МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Асташов Евгений Александрович

УДК 512.761.5

# КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЫХ РОСТКОВ ЭКВИВАРИАНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор С. М. Гусейн-Заде

Москва 2017

# Оглавление

# Глава 1

# Введение

При рассмотрении многообразий, на которых заданы действия фиксированной группы $G$, возникает понятие эквивариантного отображения (то есть отображения, сохраняющего действие группы).

**Определение 1.** Отображение $G$-многообразий $f\colon M \to N$ называется *эквивариантным* относительно заданных действий группы $G$, если для каждой точки $x \in M$ и каждого элемента $\sigma \in G$ выполнено равенство

$$f(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot f(x).$$

(Символом «$\cdot$» обозначается действие элемента группы $G$ на точку многообразия $M$ или $N$ соответственно.)

В частности, это понятие применимо к аналитическим функциям многих переменных и их росткам, а также к бирациональным автоморфизмам комплексных пространств и их росткам. В случае, когда действие группы $G$ на многообразии $N$ тривиально, отображение $f$ называют *инвариантным* относительно действия группы $G$ на многообразии $M$.

Задачи, связанные с рассмотрением аналитических функций многих переменных или их ростков, эквивариантных относительно заданной пары комплексных представлений какой-либо конечной абелевой группы $G$, возникают в алгебраической геометрии, топологии, теории особенностей и других разделах математики. Так, в работе [1] рассматриваются ростки комплексно-аналитических функций многих переменных, инвариантных относительно действия группы $G = \mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ по первой координате:

$$(-1) \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (-z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Рассмотрение таких ростков связано с изучением особенностей функций на многообразии с гладким краем: при переходе от многообразия $\mathbb{C}^n$ с краем $z_1 = 0$ к его двулистному накрытию, разветвленному вдоль края (то есть при замене переменных $z_1 = \tilde{z}_1^2$, $z_i = \tilde{z}_i$ при $i \geqslant 2$), росток $f(z_1, \ldots, z_n)$ отображается в росток $f(\tilde{z}_1^2, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_n)$, инвариантный относительно указанного выше действия.

В работе [2] рассматриваются ростки нечетных функций, то есть функций, эквивариантных относительно нетривиальных скалярных действий группы $G = \mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. Такие ростки изучаются в связи с задачей описания особенностей каустик Вигнера на оболочках лагранжевых подмногообразий аффинного симплектического пространства.

На множестве ростков аналитических функций, эквивариантных относительно заданной пары действий группы $G$ на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$, существует естественное отношение эквивалентности.

**Определение 2.** Два эквивариантных ростка $f, g\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ будем называть *эквивариантно правоэквивалентными* (в дальнейшем для краткости будем называть их просто *эквивалентными*) относительно заданной пары действий группы $G$, если существует эквивариантный относительно того же действия группы $G$ на $\mathbb{C}^n$ росток бирационального автоморфизма $\Phi\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, для которого $g = f \circ \Phi$.

Аналогичным образом можно определить левую и двустороннюю эквивалентности эквивариантных ростков, однако в настоящей работе под эквивалентностью эквивариантных ростков всегда будет пониматься именно правая эквивалентность.

Эквивариантные ростки аналитических функций многих переменных с критической точкой в начале координат могут иметь достаточно сложные вырождения (как и в неэквивариантном случае), поэтому классификация таких ростков всегда содержит *модули* (непрерывные параметры). Однако для многих конечных абелевых групп $G$ и их комплексных представлений существуют специальные вырождения, вблизи которых модулей нет; такие вырождения мы будем называть эквивариантно простыми.

**Определение 3.** Росток эквивариантной функции $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с критической точкой $0 \in \mathbb{C}^n$ назовем *эквивариантно простым* относительно заданных представлений группы $G$, если:

- при всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$ достаточно малая окрестность некоторой (а значит, и любой) точки его орбиты в пространстве $r$-струй ростков эквивариантных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ пересекается лишь с конечным числом других орбит (такие орбиты называются *примыкающими* к орбите ростка $g$);

- число примыкающих орбит в пространстве $r$-струй ростков эквивариантных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ остается ограниченным при $r \to \infty$.

Список нормальных форм эквивариантно простых особенностей, тем самым, дает наиболее просто устроенную часть классификации всех эквивариантных особенностей (для данной группы $G$ и ее представлений). В связи с этим возникает общая задача классификации ростков аналитических функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простых относительно различных пар комплексных представлений заданной конечной абелевой группы $G$.

Решение этой задачи в неэквивариантном случае дается в работе В. И. Арнольда [3]. Именно, доказано, что росток функции многих переменных в критической точке прост тогда и только тогда, когда он приводится к одной из следующих нормальных форм:

$$
\begin{aligned}
&A_k: \ (z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_1^{k+1} + z_2^2 + \ldots + z_n^2 && (k \geqslant 1);\\
&D_k: \ (z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_1^2 z_2 + z_2^{k-1} + z_3^2 + \ldots + z_n^2 && (k \geqslant 4);\\
&E_6: \ (z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_1^3 + z_2^4 + z_3^2 + \ldots + z_n^2;\\
&E_7: \ (z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_1^3 + z_1 z_2^3 + z_3^2 + \ldots + z_n^2;\\
&E_8: \ (z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_1^3 + z_2^5 + z_3^2 + \ldots + z_n^2.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

В уже упомянутой работе [1] дается классификация простых особенностей, инвариантных относительно действия группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ по первой координате. В этом случае росток инвариантной функции многих переменных в критической точке прост тогда и только тогда, когда он приводится к одной из следующих нормальных форм:

$$\begin{aligned} B_k:\ &(z_1,\ldots,z_n)\mapsto z_1^{2k}+z_2^2+\ldots+z_n^2 && (k\geqslant 2);\\ C_k:\ &(z_1,\ldots,z_n)\mapsto z_1^2z_2+z_2^k+z_3^2+\ldots+z_n^2 && (k\geqslant 2);\\ F_4:\ &(z_1,\ldots,z_n)\mapsto z_1^4+z_2^3+z_3^2+\ldots+z_n^2. \end{aligned}$$

В работе [2, раздел 3] дается классификация простых нечетных особенностей. В частности, доказано, что при $n\geqslant 3$ таких особенностей не существует вовсе, а при $n=2$ список нормальных форм простых нечетных особенностей имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} D_{2k/2}:&\,(z_1,z_2)\mapsto z_1^2z_2+z_2^{2k-1}\quad (k\geqslant 2);\\ E_{8/2}:&\,(z_1,z_2)\mapsto z_1^3+z_2^5;\\ J_{10/2}:&\,(z_1,z_2)\mapsto z_1^3+z_1z_2^4;\\ E_{12/2}:&\,(z_1,z_2)\mapsto z_1^3+z_2^7. \end{aligned}$$

Имея список нормальных форм простых особенностей, эквивариантных относительно действий некоторой конечной абелевой группы, можно изучать, например, вопрос о том, какие из этих особенностей могут иметь функции, заданные многочленами фиксированной степени, мультистепени или квазистепени. Изучению такого рода вопросов в неэквивариантном случае посвящены, например, работы [4], [5], [6], [7], [8].

Основная цель настоящей работы состоит в классификации с точностью до правой эквивалентности особых ростков функций $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$, эквивариантно простых относительно различных представлений циклических групп $\mathbb{Z}_m$ конечного порядка на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$.

Формулировке основных результатов предпошлем одно общее замечание о действиях конечных групп на комплексных пространствах. Отметим, что комплексное представление конечной группы всегда линеаризуемо (доказательство см. в главе 2). Поэтому для данной конечной абелевой группы $G$ число всевозможных пар её представлений на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$ конечно (при фиксированном $n$). Поскольку всякое конечномерное комплексное представление представимо в виде прямой суммы одномерных представлений, отсюда следует, что действие на $\mathbb{C}^n$ каждой образующей любой конечной группы $G$ задается диагональной матрицей размера $n \times n$, и эти матрицы удовлетворяют групповым соотношениям (если таковые имеются в группе $G$). В частности, действие образующей группы $G = \mathbb{Z}_m$ на $\mathbb{C}^n$ задается диагональной матрицей, в которой на диагонали стоят корни степени $m$ из единицы.

Начнем с общего результата для случая согласованных скалярных действий конечной циклической группы $\mathbb{Z}_m$ (не обязательно простого порядка).

