} \left(e^{-\beta_1 x} - e^{-\beta_2 x a^{-1}} \right), & x \in [0, d), \\ 1 - e^{-\beta_2 x a^{-1}} + \frac{\beta_2}{a\beta_1 - \beta_2} \left(e^{-\beta_2 a^{-1}(x-d) - \beta_1 d} - e^{-\beta_2 x a^{-1}} \right), & x \geq d. \end{cases}$$

Заметим, что данная формула будет справедлива и для предельного значения параметра $a = 0$, так как подставив $a = 0$, мы в пределе получим в точности $F_{\min(Y_1,d)}(x)$.

Вид суммы интенсивностей поступления страховых премий страховщику $\sum_{i=1}^{k} c_i(d^i) = c_1(d^1)+c_2(d^2) = c_1(d)+c_2(a)$ зависит от используемых принципов премий. Если страховщик и перестраховщик используют для обоих рисков премиальный принцип среднего с нагрузками соответственно θ и θ_1 (где $\theta_1 > \theta$), то $c_1(d)$ и $c_2(a)$ выглядят следующим образом:

$$c_1(d) = \frac{\lambda}{\beta_1}\left((1+\theta) - (1+\theta_1)e^{-\beta_1 d}\right),$$

$$c_2(a) = \frac{\lambda}{\beta_2}\left((1+\theta) - (1+\theta_1)(1-a)\right).$$

Перейдем к численным результатам. Пусть параметр пуассоновского потока $\lambda = 1$, параметры распределения размеров требований $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 1.05$, нагрузки страховщика и перестраховщика соответственно равны $\theta = 0.2$, $\theta_1 = 0.21$. На рис. 1.1 изображены график $\delta(x)$ (верхняя жирная кривая) и последовательные приближения для данной функции. На рис. 1.2 и 1.3 приведены результаты для параметров оптимальных стратегий перестрахования (эксцедента убытка и квотного, соответственно). Таким образом, мы получаем, что до тех пор, пока капитал страховой компании не превышает значения, примерно равного 0.6, оптимальное решение компании заключается в том, чтобы оба риска полностью оставить себе и не использовать перестрахование. Когда же капитал становится больше 0.6, появляется смысл применять перестрахование к обоим рискам. Более того, первый риск рекомендуется полностью отдать в перестрахование.

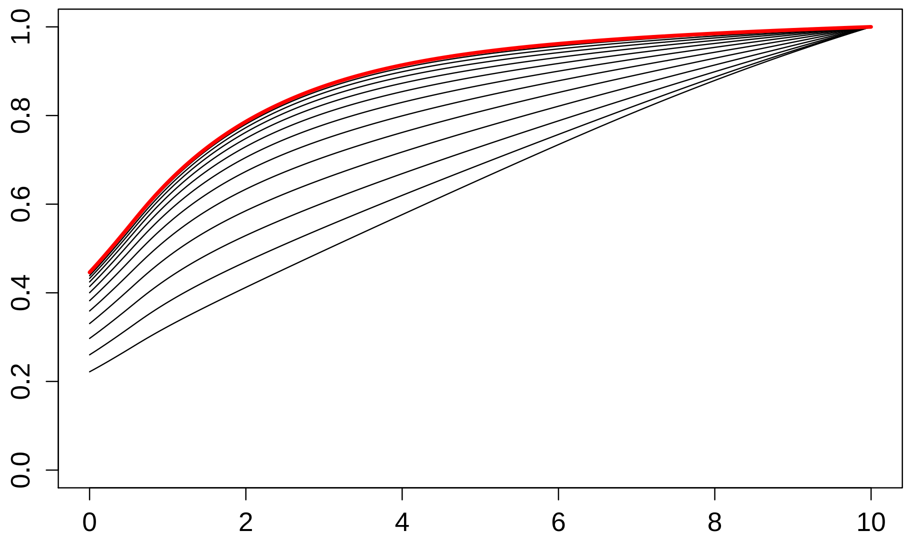

Рис. 1.1: Вероятность неразорения $\delta(x)$ в случае независимых рисков

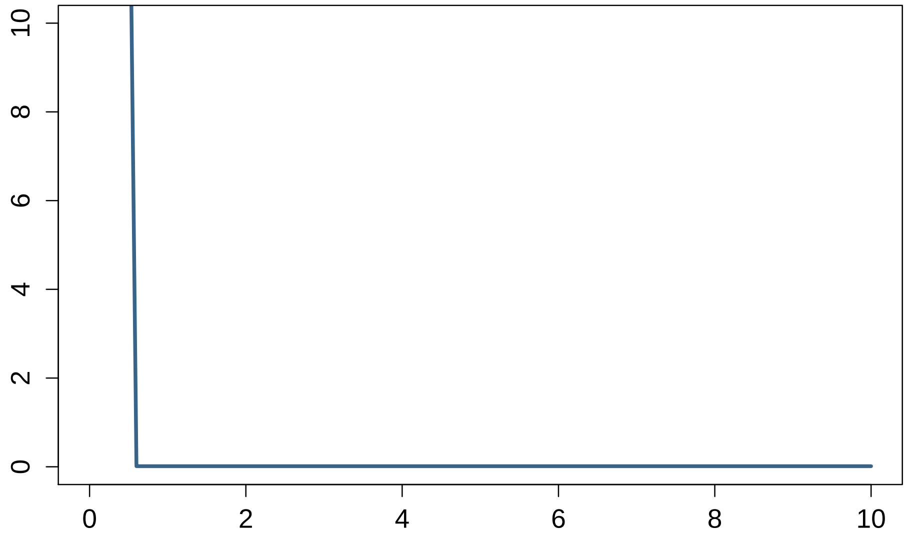

Рис. 1.2: Оптимальный параметр перестрахования эксцедента убытка как функция от капитала компании в случае независимых рисков

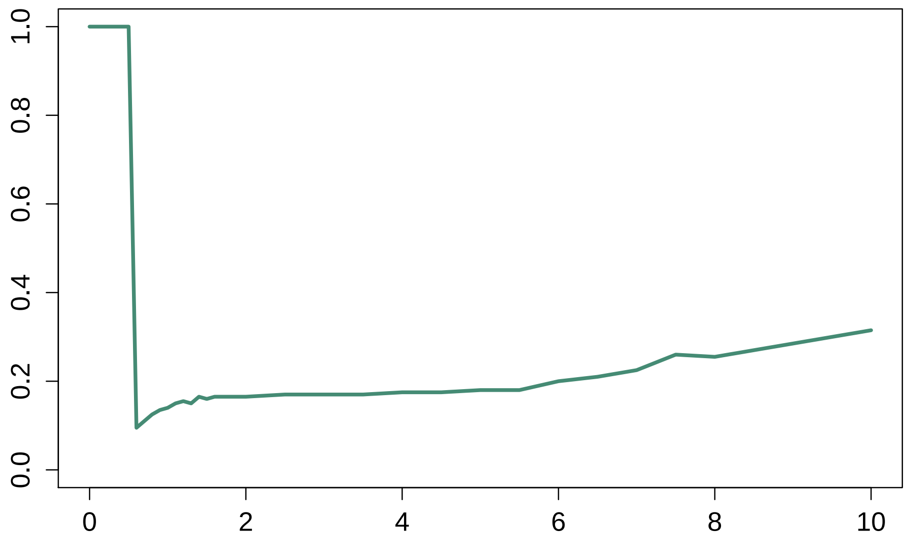

Рис. 1.3: Оптимальный параметр квотного перестрахования как функция от капитала компании в случае независимых рисков

§1.5.2 Случай двух зависимых рисков

Рассмотрим теперь модель с договорами страхования, покрывающими два риска, размеры убытков по которым Y_1 и Y_2 являются зависимыми случайными величинами. Перед тем, как перейти к формулировке остальных предположений рассматриваемой модели, опишем метод построения совместного распределения зависимых случайных величин, который мы будем использовать в текущем разделе. Данный метод основан на понятии копулы. За основу при изучении теории копул мы взяли определения и факты из книги [56]. В частности, одно из эквивалентных определений двумерных копул, приведенных в [56], имеет вид

Определение 1.1. *Двумерной копулой называется функция двух аргументов* $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, *обладающая следующими свойствами:*
1. для любых $u, v \in [0,1]$ *справедливы равенства*

$$C(u,0) = 0 = C(0,v),$$

$$C(u,1) = u, \; C(1,v) = v;$$

2. для любых $u_1, v_1, u_2, v_2 \in [0,1]$, *таких, что* $u_1 \leq u_2$ *и* $v_1 \leq v_2$, *выполняется неравенство*

$$C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0.$$

Связь между понятием двумерной копулы и совместными функциями распределения устанавливает теорема Скляра (см. [56]). Отметим, что иногда данная теорема формулируется без какого-либо упоминания о случайных величинах. Так, например, в книге [56] предполагается, что функцией распределения может быть названа любая неубывающая функция $F(x)$, определенная на $\overline{\mathbb{R}}$ и удовлетворяющая равенствам $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Аналогичным образом через набор свойств в [56] определяются и совместные функции распределения (см. определение 2.3.2). В то же время теорема Скляра остается справедливой и для функций распределения в нашем обычном понимании, т.е. функций, соответствующих некоторым случайным величинам.

Теорема (Sklar, 1959). *Пусть* $H(x,y)$ *— совместная функция распределения с одномерными маргинальными функциями распределения* $F(x) = H(x,+\infty)$ *и* $G(y) = H(+\infty,y)$. *Тогда существует двумерная копула* C, *такая, что при всех* $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ *верно равенство*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)). \tag{1.16}$$

При этом если функции $F(x)$ *и* $G(y)$ *являются непрерывными, то такая копула* C *единственна, иначе* C *определяется единственным образом на* $E(F) \times E(G)$, *где* $E(F)$ *и* $E(G)$ *— это области значений соответственно функций* F *и* G.

Кроме того, верно и обратное: если C *— двумерная копула, а* $F(x)$ *и* $G(y)$ *являются функциями распределения, то* $H(x,y)$, *определенная с помощью равенства* (1.16), *будет являться совместной функцией распределения с маргинальными функциями распределения* $F(x)$ *и* $G(y)$.

Далее под C_{XY} мы будем понимать двумерную копулу, с помощью которой задается совместная функция распределения случайных величин X и Y. Таким образом, выбрав некоторую копулу $C_{Y_1Y_2}$, мы можем с помощью теоремы Скляра построить совместную функцию распределения случайных величин Y_1 и Y_2, представляющих собой убытки по каждому из двух застрахованных рисков. Однако стоит учитывать, что согласно нашей модели к данным рискам может быть применено перестрахование. А именно, будем рассматривать модель, в которой к обоим рискам применяется квотное перестрахование с параметрами соответственно $d^1 = a_1$ и $d^2 = a_2$. После применения перестрахования мы уже имеем дело не с Y_1 и Y_2, а со случайными величинами a_1Y_1 и a_2Y_2. При этом далее будем предполагать, что Y_i являются абсолютно непрерывными неотрицательными случайными величинами с плотностями $p_{Y_i}(x)$, а значит, случайные величины a_iY_i также имеют плотности $p_{a_iY_i}(x) = a_i^{-1}p_{Y_i}(a_i^{-1}x)$, $i = 1, 2$. Здесь мы считаем, что $a_i \neq 0$, случаи $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$ будут упомянуты позднее.

Определить вид копулы $C_{a_1Y_1\,a_2Y_2}$ нам поможет следующая теорема (обозначенная в книге [56] как теорема 2.4.3). Под непрерывными случайными величинами здесь подразумеваются случайные величины, имеющие непрерывные функции распределения.

Теорема ([56], теорема 2.4.3)**.** *Пусть X и Y — непрерывные случайные величины, совместное распределение которых задано с помощью копулы C_{XY}. Пусть также $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ — это строго возрастающие функции, заданные соответственно на области значений X и области значений Y. Тогда справедливо равенство*

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}.$$

Другими словами, копула C_{XY} является инвариантной относительно строго возрастающих преобразований X и Y.

Исходя из данной теоремы мы можем сделать вывод, что при $a_1, a_2 \in (0, 1]$ и при всех значениях $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ справедливо равенство

$$C_{a_1Y_1\,a_2Y_2}\left(F_{a_1Y_1}(x), F_{a_2Y_2}(y)\right) = C_{Y_1Y_2}\left(F_{Y_1}(a_1^{-1}x), F_{Y_2}(a_2^{-1}y)\right) = C_{Y_1Y_2}\left(F_{a_1Y_1}(x), F_{a_2Y_2}(y)\right).$$

Далее будем использовать копулу $C_{a_1Y_1\,a_2Y_2}$ для нахождения функции распределения суммы случайных величин a_1Y_1 и a_2Y_2, то есть для нахождения функции $F_{\rho_1(Y_1,d^1)+\rho_2(Y_2,d^2)}(x) = F_{a_1Y_1+a_2Y_2}(x)$. Для этого нам также понадобится понятие плотности копулы (см. [56] и [11]).

Определение 1.2. *Пусть $C(u, v)$ — двумерная копула и пусть для $C(u, v)$ верно представление*

$$C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s, t)\, dt ds.$$

Тогда функция

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

называется плотностью копулы $C(u, v)$.

С плотностями копул связан важный факт (см. [11]): если копула C_{XY} соответствует некоторым случайным величинам X и Y, имеющим функции распределения $F(x)$ и $G(y)$ и плотности распределения $p_X(x)$ и $p_Y(y)$, то плотность данной копулы c_{XY} связана с совместной плотностью $p_{XY}(x,y)$ величин X и Y с помощью соотношения

$$c_{XY}(F(x),G(y)) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)}.$$

Итак, мы предполагаем, что существует плотность копулы $C_{a_1Y_1\,a_2Y_2}$, которая вычисляется как $c_{a_1Y_1\,a_2Y_2}(u,v) = \frac{\partial^2 C_{a_1Y_1\,a_2Y_2}(u,v)}{\partial u \partial v}$ и удовлетворяет соотношению

$$c_{a_1Y_1\,a_2Y_2}\left(F_{a_1Y_1}(x), F_{a_2Y_2}(y)\right) = \frac{p_{a_1Y_1\,a_2Y_2}(x,y)}{p_{a_1Y_1}(x)p_{a_2Y_2}(y)},$$

где $p_{a_1Y_1\,a_2Y_2}(x,y)$ — это совместная плотность распределения случайных величин a_1Y_1 и a_2Y_2. При таких условиях мы можем сделать вывод, что в случае применения квотного перестрахования к обоим рискам верна цепочка равенств (см. похожие рассуждения в [42]):

$$\begin{aligned} F_{\rho_1(Y_1,d^1)+\rho_2(Y_2,d^2)}(z) = F_{a_1Y_1+a_2Y_2}(z) = \iint\limits_{x+y\le z} p_{a_1Y_1\,a_2Y_2}(x,y)dxdy = \\ = \int\limits_0^z \int\limits_0^{z-y} c_{a_1Y_1\,a_2Y_2}\left(F_{a_1Y_1}(x), F_{a_2Y_2}(y)\right) p_{a_1Y_1}(x)p_{a_2Y_2}(y)dxdy = \\ = (a_1a_2)^{-1}\int\limits_0^z \int\limits_0^{z-y} c_{Y_1Y_2}\left(F_{Y_1}(a_1^{-1}x), F_{Y_2}(a_2^{-1}y)\right) p_{Y_1}(a_1^{-1}x)p_{Y_2}(a_2^{-1}y)dxdy. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Таким образом, выбрав некоторую копулу $C_{Y_1Y_2}$, описывающую характер зависимости величин Y_1 и Y_2, с помощью формулы (1.17) мы можем определить вид функции $F_{a_1Y_1+a_2Y_2}(z)$, который необходимо знать для использования метода последовательных приближений, упомянутого в предыдущем разделе и основанного на соотношении

$$f_n(x) = \inf_{\overline{d}\in\widetilde{D}}\left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^i)}\left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^j)}(x) + \int\limits_0^x f_{n-1}(z)\left(1 - F_{\sum\limits_{j=1}^k \rho_j(Y_j,d^j)}(x-z)\right)dz\right)\right],\ n\ge 1.$$

Для моделирования численных примеров мы выбрали двумерную копулу Гумбеля-Хоугаарда (см. [11] и [56]) вида

$$C(u,v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\gamma + (-\ln v)^\gamma\right]^{1/\gamma}\right\},\quad \gamma\ge 1.$$

Изменяя параметр данной копулы γ, можно моделировать различный характер зависимости случайных величин. При $\gamma = 1$ мы получаем копулу вида $C(u,v) = uv$, которая соответствует случаю независимости. Плотность копулы Гумбеля-Хоугаарда $c(u,v)$ выглядит следующим образом:

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} =$$
$$= C(u,v)(uv)^{-1}\left((-\ln u)^\gamma + (-\ln v)^\gamma\right)^{-2+1/\gamma} (\ln u \ln v)^{\gamma-1} \left(\left[(-\ln u)^\gamma + (-\ln v)^\gamma\right]^{-1/\gamma} + \gamma - 1 \right).$$

Напомним, что формулу (1.17) мы получили в предположении $a_i \neq 0$, $i = 1, 2$. В случае, когда $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ мы имеем

$$F_{a_1 Y_1 + a_2 Y_2}(z) = F_{a_2 Y_2}(z) = F_{Y_2}(a_2^{-1} z).$$

Аналогично при $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$

$$F_{a_1 Y_1 + a_2 Y_2}(z) = F_{a_1 Y_1}(z) = F_{Y_1}(a_1^{-1} z).$$

Случай $a_1 = a_2 = 0$ мы не рассматриваем, так как в рамках метода последовательных приближений мы ограничиваемся поиском инфимума только на области $\widetilde{D} = \{\overline{d} \in D : \sum_{i=1}^k c_i(d^i) > 0\} = \{a_1, a_2 \in [0,1] : c_1(a_1) + c_2(a_2) > 0\}$. Явный вид $c_1(a_1) + c_2(a_2)$ зависит от используемых принципов премий. Если страховщик и перестраховщик используют премиальный принцип среднего с нагрузками соответственно θ и θ_1 (где $\theta_1 > \theta$), то в рамках модели с квотным перестрахованием обоих рисков $c_1(a_1)$ и $c_2(a_2)$ выглядят следующим образом:

$$c_1(a_1) = \lambda E Y_1 \left((1+\theta) - (1+\theta_1)(1-a_1)\right),$$

$$c_2(a_2) = \lambda E Y_2 \left((1+\theta) - (1+\theta_1)(1-a_2)\right).$$

Если $a_1 = a_2 = 0$, то мы имеем полное перестрахование всех рисков и отрицательную суммарную интенсивность поступления премии.