**Теорема 1.** *Пусть группа $G = \mathbb{Z}_m$ действует на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$ скалярно умножением на один и тот же примитивный корень степени $m$ из единицы:*

$$\begin{aligned} &\sigma \cdot (z_1, \ldots, z_n) = \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z_1, \ldots, \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z_n\right); \\ &\sigma \cdot z = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z \\ &(\sigma \in \mathbb{Z}_m \text{— образующая; } z_i \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

*При всех $m \geqslant 2$ и $n = 1$ росток $g$ является эквивариантно простым относительно представлений* (1.2) *тогда и только тогда, когда он $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_m\mathbb{Z}_m}$-эквивалентен одному из следующих ростков:*

$$A_{ms} : x \mapsto x^{ms+1} \ (s \in \mathbb{N}). \tag{1.3}$$

*При $m = n = 2$ росток $g$ является эквивариантно простым относительно представлений* (1.2) *тогда и только тогда, когда он $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_m\mathbb{Z}_m}$-эквивалентен одному из следующих ростков:*

$$\begin{aligned} D_{2k/2} &: (z_1, z_2) \mapsto z_1^2 z_2 + z_2^{2k-1} \quad (k \geqslant 2); \\ E_{8/2} &: (z_1, z_2) \mapsto z_1^3 + z_2^5; \\ J_{10/2} &: (z_1, z_2) \mapsto z_1^3 + z_1 z_2^4; \\ E_{12/2} &: (z_1, z_2) \mapsto z_1^3 + z_2^7. \end{aligned} \tag{1.4}$$

*При* $\max\{m,n\} \geqslant 3$ *и* $\min\{m,n\} \geqslant 2$ *не существует ростков функций* $(\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$, *эквивариантно простых относительно представлений* (1.2).

Перейдем к результатам для действий циклических групп $\mathbb{Z}_p$ простого порядка $p$. В такой группе можно выбрать образующую $p-1$ способами. При замене образующей задание действий группы меняется, однако результаты классификации эквивариантно простых ростков для соответствующих представлений совпадают или отличаются только перестановкой переменных. В частности, список представлений группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^n$ $(n=2,3)$ и $\mathbb{C}$, приведенный в теоремах 2 и 3, — не исчерпывающий, однако с учетом сказанного выше все случаи, не рассмотренные явно, легко сводятся к рассмотренным. Отметим еще, что в настоящей работе мы рассматриваем только случаи нетривиальных действий группы $\mathbb{Z}_p$ на $\mathbb{C}$.

Классификация эквивариантно простых ростков функций двух переменных в случае действия группы $G = \mathbb{Z}_3$ дается следующей теоремой.

**Теорема 2.** *Пусть действие группы* $\mathbb{Z}_3$ *на* $\mathbb{C}^2$ *и на* $\mathbb{C}$ *задано формулами*

$$\sigma \cdot (x,y) = (\tau^p x, \tau^q y); \quad \sigma \cdot z = \tau^r z \quad (p,q,r \in \mathbb{N}), \tag{1.5}$$

*где* $\sigma \in \mathbb{Z}_3$ *— образующая,* $\tau = \exp(2\pi i/3)$. *Пусть* $f\colon (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C},0)$ *— росток с особенностью в нуле, эквивариантный относительно представлений* (1.5) *при некоторых* $p,q,r \in \mathbb{N}$. *Росток* $f$ *является эквивариантно простым относительно этих представлений тогда и только тогда, когда он эквивалентен в смысле определения 2 одному из следующих ростков (слева — набор* $(p,q,r) \bmod 3$, *справа — соответствующий список нормальных форм эквивариантно простых* *ростков):*

$$
(0,1,1) \implies \left[\begin{array}{l} xy; \\ x^k y + y^4\,(k \geqslant 2); \\ x^3 y + y^7; \\ x^k y + xy^4\,(k \geqslant 3); \\ x^2 y + y^{3k+1}\,(k \geqslant 3); \end{array}\right. \tag{1.6}
$$

$$
(0,1,2) \implies \left[\begin{array}{l} y^2; \\ xy^2; \\ x^k y^2 + y^5\,(k \geqslant 2); \\ x^3 y^2 + y^8; \\ x^k y^2 + xy^5\,(k \geqslant 3); \\ x^2 y^2 + y^{3k+2}\,(k \geqslant 3); \end{array}\right. \tag{1.7}
$$

$$
(1,1,1) \implies \text{\textit{не существует;}} \tag{1.8}
$$

$$
(1,1,2) \implies x^{3k+2} + y^2\,(k \geqslant 0); \tag{1.9}
$$

$$
(1,2,1) \implies \left[\begin{array}{l} x^{3k+1} + y^2\,(k \geqslant 1); \\ x^2 y + y^{3k-1}\,(k \geqslant 2); \\ x^4 + xy^3; \\ x^4 + y^5. \end{array}\right. \tag{1.10}
$$

Теперь приведем классификацию эквивариантно простых ростков функций трех переменных в случае действия группы $G = \mathbb{Z}_3$.

**Теорема 3.** *Пусть действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^3$ и на $\mathbb{C}$ задано формулами*

$$
\sigma \cdot (x,y,z) = (\tau^p x, \tau^q y, \tau^r z); \quad \sigma \cdot w = \tau^s w \quad (p,q,r,s \in \mathbb{N}), \tag{1.11}
$$

*где $\sigma \in \mathbb{Z}_3$ — образующая, $\tau = \exp(2\pi i/3)$. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^3,0) \to (\mathbb{C},0)$ — росток с особенностью в нуле, эквивариантный относительно представлений (1.11) при некоторых $p,q,r,s \in \mathbb{N}$. Росток $f$ является эквивариантно простым относительно этих представлений тогда и только тогда, когда он эквивалентен в* *смысле определения 2 одному из следующих ростков (слева — набор* $(p, q, r, s) \bmod 3$, *справа — соответствующий список нормальных форм эквивариантно простых ростков):*

$$(0,0,1,1) \implies \left[\begin{array}{l} xz; \\ F_1(x,y)\cdot z + z^4; \\ (x^2+y^3)\cdot z + z^7; \\ (x^3+y^3)\cdot z + z^7; \\ (x^2+y^2)\cdot z + z^{3k+1}\,(k \geqslant 3); \end{array}\right. \tag{1.12}$$

$$(0,0,1,2) \implies \left[\begin{array}{l} z^2; \\ xz^2; \\ F_1(x,y)\cdot z^2 + z^5; \\ (x^2+y^3)\cdot z^2 + z^8; \\ (x^3+y^3)\cdot z^2 + z^8; \\ (x^2+y^2)\cdot z^2 + z^{3k+2}\,(k \geqslant 3); \end{array}\right. \tag{1.13}$$

$$(0,1,1,1) \implies xy + z^{3k+1}\,(k \geqslant 1); \tag{1.14}$$

$$(0,1,1,2) \implies \textit{не существует;} \tag{1.15}$$

$$(0,1,2,1) \implies \left[\begin{array}{l} F_2(x,y) + z^2; \\ xy + z^{3k+2}\,(k \geqslant 1); \\ xz^2 + y^{3k+1}\,(k \geqslant 1); \\ xz^2 + y^{3k+2}z\,(k \geqslant 0); \end{array}\right. \tag{1.16}$$

$$(1,1,1,1) \implies \textit{не существует;} \tag{1.17}$$

$$(1,1,1,2) \implies x^{3k+2} + y^2 + z^2,\ k \geqslant 0; \tag{1.18}$$

$$(1,1,2,1) \implies \textit{не существует;} \tag{1.19}$$

$$(1,1,2,2) \implies x^2 + F_3(z,y), \tag{1.20}$$

*где* $F_1$ *— любой (неэквивариантно) простой росток функции двух переменных типов* $A_k, D_k, E_k$ *(см. формулы* (1.1)*);* $F_2$ *— любой эквивариантно простой ро-*

*сток функции двух переменных из теоремы 1, случай* (1.6)*; $F_3$ — любой эквивариантно простой росток функции двух переменных из теоремы 1, случай* (1.10).

## Структура работы

Диссертация состоит из шести глав, включая введение, заключения, списка публикаций по теме диссертации и списка литературы.

В главе 1, являющейся введением, описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов; определяется область исследования; обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов; описываются основные результаты диссертации.

В главе 2 даётся описание действия конечной циклической группы на комплексном пространстве и соответствующих пространств эквивариантных функций, а также группы эквивариантных автоморфизмов комплексного пространства и её действий на пространствах струй эквивариантных ростков. Формулируется и доказывается необходимое условие эквивариантной простоты ростка для случая циклической группы простого порядка. Дается также геометрическая интерпретация этого условия. С помощью этого условия доказывается отсутствие эквивариантно простых ростков в случае согласованных скалярных действий конечной циклической группы на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$.

В главе 3 описывается метод полных трансверсалей и формулируется теорема о конечной определенности применительно к классификации эквивариантных ростков. Дается также геометрическая интерпретация этой теоремы.

В главе 4 приводится доказательство основных классификационных результатов для эквивариантно простых особенностей двух переменных в случае действия группы из трёх элементов.

В главе 5 приводится доказательство основных классификационных результатов для эквивариантно простых особенностей трёх переменных в случае действия группы из трёх элементов.

В главе 6 некоторые из полученных в предыдущих главах результатов обобщаются на случаи большего числа переменных и случаи действия других циклических групп простого порядка.

### Список основных результатов, выносимых на защиту

Результаты, выносимые на защиту являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Получены необходимые и достаточные условия эквивариантной простоты ростка относительно циклических групп простого порядка в аналитической и геометрической форме.

2. Доказано отсутствие эквивариантно простых ростков в случае согласованных скалярных действий конечной циклической группы на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$.

3. Получена полная классификация эквивариантно простых ростков функций двух и трёх переменных относительно всевозможных нетривиальных действий группы из трёх элементов.

4. Получена классификация эквивариантно простых ростков функций многих переменных относительно некоторых нетривиальных действий циклических групп простого порядка.

### Методы исследования

В работе используются результаты и методы топологической теории особенностей. Результаты диссертации опираются на работы В. И. Арнольда о классификации простых особенностей в пространстве $\mathbb{C}^n$ и на многообразиях с краем, метод полных трансверсалей для классификации особенностей Дж. Брюса, Н. Кирка и А. Дюплесси, методы теории Морса, а также на некоторые результаты и методы теории особенностей, изложенные в работах В. И. Арнольда, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. Указанные методы обобщены автором для применения в эквивариантном случае.

### Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях.

1. Семинар «Топология особенностей» под руководством проф. С. М. Гусейн-Заде (Москва, 2014–2016 гг.).

2. Международная школа-семинар “XVII Diffiety school” (Италия, Лиццано ин Бельведере, июль 2014 года).

3. Международная школа-семинар “Géométrie Algébrique en Liberté” (Бельгия, Лёвен, июнь 2015 года).

4. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2016» (Москва, апрель 2016 года).

5. Семинар «Алгебраическая топология и её приложения» под руководством чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, проф. А. В. Чернавского, проф. И. А. Дынникова, проф. Т. Е. Панова, доц. Л. А. Алания, проф. А. А. Гайфуллина, доц. Д. В. Миллионщикова (Москва, апрель 2016 года).

6. Международная школа-семинар “Jeunes Singularitistes à Nice” (Франция, Ницца, апрель 2016 года).

7. Международная конференция “DIFF2016” по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, июль 2016 года).

8. Международная конференция «Анализ, вероятность и геометрия» (Москва, сентябрь 2016 года).

9. Семинар «Избранные задачи математического анализа и теории чисел» под руководством проф. М. П. Минеева, проф. В. Н. Чубарикова (Москва, ноябрь 2016 года).

## Публикации

Результаты диссертации опубликованы в двух статьях автора [1.1] и [1.2], из них в журналах из перечня ВАК — 2 статьи.

## Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Сабиру Меджидовичу Гусейн-Заде за постановку задачи, помощь и советы на всех этапах работы над диссертацией, многочисленные полезные обсуждения. Автор благодарен к.ф.-м.н., доценту Илье Александровичу Богаевскому за интерес к работе и полезные обсуждения.

Автор выражает благодарность участникам семинара «Топология особенностей» за полезные замечания, комментарии и дискуссии. Автор выражает благодарность всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ за дружелюбную атмосферу, всестороннюю поддержку и интерес к работе.

# Глава 2

# Пространства струй эквивариантных ростков

## 2.1 Линеаризуемость действия конечной группы на комплексном пространстве

При рассмотрении всевозможных пар комплексных действий данной конечной абелевой группы на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$ важное значение имеет следующий хорошо известный результат (для полноты изложения приведем его здесь с доказательством).

**Теорема 4.** *Пусть конечная группа $G$ действует на пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда существует система координат на $\mathbb{C}^n$, в которой это действие линеаризуется.*

*Доказательство.* Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая система координат на $\mathbb{C}^n$. Каждому элементу $\sigma \in G$ соответствует линейный оператор на касательном пространстве $A^\sigma \colon T_0\mathbb{C}^n \to T_0\mathbb{C}^n$. Рассмотрим систему координат $(y_1, \ldots, y_n)$, заданную формулами

$$y_i(p) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} A^\sigma x_i(\sigma^{-1} p), \tag{2.1}$$

где $p \in \mathbb{C}^n$ — произвольная точка.

Докажем, что в системе координат (2.1) действие группы линеаризуется. В самом деле, пусть $\tau \in G$ — произвольный элемент группы. Тогда для каждой точки

$p \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\begin{aligned} y_i(\tau p) &= \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} A^\sigma x_i(\sigma^{-1}\tau p) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} A^\tau A^{\tau^{-1}\sigma} x_i\big((\tau^{-1}\sigma)^{-1}p\big) = \\ &= A^\tau \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} A^\sigma x_i(\sigma^{-1}p) = A^\tau y_i(p). \end{aligned}$$

Значит, координата точки $\tau p$ есть линейная комбинация координат (в той же системе) точки $p$, что и требовалось доказать. □

**Замечание.** Поскольку всякое конечномерное комплексное представление представимо в виде прямой суммы одномерных представлений, из предыдущей теоремы следует, что действие на $\mathbb{C}^n$ каждой образующей любой конечной группы $G$ задается диагональной матрицей размера $n \times n$, и эти матрицы удовлетворяют групповым соотношениям (если таковые имеются в группе $G$). В частности, если $G = \mathbb{Z}_m$, то действие образующей этой группы задается диагональной матрицей, в которой на диагонали стоят корни степени $m$ из единицы.

**Замечание.** Утверждение теоремы 4 является частным случаем теоремы Бохнера о линеаризации (см. [9], а также [10, теорема 2.2.1]).

## 2.2 Эквивариантные ростки аналитических функций

**Определение 4.** Пусть $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — упорядоченный набор натуральных чисел (*весов*). Росток $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ называется $\underline{\alpha}$-*квазиоднородным степени* $r$, если для всех $t \in \mathbb{C}$ выполнено равенство

$$g(t^{\alpha_1}x_1, \ldots, t^{\alpha_n}x_n) = t^r g(x_1, \ldots, x_n).$$

Число $r$ называют также $\underline{\alpha}$-*квазистепенью* ростка $g$ и обозначают $\deg_{\underline{\alpha}} g$.

Каждый росток голоморфной функции $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ задаётся в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$ некоторым рядом. Условие эквивариантности этого ростка относительно действий группы $\mathbb{Z}_m$ на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$ равносильно тому, что квазистепени (с некоторыми весами) всех мономов ростка $f$ дают один и тот же определённый остаток по модулю $m$. Если образующая $\sigma \in \mathbb{Z}_m$ действует на $\mathbb{C}^n$ по формуле

$$\sigma \cdot (z_1, \ldots, z_n) = \left( \exp\left(\frac{2\pi i q_1}{m}\right) z_1, \ldots, \exp\left(\frac{2\pi i q_n}{m}\right) z_n \right), \tag{2.2}$$

то в качестве набора весов можно взять $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где

$$\alpha_j = \begin{cases} q_j \bmod m, & \text{если } q_j \not\equiv 0 \pmod m, \\ m, & \text{если } q_j \equiv 0 \pmod m. \end{cases} \tag{2.3}$$

При таком выборе весов всегда будет не более чем конечное число слагаемых каждой квазистепени. Отметим, однако, что указанный способ выбора весов — не единственный, обладающий таким свойством.

**Определение 5.** Набор весов $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ будем называть *допустимым* относительно представления (2.2) группы $\mathbb{Z}_m$ на $\mathbb{C}^n$, если все мономы, эквивариантные относительно представления (2.2) группы $\mathbb{Z}_m$ на $\mathbb{C}^n$ и некоторого представления этой же группы на $\mathbb{C}$, имеют квазистепени с весами $\underline{\alpha}$, которые дают одинаковый остаток по модулю $m$, причем существует не более чем конечное число слагаемых каждой квазистепени.

В частности, набор (2.3) является допустимым относительно представления (2.2).

**Пример.** Пусть группа $G = \mathbb{Z}_3$ действует на $\mathbb{C}^2$ и на $\mathbb{C}$ по формулам:

$$\sigma \cdot (x, y) = (\tau x,\ \tau^2 y); \quad \sigma \cdot z = \tau z, \tag{2.4}$$

где $\tau = \exp(2\pi i/3)$. Если взять $\underline{\alpha} = (1, 2)$ (набор, построенный по формулам (2.3)), то все мономы, эквивариантные относительно указанных действий, будут иметь $\underline{\alpha}$-квазистепени, делящиеся на 3 с остатком 1. Если взять $\underline{\beta} = (2, 1)$, то все мономы, эквивариантные относительно указанных действий, будут иметь $\underline{\beta}$-квазистепени, делящиеся на 3 с остатком 2. Легко видеть, что мономов каждой $\underline{\alpha}$-квазистепени и мономов каждой $\underline{\beta}$-квазистепени существует не более чем конечное число. Поэтому $\underline{\alpha}$ и $\underline{\beta}$ — различные наборы весов, допустимые относительно представлений (2.4).

Можно интерпретировать понятие допустимого набора весов геометрически. Для этого каждому моному $z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$ сопоставляется точка $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.

Мономам $\underline{\alpha}$-квазистепени $d$ соответствуют точки, лежащие на гиперплоскости, заданной уравнением $\alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_n k_n = d$ с вектором нормали $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Набор $\underline{\alpha}$ является допустимым, если:

- каждая точка с целочисленными неотрицательными координатами, которая отвечает эквивариантному моному, содержатся в одной из гиперплоскостей с уравнением $\alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_n k_n = d$, где $d \in \mathbb{N}$;

- каждая такая гиперплоскость содержит не более чем конечное число таких точек;

- в уравнениях этих гиперплоскостей свободные члены сравнимы по модулю $m$.

Отсюда следует, в частности, что такая гиперплоскость не должна быть параллельна ни одной из координатных осей, поэтому в допустимом наборе для все $i = 1, \ldots, n$ выполняется условие $\alpha_i \neq 0$.