Приведем теперь полученные численные результаты. Как и в предыдущем разделе, мы предположили, что Y_1 и Y_2 являются экспоненциально распределенными случайными величинами с параметрами β_1 и β_2. В качестве числовых значений коэффициентов мы взяли $\beta_1 = 0.7$, $\beta_2 = 1.4$, $\lambda = 1$, $\theta = 0.2$, $\theta_1 = 0.21$. На рис. 1.4 изображен график $\delta(x)$ в случае зависимых рисков (параметр копулы $\gamma = 3$, пунктирная линия) и график $\delta(x)$ в случае независимых рисков ($\gamma = 1$, сплошная линия). Согласно данным графикам, появление зависимости между рисками негативно сказывается на вероятности неразорения. На рис. 1.5 и 1.6 приведены результаты для параметров оптимальных стратегий квотного перестрахования для первого и второго риска соответственно в случае наличия у данных рисков зависимости (параметр копулы $\gamma = 3$). Как и в предыдущем разделе, мы получили, что пока капитал компании остается небольшим, оптимальным решением является не применять перестрахование ни к одному из рисков. Когда же капитал становится больше значения, примерно равного 1.0, появляется смысл использовать перестрахование для обоих рисков. При этом к риску с бо́льшим математическим ожиданием страховщику рекомендуется применять квотное перестрахование с меньшим параметром, то есть рекомендуется оставлять бóльшую долю в среднем маленьких рисков и меньшую долю в среднем бóльших рисков.

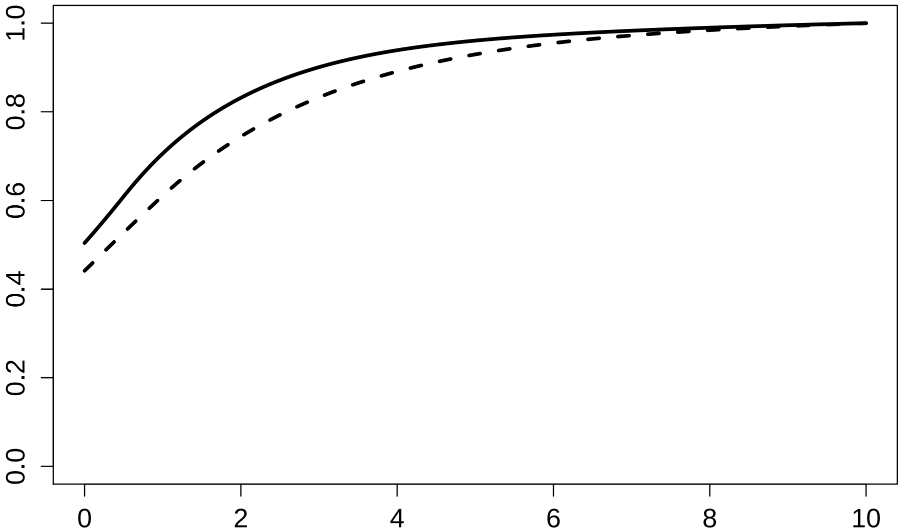

Рис. 1.4: Вероятность неразорения $\delta(x)$ в случае зависимых рисков ($\gamma = 3$, пунктирная линия) и в случае независимых рисков ($\gamma = 1$, сплошная линия)

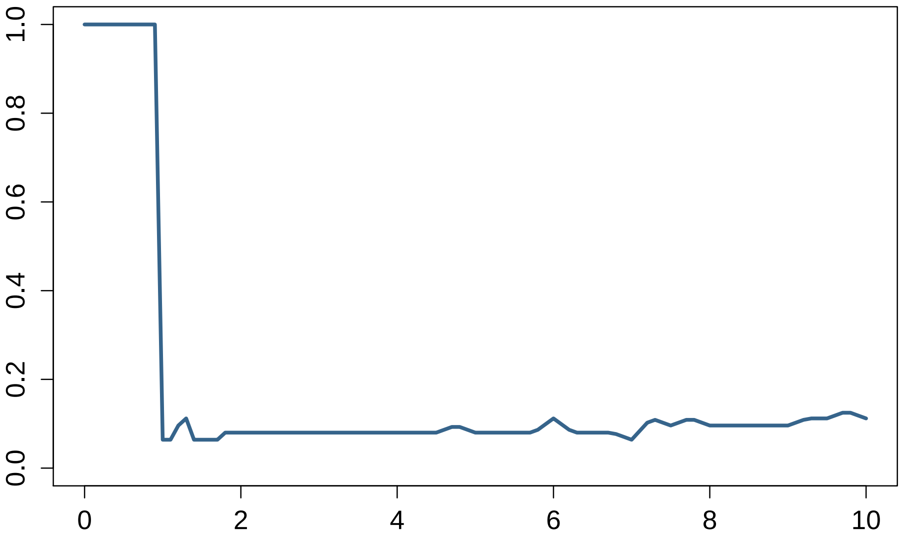

Рис. 1.5: Оптимальный параметр квотного перестрахования первого риска как функция от капитала компании в случае зависимых рисков (параметр копулы $\gamma = 3$)

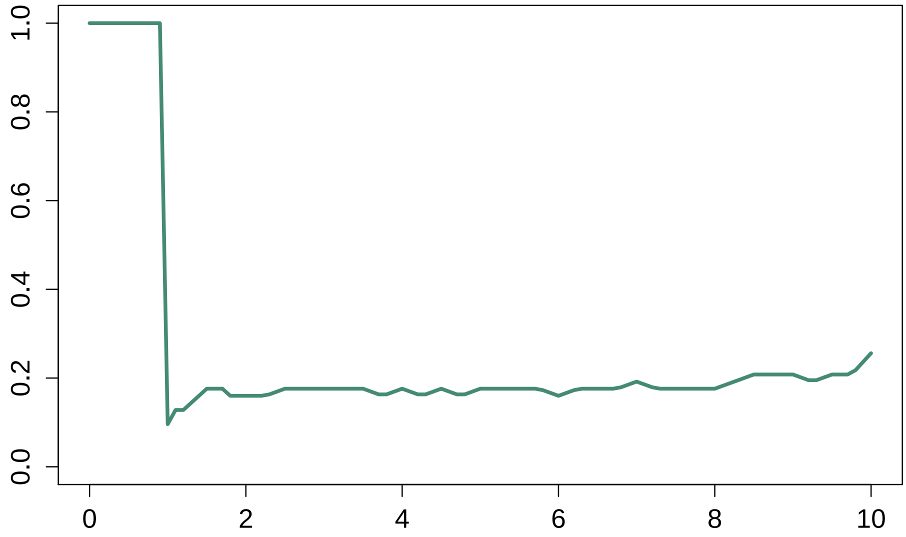

Рис. 1.6: Оптимальный параметр квотного перестрахования второго риска как функция от капитала компании в случае зависимых рисков (параметр копулы $\gamma = 3$)

Глава 2. Дисконтированные дивиденды страховых компаний, использующих перестрахование

В данной главе исследуется модель работы страховой компании, одновременно использующей перестрахование и выплачивающей дивиденды своим акционерам. Рассматривается программа перестрахования, включающая в себя комбинацию квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика. В первом параграфе главы приводится описание модели и определяется цель дальнейших исследований. Основным предметом для изучения является математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения компании. Данная величина как функция от начального капитала удовлетворяет интегро-дифференциальным уравнениям, вид которых устанавливается во втором параграфе главы. Частные случаи распределения требований, а именно, экспоненциальное и равномерное распределения, рассматриваются соответственно в третьем и четвертом параграфах. Для обоих распределений удается свести интегро-дифференциальные уравнения для математического ожидания дисконтированных дивидендов к дифференциальным уравнениям второго порядка и определить алгоритм поиска и вид решений данных уравнений в зависимости от соотношения между начальным капиталом компании и другими параметрами модели.

§2.1 Описание модели и постановка задачи

В первой главе мы изучали общую модель, в рамках которой допускалась возможность выплат сразу по нескольким рискам в пределах одного страхового случая и допускалась возможность динамического выбора параметров перестрахования, но мы не рассматривали страховую компанию как акционерное общество. Во второй главе мы продолжим изучение механизма деятельности страховой компании в предположениях модели Крамера-Лундберга, но теперь нас будет интересовать не вероятность разорения, а величина выплаченных дивидендов до момента разорения. В данной главе мы будем полагать, что в рамках одного договора застрахован один риск и что стратегия перестрахования определяется в момент времени $t = 0$ и не изменяется со временем. Благодаря таким допущениям для нескольких распределений требований появится возможность получить дифференциальные уравнения второго порядка для математического ожидания выплаченных дивидендов и найти явный вид их решений при некоторых соотношениях параметров модели.

Итак, возьмем за основу модель риска Крамера-Лундберга. В рамках данной модели капитал страховой компании в момент времени t выглядит следующим образом:

$$X_t = x + ct - S_t, \ t \geq 0,$$

где c — интенсивность поступления премии, $S_t = \sum\limits_{i=1}^{N_t} X_i$ — составной пуассоновский процесс с параметром λ. Случайные величины $\{X_i\}$, обозначающие размеры требований, независимы, одинаково распределены и имеют функцию распределения $F(y)$ и плотность $p(y)$. Как видно из перечисленных условий, классическая модель риска Крамера-Лундберга не предполагает возможность выплаты дивидендов, поэтому мы будем далее считать, что капитал страховой компании имеет вид $U_t = X_t - D_t$, где D_t — это совокупные дивиденды, выплаченные к моменту времени t. Случайная величина $T = \inf[t \geq 0 : \ U_t < 0]$ является тогда моментом разорения акционерной страховой компании. Будем также считать, что дивиденды выплачиваются в соответствии с барьерной стратегией с постоянным уровнем барьера b. Напомним, что в рамках данной стратегии дивиденды не выплачиваются, если $U_t < b$, в то время как дивиденды выплачиваются с интенсивностью c, если $U_t = b$ (см. рис. 2.1). Если же $U_t > b$, то сразу в качестве дивидендов выплачивается сумма, равная $U_t - b$. Без ограничения общности будем далее рассматривать только $x \leq b$ и полагать в соответствии с этим условием, что капитал компании U_t никогда не превышает b.

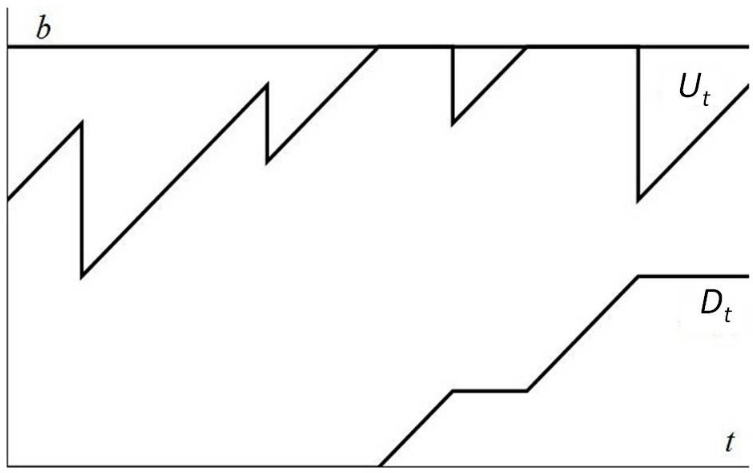

Рис. 2.1: Процесс капитала U_t и процесс D_t выплаченных дивидендов в случае применения барьерной дивидендной стратегии с постоянным уровнем барьера b

Согласно работам [26] и [40], математическое ожидание суммарно выплаченных до разорения компании дисконтированных дивидендов $V(x,b) = E\left[\int\limits_0^T e^{-\delta t} dD_t\right]$ как функция от x удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$cV'(x,b) - (\lambda + \delta)V(x,b) - \lambda \int\limits_0^x V(y,b)dF(x-y) = 0, \quad 0 < x < b, \tag{2.1}$$

и граничному условию

$$V'(b,b) = 1. \tag{2.2}$$

Отметим, что выбор граничного условия (2.2) может быть кратко обоснован следующим образом. Если h — это малый промежуток времени, то разность между дивидендами, выплаченными компанией с начальным капиталом, равным b, и компанией с начальным капиталом, равным $b - ch$, может быть выражена как

$$V(b,b) - V(b-ch,b) = (1-\lambda h)e^{-\delta h}ch + \lambda h\bar{o}(1). \tag{2.3}$$

Поделив равенство (2.3) на ch и устремив h к нулю, мы получим в точности условие (2.2).

Целью наших дальнейших исследований барьерных стратегий выплаты дивидендов является получение решения уравнения (2.1) для разных распределений исков в случае, когда страховая компания использует программу перестрахования, включающую в себя комбинацию двух различных типов перестрахования. Существует ряд статей, посвященных изучению процесса выплаты дивидендов страховыми компаниями, использующими перестрахование (см. [25], [47], [55]), однако во всех данных работах предполагается, что компании применяют или только квотное перестрахование, или только классическое перестрахование эксцедента убытка с неограниченной ответственностью перестраховщика. Мы же будем рассматривать более общую модель, в рамках которой страховая компания использует комбинацию квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика. А именно, будем предполагать, что страховщик заключил договор перестрахования эксцедента убытка с одним перестраховщиком, а оставшуюся часть риска перестраховал в соответствии с договором квотного перестрахования у другого перестраховщика. Пусть далее d — это уровень собственного удержания перестрахования эксцедента убытка, l — ограничение на ответственность первого перестраховщика, a — параметр квотного перестрахования. Тогда требование размера X, поступившее к страховщику, делится между страховщиком и перестраховщиками следующим образом: страховщик берет на себя обязанность выплатить часть $X_{ins} = a\big(\min(d,X) + \max(X-l-d,0)\big)$, в то время как первый перестраховщик выплачивает $X_{reins1} = \min\big(\max(X-d,0),l\big)$, а второй перестраховщик покрывает часть $X_{reins2} = (1-a)\big(\min(d,X) + \max(X-l-d,0)\big)$. Пусть далее $F_{ins}(x)$ — это функция распределения случайных величин, обозначающих части поступающих убытков, которые покрывает страховщик. Схематичный вид функции $F_{ins}(x)$ приведен на рис. 2.2 (пунктирной линией обозначен график функции распределения исходного риска $F(x)$, сплошной линией — функции распределения $F_{ins}(x)$). Пусть также $c_{ins} = c_{ins}(d,l,a)$ — это интенсивность поступления премии компании, использующей комбинацию перестрахования эксцедента убытка и квотного перестрахования с параметрами соответственно d, l и a. Явный вид c_{ins} зависит от используемых страховщиком и перестраховщиками принципов премий. Если, например, страховщик и перестраховщики используют премиальный принцип среднего

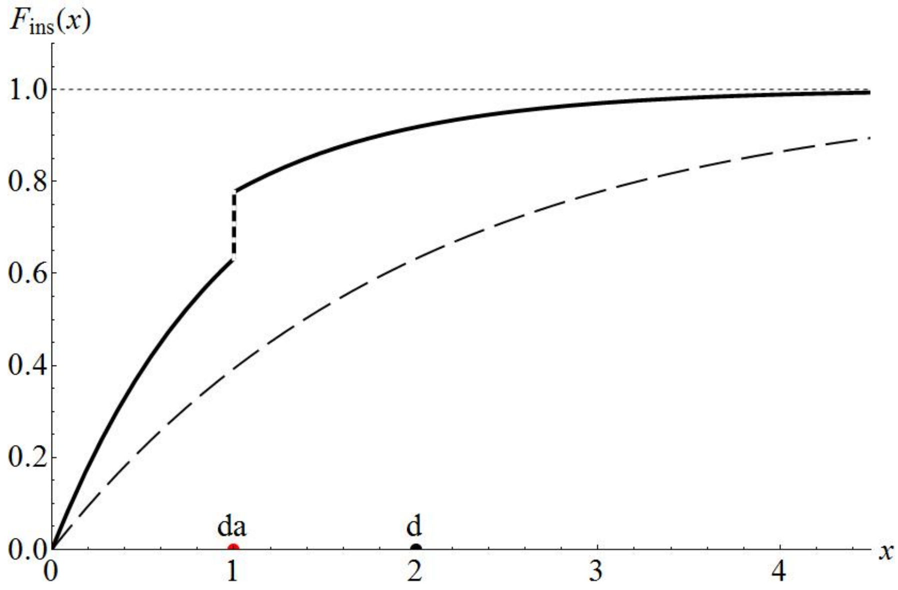

Рис. 2.2: Функция распределения риска страховщика

с нагрузками соответственно θ, θ_1 и θ_2, то c_{ins} принимает вид

$$c_{ins} = \lambda(1+\theta)p_1 - \lambda(1+\theta_1)\int\limits_d^{d+l}(1-F(x))\,dx -$$
$$- \lambda(1+\theta_2)(1-a)\left(\int\limits_0^d(1-F(x))\,dx + \int\limits_{d+l}^{\infty}(1-F(x))\,dx\right),$$

где $p_1 = \int\limits_0^{\infty} xp(x)dx = \int\limits_0^{\infty}(1-F(x))\,dx$ — это математическое ожидание исходного требования. При этом предполагается, что нагрузки θ, θ_1 и θ_2 выбраны таким образом, что премия страховщика положительна, т.е. $c_{ins} > 0$, и при этом $\theta_1 > \theta$ и $\theta_2 > \theta$. Необходимым для выполнения неравенства $c_{ins} > 0$ условием является $(1+\theta_1)-(1+\theta_2)(1-a) > 0$. Действительно, это следует из цепочки равенств

$$c_{ins} = \lambda(1+\theta)p_1 - \lambda(1+\theta_1)\int\limits_d^{d+l}(1-F(x))\,dx - \lambda(1+\theta_2)(1-a)\left(p_1 - \int\limits_d^{d+l}(1-F(x))\,dx\right) =$$
$$= \lambda(1+\theta)p_1 - \lambda(1+\theta_2)(1-a)p_1 - \lambda\left((1+\theta_1)-(1+\theta_2)(1-a)\right)\int\limits_d^{d+l}(1-F(x))\,dx =$$
$$= \lambda p_1(\theta-\theta_1) + \lambda\left((1+\theta_1)-(1+\theta_2)(1-a)\right)\left(p_1 - \int\limits_d^{d+l}(1-F(x))\,dx\right). \quad (2.4)$$

Исходя из последнего выражения для c_{ins} можно также сразу сделать вывод, что c_{ins} является убывающей функцией по параметру l и возрастающей функцией по параметрам перестрахования d и a. Далее доказательство всех результатов главы будет осуществляться для произвольного вида премии c_{ins}, не обязательно совпадающего с формулой (2.4), однако мы будем предполагать, что основные свойства премии сохраняются, а именно, $c_{ins} > 0$ и c_{ins} убывает по l и возрастает по d и a.