## 2.3 Эквивариантные ростки бирациональных автоморфизмов комплексных пространств

Пусть группа $G = \mathbb{Z}_m$ действует на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$ по формулам (2.2). Каждый росток эквивариантного автоморфизма $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ задаётся с помощью $n$ рядов вида

$$z_k = \sum_{J^{(k)} \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} a_{J^{(k)}} \tilde{z}^{J^{(k)}}, \tag{2.5}$$

где $J^{(k)} = \left(j_1^{(k)}, \ldots, j_n^{(k)}\right)$ — мультииндекс суммирования, $a_{J^{(k)}} \in \mathbb{C}$ — коэффициенты, $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$ — новые переменные, $\tilde{z}^{J^{(k)}} = \tilde{z}_1^{j_1^{(k)}} \ldots \tilde{z}_n^{j_n^{(k)}}$, причём если $\sum_{s=1}^n j_s^{(k)} \not\equiv q_k \pmod{m}$, то $a_{J^{(k)}} = 0$ (условие эквивариантности автоморфизма), а матрица коэффициентов линейных частей этих рядов — невырожденная. Нас будет интересовать действие такого ростка на струи ростков эквивариантных функций. Под струёй в этом случае понимается сумма всех мономов ограниченной квазистепени (в смысле выбранного допустимого набора весов).

**Лемма 1** (о действии эквивариантного автоморфизма на ненулевую струю эквивариантного ростка минимальной квазистепени)**.** *Пусть* $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *— росток бирационального автоморфизма, эквивариантный относительно действия* (2.2) *группы* $\mathbb{Z}_m$ *на* $\mathbb{C}^n$ *и заданный формулами* (2.5)*. Пусть* $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *— росток аналитической функции, эквивариантный относительно действия* (2.2) *группы* $\mathbb{Z}_m$ *на* $\mathbb{C}^n$ *и некоторого действия этой же группы на* $\mathbb{C}$*. Пусть* $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *— набор весов, допустимый относительно представления* (2.2)*. Пусть* $r$ *— наименьшее натуральное число, для которого* $r$*-струя ростка* $f$ *в смысле выбранного набора весов — ненулевая. Тогда* $r$*-струя ростка* $f \circ \varphi$ *в смысле выбранных весов зависит только от тех членов рядов* (2.5)*, показатели степеней которых удовлетворяют условию*

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s j_s^{(k)} = \alpha_k. \tag{2.6}$$

Доказательство леммы легко получается из правила умножения рядов.

## 2.4 Необходимое условие эквивариантной простоты ростка

Из леммы 1 на конечномерном пространстве ненулевых струй эквивариантных ростков наименьшей квазистепени действует группа линейных операторов, зависящих от параметров. Число этих параметров (то есть размерность группы) равно суммарному числу решений в $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ уравнений (2.6) относительно переменных $\{j_s^{(k)}\}$ для $k = 1, \ldots, n$; обозначим это число $d$. Если $d$ превышает размерность пространства струй наименьшей квазистепени, то существуют непрерывные семейства орбит действия этой группы. Отсюда вытекает следующее утверждение.

**Лемма 2** (необходимое условие эквивариантной простоты ростка)**.** *Рассмотрим росток аналитической функции* $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$*, эквивариантный относительно действия* (2.2) *группы* $\mathbb{Z}_m$ *на* $\mathbb{C}^n$ *и некоторого действия этой же группы на* $\mathbb{C}$*. Пусть* $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *— набор весов, допустимый относительно представления* (2.2)*. Пусть* $(r-1)$*-струя ростка* $f$ *в смысле набора весов* $\underline{\alpha}$ *— тождественно нулевая. Если размерность пространства квазиоднородных многочле-*

*нов квазистепени $r$ в смысле выбранного набора весов больше определенной выше размерности $d$, то росток $f$ — не простой.*

*Доказательство.* Рассмотрим пространство $r$-струй (в смысле набора весов $\underline{\alpha}$) эквивариантных ростков с тождественно нулевой $(r-1)$-струёй. Оно совпадает с пространством квазиоднородных многочленов квазистепени $r$; обозначим его размерность $l$. Действие группы ростков эквивариантных бирациональных автоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0)$ индуцирует на нем действие $d$-параметрического семейства линейных операторов. Отсюда следует, что существуют $(l-d)$-параметрические семейства орбит в пространстве $r$-струй ростков функций; к одному из таких семейств принадлежит орбита ростка $f$. Значит, росток $f$ не является эквивариантно простым. $\square$

## 2.5 Доказательство теоремы 1

Применим лемму 2 для доказательства теоремы 1.

Рассмотрим сначала случай $n = 1$. В этом случае любой росток, эквивариантный относительно представлений (1.2), представим в виде линейной комбинации мономов $\sum_{s \geqslant s_0} a_s x^{ms+1}$ и эквивалентен своему младшему моному $x^{ms_0+1}$. При этом достаточно малая окрестность орбиты такого ростка в пространстве $r$-струй эквивариантных ростков $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ при $r \geqslant ms_0+1$ пересекается лишь с конечным числом других орбит, а именно с орбитами ростков $x^{ms+1}$, где $1 \leqslant s < s_0$. Кроме того, различные ростки вида (1.3) попарно неэквивалентны, поскольку имеют разную кратность критической точки в нуле. Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Теперь рассмотрим случай $n \geqslant 2$. При $m = 2$ утверждение теоремы следует из [2, теорема 3.17]. Поэтому далее будем рассматривать только случай $m \geqslant 3$.

Моном $z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$ эквивариантен относительно представлений (1.2) тогда и только тогда, когда $k_1 + \ldots + k_n \equiv 1 \pmod m$. Отсюда, в частности, следует, что $m$-струя эквивариантного ростка с критической точкой в нуле будет нулевой.

Покажем, что уже классификация $(m+1)$-струй эквивариантных ростков с критической точкой в нуле содержит модули. Пространство таких струй имеет размерность $C_{n+m}^{n-1}$. Кроме того, на этом пространстве действует группа 1-струй ростков эквивариантных бирациональных автоморфизмов пространства $(\mathbb{C}^n, 0)$. Действительно, поскольку $m$-струя эквивариантного ростка с критической точкой в нуле равна нулю, на $(m+1)$-струю этого ростка влияют только линейные части автоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0)$. Но пространство этих 1-струй имеет размерность $n^2$. Осталось заметить, что при $m \geqslant 3$ и $n \geqslant 2$ имеет место неравенство $C_{n+m}^{n-1} > n^2$ (при $m = 3$ оно проверяется непосредственно, а далее проводится индукция по $m$.) Поэтому в силу леммы 2 классификация $(m+1)$-струй эквивариантных ростков с критической точкой в нуле содержит модули, откуда и следует второе утверждение теоремы. $\square$

**Замечание.** Утверждение теоремы 1 останется верным, если в формулах (1.2) всюду заменить $\exp\left(\dfrac{2\pi i}{m}\right)$ на $\exp\left(\dfrac{2\pi i k}{m}\right)$, где НОД$(k, m) = 1$: такое изменение представлений группы соответствует выбору другой образующей в группе $\mathbb{Z}_m$.

# Глава 3

# Метод полных трансверсалей и теорема о конечной определенности

В этой главе описывается основной метод, используемый в последующих главах для получения списка эквивариантно простых особенностей.

## 3.1 Метод полных трансверсалей

Метод полных трансверсалей — достаточно общий метод классификации ростков аналитических функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с точностью до различных отношений эквивалентности. Подробное изложение этого метода можно найти в работе [12, раздел 2]. Мы будем применять этот метод для классификации квазиоднородных ростков с точностью до эквивалентности и дадим здесь его описание только для этой ситуации.

Пусть $\mathcal{M}_n$ — максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_n$ ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, а $\mathcal{D}_n^{GG}$ — кольцо ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$. Обозначим через $F_{\underline{\alpha}}^k \mathcal{M}_n$ идеал в $\mathcal{M}_n$, порожденный мономами $\underline{\alpha}$-квазистепеней $k$ и выше, а через $F_{\underline{\alpha}}^k \mathcal{D}_n^{GG}$ — множество таких $\varphi \in \mathcal{D}_n^{GG}$, что для всех $t \geqslant 0$ и всех $g \in F_{\underline{\alpha}}^t \mathcal{M}_n$ выполнено $g \circ \varphi - g \in F_{\underline{\alpha}}^{k+1} \mathcal{M}_n$. Наконец, через $LF_{\underline{\alpha}}^k \mathcal{D}_n^{GG} \cdot g$ будем обозначать касательное пространство к $F_{\underline{\alpha}}^k \mathcal{D}_n^{GG}$-орбите ростка $g$ в точке $g$. В этих обозначениях частным случаем [12, теорема 2.28] является следующее утверждение.

**Теорема 5.** *Пусть росток* $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *имеет* $\underline{\alpha}$*-квазистепень* $r$*, и* $s > r$*. Пусть* $T$ *— такое подпространство в* $F_{\underline{\alpha}}^{r+1}\mathcal{M}_n$*, что*

$$F_{\underline{\alpha}}^{r+1}\mathcal{M}_n \subset T + LF_{\underline{\alpha}}^{1}\mathcal{D}_n^{GG} \cdot g + F_{\underline{\alpha}}^{s+1}\mathcal{M}_n.$$

*Тогда любой росток* $h$*, для которого* $g - h \in F_{\underline{\alpha}}^{r+1}\mathcal{M}_n$*, будет* $F_{\underline{\alpha}}^{1}\mathcal{D}_n^{GG}$*-эквивалентен ростку вида* $g + t + f$*, где* $t \in T$ *и* $f \in F_{\underline{\alpha}}^{s+1}\mathcal{M}_n$*.*

Подпространство $T$ из теоремы 5 называется *полной трансверсалью* к орбите $F_{\underline{\alpha}}^{1}\mathcal{D}_n^{GG} \cdot g$.

## 3.2 Теорема о конечной определенности

Теорема 5 позволяет классифицировать струи (в смысле $\underline{\alpha}$-квазистепеней) ростков заданного порядка с точностью до $\mathcal{R}^{GG}$-эквивалентности. Однако остается еще вопрос о достаточности струи ростка ($k$-струя ростка $g \in \mathcal{O}_n$ называется *достаточной*, если росток $\mathcal{R}^{GG}$-эквивалентен этой струе). Если существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $k$-струя ростка $g$ достаточна, то $g$ называют *конечно определенным* (а если $k$ выбрано наименьшим возможным, то говорят, что $g$ $k$-определен). Следствием теоремы 5 является теорема о конечной определенности (частный случай [12, следствие 2.27]):

**Теорема 6** (о конечной определенности)**.** *В условиях теоремы 5 росток* $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ $k$*-определен тогда и только тогда, когда*

$$F_{\underline{\alpha}}^{k+1}\mathcal{M}_n \subset LF_{\underline{\alpha}}^{1}\mathcal{D}_n^{GG} \cdot g.$$

# Глава 4

# Доказательство теоремы 2

В этой главе будем использовать следующее обозначение: через $(1.5)_{p_0q_0r_0}$ обозначается пара представлений, заданных формулой (1.5), где $(p,q,r) \equiv (p_0,q_0,r_0) \mod 3$.

## 4.1 Случай (1.6)

Мономы ростков $f\colon (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C},0)$, эквивариантных относительно представлений $(1.5)_{011}$, имеют $(3,1)$-квазистепени, делящиеся на 3 с остатком 1. Единственный моном $(3,1)$-квазистепени 1 — это моном $y$, который не может входить в росток с особенностью в начале координат. Поэтому все мономы эквивариантно простого ростка имеют квазистепени не ниже 4.

Предположим сначала, что эквивариантный росток $f$ содержит (с ненулевым коэффициентом $a$) моном $xy$. Тогда этот росток будет иметь вид $axy \cdot g(x,y)$, где $g$ — росток с ненулевым свободным членом, инвариантный относительно первого из представлений $(1.5)_{011}$. Тогда с помощью эквивариантной замены переменных $\tilde{x} = ax$, $\tilde{y} = yg(x,y)$ росток $f$ приводится к виду $\tilde{x}\tilde{y}$. Таким образом, этот росток является простым, так как все ростки, лежащие в его малой окрестности в пространстве струй любого достаточно высокого порядка, принадлежат его орбите.

Теперь предположим, что 4-струя (в смысле $(3,1)$-квазистепени) эквивариантно простого ростка $f$ содержит только моном $y^4$. Выберем (если это возможно) наименьшее из таких $k \in \mathbb{N}$, что росток $f$ содержит также и моном $x^k y$, $k \geqslant 2$.

С помощью эквивариантной замены координат в $\mathbb{C}^2$ можно добиться того, чтобы росток $g$ содержал только мономы $y^4$ и $x^k y$, причем с единичными коэффициентами. Число Милнора такого ростка равно $4k-3$ (это легко вычислить, пользуясь алгебраическим определением числа Милнора: см., например, [11, глава I]); отсюда следует, что ростки из этой серии с разными $k$ будут попарно неэквивалентны. Если же росток $f$ не содержит мономов вида $x^k y$, то этот росток будет иметь вид $y^4 \cdot g(x,y)$, где $g$ — многочлен с ненулевым свободным членом, инвариантный относительно первого из представлений $(1.5)_{011}$. Тогда с помощью эквивариантной замены переменных $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y\sqrt[4]{g(x,y)}$ росток $g$ приводится к виду $\tilde{y}^4$. Но малая окрестность такого ростка в пространстве $r$-струй эквивариантных ростков будет пересекаться со всеми орбитами ростков $y^4+x^k y$, где $k \leqslant r-1$, и количество таких орбит будет неограниченно возрастать при $r \to \infty$. Значит, в этом случае росток $f$ не будет эквивариантно простым.

Наконец, если росток $f$ имеет нулевую 4-струю в смысле $(3,1)$-квазистепени, то его 7-струю с помощью выделения полного квадрата можно привести к одному из следующих видов:

$$x^2y + y^7; \tag{4.1}$$

$$x^2y; \tag{4.2}$$

$$xy^4; \tag{4.3}$$

$$y^7; \tag{4.4}$$

$$0. \tag{4.5}$$

Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

**Лемма 3.** *Если 7-струя (в смысле* $(3,1)$*-квазистепени) эквивариантного ростка имеет вид* $(4.1)$*, то росток эквивалентен своей 7–струе.*

*Доказательство леммы 3.* В этом случае росток $f$ имеет вид $f(x,y) = x^2y\cdot(1+f_1(x,y)) + y^7\cdot(1+f_2(x,y))$, где $f_1$, $f_2$ — инвариантные ростки, $f_{1,2}(0,0) = 0$. Росток приводится к виду $(4.1)$ с помощью эквивариантной замены переменных $\tilde{x} = x\cdot\sqrt{1+f_1(x,y)}$, $\tilde{y} = y\cdot\sqrt[7]{1+f_2(x,y)}$. $\square$

**Лемма 4.** *Если 7-струя (в смысле* $(3,1)$*-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид* (4.2)*, то росток эквивалентен одному из ростков* $x^2y + y^{3k+1}$, $k \geqslant 3$.

*Доказательство леммы 4.* Выберем наименьшее из таких $k$, что росток $f$ содержит (с ненулевым коэффициентом) хотя бы один из мономов вида $y^{3k+1}$ и $xy^{(3k+1)/2}$ (второй случай сводится к первому с помощью выделения полного квадрата). Если $k < \infty$, то росток приводится к виду $x^2y+y^{3k+1}$ с тем же $k$ (замена переменных производится аналогично тому, как это делалось при доказательстве предыдущей леммы). Если же $k = \infty$, то есть росток не содержит ни одного из мономов указанного вида, то он имеет вид $f(x,y) = x^2y \cdot (1 + f_1(x,y))$, где $f_1$ — инвариантный росток, и тогда $f$ эквивалентен своей 7-струе (в смысле $(3,1)$-квазистепени). Но тогда росток $f$ не будет простым: к его орбите в пространстве $r$-струй эквивариантных ростков примыкают орбиты всех ростков вида $x^ky + xy^4$, $3k + 1 \leqslant r$, и число таких орбит неограниченно возрастает при $r \to \infty$. □

**Лемма 5.** *Если 7-струя (в смысле* $(3,1)$*-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид* (4.3)*, то росток эквивалентен одному из ростков* $x^ky + xy^4$, $k \geqslant 3$.

Доказательство леммы 5 проводится с помощью теоремы о конечной определённости аналогично [3, §5].

**Лемма 6.** *Если 7-струя (в смысле* $(3,1)$*-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид* (4.4)*, то росток эквивалентен одному из ростков* $x^3y + y^7$.

*Доказательство леммы 6.* Если росток $f$ содержит моном $xy^3$, то по теореме о конечной определенности он эквивалентен $x^3y + y^7$. Если же $f$ не содержит этого монома, то он не является эквивариантно простым. В самом деле, в этом случае к нему примыкает росток $x^4y + y^7$, который не является эквивариантно простым в силу леммы 2 (поскольку согласно этой лемме классификация ростков $(3,2)$-квазистепени 14 содержит модули). □

**Лемма 7.** *Если 7-струя (в смысле* $(3,1)$*-квазистепени) эквивариантного ростка имеет вид* (4.5)*, то росток — не эквивариантно простой.*

Доказательство леммы 7 следует из необходимого условия эквивариантной простоты ростка (лемма 2).

Таким образом, любой росток $f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простой относительно представлений $(1.5)_{011}$, эквивалентен одному из ростков (1.6).