§2.2 Интегро-дифференциальные уравнения для математического ожидания дисконтированных дивидендов

Как было отмечено, основным предметом для изучения в текущей главе будет являться математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения компанией, использующей комбинацию перестрахования эксцедента убытка и квотного перестрахования, которое мы обозначим как $V_{ins}(x, b)$. Следующая теорема устанавливает вид интегро-дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет $V_{ins}(x, b)$ как функция от начального капитала x. В рамках формулировки и доказательства данной теоремы мы будем полагать, что $b > ad$, и будем рассматривать два случая: $0 < x < ad$ и $ad \le x < b$. Если же на самом деле верно неравенство $b \le ad$, то будет иметь смысл только единственный случай $0 < x < b \le ad$.

Теорема 2.1. *Функция $V_{ins}(x, b)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению*

$$c_{ins}V'_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V_{ins}(x,b) + \lambda a^{-1}\int\limits_0^x V_{ins}(y,b)p\left(\frac{x-y}{a}\right)dy = 0 \tag{2.5}$$

при $0 < x < ad$ и интегро-дифференциальному уравнению

$$c_{ins}V'_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V_{ins}(x,b) + \lambda a^{-1}\int\limits_{x-ad}^x V_{ins}(y,b)p\left(\frac{x-y}{a}\right)dy+$$
$$+\lambda V_{ins}(x-ad,b)(F(d+l)-F(d)) + \lambda a^{-1}\int\limits_0^{x-ad} V_{ins}(y,b)p\left(l+\frac{x-y}{a}\right)dy = 0 \tag{2.6}$$

при $ad \le x < b$. Граничное условие для $V_{ins}(x, b)$ выглядит следующим образом:

$$V'_{ins}(b,b) = 1.$$

Доказательство. Применение перестрахования с точки зрения изменения капитала страховщика влияет только на интенсивность поступления премии и на распределение требований. В связи с этим мы можем использовать полученные ранее в научной литературе результаты для барьерных стратегий с точностью до изменения функции распределения исков и параметра поступления премии c. Так на основе соотношений (2.1) и (2.2) мы можем сделать вывод, что математическое ожидание дисконтированных дивидендов в рамках модели с комбинацией двух рассматриваемых в текущей главе типов перестрахования удовлетворяет уравнению

$$c_{ins}V'_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V_{ins}(x,b) - \lambda\int\limits_0^x V_{ins}(y,b)\,dF_{ins}(x-y) = 0, \quad 0 < x < b, \tag{2.7}$$

и граничному условию $V'_{ins}(b,b) = 1$. Преобразуем далее интеграл в левой части (2.7):

$$-\lambda\int\limits_0^x V_{ins}(y,b)\,dF_{ins}(x-y) = \lambda\int\limits_0^x V_{ins}(x-t,b)\,dF_{ins}(t) =$$
$$= \begin{cases} \lambda\int\limits_0^x V_{ins}(x-t,b)\,dF(ta^{-1}) \quad \text{при } 0 < x < ad, \\ \lambda\int\limits_0^{ad} V_{ins}(x-t,b)\,dF(ta^{-1}) + \lambda V_{ins}(x-ad,b)(F_{ins}(ad) - F_{ins}(ad-0)) + \\ \qquad\qquad + \lambda\int\limits_{ad}^x V_{ins}(x-t,b)dF(l+ta^{-1}) \quad \text{при } ad \le x < b. \end{cases} \tag{2.8}$$

Пусть сначала начальный капитал компании меньше произведения параметра квотного перестрахования и уровня собственного удержания, то есть $0 < x < ad$. Из того, что

$$\lambda\int\limits_0^x V_{ins}(x-t,b)dF(ta^{-1}) = \lambda a^{-1}\int\limits_0^x V_{ins}(y,b)p\left(\frac{x-y}{a}\right)dy,$$

сразу следует, что при $0 < x < ad$ уравнение (2.7) эквивалентно уравнению (2.5), что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к случаю $ad \le x < b$. Преобразуем интегральные слагаемые из правой части равенства (2.8):

$$\lambda\int\limits_0^{ad} V_{ins}(x-t,b)dF(ta^{-1}) = -\lambda\int\limits_{x-ad}^x V_{ins}(y,b)dF\left(\frac{x-y}{a}\right) = \lambda a^{-1}\int\limits_{x-ad}^x V_{ins}(y,b)p\left(\frac{x-y}{a}\right)dy$$

и

$$\lambda\int\limits_{ad}^x V_{ins}(x-t,b)\,dF(l+ta^{-1}) = \lambda a^{-1}\int\limits_{ad}^x V_{ins}(x-t,b)p(l+ta^{-1})dt =$$
$$= \lambda a^{-1}\int\limits_0^{x-ad} V_{ins}(y,b)p\left(l+\frac{x-y}{a}\right)dy.$$

Также заметим, что
$$F_{ins}(ad) - F_{ins}(ad-0) = F(d+l) - F(d).$$
Подставив вместо интеграла в (2.7) последние полученные выражения, мы приходим в точности к уравнению (2.6). □

Следующий этап исследования будет состоять в поиске решений интегро-дифференциальных уравнений (2.5) и (2.6). Одним из существующих методов решения интегро-дифференциальных уравнений является сведение их к дифференциальным уравнениям. Данный метод применим, например, в случае экспоненциального или равномерного распределений требований. Другой подход к решению интегро-дифференциальных уравнений описан в работе [8].

§2.3 Экспоненциальное распределение требований

§2.3.1 Вывод дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим случай экспоненциального распределения исков с параметром β. Плотность распределения исков в экспоненциальном случае имеет вид $p(x) = \beta e^{-\beta x},\ x \geq 0$, функция распределения $F(x) = 1 - e^{-\beta x},\ x \geq 0$.

Теорема 2.2. *В случае экспоненциального распределения требований с параметром β при $0 < x < ad$ функция $V_{ins}(x,b)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка*
$$c_{ins}V''_{ins}(x,b) + (\beta a^{-1}c_{ins} - (\lambda+\delta))V'_{ins}(x,b) - \delta\beta a^{-1}V_{ins}(x,b) = 0, \tag{2.9}$$
в то время как при $ad \leq x < b$ функция $V_{ins}(x,b)$ удовлетворяет уравнению
$$\begin{aligned} c_{ins}V''_{ins}(x,b) + (\beta a^{-1}c_{ins} - (\lambda+\delta))V'_{ins}(x,b) - \delta\beta a^{-1}V_{ins}(x,b) = \\ = -\lambda e^{-\beta d}(1-e^{-\beta l})V'_{ins}(x-ad,b). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Доказательство. Начнем со случая $0 < x < ad$. Нашей целью является сведение уравнения (2.5) к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Для этого применим оператор $(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1})$ ко всем слагаемым (2.5). После применения оператора к первому слагаемому мы получим
$$\left(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1}\right)[c_{ins}V'_{ins}(x,b)] = c_{ins}V''_{ins}(x,b) + \beta a^{-1}c_{ins}V'_{ins}(x,b),$$
далее рассматриваем второе слагаемое:
$$\left(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1}\right)[-(\lambda+\delta)V_{ins}(x,b)] = -(\lambda+\delta)V'_{ins}(x,b) - \beta a^{-1}(\lambda+\delta)V_{ins}(x,b).$$
Применяя оператор $(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1})$ к третьему слагаемому в (2.5) и одновременно пользуясь

тем, что для экспоненциального распределения требований $p'(x) = -\beta p(x)$, приходим к равенству

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1}\right) \lambda a^{-1} \int\limits_0^x V_{ins}(y, b) p\left(\frac{x-y}{a}\right) dy = \lambda\beta a^{-1} V_{ins}(x, b).$$

Следовательно, мы можем сделать вывод, что функция $V_{ins}(x, b)$ удовлетворяет уравнению

$$c_{ins} V''_{ins}(x, b) + \beta a^{-1} c_{ins} V'_{ins}(x, b) - (\lambda + \delta) V'_{ins}(x, b) - \beta a^{-1}(\lambda + \delta) V_{ins}(x, b) + \lambda\beta a^{-1} V_{ins}(x, b) = 0,$$

которое эквивалентно (2.9).

Рассмотрим теперь случай $ad \le x < b$ и применим оператор $\left(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1}\right)$ к уравнению (2.6). Первые два слагаемых уравнения (2.6) совпадают с первыми слагаемыми (2.5), поэтому перейдем сразу к интегралу:

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1}\right) \lambda a^{-1} \int\limits_{x-ad}^x V_{ins}(y, b) p\left(\frac{x-y}{a}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1}\right) \lambda a^{-1} \int\limits_0^x V_{ins}(y, b) p\left(\frac{x-y}{a}\right) dy -$$

$$- \left(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1}\right) \lambda a^{-1} \int\limits_0^{x-ad} V_{ins}(y, b) p\left(\frac{x-y}{a}\right) dy =$$

$$= \lambda\beta a^{-1} V_{ins}(x, b) - \left(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1}\right) \lambda a^{-1} \int\limits_0^{x-ad} V_{ins}(y, b) p\left(\frac{x-y}{a}\right) dy.$$

Далее имеем:

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1}\right) \lambda a^{-1} \int\limits_0^{x-ad} V_{ins}(y, b) p\left(\frac{x-y}{a}\right) dy = \lambda a^{-1} V_{ins}(x - ad, b) p\left(\frac{x - x + ad}{a}\right) +$$

$$+ \lambda a^{-1} \int\limits_0^{x-ad} V_{ins}(y, b) p'\left(\frac{x-y}{a}\right) dy + \lambda\beta a^{-2} \int\limits_0^{x-ad} V_{ins}(y, b) p\left(\frac{x-y}{a}\right) dy = \lambda a^{-1} V_{ins}(x - ad, b) p(d).$$

Таким образом,

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta a^{-1}\right) \lambda a^{-1} \int\limits_{x-ad}^x V_{ins}(y, b) p\left(\frac{x-y}{a}\right) dy = \lambda\beta a^{-1} V_{ins}(x, b) - \lambda a^{-1} V_{ins}(x - ad, b) p(d).$$

Для четвертого слагаемого левой части уравнения (2.6) результат применения оператора выглядит как

$$\left(\frac{d}{dx}+\beta a^{-1}\right)[\lambda V_{ins}(x-ad,b)(F(d+l)-F(d))]=$$
$$=\lambda V'_{ins}(x-ad,b)(F(d+l)-F(d))+\lambda\beta a^{-1}V_{ins}(x-ad,b)(F(d+l)-F(d)).$$

Наконец, применяем $\left(\frac{d}{dx}+\beta a^{-1}\right)$ к последнему интегралу в (2.6):

$$\left(\frac{d}{dx}+\beta a^{-1}\right)\lambda a^{-1}\int\limits_0^{x-ad}V_{ins}(y,b)p\left(l+\frac{x-y}{a}\right)dy=\lambda a^{-1}V_{ins}(x-ad,b)p\left(l+\frac{x-x+ad}{a}\right)+$$
$$+\lambda a^{-1}\int\limits_0^{x-ad}V_{ins}(y,b)p'\left(l+\frac{x-y}{a}\right)dy+\lambda\beta a^{-2}\int\limits_0^{x-ad}V_{ins}(y,b)p\left(l+\frac{x-y}{a}\right)dy=$$
$$=\lambda a^{-1}V_{ins}(x-ad,b)p(l+d).$$

Просуммировав все получившиеся слагаемые, мы приходим к уравнению

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b)+\beta a^{-1}c_{ins}V'_{ins}(x,b)-(\lambda+\delta)V'_{ins}(x,b)-\beta a^{-1}(\lambda+\delta)V_{ins}(x,b)+$$
$$+\lambda\beta a^{-1}V_{ins}(x,b)-\lambda a^{-1}V_{ins}(x-ad,b)p(d)+\lambda V'_{ins}(x-ad,b)(F(d+l)-F(d))+$$
$$+\lambda\beta a^{-1}V_{ins}(x-ad,b)(F(d+l)-F(d))+\lambda a^{-1}V_{ins}(x-ad,b)p(l+d)=0,$$

которое после упрощений в точности совпадает с (2.10). □

Замечание 2.1. *Если страховщик и перестраховщики используют премиальный принцип среднего с нагрузками соответственно θ, θ_1 и θ_2, то c_{ins} в случае экспоненциального распределения требований принимает вид*

$$c_{ins}=\frac{\lambda}{\beta}\Big((1+\theta)-(1+\theta_1)e^{-\beta d}(1-e^{-\beta l})-(1+\theta_2)(1-a)(1+e^{-\beta d}e^{-\beta l}-e^{-\beta d})\Big).$$

§2.3.2 Поиск решений дифференциальных уравнений

Итак, мы получили дифференциальные уравнения второго порядка (2.9) и (2.10) для функции $V_{ins}(x,b)$. Займемся теперь поиском решений данных уравнений. В работе [40] для случая экспоненциально распределенных исков приведено и решено дифференциальное уравнение для функции $V(x,b)$ в рамках модели без использования какого-либо перестрахования. Данное дифференциальное уравнение является однородным и имеет сходства с нашим однородным уравнением (2.9), поэтому в случае, когда $0<x<b\le ad$, явный вид функции $V_{ins}(x,b)$ мы найдем в соответствии с алгоритмом, предложенным авторами работы [40]. Сложность изучения математического ожидания дисконтированных дивидендов в нашей модели с комбинацией двух различных типов перестрахования заключается в неоднородности уравнения (2.10). Из-за того, что в правой части уравнения (2.10) стоит функция

$V'_{ins}(x-ad,b)$, данное уравнение можно охарактеризовать как уравнение с запаздыванием. Для решения данного уравнения мы разобьем положительную полуось на полуинтервалы длины ad и будем последовательно находить вид функции $V_{ins}(x,b)$ на каждом из данных полуинтервалов с точностью до определения неизвестных констант, после чего будем составлять систему на неизвестные константы.

Приведем ниже подробное описание обозначенного алгоритма поиска решения $V_{ins}(x,b)$ дифференциальных уравнений (2.9) и (2.10) при условии, что $nad < b \leq (n+1)ad$ для некоторого $n \geq 0$. В случае $n=0$ данный алгоритм идейно совпадает с алгоритмом поиска функции $V(x,b)$, описанным в статье [40]. Далее, где это будет нужно, мы будем доопределять $V_{ins}(x,b)$ в точках $x=0$ и $x=b$ по непрерывности и будем всюду по умолчанию предполагать, что $0 \leq x \leq b$.

Алгоритм поиска функции $\mathbf{V_{ins}(x,b)}$ в случае экспоненциального распределения требований.

Для того, чтобы найти явный вид решения уравнения (2.9) или (2.10) на промежутке вида $kad \leq x < (k+1)ad$, $0 \leq k \leq n$, необходимо:

1. Пользуясь методами решения линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (см., например, [12]) найти последовательно вид функции $V_{ins}(x,b)$ на каждом из $n+1$ полуинтервалов $iad \leq x < (i+1)ad$, $0 \leq i \leq n$, с точностью до определения неизвестных констант в выражениях для общих решений соответствующих однородных уравнений.

Функция $V_{ins}(x,b)$ на полуинтервале $[0,ad)$ тогда будет задана с точностью до двух констант как общее решение однородного уравнения (2.9), а далее на полуинтервалах $[iad,(i+1)ad)$, $1 \leq i \leq n$, функция $V_{ins}(x,b)$ будет найдена как решение неоднородного уравнения (2.10) также с точностью до двух констант в формуле для общего решения однородного уравнения, соответствующего (2.10). При этом суммарно будет $2(n+1)$ неизвестных.

2. Получить n линейных уравнений на неизвестные константы из условий непрерывности функции $V_{ins}(x,b)$ в точках $x=iad$, $1 \leq i \leq n$.

3. Получить $(n+1)$ уравнение на неизвестные постоянные из подстановки $V_{ins}(x,b)$ в исходные интегро-дифференциальные уравнения (2.5) и (2.6) соответственно при $0 \leq x < ad$ и $iad \leq x < (i+1)ad$, $1 \leq i \leq n$.

4. Найти последнее линейное уравнение на неизвестные константы из граничного условия $V'_{ins}(b,b)=1$.

5. Решить систему из $2(n+1)$ уравнений.

После этого функция $V_{ins}(x,b)$ будет определена при всех $0 \leq x \leq b$, в том числе и на искомом промежутке $kad \leq x < (k+1)ad$, $0 \leq k \leq n$.