**Лемма 8.** *Каждый из ростков* (1.6) *является эквивариантно простым.*

*Доказательство леммы 8.* Для доказательства простоты строятся трансверсали к их орбитам в пространстве $r$-струй в смысле $(3, 1)$-квазистепени эквивариантных ростков $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с особенностью в нуле. Эти трансверсали можно взять в следующем виде:

$xy$;
$x^k y + y^4 + \varepsilon_1 xy + \ldots + \varepsilon_{k-1} x^{k-1} y$ $(r \geqslant \max\{4,\, 3k+1\})$;
$x^3 y + y^7 + \varepsilon_1 xy + \varepsilon_2 x^2 y + \varepsilon_3 y^4 + \varepsilon_4 xy^4$ $(r \geqslant 10)$;
$x^k y + xy^4 + \varepsilon_1 xy + \ldots + \varepsilon_{k-1} x^{k-1} y + \varepsilon_k y^4$ $(r \geqslant \max\{7,\, 3k+1\})$;
$x^2 y + y^{3k+1} + \varepsilon_1 y^4 + \ldots + \varepsilon_{k-1} y^{3k-2} + \varepsilon_k xy + \varepsilon_{k+1} xy^4 + \ldots + \varepsilon_{[k/2]+1} xy^{3[k/2]+1}$
$(r \geqslant \max\{7,\, 3k+1\})$.

Нетрудно видеть, что при всех $\varepsilon$ указанные ростки могут принадлежать только орбитам некоторых из ростков, указанных в формулировке настоящей теоремы, причем число этих орбит конечно. Тот факт, что трансверсали имеют указанный вид, следует из того, что всякое инфинитезимально версальное $\mathbb{Z}_m$-накрытие является $\mathbb{Z}_m$-версальным. Соответствующие определения и утверждение можно найти в работе [13]. В этой работе описывается инвариантный случай, то есть случай тривиального действия группы на $\mathbb{C}$; все определения, утверждения и доказательства без труда переносятся на эквивариантный случай. □

Теорема 2 для случая (1.6) полностью доказана.

## 4.2 Случай (1.7)

Доказательство для этого случая аналогично приведенному выше доказательству для случая (1.6). Все эквивариантно простые ростки в случае (1.7) получаются умножением соответствующих эквивариантно простых ростков для случая (1.6) на $y$. Исключение составляет росток $y^2$ (он получается умножением на $y$ ростка $y$, который в случае (1.6) является эквивариантным, но не эквивариантно простым, поскольку не имеет критической точки в нуле). Этот росток является эквивариантно простым. В самом деле, всякий примыкающий к нему эквивариантный росток имеет вид $y^2(1 + \varepsilon g(x, y))$, где $g(x, y)$ — инвариантный росток, $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$. С помощью эквивариантной замены переменных $\tilde{x} = x, \tilde{y} = y\sqrt{1 + \varepsilon g(x, y)}$ такой росток приводится к виду $\tilde{y}^2$. Отсюда следует, что он является эквивариантно простым. Остальные нормальные формы эквивариантно простых ростков получаются так же, как в случае (1.6).

## 4.3 **Случай** (1.8)

Этот случай является частным случаем теоремы 1.

## 4.4 **Случай** (1.9)

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$ с координатами $(s, t)$. Моному $x^{s_0}y^{t_0}$ будем сопоставлять точку $(s_0, t_0)$ в этом пространстве. Точки $(s, t)$, соответствующие при таком сопоставлении мономам ростков $g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантных относительно представлений $(1.5)_{112}$, лежат на прямых вида $s + t = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Заметим, что эквивариантно простой росток $f$ обязательно должен содержать мономы, для которых соответствующие точки лежат на прямой $s+t = 2$. В самом деле, если росток не содержит таких мономов, то его 4-струя — нулевая. Но тогда росток не может быть эквивариантно простым, поскольку классификация форм степени 5 от двух переменных содержит модули.

Предположим сначала, что эквивариантно простой росток $f$ содержит по крайней мере два монома, для которых соответствующие точки лежат на прямой $s+t = 2$, либо что его 2-струя содержит только моном $xy$. Тогда с помощью линейных замен координат в $\mathbb{C}^2$ (которые эквивариантны относительно представлений $(1.5)_{112}$) 2-струю ростка можно привести к виду $x^2 + y^2$. По теореме о конечной определенности такой росток будет эквивалентен своей 2-струе.

Предположим теперь, что 2-струя эквивариантно простого ростка $f$ содержит ровно один моном степени 2, причем только от одной переменной (без ограничения общности можно считать, что это моном $y^2$).

Предположим сначала, что росток содержит мономы, имеющие степень не выше 1 по переменной $y$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2_{(s,t)}$ прямую $s + t = 2$, проходящую через точки $(0, 2)$ и $(2, 0)$. Будем поворачивать эту прямую против часовой стрелки вокруг точки $(0, 2)$ до тех пор, пока на ней не появятся другие точки, соответствующие мономам ростка $f$. Это может быть либо точка вида $(3k + 2, 0)$, $k \in \mathbb{N}$, либо точка вида $(3l + 1, 1)$, $l \in \mathbb{N}$ (в последнем случае на той же прямой будет лежать и точка $(6l + 2, 0)$, также соответствующая эквивариантному моному). В обоих случаях с помощью эквивариантной замены координат в $\mathbb{C}^2$ можно добиться того, что из мономов, соответствующих точкам на прямой, росток $f$ будет содержать только мономы $y^2$ и $x^{3k+2}$, причем с единичными коэффициентами (во втором случае нужно взять $k = 2l$). Тогда по теореме о конечной определенности росток $f$ будет эквивалентен ростку $y^2 + x^{3k+2}$.

Если же росток не содержит мономов, имеющих степень ниже 2 по переменной $y$, то он не является эквивариантно простым: в этом случае к нему примыкают все ростки вида $y^2 + x^{3k+2}$.

Таким образом, любой росток $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простой относительно представлений $(1.5)_{112}$, эквивалентен одному из ростков (1.9). Каждый из ростков (1.9) сам является эквивариантно простым: его малая окрестность в пространстве $r$-струй эквивариантных ростков при $r \geqslant 3k + 2$ пересекает лишь конечное число орбит (это орбиты ростков $A_{3l+2}$, $0 \leqslant l \leqslant k$). Отметим также, что ростки $A_{3k+2}$ с различными $k$ попарно неэквивалентны: это следует, например, из того, что у них отличается число Милнора (см., например, [11]).

Теорема 2 для случая (1.9) полностью доказана.

## 4.5 Случай (1.10)

Мономы, эквивариантные относительно представлений $(1.5)_{121}$ — это в точности мономы $(1, 2)$-квазистепеней вида $3s + 1$ $(s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$. Таким образом, эквивариантный росток может задаваться рядом с ненулевыми членами только $(1, 2)$-квазистепеней 1, 4, 7, 10 и так далее.

Единственный моном $(1, 2)$-квазистепени 1 — это моном $x$, который не может входить в разложение в ряд ростка с особенностью в начале координат. Таким образом, росток $f$, эквивариантный относительно действий $(1.5)_{121}$, имеет вид

$$f(x, y) = ay^2 + bx^2y + cx^4 + \text{ члены } (1, 2)\text{-квазистепеней выше } 4. \tag{4.6}$$

Нетрудно убедиться, что 4-струю эквивариантно простого ростка с помощью эквивариантных замен переменных можно привести к одной из следующих форм:

$$y^2 + x^4; \tag{4.7}$$

$$y^2; \tag{4.8}$$

$$x^2y; \tag{4.9}$$

$$x^4; \tag{4.10}$$

$$0 \tag{4.11}$$

(доказательство проводится с помощью выделения полного квадрата). Рассмотрим далее каждый из этих случаев по отдельности.

**Лемма 9.** *Если 4-струя (в смысле* $(1, 2)$*-квазистепени) эквивариантного ростка имеет вид* (4.7)*, то росток эквивалентен своей 4–струе.*

*Доказательство леммы 9.* В этом случае росток $f$ имеет вид $f(x, y) = y^2 \cdot (1 + g_1(x, y)) + x^4 \cdot (1 + g_2(x, y))$, где $g_1$, $g_2$ — инвариантные ростки, $g_{1,2}(0, 0) = 0$. Росток приводится к виду (4.7) с помощью эквивариантной замены переменных $\tilde{x} = x \cdot \sqrt[4]{1 + g_2(x, y)}$, $\tilde{y} = y \cdot \sqrt{1 + g_1(x, y)}$. □

**Лемма 10.** *Если 4-струя (в смысле* $(1, 2)$*-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид* (4.8)*, то росток эквивалентен одному из ростков вида* $x^{3k+1} + y^2$*,* $k \geqslant 2$*.*

*Доказательство леммы 10.* Положим $k$ равным наименьшему из таких $s \in \mathbb{N}$, что росток $g$ содержит (с ненулевым коэффициентом) хотя бы один из мономов вида $x^{3s+1}$ и $x^{(3s+1)/2}y$ (второй случай сводится к первому с помощью выделения полного квадрата). Если $k < \infty$, то росток приводится к виду $x^{3k+1} + y^2$ с тем же $k$ (замена переменных производится аналогично тому, как это делалось при доказательстве предыдущей леммы). Если же $k = \infty$, то есть росток не содержит ни одного из мономов указанного вида, то он имеет вид $f(x, y) = y^2 \cdot (1 + g_1(x, y))$, где $g_1$ — инвариантный росток, и тогда $f$ эквивалентен своей 4-струе (в смысле $(1, 2)$-квазистепени). Но тогда росток не будет простым: к его орбите в пространстве $r$-струй эквивариантных ростков примыкают орбиты всех ростков вида $x^{3k+1} + y^2$, где $3k + 1 \leqslant r$, и число таких орбит неограниченно возрастает при $r \to \infty$. □

**Лемма 11.** *Если 4-струя (в смысле* $(1, 2)$*-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид* (4.9)*, то росток эквивалентен одному из ростков вида* $x^2y + y^{3k-1}$, $k \geqslant 2$.

Доказательство леммы 11 проводится с помощью теоремы о конечной определенности аналогично [3, §5].

**Лемма 12.** *Если 4-струя (в смысле* $(1, 2)$*-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид* (4.10)*, то росток эквивалентен одному из ростков* $x^4 + xy^3$ *и* $x^4 + y^5$.

*Доказательство леммы 12.* Воспользуемся методом полных трансверсалей. Полная трансверсаль в нашем случае будет равна $T = \mathbb{C}\langle xy^3 \rangle$, и 7-струя ростка $g$ эквивалентна $x^4 + axy^3$. При $a \neq 0$ она эквивалентна $x^4 + xy^3$. В этом случае полная трансверсаль будет нулевой, а росток $g$ конечно определен и эквивалентен ростку $x^4 + xy^3$.

При $a = 0$ полная трансверсаль будет равна $T = \mathbb{C}\langle x^2y^4, y^5 \rangle$, и $j_0^{10}(g) \sim x^4 + bx^2y^4 + cy^5$. Рассмотрим далее два случая.

Если $c \neq 0$, то 10-струя ростка с помощью эквивариантной замены $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = cy + bx^2$ приводится к виду $\tilde{x}^4 + \tilde{y}^5$. С помощью теоремы о конечной определенности нетрудно проверить, что эта струя достаточна.

Если же $c = 0$, то росток не является эквивариантно простым. В самом деле, в этом случае к орбите ростка примыкают орбиты ростков вида $x^4 + a_3x^3y^2 + a_2x^2y^4 + a_1xy^6 + a_0y^8$. Множество нулей ростка такого вида состоит из четырех касающихся в нуле парабол вида $x = t_iy^2$, где $t_i$, $i = 1,2,3,4$ — корни уравнения $t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 = 0$. Двойное отношение коэффициентов $t_i$ инвариантно относительно действия группы ростков эквивариантных автоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, а значит, существует непрерывное семейство орбит, отличающихся значениями этого инварианта, что противоречит эквивариантной простоте ростка $f$. $\square$

**Лемма 13.** *Если 4-струя (в смысле* $(1,2)$*-квазистепени) эквивариантного ростка имеет вид* $(4.11)$*, то росток — не эквивариантно простой.*

*Доказательство леммы 13.* В рассматриваемом случае 7-струя ростка (в смысле $(1,2)$-квазистепени) представляет собой линейную комбинацию мономов $x^7$, $x^5y$, $x^3y^2$, $xy^3$, то есть размерность пространства таких струй равна 4. Заметим, что в случае действий $(1.5)_{121}$ все ростки эквивариантных диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= \alpha\tilde{x} + \text{ члены более высоких степеней,} \\ y &= \beta\tilde{x}^2 + \gamma\tilde{y} + \text{ члены более высоких степеней,} \end{aligned} \tag{4.12}$$

где $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$. При этом на вид 4-струи ростка (в смысле $(1,2)$-квазистепени) после замены координат влияют только те слагаемые, которые выписаны в формулах (4.12) явно. Таким образом, действие группы ростков эквивариантных автоморфизмов $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ задает действие трёхпараметрической группы линейных операторов на пространстве этих 7-струй. По соображениям размерности получаем, что эквивариантный росток с нулевой 4-струей (в смысле $(1,2)$-квазистепени) не будет эквивариантно простым. $\square$

Простота ростков вида $x^{3k+1} + y^2$ и $x^2y + y^{3k-1}$ проверяется так же, как в неэквивариантном случае (см. [3, §8]) с очевидными изменениями, происходящими из требования эквивариантности. Простота ростков $x^4 + xy^3$ и $x^4 + y^5$ доказывается с помощью построения трансверсалей к их орбитам в пространстве $r$-струй эквивариантных ростков $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с особенностью в нуле. Эти трансверсали можно взять в виде

$$x^4 + xy^3 + \varepsilon_1 y^2 + \varepsilon_2 x^2 y$$

и

$$x^4 + y^5 + \varepsilon_1 y^2 + \varepsilon_2 x^2 y + \varepsilon_3 xy^3$$

соответственно. Нетрудно видеть, что при всех $\varepsilon$ эти ростки могут принадлежать только орбитам некоторых из ростков, указанных в формулировке настоящей теоремы, причем число этих орбит конечно. Этим завершается доказательство теоремы 2 для случая (1.10).

Теорема 2 полностью доказана.

# Глава 5

# Доказательство теоремы 3

В этой главе используется следующее обозначение: через $(1.11)_{p_0q_0r_0s_0}$ обозначаются представления, заданные формулой (1.11), где $(p,q,r,s) \equiv (p_0,q_0,r_0,s_0) \bmod 3$.

## 5.1 Случай (1.12)

Мономы ростков $f\colon (\mathbb{C}^3,0) \to (\mathbb{C},0)$, эквивариантных относительно представлений $(1.11)_{0011}$, имеют $(3,3,1)$-квазистепени, делящиеся на 3 с остатком 1. Единственный моном $(3,3,1)$-квазистепени 1 — это моном $z$, который не может входить в росток с особенностью в начале координат. Поэтому все мономы эквивариантно простого ростка имеют квазистепени не ниже 4.

Предположим сначала, что эквивариантный росток $f$ содержит хотя бы один из мономов $xz$ и $yz$. С помощью эквивариантной замены переменных можно добиться того, чтобы росток содержал только моном $xz$, причем с единичным коэффициентом. Тогда росток $f$ будет иметь вид $xz \cdot (1+g(x,y,z))$, где $g$ — росток, инвариантный относительно первого из представлений $(1.11)_{0011}$. Тогда с помощью эквивариантной замены переменных $\tilde{x}=x$, $\tilde{y}=y, \tilde{z}=z\cdot(1+g(x,y,z))$ росток $f$ приводится к виду $\tilde{x}\tilde{z}$. Таким образом, этот росток является простым, так как все ростки, лежащие в его малой окрестности в пространстве струй любого достаточно высокого порядка, принадлежат его орбите.

Теперь предположим, что 4-струя (в смысле $(3,3,1)$-квазистепени) эквивариантного ростка $f$ содержит только моном $z^4$. Тогда росток имеет вид $g(x,y)\,\cdot$

$z + z^4 \cdot (1 + h(x, y, z))$, где $g$ и $h$ — ростки, инвариантные относительно первого из представлений $(1.11)_{0011}$. Рассмотрим росток поверхности в $(\mathbb{C}^3, 0)$, заданный уравнением $f(x, y, z) = 0$. Эта поверхность имеет две компоненты: плоскость $z = 0$ и поверхность с уравнением $g(x, y) + z^3 \cdot (1 + h(x, y, z)) = 0$. Пересечение второй компоненты с плоскостью $z = 0$ задается уравнением $g(x, y) = 0$ (а также любым другим уравнением, отличающимся от указанного умножением на функцию, обратимую в окрестности нуля). Если росток $g$ не прост как росток функции двух переменных, то и росток $f$ не эквивариантно прост, и наоборот. Это следует из того, что понятие простоты ростка функции совпадает с понятием простоты ростка её нулевой поверхности уровня, то есть простоты ростка функции с точностью до более слабого отношения эквивалентности, которое допускает умножение на обратимую функцию (точные определения и формулировки см., например, в [14]). Поэтому эквивариантно простой росток $f$ будет иметь вид $f(x, y, z) = g(x, y) \cdot z + z^4 \cdot (1 + h(x, y, z))$, где $g$ — (неэквивариантно) простой росток функции двух переменных. С помощью теоремы о конечной определённости (см. [12, раздел 2]) нетрудно проверить, что такой росток с помощью эквивариантных преобразований приводится к виду $z^4 + z \cdot g(x, y)$. Если же росток $f$ не имеет мономов степени меньше 4 по $z$, то он не будет простым (к нему будет примыкать неограниченное число орбит вида $z^4 + z \cdot g(x, y)$).

Предположим теперь, что 4-струя (в смысле $(3, 3, 1)$-квазистепени) эквивариантного ростка $f$ — тождественно нулевая. Тогда из необходимого условия эквивариантной простоты ростка (лемма 2) следует, что эквивариантно простой росток должен иметь ненулевую 7-струю. Рассмотрим несколько случаев.

Если росток $f$ содержит мономы $x^2z$ и $y^2z$ или моном $xyz$, то с помощью замены переменных $x, y$ сумму этих мономов можно привести к виду $x^2z + y^2z$. Тогда росток либо содержит также какие-то из мономов вида $xz^{3l+1}$, $yz^{3l+1}$, $z^{6l+1}$ ($l$ выбирается наименьшим возможным) и его с помощью выделения полного квадрата можно привести к виду $(x^2 + y^2) \cdot z + z^{3k+1}$, где $k = 2l$, либо имеет вид $x^2z \cdot g(x, y, z) + y^2z \cdot h(x, y, z)$, где $g$ и $h$ — ростки, инвариантные относительно первого из представлений $(1.11)_{0011}$. В последнем случае к ростку $f$ примыкают все ростки вида $(x^2+y^2)\cdot z+z^{3k+1}$, $k \geqslant 1$, и он не является эквивариантно простым.