Проиллюстрируем применение описанного алгоритма на двух примерах. Пусть $r > 0$, $s < 0$ — корни характеристического уравнения

$$c_{ins}z^2 + (\beta a^{-1}c_{ins} - (\lambda+\delta))z - \delta\beta a^{-1} = 0. \tag{2.11}$$

Параметры r и s будут присутствовать в выражении для $V_{ins}(x, b)$ вне зависимости от значения n. Отметим сразу следующий факт, связанный со свойствами данных коэффициентов.

Утверждение 2.1. *В случае экспоненциального распределения требований с параметром β корни $r > 0$, $s < 0$ характеристического уравнения* (2.11) *монотонно возрастают по l и убывают по d.*

Доказательство. Как мы предполагали выше, премия страховщика c_{ins} является убывающей функцией по l и возрастающей функцией по d. Проверим теперь монотонность корней характеристического уравнения (2.11) по c_{ins}. Пусть $\mathbb{D} > 0$ — дискриминант уравнения (2.11). Тогда $\mathbb{D}$ имеет вид

$$\mathbb{D} = (\beta c_{ins} a^{-1} - (\lambda + \delta))^2 + 4c_{ins}\delta\beta a^{-1}$$

и

$$r = \frac{\sqrt{\mathbb{D}} - \beta c_{ins} a^{-1} + (\lambda + \delta)}{2c_{ins}} = \frac{(\lambda + \delta) + \sqrt{\mathbb{D}}}{2c_{ins}} - \frac{\beta}{2a},$$

$$s = \frac{-\sqrt{\mathbb{D}} - \beta c_{ins} a^{-1} + (\lambda + \delta)}{2c_{ins}} = \frac{(\lambda + \delta) - \sqrt{\mathbb{D}}}{2c_{ins}} - \frac{\beta}{2a}.$$

Найдем далее производные корней r и s по переменной c_{ins}. Имеем:

$$r'_{c_{ins}} = \frac{2c_{ins}(\sqrt{\mathbb{D}})'_{c_{ins}} - 2((\lambda + \delta) + \sqrt{\mathbb{D}})}{4c_{ins}^2} = \frac{c_{ins}(\mathbb{D})'_{c_{ins}} - 2\sqrt{\mathbb{D}}((\lambda + \delta) + \sqrt{\mathbb{D}})}{4c_{ins}^2\sqrt{\mathbb{D}}} =$$
$$= \frac{-(-\beta\lambda c_{ins} a^{-1} + \beta\delta c_{ins} a^{-1} + (\lambda + \delta)^2) - \sqrt{\mathbb{D}}(\lambda + \delta)}{2c_{ins}^2\sqrt{\mathbb{D}}},$$

$$s'_{c_{ins}} = \frac{-2c_{ins}(\sqrt{\mathbb{D}})'_{c_{ins}} - 2((\lambda + \delta) - \sqrt{\mathbb{D}})}{4c_{ins}^2} = \frac{-c_{ins}(\mathbb{D})'_{c_{ins}} - 2\sqrt{\mathbb{D}}((\lambda + \delta) - \sqrt{\mathbb{D}})}{4c_{ins}^2\sqrt{\mathbb{D}}} =$$
$$= \frac{(-\beta\lambda c_{ins} a^{-1} + \beta\delta c_{ins} a^{-1} + (\lambda + \delta)^2) - \sqrt{\mathbb{D}}(\lambda + \delta)}{2c_{ins}^2\sqrt{\mathbb{D}}}.$$

Заметим, что при всех допустимых значениях параметров

$$(-\beta\lambda c_{ins} a^{-1} + \beta\delta c_{ins} a^{-1} + (\lambda + \delta)^2)^2 < (\sqrt{\mathbb{D}}(\lambda + \delta))^2 = \mathbb{D}(\lambda + \delta)^2.$$

Действительно, раскрыв скобки и подставив выражение для $\mathbb{D}$, мы получаем, что

$$(-\beta\lambda c_{ins} a^{-1} + \beta\delta c_{ins} a^{-1} + (\lambda + \delta)^2)^2 - \mathbb{D}(\lambda + \delta)^2 = -4\beta^2\delta\lambda c_{ins}^2 a^{-2} < 0.$$

Отсюда следует, что вне зависимости от знака скобки $(-\beta\lambda c_{ins} a^{-1} + \beta\delta c_{ins} a^{-1} + (\lambda + \delta)^2)$ числители в формулах для $r'_{c_{ins}}$ и $s'_{c_{ins}}$ отрицательны, а значит, коэффициенты r и s монотонно убывают по c_{ins}, из чего мы можем в свою очередь сделать вывод, что r и s возрастают по l и убывают по d. $\square$

Вернемся теперь к применению приведенного в текущем разделе алгоритма поиска функции $V_{ins}(x,b)$. При $n=0$, т.е. при $0 \le x \le b \le ad$, в соответствии с пунктом 1 указанного алгоритма мы получаем, что функция $V_{ins}(x,b)$ имеет вид

$$V_{ins}(x,b) = A_r(b)e^{rx} + A_s(b)e^{sx}.$$

Далее согласно пункту 3 алгоритма находим уравнение

$$\frac{A_r(b)}{ar+\beta} + \frac{A_s(b)}{as+\beta} = 0,$$

после чего, опираясь на 4 пункт, делаем вывод, что

$$rA_r(b)e^{rb} + sA_s(b)e^{sb} = 1.$$

Решив систему из двух получившихся линейных уравнений на неизвестные $A_r(b)$ и $A_s(b)$, имеем

$$A_r(b) = \frac{ar+\beta}{(ar+\beta)re^{rb} - (as+\beta)se^{sb}},$$

$$A_s(b) = -\frac{as+\beta}{(ar+\beta)re^{rb} - (as+\beta)se^{sb}}.$$

Таким образом, при $0 \le x \le b \le ad$ функция $V_{ins}(x,b)$ принимает вид

$$V_{ins}(x,b) = \frac{(ar+\beta)e^{rx} - (as+\beta)e^{sx}}{(ar+\beta)re^{rb} - (as+\beta)se^{sb}}.$$

Используем также приведенный выше алгоритм для случая $b \in (ad, 2ad]$, т.е. $n=1$. Получим, что функция $V_{ins}(x,b)$ при $0 \le x < ad$ выглядит следующим образом:

$$V_{ins}(x,b) = B_r(b)e^{rx} + B_s(b)e^{sx},$$

в то время как при $ad \le x \le b$

$$V_{ins}(x,b) = C_r(b)e^{rx} + C_s(b)e^{sx} + D_rB_r(b)xe^{rx} + D_sB_s(b)xe^{sx},$$

где коэффициенты D_r и D_s вычисляются как

$$D_r = \frac{-\lambda re^{-d(\beta+ar)}(1-e^{-\beta l})}{2c_{ins}r + \beta a^{-1}c_{ins} - (\lambda+\delta)}, \quad D_s = \frac{-\lambda se^{-d(\beta+as)}(1-e^{-\beta l})}{2c_{ins}s + \beta a^{-1}c_{ins} - (\lambda+\delta)}.$$

Неизвестные величины $B_r(b)$, $B_s(b)$, $C_r(b)$ и $C_s(b)$ в свою очередь являются решениями системы

$$\begin{cases} B_r(b)e^{rad}(1-adD_r)+B_s(b)e^{sad}(1-adD_s)=C_r(b)e^{rad}+C_s(b)e^{sad} \\ \frac{B_r(b)}{ar+\beta}+\frac{B_s(b)}{as+\beta}=0 \\ \frac{B_r(b)e^{rad}}{ar+\beta}\left(1-adD_r+\frac{aD_r}{ar+\beta}\right)+\frac{B_s(b)e^{sad}}{as+\beta}\left(1-adD_s+\frac{aD_s}{as+\beta}\right)=\frac{C_r(b)e^{rad}}{ar+\beta}+\frac{C_s(b)e^{sad}}{as+\beta} \\ rC_r(b)e^{rb}+sC_s(b)e^{sb}+D_rB_r(b)e^{rb}(1+rb)+D_sB_s(b)e^{sb}(1+sb)=1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Уравнения системы (2.12) приведены в соответствии с пунктами 2, 3, 4 описанного выше алгоритма поиска функции $V_{ins}(x,b)$. Решение данной системы, как и поиск явного вида функции $V_{ins}(x,b)$ при $n \geq 2$, может быть осуществлено численно при фиксированных значениях параметров модели. Кроме того, зафиксировав основные параметры модели, мы можем исследовать $V_{ins}(x,b)$ как функцию от коэффициентов a, d, l стратегии перестрахования. Так численно решив систему (2.12) при $\beta = 1.5$, $\lambda = 1$, $\delta = 0.001$, $\theta = 0.2$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.21$, $d = 1$, $b = 1.5$, $a = 0.8$, $x = 1$, мы получаем следующий характер зависимости математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения компании, от уровня l (см. рис. 2.3).

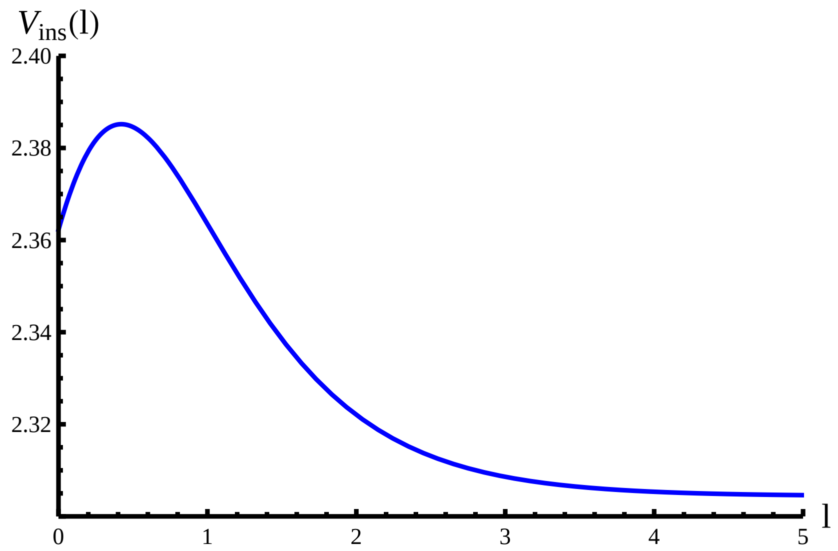

Рис. 2.3: Математическое ожидание дисконтированных дивидендов как функция от параметра перестрахования эксцедента убытка l в случае экспоненциального распределения исков

Значение $l = 0$ соответствует модели, в которой страховая компания применяет только квотное перестрахование без перестрахования эксцедента убытка, в то время как при $l \to \infty$ мы получаем в пределе комбинацию квотного перестрахования с перестрахованием эксцедента убытка с неограниченной ответственностью перестраховщика. Как видно из рис. 2.3, математическое ожидание дисконтированных дивидендов как функция от l имеет глобальный максимум в точке, отличной от нуля, а значит, использование компанией перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика действительно имеет смысл для увеличения среднего значения выплаченных дивидендов.

§2.4 Равномерное распределение требований

§2.4.1 Вывод дифференциальных уравнений второго порядка

Пусть теперь размеры исков равномерно распределены на отрезке $[0,h]$, при этом выполнено условие $d+l<h$. В рамках формулировки и доказательства следующей теоремы мы будем предполагать, что верно неравенство $b>(h-l)a$, которое соответствует наиболее общему случаю.

Теорема 2.3. *В случае равномерного распределения требований на отрезке $[0,h]$ при $0<x<ad$ функция $V_{ins}(x,b)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка*

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b)-(\lambda+\delta)V'_{ins}(x,b)+\frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x,b)=0, \tag{2.13}$$

при $ad\le x<(h-l)a$ уравнению

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b)-(\lambda+\delta)V'_{ins}(x,b)+\frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x,b)=-\frac{\lambda l}{h}V'_{ins}(x-ad,b), \tag{2.14}$$

при $(h-l)a\le x<b$

$$c_{ins}V''_{ins}(x,b)-(\lambda+\delta)V'_{ins}(x,b)+\frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x,b)=$$
$$=-\frac{\lambda l}{h}V'_{ins}(x-ad,b)+\frac{\lambda}{ha}V_{ins}(x-(h-l)a,b). \tag{2.15}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2 с точностью до выбора оператора. В случае равномерного распределения требований мы применяем к уравнениям (2.5) и (2.6) оператор $\frac{d}{dx}$. При этом уравнение (2.5) при всех $0<x<ad$ в рамках равномерного распределения исков будет выглядеть следующим образом:

$$c_{ins}V'_{ins}(x,b)-(\lambda+\delta)V_{ins}(x,b)+\frac{\lambda}{ha}\int\limits_0^x V_{ins}(y,b)dy=0, \tag{2.16}$$

в то время как уравнение (2.6) в зависимости от соотношения между величинами x и $(h-l)a$ может принимать разный вид. Так в случае, когда $ad\le x<(h-l)a$, мы получаем, что для функции $V_{ins}(x,b)$ справедливо равенство

$$c_{ins}V'_{ins}(x,b)-(\lambda+\delta)V_{ins}(x,b)+\frac{\lambda}{ha}\int\limits_{x-ad}^{x} V_{ins}(y,b)dy+$$
$$+\lambda V_{ins}(x-ad,b)\left(\frac{d+l}{h}-\frac{d}{h}\right)+\frac{\lambda}{ha}\int\limits_0^{x-ad} V_{ins}(y,b)dy=0. \tag{2.17}$$

Если же $(h-l)a \le x < b$, то (2.6) будет эквивалентно уравнению

$$c_{ins}V'_{ins}(x,b) - (\lambda+\delta)V_{ins}(x,b) + \frac{\lambda}{ha}\int\limits_{x-ad}^{x} V_{ins}(y,b)dy +$$

$$+ \lambda V_{ins}(x-ad,b)\left(\frac{d+l}{h} - \frac{d}{h}\right) + \frac{\lambda}{ha}\int\limits_{x-(h-l)a}^{x-ad} V_{ins}(y,b)dy = 0. \quad (2.18)$$

Продифференцировав по x равенства (2.16) – (2.18), мы получим соответственно уравнения (2.13) – (2.15), что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 2.2. *Если страховщик и перестраховщики используют премиальный принцип среднего с нагрузками соответственно θ, θ_1 и θ_2, то c_{ins} в случае равномерного распределения исков будет выглядеть следующим образом:*

$$c_{ins} = \frac{\lambda h}{2}(1+\theta) - \lambda l(1+\theta_1)\left(1 - \frac{2d+l}{2h}\right) - \lambda(1+\theta_2)(1-a)\left(\frac{h}{2} - l + \frac{2dl+l^2}{2h}\right).$$

§2.4.2 Поиск решений дифференциальных уравнений

Далее опишем алгоритм поиска решений дифференциальных уравнений второго порядка (2.13) – (2.15). Пусть $b \in (nad, (n+1)ad]$, $n \ge 0$, и $(h-l)a \in (mad, (m+1)ad]$, $m \ge 1$. Будем отдельно рассматривать 2 случая: $b \le (h-l)a$ и $b > (h-l)a$. Как и ранее, всюду по умолчанию мы предполагаем, что $0 \le x \le b$, и, где необходимо, доопределяем функцию $V_{ins}(x,b)$ в точках $x=0$ и $x=b$ по непрерывности.

Пусть сначала $b \le (h-l)a$ и $n \le m$. В этом случае мы исследуем только уравнения (2.13) и (2.14) и алгоритм поиска решения $V_{ins}(x,b)$ на промежутке вида $kad \le x < (k+1)ad$, $0 \le k \le n$, аналогичен описанному в предыдущем параграфе текущей главы алгоритму поиска $V_{ins}(x,b)$ в рамках экспоненциального распределения убытков. С помощью методов решения линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами мы последовательно находим вид функции $V_{ins}(x,b)$ с точностью до двух неизвестных констант на каждом из $n+1$ полуинтервалов $iad \le x < (i+1)ad$, $0 \le i \le n$. Далее составляем $2(n+1)$ уравнений на неизвестные постоянные исходя из условий непрерывности $V_{ins}(x,b)$ по x, из подстановки в исходные интегро-дифференциальные уравнения (2.16) и (2.17) и из граничного условия $V'_{ins}(b,b) = 1$.

Пусть теперь $b > (h-l)a$ и $n \ge m$. При таких условиях мы должны рассматривать все дифференциальные уравнения (2.13) – (2.15) и делить числовую прямую на промежутки несколько иначе, чем раньше. Пусть $\eta = (h-l)a - mad$. До точки mad мы будем как и ранее идти с шагом ad, но начиная с полуинтервала $[mad, (m+1)ad)$ нам будет важно, лежит ли x в "левой части" промежутка $[kad, (k+1)ad)$, $k \ge m$, вида $[kad, kad+\eta)$, или же в "правой части" промежутка $[kad, (k+1)ad)$, $k \ge m$, вида $[kad+\eta, (k+1)ad)$. Точно также нам будет важно, лежит ли b на промежутке $(nad, nad+\eta]$ или на промежутке $(nad+\eta, (n+1)ad]$.

Алгоритм поиска функции $\mathbf{V_{ins}(x, b)}$ в случае равномерного распределения требований при условии выполнения неравенства $\mathbf{b > (h-l)a}$.

Для того, чтобы определить вид функции $V_{ins}(x,b)$ при всех значениях $x \in [0,b]$, необходимо:

1. Пользуясь методами решения линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, найти последовательно вид функции $V_{ins}(x,b)$ на каждом из m полуинтервалов $iad \le x < (i+1)ad$, $0 \le i \le m-1$, и на полуинтервале $mad \le x < (h-l)a$ с точностью до определения неизвестных констант в выражениях для общих решений соответствующих однородных уравнений. Получится $2(m+1)$ неизвестных постоянных.

2. Найти последовательно вид функции $V_{ins}(x,b)$ с точностью до неизвестных констант в выражениях для общих решений на каждом из $2(n-m)$ промежутков $[iad+\eta, (i+1)ad)$ и $[(i+1)ad, (i+1)ad+\eta)$, $m \le i \le n-1$. Если $b > nad+\eta$, необходимо найти также вид $V_{ins}(x,b)$ на дополнительном отрезке $[nad+\eta, b]$.

3. Получить $2n-m$ линейных уравнений в случае $b \le nad+\eta$ (соответственно $2n-m+1$ уравнение в случае $b > nad+\eta$) на неизвестные константы из условий непрерывности функции $V_{ins}(x,b)$ в граничных точках промежутков, указанных в пунктах 1 и 2.

4. Получить $2n-m+1$ $(2n-m+2)$ уравнений на неизвестные константы из подстановки $V_{ins}(x,b)$ в исходные интегро-дифференциальные уравнения (2.16) – (2.18).

5. Найти последнее линейное уравнение на неизвестные константы из граничного условия $V'_{ins}(b,b) = 1$.

6. Решить систему из $4n-2m+2$ $(4n-2m+4)$ уравнений.

Проиллюстрируем применение описанного алгоритма нахождения функции $V_{ins}(x,b)$ на нескольких примерах. Пусть сначала $n=0$ и $0 \le x \le b \le ad$. В этом случае мы будем исследовать однородное дифференциальное уравнение (2.13). Характеристическое уравнение, соответствующее (2.13), имеет вид

$$c_{ins}z^2 - (\lambda+\delta)z + \lambda(ha)^{-1} = 0. \tag{2.19}$$

Пусть $\mathbb{D} = (\lambda+\delta)^2 - 4\lambda c_{ins}(ha)^{-1}$ — дискриминант уравнения (2.19). В отличие от модели с экспоненциально распределенными требованиями, при равномерном распределении мы получаем, что дискриминант характеристического уравнения может быть как положительным, так и отрицательным или равным нулю. В связи с этим рассмотрим три случая.

а) $\mathbb{D} > 0$.

Функция $V_{ins}(x,b)$ при таком условии имеет вид

$$V_{ins}(x,b) = E_r(b)e^{rx} + E_s(b)e^{sx},$$

где $r > 0$, $s > 0$ — действительные корни характеристического уравнения (2.19). Коэффициенты $E_r(b)$ и $E_s(b)$ находятся из системы

$$\begin{cases} E_r(b)r^{-1} + E_s(b)s^{-1} = 0 \\ rE_r(b)e^{rb} + sE_s(b)e^{sb} = 1, \end{cases}$$

после решения которой мы приходим к выводу, что $V_{ins}(x, b)$ выглядит следующим образом:

$$V_{ins}(x, b) = \frac{re^{rx} - se^{sx}}{r^2e^{rb} - s^2e^{sb}},\ 0 \leq x \leq b \leq ad.$$

Как и в случае экспоненциального распределения требований, мы можем отметить свойства монотонности используемых коэффициентов r и s по параметрам перестрахования l и d.

Утверждение 2.2. *Пусть требования распределены равномерно на отрезке* $[0, h]$ *и характеристическое уравнение* (2.19) *имеет два действительных корня r и s, где $r > s$. Тогда r монотонно возрастает по l и убывает по d, в то время как s монотонно убывает по l и возрастает по d.*

Доказательство. Будем действовать аналогично доказательству утверждения 2.1, а именно, проверим монотонность коэффициентов r и s по c_{ins}, а далее воспользуемся тем, что c_{ins} является убывающей функцией по l и возрастающей функцией по d. Для этого последовательно определим знаки производных $r'_{c_{ins}}$ и $s'_{c_{ins}}$. Сначала в силу условия $\mathbb{D} = (\lambda + \delta)^2 - 4\lambda c_{ins}(ha)^{-1} > 0$ получаем, что

$$r'_{c_{ins}} = \left(\frac{(\lambda + \delta) + \sqrt{\mathbb{D}}}{2c_{ins}} \right)'_{c_{ins}} = \frac{2\lambda c_{ins}(ha)^{-1} - (\lambda + \delta)^2 - \sqrt{\mathbb{D}}(\lambda + \delta)}{2c_{ins}^2\sqrt{\mathbb{D}}} < 0,$$

из чего следует, что r убывает по c_{ins}, а значит, корень r уравнения (2.19) возрастает по l и убывает по d. Также в силу неравенства

$$\left((\lambda + \delta)^2 - 2\lambda c_{ins}(ha)^{-1}\right)^2 - \mathbb{D}(\lambda + \delta)^2 = 4\lambda^2 c_{ins}^2 (ha)^{-2} > 0$$

мы имеем

$$s'_{c_{ins}} = \left(\frac{(\lambda + \delta) - \sqrt{\mathbb{D}}}{2c_{ins}} \right)'_{c_{ins}} = \frac{-2\lambda c_{ins}(ha)^{-1} + (\lambda + \delta)^2 - \sqrt{\mathbb{D}}(\lambda + \delta)}{2c_{ins}^2\sqrt{\mathbb{D}}} > 0.$$

Соответственно мы также можем сделать вывод, что корень s уравнения (2.19) убывает по l и возрастает по d. $\square$

б) $\mathbb{D} = 0$.

Здесь получаем, что корни r и s уравнения (2.19) совпадают и равны $w = (2c_{ins})^{-1}(\lambda + \delta)$, в то время как

$$V_{ins}(x, b) = F_{1w}(b)e^{wx} + F_{2w}(b)xe^{wx},$$

где $F_{1w}(b)$ и $F_{2w}(b)$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} F_{2w}(b) = wF_{1w}(b) \\ wF_{1w}(b)e^{wb} + F_{2w}(b)e^{wb}(1 + wb) = 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$V_{ins}(x,b) = \frac{e^{wx} + wxe^{wx}}{2we^{wb} + w^2be^{wb}}, \ 0 \leq x \leq b \leq ad.$$

в) $\mathbb{D} < 0$.

В этом случае характеристическое уравнение (2.19) имеет два сопряженных комплексных корня $r = u + iv$, $s = u - iv$ и функция $V_{ins}(x, b)$ принимает вид

$$V_{ins}(x,b) = G_u(b)e^{ux}\cos vx + G_v(b)e^{ux}\sin vx.$$

Неизвестные $G_u(b)$ и $G_v(b)$ в соответствии с описанным алгоритмом поиска решения $V_{ins}(x, b)$ для равномерного распределения убытков являются решениями системы

$$\begin{cases} G_u(b)u = G_v(b)v \\ e^{ub}G_u(b)(u\cos vb - v\sin vb) + e^{ub}G_v(b)(u\sin vb + v\cos vb) = 1, \end{cases}$$

а значит,

$$V_{ins}(x,b) = \frac{ve^{ux}\cos vx + ue^{ux}\sin vx}{e^{ub}((u^2 - v^2)\sin vb + 2uv\cos vb)}, \ 0 \leq x \leq b \leq ad.$$

Таким образом, мы нашли вид функции $V_{ins}(x, b)$ при всех возможных значениях параметров модели в рамках случая $n = 0$.

Рассмотрим теперь случай $n = m = 1$ и $b > (h - l)a$. Здесь для определенности мы будем предполагать, что $\mathbb{D} > 0$. В соответствии с пунктами 1 и 2 приведенного выше алгоритма поиска $V_{ins}(x, b)$ в рамках модели с равномерным распределением требований мы получаем, что

$$V_{ins}(x,b) = H_r(b)e^{rx} + H_s(b)e^{sx} \quad \text{при } 0 \leq x < ad,$$

$$V_{ins}(x,b) = I_r(b)e^{rx} + I_s(b)e^{sx} + J_rH_r(b)xe^{rx} + J_sH_s(b)xe^{sx} \quad \text{при } ad \leq x < (h-l)a,$$

$$V_{ins}(x,b) = K_r(b)e^{rx} + K_s(b)e^{sx} + L_rH_r(b)xe^{rx} + L_sH_s(b)xe^{sx} \quad \text{при } (h-l)a \leq x \leq b,$$

где $r > s > 0$ — это по-прежнему корни характеристического уравнения

$$c_{ins}z^2 - (\lambda + \delta)z + \lambda(ha)^{-1} = 0,$$

в то время как

$$J_r = \frac{-\lambda lh^{-1}re^{-rad}}{2c_{ins}r - (\lambda + \delta)}, \quad J_s = \frac{-\lambda lh^{-1}se^{-sad}}{2c_{ins}s - (\lambda + \delta)}$$

и

$$L_r = \frac{-\lambda l h^{-1} r e^{-rad} + \lambda (ha)^{-1} e^{-r(h-l)a}}{2c_{ins} r - (\lambda+\delta)}, \quad L_s = \frac{-\lambda l h^{-1} s e^{-sad} + \lambda (ha)^{-1} e^{-s(h-l)a}}{2c_{ins} s - (\lambda+\delta)}.$$

При этом $4n - 2m + 4 = 6$ неизвестных $H_r(b)$, $H_s(b)$, $I_r(b)$, $I_s(b)$, $K_r(b)$ и $K_s(b)$ являются решениями следующей системы, составленной в соответствии с пунктами 3, 4 и 5 описанного в текущем параграфе алгоритма поиска $V_{ins}(x,b)$:

$$\begin{cases} H_r(b)e^{rad}(1-adJ_r) + H_s(b)e^{sad}(1-adJ_s) = I_r(b)e^{rad} + I_s(b)e^{sad} \\ (h-l)aH_r(b)e^{r(h-l)a}(J_r - L_r) + (h-l)aH_s(b)e^{s(h-l)a}(J_s - L_s) = \\ \qquad = e^{r(h-l)a}(K_r(b) - I_r(b)) + e^{s(h-l)a}(K_s(b) - I_s(b)) \\ H_r(b)r^{-1} + H_s(b)s^{-1} = 0 \\ H_r(b)r^{-1}e^{rad}(1 - adJ_r + r^{-1}J_r) + H_s(b)s^{-1}e^{sad}(1 - adJ_s + s^{-1}J_s) = \\ \qquad = I_r(b)r^{-1}e^{rad} + I_s(b)s^{-1}e^{sad} \\ H_r(b)r^{-1}e^{r(h-l)a}(J_r - L_r)((h-l)a - r^{-1}) + H_s(b)s^{-1}e^{s(h-l)a}(J_s - L_s)((h-l)a - s^{-1}) = \\ \qquad = (K_r(b) - I_r(b))r^{-1}e^{r(h-l)a} + (K_s(b) - I_s(b))s^{-1}e^{s(h-l)a} \\ rK_r(b)e^{rb} + sK_s(b)e^{sb} + L_rH_r(b)e^{rb}(1+rb) + L_sH_s(b)e^{sb}(1+sb) = 1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Решение данной системы, как и поиск явного вида функции $V_{ins}(x,b)$ при других соотношениях величин n и m, кроме рассмотренных выше, может быть осуществлено численно при фиксированных значениях параметров модели. Так зафиксировав параметры $h = 18$,

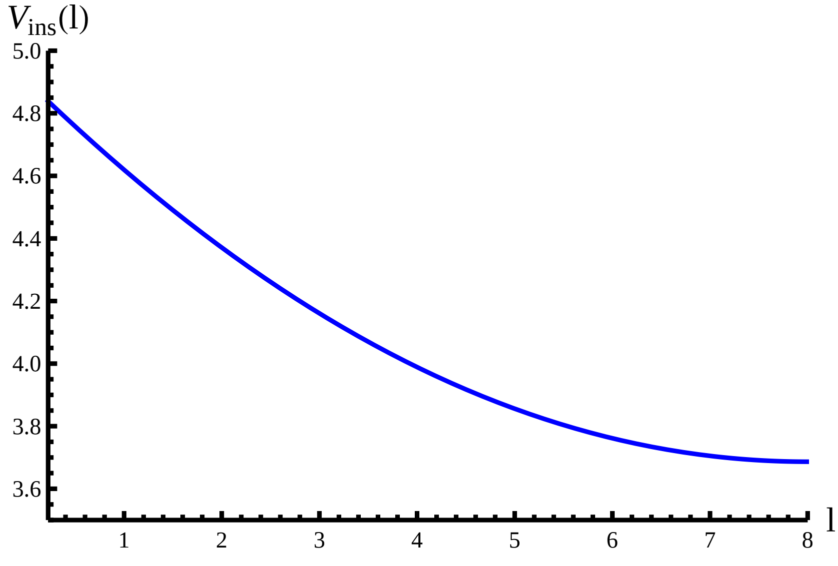

Рис. 2.4: Математическое ожидание дисконтированных дивидендов как функция от параметра перестрахования эксцедента убытка l в случае равномерного распределения исков

$\lambda = 0.1$, $\delta = 0.1$, $\theta = 0.2$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.21$, $d = 10$, $b = 17$, $a = 0.9$, $x = 16$ и решив систему (2.20) для данных значений параметров, мы получили следующий график зависимости математического ожидания дисконтированных дивидендов от уровня ответственности первого перестраховщика l (см. рис. 2.4). Как и ранее, значение $l = 0$ соответствует модели, в которой страховая компания применяет только квотное перестрахование без перестрахования эксцедента убытка, в то время как при $l \to \infty$ мы имеем комбинацию квотного перестрахования с перестрахованием эксцедента убытка с неограниченной ответственностью перестраховщика. Согласно построенному графику, в модели с указанными параметрами и равномерным распределением исков, в отличие от случая экспоненциального распределения, среднее значение выплаченных до разорения дивидендов оказалось строго убывающей функцией от параметра l. А значит, с точки зрения акционеров страховой компании оптимальным решением в выборе программы перестрахования является вовсе не использовать перестрахование эксцедента убытка и ограничиться только применением квотного перестрахования.

Глава 3. Барьерные стратегии выплаты дивидендов со ступенчатой функцией барьера

В данной главе изучается деятельность акционерных страховых компаний, выплачивающих дивиденды в соответствии с барьерными стратегиями со ступенчатой функцией барьера. Первый параграф содержит описание данных дивидендных стратегий. Во втором параграфе исследуется вероятность разорения компании, использующей барьерную стратегию такого вида. Получены оценки сверху для вероятности разорения в рамках моделей риска Спарре Андерсена и Крамера–Лундберга. Приведены примеры ступенчатых функций, при которых вероятность разорения строго меньше единицы. В условиях модели риска Крамера–Лундберга найдено также математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения компании, и получены условия, при которых стратегия со ступенчатой функцией барьера является более предпочтительной, чем барьерная стратегия с постоянным барьером, в смысле максимизации дивидендов. Данные результаты приведены в третьем параграфе главы.

§3.1 Описание стратегий

Вторая глава настоящей диссертации была посвящена изучению деятельности акционерных компаний, использующих перестрахование и барьерную стратегию выплаты дивидендов с постоянным барьером. Барьерные стратегии с постоянным барьером широко освещены в литературе (см., например, работы [8], [35], [40]). Данные стратегии оказываются оптимальными с точки зрения выплаченных до разорения компании дивидендов в различных предположениях моделей риска (см. [5], [24], [51]). Однако в условиях интересующих нас моделей Спарре Андерсена и Крамера-Лундберга стратегии с постоянным уровнем барьера обладают одним важным недостатком — разорение страховой компании, использующей стратегию такого вида, всегда неизбежно, вне зависимости от распределения требований ([14]). Данный факт послужил причиной для поиска новых дивидендных стратегий, использование которых не приводило бы компанию всегда к неминуемому разорению. Одним из подобных стратегий (а именно, барьерным стратегиям со ступенчатой функцией барьера) будет посвящена текущая глава диссертации. Перед тем, как перейти к описанию стратегий со ступенчатой функцией барьера, остановимся на предположениях модели риска Спарре Андерсена, на основе которой будет проводиться исследование процесса выплаты дивидендов. Согласно данной модели капитал страховой компании в момент времени t имеет вид (см. [61])

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i,\ t \geq 0, \tag{3.1}$$

где N_t — процесс восстановления, x — начальный капитал компании, c — интенсивность поступления премии. Случайные величины $\{X_i\}$, обозначающие размеры исков, независимы, одинаково распределены и имеют функцию распределения $F(y)$, такую, что $F(0) = 0$. Кроме того, $\{X_i\}$ и процесс N_t также предполагаются независимыми. Функция $G(y)$ в свою очередь является функцией распределения интервалов между моментами $\{T_j\}$ поступления требований.

Капитал страховой компании, выплачивающей дивиденды, как и ранее определим как $U_t = X_t - D_t$, где D_t представляет собой сумму, выплаченную акционерам в качестве дивидендов к моменту времени t. Случайная величина $T = \inf[t \geq 0 : \ U_t < 0]$ является тогда моментом разорения акционерной компании. Дивиденды выплачиваются при этом в соответствии с упомянутой выше барьерной стратегией со ступенчатой функцией барьера. А именно, мы предполагаем, что уровень барьера b_t равен b_i на полуинтервалах вида $t \in [T_{i-1}, T_i)$, $i \geq 1$ $(T_0 = 0)$. Считаем также, что ступенчатая функция барьера является неубывающей: $b_{i+1} \geq b_i,\ i \geq 1$, см. рис. 3.1. Рассматриваемая стратегия выплаты дивидендов состоит в следующем: дивиденды не выплачиваются, когда $U_t < b_t$, и выплачиваются с интенсивностью c, когда $U_t = b_t$. Если же $U_t > b_t$, то сразу в качестве дивидендов выплачивается сумма, равная $U_t - b_t$. Заметим, что неравенство $U_t > b_t$ может выполняться тогда только при $t = 0$, и далее без ограничения общности будем полагать, что $0 \leq x \leq b_1$.

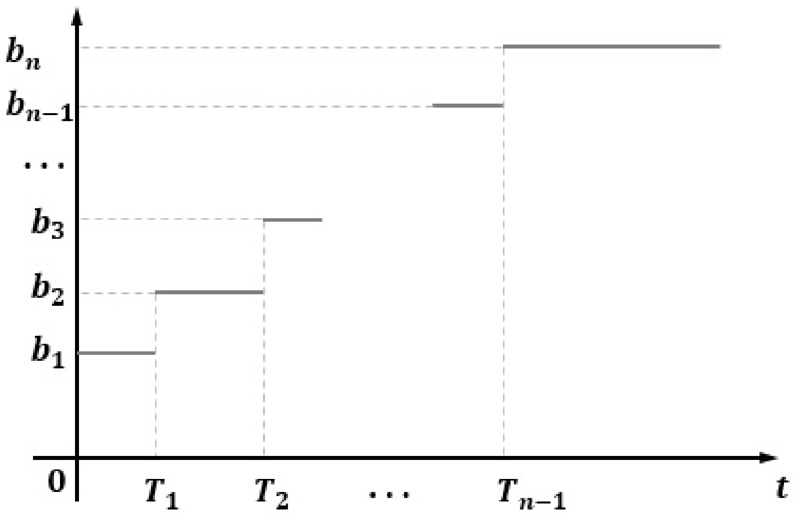

Рис. 3.1: Ступенчатая функция барьера

Подчеркнем, что уровень барьера не обязательно должен быть изменен после поступления каждого требования. Частным случаем дивидендных стратегий со ступенчатой функцией барьера являются барьерные стратегии с постоянным барьером, такие, что $b_{i+1} = b_i$

при всех значениях $i \geq 1$. Уровень барьера может быть также изменен только один раз. Необходимость изменения барьера может возникнуть, например, в соответствии с корректировкой значения показателя модели, описывающей деятельность страховой компании. А именно, предположим, что некоторая страховая компания использует для моделирования своей деятельности процесс изменения капитала U_t. Допустим также, что аналитики, работающие в данной компании, получили оценку одного из параметров процесса U_t (это может быть параметр процесса восстановления, влияющий на частоту поступления исков, или один из параметров распределения требований). На основе построенной оценки был выбран оптимальный уровень барьера дивидендной стратегии. Однако далее, после того, как в страховую компанию поступило некоторое количество требований, на основе собравшейся статистики была построена новая оценка параметра процесса U_t, значительно отличающаяся от предыдущей. В связи с получением новой оценки параметра возникла необходимость изменения и уровня барьера дивидендной стратегии (см. рис. 3.2).

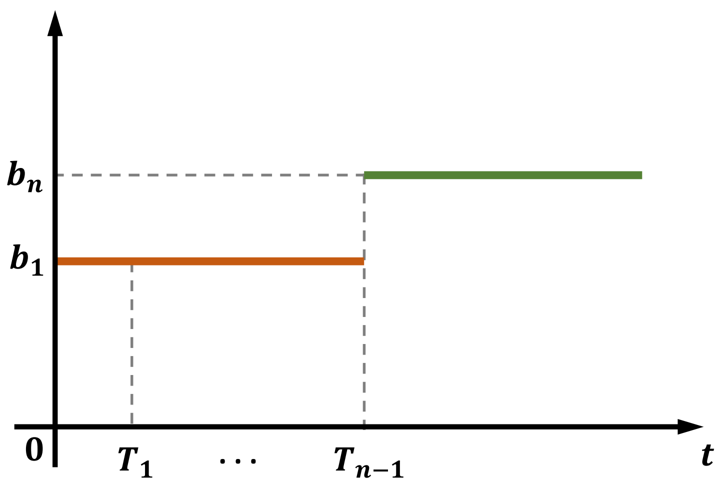

Рис. 3.2: Изменение барьера в соответствии с корректировкой значения показателя модели

§3.2 Оценки вероятности разорения

§3.2.1 Оценка вероятности разорения в рамках модели Спарре Андерсена

Одним из важных результатов, связанных с моделью риска Спарре Андерсена, является оценка сверху для вероятности разорения компании. Пусть $\tau = \inf[t \geq 0 : \ X_t < 0]$ — момент разорения страховой компании, капитал которой в момент времени t имеет вид (3.1). Тогда $\psi(x) = P(\tau < \infty | X_0 = x)$ — вероятность разорения. Предположим также, что существует единственный положительный корень R уравнения

$$\int_0^\infty e^{Ry} dF(y) \int_0^\infty e^{-cRt} dG(t) = 1,$$

который называется характеристическим показателем или экспонентой Лундберга. В этом случае справедлива следующая оценка вероятности разорения (см. [6]):

$$\psi(x) \le e^{-Rx}. \tag{3.2}$$

Данное неравенство является аналогом знаменитого неравенства Лундберга, доказанного для частного случая модели Спарре Андерсена — модели риска Крамера–Лундберга, согласно которой N_t является пуассоновским процессом (см. [6], [60]).

Получим далее оценки вероятности разорения $\psi^b(x) = P(T < \infty | U_0 = x)$ страховой компании, использующей барьерную стратегию со ступенчатой функцией барьера. А именно, докажем справедливость следующей теоремы, из которой в случае отсутствия дивидендных выплат будет следовать неравенство (3.2). Покажем также, что с помощью постепенного повышения барьера можно добиться уменьшения вероятности разорения до значения, меньшего единицы.

Теорема 3.1. *Имеет место следующее неравенство для вероятности разорения акционерной страховой компании, использующей барьерную дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера:*

$$\psi^b(x) \le e^{-Rx} + (L-1)\sum_{i=1}^{\infty} e^{-Rb_i}, \ \text{где} \ L = \int_0^{\infty} e^{Ry} dF(y). \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $\psi^b_k(x, b_1, \ldots, b_k)$ — это вероятность разорения в предположении, что поступило не более чем k требований. Сначала докажем, что для всех $k \ge 0$ выполняется неравенство $\psi^b_k(x, b_1, \ldots, b_k) < \nu_k(x, b_1, \ldots, b_k)$, где

$$\nu_k(x, b_1, \ldots, b_k) = e^{-Rx} + (L-1)\sum_{i=1}^{k} e^{-Rb_i}.$$

Воспользуемся методом математической индукции.

База индукции. Для $k = 0$ (и $x \ge 0$) имеем: $\psi^b_0(x) = 0 < \nu_0(x) = e^{-Rx}$.

Шаг индукции. Допустим, что неравенство $\psi^b_k(x, b_1, \ldots, b_k) < \nu_k(x, b_1, \ldots, b_k)$ верно для некоторого $k \ge 0$. Покажем тогда, что данное неравенство справедливо также и для $k+1$. В силу формулы полной вероятности

$$\psi^b_{k+1}(x, b_1, \ldots, b_{k+1}) = \int_0^{\frac{b_1 - x}{c}} \left[\int_0^{x+ct} \psi^b_k(x + ct - y, b_2, \ldots, b_{k+1}) dF(y) + \int_{x+ct}^{\infty} dF(y)\right] dG(t) +$$
$$+ \int_{\frac{b_1 - x}{c}}^{\infty} \left[\int_0^{b_1} \psi^b_k(b_1 - y, b_2, \ldots, b_{k+1}) dF(y) + \int_{b_1}^{\infty} dF(y)\right] dG(t).$$

Заметим, что $\nu_k(u, b_1, \dots, b_k) \geq 1$ при $u \leq 0$ (и при всех $k \geq 0$). Следовательно,

$$\psi^b_{k+1}(x, b_1, \dots, b_{k+1}) < \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} \int_0^{\infty} \nu_k(x + ct - y, b_2, \dots, b_{k+1}) dF(y) dG(t) + \\ + \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} \int_0^{\infty} \nu_k(b_1 - y, b_2, \dots, b_{k+1}) dF(y) dG(t). \quad (3.4)$$

Рассмотрим два получившихся слагаемых подробнее. Начнем с первого слагаемого. Сначала заметим, что

$$\int_0^{\infty} \nu_k(x + ct - y, b_2, \dots, b_{k+1}) dF(y) = \int_0^{\infty} \left(e^{-R(x+ct-y)} + (L-1) \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} \right) dF(y) = \\ = e^{-R(x+ct)} \int_0^{\infty} e^{Ry} dF(y) + (L-1) \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} \int_0^{\infty} dF(y) = Le^{-R(x+ct)} + (L-1) \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i},$$

а значит, первое слагаемое в правой части (3.4) имеет вид

$$\int_0^{\frac{b_1-x}{c}} \left(Le^{-R(x+ct)} + (L-1) \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} \right) dG(t) = \\ = Le^{-Rx} \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} e^{-Rct} dG(t) + (L-1) \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} dG(t).$$

Далее аналогично преобразуем второе слагаемое в (3.4). В первую очередь получаем, что

$$\int_0^{\infty} \nu_k(b_1 - y, b_2, \dots, b_{k+1}) dF(y) = \int_0^{\infty} \left(e^{-R(b_1-y)} + (L-1) \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} \right) dF(y) = \\ = Le^{-Rb_1} + (L-1) \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i}.$$

Следовательно,

$$\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} \left(Le^{-Rb_1} + (L-1) \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} \right) dG(t) = Le^{-Rb_1} \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} dG(t) + (L-1) \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} dG(t).$$

В итоге мы приводим неравенство (3.4) к следующему виду:

$$\psi^b_{k+1}(x, b_1, \dots, b_{k+1}) < Le^{-Rx} \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} e^{-Rct} dG(t) + (L-1) \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} dG(t) + \\ + Le^{-Rb_1} \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} dG(t) + (L-1) \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} dG(t) =$$

$$= Le^{-Rx}\int_0^{\frac{b_1-x}{c}} e^{-Rct}dG(t) + Le^{-Rb_1}\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} dG(t) + (L-1)\sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} =$$

$$= Le^{-Rx}\left(\int_0^{\infty} e^{-Rct}dG(t) - \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} e^{-Rct}dG(t)\right) + Le^{-Rb_1}\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} dG(t) + (L-1)\sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} =$$

$$= Le^{-Rx}\left(L^{-1} - \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} e^{-Rct}dG(t)\right) + Le^{-Rb_1}\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} dG(t) + (L-1)\sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} =$$

$$= e^{-Rx} + Le^{-Rb_1}\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} dG(t) - Le^{-Rx}\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} e^{-Rct}dG(t) + (L-1)\sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i}.$$

Нам осталось оценить только разность интегралов в последнем выражении:

$$Le^{-Rb_1}\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} dG(t) - Le^{-Rx}\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} e^{-Rct}dG(t) \le$$

$$\le Le^{-Rb_1}\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} dG(t) - Le^{-Rb_1}\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} e^{-Rct}dG(t) = Le^{-Rb_1}\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty}\left(1-e^{-Rct}\right)dG(t) \le$$

$$\le Le^{-Rb_1}\int_0^{\infty}\left(1-e^{-Rct}\right)dG(t) = Le^{-Rb_1}\int_0^{\infty} dG(t) - Le^{-Rb_1}\int_0^{\infty} e^{-Rct}dG(t) =$$

$$= Le^{-Rb_1} - LL^{-1}e^{-Rb_1} = Le^{-Rb_1} - e^{-Rb_1} = (L-1)\,e^{-Rb_1}. \quad (3.5)$$

Таким образом, мы имеем

$$\psi^b_{k+1}(x, b_1, \ldots, b_{k+1}) < e^{-Rx} + (L-1)\,e^{-Rb_1} + (L-1)\sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i} = \nu_{k+1}(x, b_1, \ldots, b_{k+1}).$$

Итак, мы доказали, что для всех $k \ge 0$ выполняется неравенство

$$\psi^b_k(x, b_1, \ldots, b_k) < \nu_k(x, b_1, \ldots, b_k),$$

откуда с помощью предельного перехода мы получаем необходимое неравенство (3.3). □

Пример 3.1. Согласно признаку Даламбера, для сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-Rb_i}$ достаточно, чтобы существовала некоторая константа $q > 0$ и номер i_0, начиная с которого верно неравенство $b_{i+1} - b_i \ge q$. В то же время для получения корректной оценки сверху для вероятности разорения $\psi^b(x)$ нам недостаточно только сходимости ряда в правой части (3.3). Необходимо, чтобы вся правая часть неравенства (3.3) была меньше 1. Рассмотрим частный случай, в котором уровни барьера имеют вид

$$b_i = b + (i-1)a,\ a > 0,\ b > x > 0.$$

Для такой ступенчатой функции барьера можно в явном виде найти сумму ряда $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-Rb_i}$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-Rb_i} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-R(b+(i-1)a)} = e^{-Rb} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-Ra(i-1)} = \frac{e^{-Rb}}{1-e^{-Ra}}.$$

Соответственно, мы получаем тогда следующую оценку вероятности разорения:

$$\psi^b(x) \leq e^{-Rx} + (L-1)\,\frac{e^{-Rb}}{1-e^{-Ra}}. \tag{3.6}$$

Несложно проверить, что для любого фиксированного значения $a > 0$ существуют b, при которых оценка (3.6) будет меньше 1. Такие b должны удовлетворять неравенству

$$b > \max\left(R^{-1}\ln\left[\frac{L-1}{(1-e^{-Rx})(1-e^{-Ra})}\right],\ x\right). \tag{3.7}$$

Заметим, что условие (3.7) можно иначе переписать в виде

$$\begin{cases} b > R^{-1}\ln\left[\frac{L-1}{(1-e^{-Rx})(1-e^{-Ra})}\right] \ \text{ при } x < R^{-1}\ln\left[\frac{L-e^{-Ra}}{1-e^{-Ra}}\right], \\ b > x \ \text{ при } x \geq R^{-1}\ln\left[\frac{L-e^{-Ra}}{1-e^{-Ra}}\right]. \end{cases} \tag{3.8}$$

С другой стороны, если значение $b_1 = b$ фиксировано и достаточно велико, а именно,

$$\begin{cases} b > R^{-1}\ln\left[\frac{L-1}{1-e^{-Rx}}\right] \ \text{ при } x < R^{-1}\ln L, \\ b > x \ \text{ при } x \geq R^{-1}\ln L, \end{cases} \tag{3.9}$$

то выбрав параметр a, такой, что

$$a > -R^{-1}\ln\left[1-(L-1)\,\frac{e^{-Rb}}{1-e^{-Rx}}\right], \tag{3.10}$$

можно также снизить оценку сверху для вероятности разорения до значения, меньшего 1. Очевидно, что вероятность разорения также будет меньше 1 и для любой другой ступенчатой барьерной стратегии, согласно которой все барьеры b_i будут не ниже $b+(i-1)a$ при условии (3.8) или при условиях (3.9) и (3.10).

Пример 3.2. Последовательность барьеров вида $b_i = b + (i-1)a,\ i \geq 1$, из примера 3.1 обладает несомненным преимуществом перед многими другими последовательностями из-за того, что сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-Rb_i}$ в правой части (3.3) в случае $b_i = b+(i-1)a$ считается в явном виде. Однако акционеры страховой компании могут отказаться от применения стратегии со ступенчатой функцией такого вида из-за слишком быстрого постоянного роста барьеров. В связи с этим рассмотрим последовательность, которая растет медленнее, чем $b_i = b+(i-1)a$. А именно, пусть уровень барьера на полуинтервале $[T_{i-1}, T_i)$ задается как

$$b_i = \ln b + a\ln i = \ln(i^a b),\ a > 0,\ b > e^x,\ x > 0.$$

В этом случае получаем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-Rb_i} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-R(\ln b + a\ln i)} = e^{-R\ln b} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-aR\ln i} = \frac{1}{b^R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{aR}}.$$

Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-aR}$ будет являться сходящимся тогда и только тогда, когда $aR > 1$, т.е. $a > R^{-1}$. Если же выполнено условие $a > R^{-1}$, то всегда найдется такое значение $b > e^x$, при котором оценка вероятности разорения (3.3) будет меньше единицы:

$$e^{-Rx} + (L-1)\frac{1}{b^R}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{aR}} < 1 \;\Leftrightarrow\; b > \left(\frac{(L-1)\sum_{i=1}^{\infty} i^{-aR}}{1-e^{-Rx}}\right)^{\frac{1}{R}}.$$

При этом ряд $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-aR}$ при необходимости можно оценить сверху, например, с помощью интеграла:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{-aR} = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} i^{-aR} < 1 + \int_1^{\infty} x^{-aR}dx = 1 + \frac{1}{aR-1} = \frac{aR}{aR-1}.$$

Таким образом, вероятность разорения акционерной страховой компании будет меньше 1, если данная компания будет использовать ступенчатую барьерную стратегию, согласно которой все барьеры $b_i,\ i \geq 1$, будут не ниже $\ln b + a\ln i$ при условии

$$\begin{cases} a > R^{-1}\ , \\ b > \max\left(\left(\frac{aR(L-1)}{(aR-1)(1-e^{-Rx})}\right)^{\frac{1}{R}},\ e^x\right). \end{cases}$$

§3.2.2 Оценка вероятности разорения в рамках модели Крамера-Лундберга

Рассмотрим теперь дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера в рамках модели риска Крамера–Лундберга, частного случая модели Спарре Андерсена. Согласно модели Крамера–Лундберга, N_t — это пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Уравнение для характеристического показателя R при этом условии принимает вид

$$\lambda + Rc = \lambda\int_0^{\infty} e^{Ry}dF(y), \tag{3.11}$$

а вероятность разорения $\psi^b(x)$ может быть оценена сверху согласно следствию из теоремы 3.1.

Следствие 3.1. *Пусть N_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Тогда имеет место следующее неравенство для вероятности разорения акционерной страховой компании,* *использующей барьерную дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера:*

$$\psi^b(x) \le e^{-Rx} + \frac{Rc}{\lambda}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-Rb_i}.$$

Однако благодаря тому, что в рамках модели Крамера–Лундберга вычисление некоторых интегралов из доказательства теоремы 3.1 возможно в явном виде, удается доказать и более сильное неравенство для вероятности разорения $\psi^b(x)$.

Теорема 3.2. *Пусть N_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Тогда имеет место следующее неравенство для вероятности разорения $\psi^b(x)$ акционерной страховой компании, использующей барьерную дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера:*

$$\psi^b(x) \le e^{-Rx} + \frac{Rc}{\lambda}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-Rb_i - \lambda c^{-1}(b_i - b_{i-1})}, \text{ где } b_0 = x.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 с точностью до двух переходов. А именно, при условии, что

$$\nu_k(x, b_1, \ldots, b_k) = e^{-Rx} + \frac{Rc}{\lambda} e^{-Rb_1 - \lambda c^{-1}(b_1 - x)} + \frac{Rc}{\lambda}\sum_{i=2}^{k} e^{-Rb_i - \lambda c^{-1}(b_i - b_{i-1})},$$

сначала показываем справедливость неравенства типа (3.4), а далее добавляем еще одну оценку:

$$\begin{aligned}
\psi^b_{k+1}(x, b_1, \ldots, b_{k+1}) &< \int_0^{\frac{b_1 - x}{c}} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \nu_k(x + ct - y, b_2, \ldots, b_{k+1}) dF(y) dt + \\
&\quad + \int_{\frac{b_1 - x}{c}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \nu_k(b_1 - y, b_2, \ldots, b_{k+1}) dF(y) dt \le \\
&\le \int_0^{\frac{b_1 - x}{c}} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \left[e^{-R(x + ct - y)} + \frac{Rc}{\lambda} \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i - \lambda c^{-1}(b_i - b_{i-1})} \right] dF(y) dt + \\
&\quad + \int_{\frac{b_1 - x}{c}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \left[e^{-R(b_1 - y)} + \frac{Rc}{\lambda} \sum_{i=2}^{k+1} e^{-Rb_i - \lambda c^{-1}(b_i - b_{i-1})} \right] dF(y) dt.
\end{aligned}$$

После, получив в ходе доказательства разность интегралов, как в левой части (3.5), не оцениваем ее, а считаем в явном виде. □

§3.3 Математическое ожидание дисконтированных дивидендов

Как уже отмечалось ранее, исследование математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения компании, является одним из важных направлений в теории риска. Существует большое количество работ, посвященных данной теме, при этом во многих работах в качестве дивидендной стратегии рассматривается барьерная стратегия с постоянным уровнем барьера (см. [7], [37], [40]). Пусть как и во второй главе диссертации функция $V(x, b)$ обозначает математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения страховой компании, использующей барьерную стратегию с постоянным уровнем барьера, равным b. В текущем параграфе мы будем изучать процесс выплаты дивидендов в рамках модели Крамера-Лундберга и нам снова понадобится тот факт, что в рамках данной модели риска $V(x, b)$ как функция от начального капитала x удовлетворяет уравнению

$$cV'(x,b) - (\lambda + \delta)V(x,b) + \lambda \int_0^x V(x-y,b)dF(y) = 0, \quad 0 < x < b, \tag{3.12}$$

и граничному условию

$$V'(b,b) = 1. \tag{3.13}$$

Однако основной интерес для нас теперь будет представлять математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных в соответствии с барьерной стратегией со ступенчатой функцией барьера. Важным преимуществом данных стратегий (по сравнению с барьерными стратегиями с постоянным барьером) является то, что в них заложена возможность изменения условий выплаты дивидендов с течением времени. Далее мы будем рассматривать такие ступенчатые барьерные стратегии, согласно которым уровень барьера может меняться после каждого из первых $n-1$ требований (а далее до разорения должен оставаться неизменным). Данные стратегии выплаты дивидендов задаются уже не одним значением барьера b, а набором $b_1, \ldots, b_n$.

Случай $n = 2$. Для начала изучим стратегию, в рамках которой барьер изменяется только один раз после момента T_1. Пусть $V(x, b_1, b_2)$ — это математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения компании в рамках данной дивидендной стратегии. Будем как и ранее считать, что $x \le b_1$ (при $x > b_1$ положим $V(x, b_1, b_2) = x - b_1 + V(b_1, b_1, b_2)$). Найдем с помощью формулы полной вероятности зависимость функции $V(x, b_1, b_2)$ от уже изученной $V(x, b)$. Начиная с момента времени $t = 0$ и до момента первого требования T_1 в страховую компанию поступают премии с интенсивностью c. В случае отсутствия какого-либо барьера это означало бы, что на этом интервале капитал компании U_t растет линейно по прямой $y = x + ct$. В нашей же модели, учитывающей наличие барьера b_1, могут быть две различные ситуации: либо капитал компании так же растет по прямой $y = x + ct$ вплоть до поступления первого требования и не достигает барьера b_1, либо же в какой-то момент времени капитал U_t становится равным b_1 и вся дальнейшая поступающая до T_1 премия выплачивается в качестве дивидендов (см. рис. 3.3). Очевидно, что та или иная ситуация наступает в зависимости от того, как соотносятся величины T_1

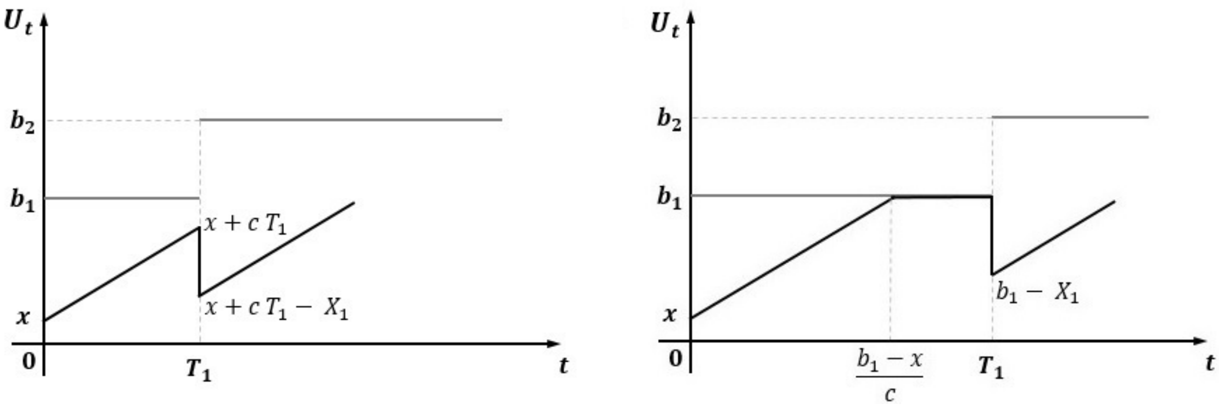

Рис. 3.3: Возможное изменение капитала U_t на отрезке $[0, T_1]$

и $\frac{b_1-x}{c}$. Таким образом, мы имеем:

$$V(x, b_1, b_2) = \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} V(x + ct - y, b_2) dF(y) dt + \\ + \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b_1} V(b_1 - y, b_2) dF(y) dt + V_{[0,T_1)}(x, b_1), \quad (3.14)$$

где $V_{[0,T_1)}(x, b_1)$ — это математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных на полуинтервале $t \in [0, T_1)$.

Следующая лемма устанавливает явный вид функции $V_{[0,T_1)}(x, b_1)$.

Лемма 3.1. *Имеет место равенство:*

$$V_{[0,T_1)}(x, b_1) = \frac{c}{\lambda + \delta} e^{-(\lambda+\delta)\frac{b_1-x}{c}}.$$

Доказательство. Дисконтированные дивиденды на полуинтервале $t \in [0, T_1)$ отличны от нуля, только если $T_1 > \frac{b_1-x}{c}$. В этом случае дивиденды выплачиваются акционерам непрерывно с интенсивностью c на всем промежутке $t \in [\frac{b_1-x}{c}, T_1)$. Следовательно,

$$V_{[0,T_1)}(x, b_1) = \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{t} c e^{-\delta u} du dG(t),$$

где $G(t) = 1 - e^{-\lambda t},\ t \geq 0,$ — это функция распределения случайной величины T_1. Пусть также $S(t) = 1 - G(t)$ и $g(t) = \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{t} c e^{-\delta u} du$ для сокращения выкладок. Соответственно, получаем:

$$V_{[0,T_1)}(x, b_1) = -\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} g(t) dS(t) = -g(t)S(t)\Big|_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} + \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} S(t) dg(t) = \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} S(t) dg(t) = \\ = \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} S(t) c e^{-\delta t} dt = \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} c e^{-\lambda t} e^{-\delta t} dt = \frac{c}{\lambda+\delta} e^{-(\lambda+\delta)\frac{b_1-x}{c}}. \ \square$$

Рассмотрим далее интегралы в правой части равенства (3.14). Упростим сначала первый интеграл, использовав для этого соотношение (3.12). Действительно, в силу (3.12) верно равенство

$$\lambda \int_0^{x+ct} V(x+ct-y, b_2)dF(y) = (\lambda+\delta)V(x+ct, b_2) - cV'(x+ct, b_2),$$

а значит,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{b_1-x}{c}} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} V(x+ct-y, b_2)dF(y)dt = \\
&\quad = \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} e^{-(\lambda+\delta)t}(\lambda+\delta)V(x+ct, b_2)dt - \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} e^{-(\lambda+\delta)t} cV'(x+ct, b_2)dt = \\
&\quad = \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} e^{-(\lambda+\delta)t}(\lambda+\delta)V(x+ct, b_2)dt - \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} e^{-(\lambda+\delta)t} dV(x+ct, b_2) = \\
&\quad = \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} e^{-(\lambda+\delta)t}(\lambda+\delta)V(x+ct, b_2)dt - e^{-(\lambda+\delta)t}V(x+ct, b_2)\Big|_0^{\frac{b_1-x}{c}} - \\
&\qquad - \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} e^{-(\lambda+\delta)t}(\lambda+\delta)V(x+ct, b_2)dt = -e^{-(\lambda+\delta)\frac{b_1-x}{c}}V(b_1, b_2) + V(x, b_2).
\end{aligned}$$

Аналогично преобразуем и второй интеграл в правой части (3.14):

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b_1} V(b_1-y, b_2)dF(y)dt = \\
&\quad = \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)t}\Big((\lambda+\delta)V(b_1, b_2) - cV'(b_1, b_2)\Big)dt = \\
&\quad = \Big((\lambda+\delta)V(b_1, b_2) - cV'(b_1, b_2)\Big)\frac{1}{\lambda+\delta}e^{-(\lambda+\delta)\frac{b_1-x}{c}} = \\
&\quad = e^{-(\lambda+\delta)\frac{b_1-x}{c}}V(b_1, b_2) - V_{[0,T_1)}(x, b_1)V'(b_1, b_2).
\end{aligned}$$

Отсюда после очевидных упрощений мы получаем, что верна следующая теорема.

Теорема 3.3. *При использовании ступенчатой барьерной стратегии с двумя уровнями барьера b_1 и b_2 математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения компании, имеет вид*

$$V(x, b_1, b_2) = V(x, b_2) + [1 - V'(b_1, b_2)]\, V_{[0,T_1)}(x, b_1), \quad 0 \le x \le b_1,\ b_1 \le b_2.$$

Заметим, что в силу граничного условия (3.13) в предельном случае $b_2 = b_1$ функция $V(x, b_1, b_2)$ совпадает с $V(x, b_1)$. В то же время при некоторых значениях параметров b_1 и b_2 дисконтированные дивиденды в модели с двумя барьерами оказываются больше дивидендов, выплаченных в соответствии с барьерной стратегией с постоянным барьером, равным b_1, а именно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Пусть $b_1 \le b_2$ и $V(u,b_2) > V(u,b_1)$ при любом начальном капитале u, таком, что $0 \le u \le b_1$. Тогда выполняется неравенство $V(x,b_1,b_2) > V(x,b_1)$.*

Доказательство. В силу (3.14) мы имеем:

$$V(x,b_1,b_2) = \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} V(x+ct-y,b_2)dF(y)dt +$$
$$+ \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b_1} V(b_1-y,b_2)dF(y)dt + V_{[0,T_1)}(x,b_1) >$$
$$> \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} V(x+ct-y,b_1)dF(y)dt +$$
$$+ \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b_1} V(b_1-y,b_1)dF(y)dt + V_{[0,T_1)}(x,b_1) = V(x,b_1).$$

$\square$

Отметим, что барьеры b_1 и b_2, удовлетворяющие условиям утверждения 3.1, будут существовать, если, например, существует оптимальный, не зависящий от x, уровень барьера $b^* > 0$, при котором значение функции $V(x,b)$ максимально. Если b_1 удовлетворяет неравенствам $x \le b_1 < b^*$, то множество значений барьера b_2, при которых $V(u,b_2) > V(u,b_1)$ при $\forall u : 0 \le u \le b_1$, будет не пусто, так как b^* принадлежит этому множеству. Таким образом, изменение барьера после первого убытка действительно имеет смысл, если, например, начальный барьер b_1 был меньше оптимального значения b^*. Такой выбор барьера b_1 может быть в свою очередь обусловлен желанием акционеров получить больше дивидендов в первое время работы страховой компании. В самом деле, несложно проверить, что функция $V_{[0,T_1)}(x,b_1)$ убывает по b_1.

Пример 3.3. Рассмотрим применение утверждения 3.1 на примере экспоненциального распределения требований. Пусть $F(y) = 1 - e^{-\beta y}$, $y \ge 0$. Тогда согласно работе [40] при условии $\beta\lambda c > (\lambda+\delta)^2$ существует оптимальный уровень барьера $b^*_{\exp} > 0$, не зависящий от x, который имеет вид

$$b^*_{\exp} = \frac{1}{r-s} \ln \frac{s^2(s+\beta)}{r^2(r+\beta)}.$$

Здесь $r > 0, s < 0$ — корни характеристического уравнения $cz^2 + (\beta c - \lambda - \delta)z - \delta\beta = 0$. Более того, функция $V(x,b)$ убывает при $b > b^*_{\exp}$ и возрастает на полуинтервале $x \le b < b^*_{\exp}$ при любом фиксированном значении начального капитала $x \ge 0$. Поэтому, например, для всех значений $0 \le x \le b_1 < b_2 \le b^*_{\exp}$ выполняются условия утверждения 3.1, а значит, верно неравенство $V(x,b_1,b_2) > V(x,b_1)$.

Случай $n \ge 2$. Пусть теперь у нас есть $n \ge 2$ барьеров $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ и пусть также $V(x,b_1,\ldots,b_n)$ — это математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения страховой компании в модели с барьерами $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ и начальным капиталом x. Далее будем снова предполагать, что $x \le b_1$ (иначе при $x > b_1$ положим $V(x,b_1,\ldots,b_n) = x - b_1 + V(b_1,b_1,\ldots,b_n)$). В рамках рассматриваемой дивидендной стратегии для функции $V(x, b_1, \ldots, b_n)$ верна следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 3.3.

Теорема 3.4. *Для всех значений* $0 \le x \le b_1$ *и* $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$, $n \ge 2$, *имеет место следующее равенство для математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения в соответствии с барьерной стратегией со ступенчатой функцией барьера:*

$$V(x, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n) = V(x, b_1, \ldots, b_{n-2}, b_n) + \\ + \left[1 - V'(b_{n-1}, b_n)\right] V_{[T_{n-2}, T_{n-1})}(x, b_1, \ldots, b_{n-1}), \quad (3.15)$$

где $V_{[T_{n-2}, T_{n-1})}(x, b_1, \ldots, b_{n-1})$ *— это математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных на полуинтервале* $[T_{n-2}, T_{n-1})$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

База индукции. Для $n = 2$ соотношение (3.15) верно в силу теоремы 3.3 (считаем, что $T_0 = 0$).

Шаг индукции. Допустим, что соотношение (3.15) верно для некоторого $n \ge 2$. Покажем, что тогда (3.15) выполняется и для $n + 1$, т.е. справедливо равенство

$$V(x, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}) = V(x, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_{n+1}) + \left[1 - V'(b_n, b_{n+1})\right] V_{[T_{n-1}, T_n)}(x, b_1, \ldots, b_n).$$

Для этого снова воспользуемся формулой полной вероятности:

$$V(x, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}) = \int_0^{\frac{b_1 - x}{c}} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} V(x + ct - y, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}) dF(y) dt + \\ + \int_{\frac{b_1 - x}{c}}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b_1} V(b_1 - y, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}) dF(y) dt + V_{[0, T_1)}(x, b_1). \quad (3.16)$$

По предположению индукции функция $V(x + ct - y, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1})$ может быть определена с помощью соотношения (3.15):

$$V(x + ct - y, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}) = V(x + ct - y, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_{n+1}) + \\ + \left[1 - V'(b_n, b_{n+1})\right] V_{[T_{n-2}, T_{n-1})}(x + ct - y, b_2, \ldots, b_n).$$

Аналогичные рассуждения верны и для функции $V(b_1 - y, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1})$:

$$V(b_1 - y, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}) = V(b_1 - y, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_{n+1}) + \\ + \left[1 - V'(b_n, b_{n+1})\right] V_{[T_{n-2}, T_{n-1})}(b_1 - y, b_2, \ldots, b_n).$$

Подставим получившиеся выражения в (3.16):

$$V(x,b_1,\dots,b_n,b_{n+1}) = \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} V(x+ct-y,b_2,\dots,b_{n-1},b_{n+1})dF(y)dt +$$
$$+ \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b_1} V(b_1-y,b_2,\dots,b_{n-1},b_{n+1})dF(y)dt + V_{[0,T_1)}(x,b_1)+$$
$$+ [1-V'(b_n,b_{n+1})] \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} V_{[T_{n-2},T_{n-1})}(x+ct-y,b_2,\dots,b_n)dF(y)dt+$$
$$+ [1-V'(b_n,b_{n+1})] \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b_1} V_{[T_{n-2},T_{n-1})}(b_1-y,b_2,\dots,b_n)dF(y)dt =$$
$$= V(x,b_1,\dots,b_{n-1},b_{n+1}) + [1-V'(b_n,b_{n+1})]\, V_{[T_{n-1},T_n)}(x,b_1,\dots,b_n).$$

Таким образом, мы доказали шаг индукции, а значит, соотношение (3.15) верно для всех $n \geq 2$. $\square$

С помощью метода математической индукции несложно также доказать справедливость важного следствия из теоремы 3.4.

Следствие 3.2. *Для всех значений* $0 \leq x \leq b_1$ *и* $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, $n \geq 2$, *имеет место следующее равенство для математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения в соответствии с барьерной стратегией со ступенчатой функцией барьера:*

$$V(x,b_1,\dots,b_n) = V(x,b_n) + \sum_{i=1}^{n-1} [1-V'(b_i,b_n)]\, V_{[T_{i-1},T_i)}(x,b_1,\dots,b_i).$$

Покажем теперь, что исследуемая дивидендная стратегия при некоторых значениях $b_1,\dots,b_n$ может быть лучше барьерной стратегии с постоянным барьером, равным b_1, в смысле величины дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения. Действительно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.2. *Пусть* $b_1 \leq \ldots \leq b_n$, $n \geq 2$, *и* $V(u,b_i) > V(u,b_{i-1})$ *при любом начальном капитале* u, *таком, что* $0 \leq u \leq b_{i-1}$, $i = \overline{2,n}$. *Тогда выполняются неравенства* $V(x,b_1,\dots,b_j) > V(x,b_1,\dots,b_{j-1})$, $j = \overline{2,n}$.

Доказательство. Снова воспользуемся методом математической индукции. База индукции следует из утверждения 3.1. Шаг индукции доказывается с помощью равенства (3.16):

$$V(x,b_1,\dots,b_{k+1}) = \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} V(x+ct-y,b_2,\dots,b_{k+1})dF(y)dt +$$
$$+ \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b_1} V(b_1-y,b_2,\dots,b_{k+1})dF(y)dt + V_{[0,T_1)}(x,b_1) >$$

$$
> \int_0^{\frac{b_1-x}{c}} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} V(x+ct-y, b_2, \ldots, b_k) dF(y) dt +
$$

$$
+ \int_{\frac{b_1-x}{c}}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b_1} V(b_1-y, b_2, \ldots, b_k) dF(y) dt + V_{[0,T_1)}(x, b_1) = V(x, b_1, \ldots, b_k).
$$

□

Как и в случае утверждения 3.1, существования оптимального, не зависящего от x, уровня барьера $b^* > 0$, при котором значение функции $V(x, b)$ максимально, и условия $x \le b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < b^*$ достаточно для существования барьеров b_i, таких, что неравенства $V(u, b_i) > V(u, b_{i-1})$ справедливы при $\forall u : 0 \le u \le b_{i-1}$. Заметим, что рассмотрение случая $x \le b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < b^*$ действительно имеет смысл. Несмотря на то, что барьер b^* будет оптимальным в смысле максимизации всех совокупных выплаченных дивидендов до разорения компании, в краткосрочной перспективе для получения бóльших дивидендов может появиться необходимость использовать меньший барьер. Если страховая компания не разоряется после i-го убытка и акционерам нужно до следующего $(i+1)$-го убытка получить больше дивидендов, следует использовать как можно меньший барьер. В то же время нельзя забывать о будущих дивидендах и вероятности быстрого разорения при совсем низком барьере. Таким образом, на основе всех аргументов может быть принято решение постепенно поднимать уровень барьера до оптимального значения. Преимущество данного решения об увеличении уровня барьера после наступления страховых требований как раз следует из утверждения 3.2.

Пример 3.4. В случае экспоненциального распределения требований условиям утверждения 3.2 удовлетворяют, например, все уровни барьеров $b_1, \ldots, b_n$, $n \ge 2$, такие, что $0 \le x \le b_1 < \ldots < b_n \le b^*_{\text{exp}}$.

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

- В рамках модели с комбинированным страхованием получено уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, соответствующее задаче поиска наибольшей возможной вероятности неразорения, и доказаны существование и единственность решения данного уравнения. Кроме того, определена связь между решением данного уравнения и искомой наибольшей вероятностью неразорения. При этом также доказано существование оптимальной стратегии перестрахования, при использовании которой вероятность неразорения компании максимальна. Для иллюстрации указанных теоретических результатов приведены численные примеры.

- Установлен вид интегро-дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет математическое ожидание дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения страховой компанией, использующей комбинацию квотного перестрахования и перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика. В случае экспоненциального распределения и в случае равномерного распределения требований интегро-дифференциальные уравнения сведены к дифференциальным уравнениям второго порядка и построены алгоритмы поиска решений данных дифференциальных уравнений. Полученные алгоритмы подкреплены примерами и численными результатами.

- Для акционерной страховой компании, использующей барьерную дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера, получены оценки вероятности разорения. Приведены примеры стратегий, при использовании которых вероятность разорения компании строго меньше единицы. Кроме того, найдена формула для вычисления математического ожидания дисконтированных дивидендов, выплаченных до разорения.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с доказательством существования оптимальных стратегий перестрахования в модели с комбинированным страхованием и случайными премиями. Задача поиска наибольшей возможной вероятности неразорения в модели, согласно которой не только поступление страховых требований, но и поступление премии описывается с помощью составного пуассоновского процесса, остается открытой.

Логичным следующим шагом в изучении барьерных дивидендных стратегий со ступенчатым барьером является отмена условия неубывания функции барьера.

Список литературы

[1] *Белкина Т.А., Матвеева М.В.* Об оптимальных стратегиях перестрахования в моделях с диффузной аппроксимацией процесса риска // Сборник научных трудов «Инновационная система государства и перспективы ее развития». Гомель: ЦИИР. — 2010. — С. 43–54.

[2] *Булинская Е.В.* Теория риска и перестрахование. Часть 2. — М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2006.

[3] *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[4] *Громов А.Н.* Оптимальная стратегия перестрахования эксцедента убытка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2011. — №4. — С. 17–22.

[5] *Жанблан-Пике М., Ширяев А.Н.* Оптимизация потока дивидендов // Успехи математических наук. — 1995. — Т. 50, №2 (302). — С. 25–46.

[6] *Калашников В.В., Константинидис Д.Г.* Вероятность разорения // Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т.2, №4. — С. 1055–1100.

[7] *Карапетян Н.В.* Оптимизация барьера выплаты дивидендов при гамма-распределении требований // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2009. — №5. — С. 57–60.

[8] *Карапетян Н. В.* Исследование устойчивости величины дивидендов к возмущению базового процесса // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2011. — Т. 18, №1. — С. 55–62.

[9] *Копачевский Н.Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: спец. курс лекций. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.А.", 2012.

[10] *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Математические основы теории риска. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[11] *Фантаццини Д.* Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. Часть I // Прикладная эконометрика. — 2011. — Т. 22, №2. — С. 98–134.

[12] *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: КомКнига, 2010.

[13] *Ярцева Д.А.* Верхние и нижние оценки дивидендов в дискретной модели // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2009. — №5. — С. 60–62.

[14] *Albrecher H., Hartinger J., Thonhauser S.* On exact solutions for dividend strategies of threshold and linear barrier type in a Sparre Andersen model // ASTIN Bulletin. — 2007. — Vol. 37, №2. — P. 203–233.

[15] *Albrecher H., Hartinger J., Tichy R.F.* On the distribution of dividend payments and the discounted penalty function in a risk model with linear dividend barrier // Scandinavian Actuarial Journal. — 2005. — Vol. 2005, №2. — P. 103–126.

[16] *Albrecher H., Kainhofer R.* Risk theory with a non-linear dividend barrier // Computing. — 2002. — Vol. 68, №4. — P. 289–311.

[17] *Albrecher H., Kainhofer R., Tichy R.F.* Simulation methods in ruin models with non-linear dividend barriers // Mathematics and Computers in Simulation. — 2003. — Vol. 62, № 3-6. — P. 277–287.

[18] *Albrecher H., Thonhauser S.* Optimality results for dividend problems in insurance // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas. — 2009. — Vol. 103, №2. — P. 295–320.

[19] *Asmussen S., Hojgaard B., Taksar M.* Optimal risk control and dividend distribution policies: example of excess-of-loss reinsurance for an insurance corporation // Finance and Stochastics. — 2000. — Vol. 4, №3. — P. 299–324.

[20] *Avanzi B.* Strategies for dividend distribution: a review // North American Actuarial Journal. — 2009. — Vol. 13, №2. — P. 217–251.

[21] *Avanzi B., Gerber H.U.* Optimal dividends in the dual model with diffusion // ASTIN Bulletin. — 2008. — Vol. 38, №2. — P. 653–667.

[22] *Avanzi B., Shen J., Wong B.* Optimal dividends and capital injections in the dual model with diffusion // ASTIN Bulletin. — 2011. — Vol. 41, №2. — P. 611–644.

[23] *Azcue P., Muler N.* Optimal reinsurance and dividend distribution policies in the Cramer-Lundberg model // Mathematical Finance. — 2005. — Vol. 15, №2. — P. 261–308.

[24] *Bayraktar E., Kyprianou A.E., Yamazaki K.* On optimal dividends in the dual model // ASTIN Bulletin. — 2013. — Vol. 43, №3. — P. 359–372.

[25] *Beveridge C.J., Dickson D.C.M., Wu X.* Optimal dividends under reinsurance // Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires. — 2008. — Vol. 1. — P. 149–166.

[26] *Bühlmann H.* Mathematical Methods in Risk Theory. — Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1970.

[27] *Cai J.* Cramer–Lundberg Asymptotics // Wiley StatsRef: Statistics Reference Online. — 2014. — P. 1–6.

[28] *Cai J., Garrido J.* Two-sided bounds for ruin probabilities when the adjustment coefficient does not exist // Scandinavian Actuarial Journal. — 1999. — Vol. 1999, №1. — P. 80–92.

[29] *Cani A., Thonhauser S.* An optimal reinsurance problem in the Cramer–Lundberg model // Mathematical Methods of Operations Research. — 2016. — P. 1–27.

[30] *Choulli T., Taksar M., Zhou X.Y.* Excess-of-loss reinsurance for a company with debt liability and constraints on risk reduction // Quantitative Finance. — 2001. — Vol. 1, №6. — P. 573–596.

[31] *Cramer H.* On the mathematical theory of risk // Stockholm: Skandia Jubilee Volume. — 1930.

[32] *Cramer H.* The theory of risk in its application to life insurance problems // Proceedings of Ninth International Congress Actuaries. — 1931. — Vol. 2. — P. 380–394.

[33] *Cramer H.* Collective risk theory // Stockholm: Skandia Jubilee Volume. — 1955. — P. 1–92.

[34] *Dickson D.C.M.* An upper bound for the probability of ultimate ruin // Scandinavian Actuarial Journal. — 1994. — Vol. 1994, №2. — P. 131–138.

[35] *Dickson D.C.M., Waters H.R.* Some optimal dividends problems // ASTIN Bulletin. — 2004. — Vol. 34, №1. — P. 49–74.

[36] *Eisenberg J., Schmidli H.* Minimising expected discounted capital injections by reinsurance in a classical risk model // Scandinavian Actuarial Journal. —2011. — Vol. 2011, №3. — P. 155–176.

[37] *Feng R., Volkmer H.W., Zhang S., Zhu C.* Optimal dividend policies for piecewise-deterministic compound Poisson risk models // Scandinavian Actuarial Journal. — 2015. — Vol. 2015, №5. — P. 423–454.

[38] *De Finetti B.* Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio // Transactions of the XVth International Congress of Actuaries. — 1957. — Vol. 2, №1. — P. 433–443.

[39] *Gerber H. U.* On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier // Scandinavian Actuarial Journal. — 1981. — Vol. 1981, №2. — P. 105–115.

[40] *Gerber H. U., Shiu E. S. W., Smith N.* Maximizing dividends without bankruptcy // ASTIN Bulletin. — 2006. — Vol. 36, №1. — P. 5–23.

[41] *Gerber H. U., Shiu E. S. W., Smith N.* Methods for estimating the optimal dividend barrier and the probability of ruin // Insurance: Mathematics and Economics. — 2008. — Vol. 42, №1. — P. 243–254.

[42] *Gijbels I., Herrmann K.* On the distribution of sums of random variables with copula-induced dependence // Insurance: Mathematics and Economics. — 2014. — Vol. 59. — P. 27–44.

[43] *Hipp C., Vogt M.* Optimal dynamic XL reinsurance // ASTIN Bulletin. — 2003. — Vol. 33, №2. — P. 193–207.

[44] *Hojgaard B., Taksar M.* Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models // Scandinavian Actuarial Journal. — 1998. — Vol. 1998, №2. — P. 166–180.

[45] *Hojgaard B., Taksar M.* Controlling risk exposure and dividends payout schemes: insurance company example // Mathematical Finance. — 1999. — Vol. 9, №2. — P. 153–182.

[46] *Kalashnikov V.* Two-sided bounds of ruin probabilities // Scandinavian Actuarial Journal. — 1996. — Vol. 1996, №1. — P. 1–18.

[47] *Karapetyan N.V.* Dividends and reinsurance // Proceedings of the 6th St. Petersburg Workshop on Simulation. — 2009. — P. 47–52.

[48] *Li Y., Liu G.* Dynamic proportional reinsurance and approximations for ruin probabilities in the two-dimensional compound Poisson risk model // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2012. — Vol. 2012. — P. 1–26.

[49] *Liang Z., Yuen K.C.* Optimal dynamic reinsurance with dependent risks: variance premium principle // Scandinavian Actuarial Journal. — 2016. — Vol. 2016, №1. — P. 18–36.

[50] *Lin X.S., Willmot G.E., Drekic S.* The classical risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function // Insurance: Mathematics and Economics. — 2003. — Vol. 33, №3. — P. 551–566.

[51] *Loeffen R.L.* On optimality of the barrier strategy in de Finetti's dividend problem for spectrally negative Lévy processes // The Annals of Applied Probability. — 2008. — Vol. 18, №5. — P. 1669–1680.

[52] *Lundberg F.* Approximations of the Probability Function / Reinsurance of Collective Risks. — Uppsala: Doctoral thesis, 1903.

[53] *Marciniak E., Palmowski Z.* On the optimal dividend problem for insurance risk models with surplus-dependent premiums // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2016. — Vol. 168, №2. — P. 723–742.

[54] *Marciniak E., Palmowski Z.* On the optimal dividend problem in the dual model with surplus-dependent premiums // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2017. — P. 1–20. (doi:10.1007/s10957-016-1050-7)

[55] *Mnif M., Sulem A.* Optimal risk control and dividend policies under excess of loss reinsurance // Stochastics, An International Journal of Probability and Stochastic Processes. — 2005. — Vol. 77, №5. — P. 455–476.

[56] *Nelsen R.B.* An Introduction to Copulas. — N. Y.: Springer, 2006.

[57] *Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.L.* Stochastic Processes for Insurance and Finance. — Chichester: Wiley, 1999.

[58] *Schmidli H.* Lecture Notes on Risk Theory. — Cologne: Institute of Mathematics, University of Cologne, 2000.

[59] *Schmidli H.* Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting // Scandinavian Actuarial Journal. — 2001. — Vol. 2001, №1. — P. 55–68.

[60] *Schmidli H.* Stochastic Control in Insurance. — London: Springer-Verlag, 2008.

[61] *Sparre Andersen E.* On the collective theory of risk in case of contagion between the claims // Transactions of the XVth International Congress of Actuaries. — 1957. — Vol. 2, №6. — P. 219–229.

[62] *Zhang X., Zhou M., Guo J.* Optimal combinational quota-share and excess-of-loss reinsurance policies in a dynamic setting // Applied Stochastic Models in Business and Industry. — 2007. — Vol. 23, №1. — P. 63–71.

Публикации автора

Статьи

[63] *Муромская А.А.* Дисконтированные дивиденды в модели со ступенчатой функцией барьера // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2016. — №5. — С. 41–44 (перевод: *Muromskaya A.* Discounted dividends in a strategy with a step barrier function // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2016. — Vol. 71, №5. — P. 200–203).

[64] *Муромская А.А.* Оптимальное перестрахование в модели со страхованием нескольких рисков в рамках одного договора // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2016. — №4. — С. 79–97.

[65] *Муромская А.А.* Обобщение неравенства Лундберга для случая акционерной страховой компании // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2017. — №1. — С. 32–36.

[66] *Bulinskaya E., Muromskaya A.* Optimization of multi-component insurance systems // SMTDA 2014 Conference Proceedings. ISAST. — 2014. — Vol. 1. — P. 145–155.

[67] *Bulinskaya E., Muromskaya A.* Optimization of multi-component insurance system with dividend payments // New Trends in Stochastic Modeling and Data Analysis, Eds. R. Manca, S. McClean, Ch. H. Skiadas. ISAST. — 2015. — Vol. 1. — P. 27–42.

[68] *Муромская А.А.* Оптимальная дивидендная стратегия в случае перестрахования с ограниченной ответственностью перестраховщика // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014». М.: МАКС Пресс. — 2014. (ISBN 978-5-317-04715-3)

[69] *Муромская А.А.* Оптимальное перестрахование в модели с пороговой дивидендной стратегией // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015». М.: МАКС Пресс. — 2015. (ISBN 978-5-317-04946-1)

[70] *Муромская А.А.* Дисконтированные дивиденды в модели со ступенчатой функцией барьера // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016». М.: МАКС Пресс. — 2016. (ISBN 978-5-317-05237-9)

[71] *Муромская А.А.* Модель работы акционерной страховой компании, использующей дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера // Материалы Международной конференции по стохастическим методам. Ростов н/Д: Издательство Фонд науки и образования. — 2016. — С. 63–64.

[72] *Муромская А.А.* Модель работы акционерной страховой компании, использующей дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера // Теория вероятностей и ее применения. — 2016. — Т. 61, №3. — С. 613.

[73] *Муромская А.А.* Оптимальное перестрахование в модели с комбинированным страхованием // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа». Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2017. — С. 151–152.

[74] *Muromskaya A.* On a classical risk model with a step barrier dividend strategy // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2016). Conference Proceedings. M.: MAKS Press. — 2016. — Vol. 1. — P. 213–216.