Если росток $f$ содержит мономы $z^7$, $x^2z$ и $y^3z$ и не содержит мономов $xyz$, $y^2z$ и $yz^4$, то по теореме о конечной определенности он с помощью эквивариантной замены переменных приводится к виду $z^7+x^2z+y^3z$ и является эквивариантно простым.

Если росток $f$ содержит мономы $z^7$ и $x^2z$ и не содержит монома $y^3z$, то он не является эквивариантно простым. Это следует из того, что классификация форм $(6,3,2)$-квазистепени 14 в силу леммы 2 содержит модули.

Если росток $f$ не содержит мономов степени 1 по переменной $z$, кроме монома $x^2z$, то он не является эквивариантно простым: в этом случае к нему примыкают все ростки вида $x^2z+y^kz+z^4$, $k \geqslant 2$.

Если 7-струя (в смысле $(3,3,1)$-квазистепени) эквивариантно простого ростка $f$ содержит только моном $z^7$, то росток должен содержать какие-то из мономов $x^3z$, $x^2yz$, $xy^2z$, $y^3$. Это следует из того, что в силу леммы 2 классификация форм $(3,3,2)$-квазистепени 14 содержит модули. Более того, если $f(x,y,z)=g(x,y)\cdot z+h(x,y,z)\cdot z^4$, то росток $g(x,y)$ должен быть простым как росток функции двух переменных (это доказывается так же, как аналогичное утверждение выше для ростка с 4-струей $z^4$). Поэтому, как следует из классификации простых особенностей, росток $g(x,y)$ может иметь один из типов $D_k$, $E_6$, $E_7$, $E_8$. В последних трёх случаях к ростку $f$ будут примыкать ростки $(6,3,2)$-квазистепени 14, классификация которых, как уже было отмечено, содержит модули; значит, в этих случаях росток $f$ не будет эквивариантно простым. То же самое относится к случаям ростков $D_k$, $k \geqslant 5$. В случае ростка $D_4$, который можно привести к виду $x^3+y^3$, росток $f$ по теореме о конечной определенности приводится к виду $(x^3+y^3)\cdot z+z^7$ и является эквивариантно простым.

Наконец, рассмотрим случай, когда 7-струя (в смысле $(3,3,1)$-квазистепени) эквивариантного ростка $f$ содержит только моном $xz^4$. В этом случае к ростку $f$ примыкают все ростки вида $axz^4+byz^4+Q_3(x,y)z$, где $a$, $b \in \mathbb{C}$, а $Q_3$ — кубическая форма. По лемме 2 классификация таких ростков (то есть ростков $(3,3,2)$-квазистепени 11) содержит модули, и в этом случае росток $f$ не является эквивариантно простым.

Теорема 3 для случая (1.12) доказана.

## 5.2 **Случай** (1.13)

Этот случай разбирается аналогично предыдущему. Все эквивариантно простые ростки в случае (1.13) получаются умножением соответствующих эквивариантно простых ростков для случая (1.12) на $z$. Исключение составляет росток $z^2$ (он получается умножением на $z$ ростка $z$, который в случае (1.12) является эквивариантным, но не эквивариантно простым, поскольку не имеет критической точки в нуле). Этот росток является эквивариантно простым. В самом деле, всякий примыкающий к нему эквивариантный росток имеет вид $z^2(1+\varepsilon g(x,y,z))$, где $g(x,y,z)$ — инвариантный росток, $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$. С помощью эквивариантной замены переменных $\tilde{x}=x, \tilde{y}=y, \tilde{z}=z\sqrt{1+\varepsilon g(x,y,z)}$ такой росток приводится к виду $\tilde{z}^2$. Отсюда следует, что он является эквивариантно простым. Остальные нормальные формы эквивариантно простых ростков получаются так же, как в случае (1.12).

## 5.3 **Случай** (1.14)

Мономы ростков $f\colon(\mathbb{C}^3,0)\to(\mathbb{C},0)$, эквивариантных относительно представлений $(1.11)_{0111}$, имеют $(3,1,1)$-квазистепени, делящиеся на 3 с остатком 1. Мономы $(3,1,1)$-квазистепени 1 — это только мономы $y$ и $z$, которые не могут входить в росток с особенностью в начале координат. Поэтому все мономы эквивариантно простого ростка имеют квазистепени не ниже 4. 4-струя эквивариантно простого ростка (в смысле $(3,1,1)$-квазистепени) имеет вид $axy+bxz+f_4(y,z)$, где $f_4(y,z)$ — форма степени 4. С помощью линейных эквивариантных замен переменных в плоскости $(y,z)$ можно привести эту 4-струю к аналогичному виду с $b=0$.

Предположим сначала, что $a\neq 0$, тогда с помощью масштабирования переменных можно получить $a = 1$. Тогда 4-струя ростка $f$ будет иметь вид

$$j_4 f(x, y, z) = xy + y \cdot g(y, z) + cz^4,$$

где $g$ — росток, инвариантный относительно первого из представлений $(1.11)_{0111}$. С помощью эквивариантной замены переменной $\tilde{x} = x + g(y, z)$ можно привести 4-струю ростка к виду $xy + cz^4$. Если $c \neq 0$, то с помощью масштабирование переменных можно получить $c = 1$, и по теореме о конечной определенности росток будет эквивалентен своей 4-струе. Если же $c = 0$, то 4-струя ростка $f$ не является достаточной. Тогда его 7-струя будет иметь вид

$$j_7 f(x, y, z) = xy + y \cdot g(y, z) + dz^7.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что либо 7-струя ростка приводится к виду $xy + z^7$ и является достаточной, либо 7-струя недостаточна, и необходимо рассматривать 10-струю, и так далее. Продолжая по индукции, докажем, что росток приводится к одному из видов $xy + z^{3k+1}$ $(k \geqslant 1)$.

Если же на первом шаге классификации $a = b = 0$, то есть 4-струя ростка $f$ не содержит членов, зависящих от $x$, то росток — не эквивариантно простой. Это следует из того, что классификация форм степени 4 от двух переменных содержит модули, а замена переменной $x$ в этом случае не будет влиять на 4-струю. Значит, уже классификация 4-струй ростков, не содержащих мономов $xy$ и $xz$, содержит модули, поэтому все такие ростки не являются эквивариантно простыми. В частности, если 4-струя ростка (в смысле $(3, 1, 1)$-квазистепени) — нулевая, то росток не является эквивариантно простым в силу леммы 2.

Теорема 3 для случая (1.14) доказана.

## 5.4 Случай (1.15)

В этом случае всякий эквивариантный росток имеет вид $f(x, y, z) = Q_1(y, z) + x \cdot Q_2(y, z) + \ldots$, где $Q_1$ и $Q_2$ — квадратичные формы. Малым шевелением коэффициентов можно добиться того, чтобы обе эти формы были невырожденными, после чего одну из них с помощью эквивариантной замены координат $y, z$ можно привести к сумме квадратов. Собственные значения этой пары квадратичных форм инвариантны относительно эквивариантных замен координат, поскольку на вид этих форм влияют только линейные замены координат $y, z$. Поэтому к орбите каждого эквивариантного ростка примыкают бесконечные семейства орбит ростков, отличающихся этими собственными значениями, и такой росток не может быть эквивариантно простым. Теорема 3 для случая (1.15) доказана.

## 5.5 **Случай** (1.16)

Мономы ростков $f\colon (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантных относительно представлений $(1.11)_{0121}$, имеют $(3, 2, 1)$-квазистепени, делящиеся на 3 с остатком 2.

Мономы $(3, 2, 1)$-квазистепени 2 — это только мономы $y$ и $z^2$, первый из которых не может входить в росток с особенностью в начале координат. Рассмотрим случай, когда моном $z^2$ входит в эквивариантный росток. В этом случае росток $f$ с помощью эквивариантной замены переменных приводится к виду $z^2 + F_2(x, y)$, где $F_2$ — некоторая эквивариантная функция двух переменных. Это утверждение доказывается аналогично [3, лемма 4.1]. Уточнения в эквивариантном случае требует только лемма Морса с параметром: нужно доказать, что гладко зависящее от параметра семейство функций, эквивариантных относительно представлений $(1.11)_{0121}$, с гладко зависящей от параметра невырожденной критической точкой и нулевым критическим значением приводится к сумме квадратов с помощью замены координат, эквивариантной относительно первого из представлений $(1.11)_{0121}$. Построить такую замену координат можно так же, как при доказательстве обычной леммы Морса (см., например, [15, лемма 2.2]); эквивариантность этой замены сразу следует из ее явного вида. Отметим также, что функция $F_2$ должна быть эквивариантно простой как функция двух переменных относительно ограничения первого из представлений $(1.11)_{0121}$ на плоскость $(x, y)$. Доказательство необходимости и достаточности этого условия для эквивариантной простоты ростка проводится так же, как при рассмотрении случая (1.12).

Рассмотрим далее случай, когда 2-струя (в смысле $(3, 2, 1)$-квазистепени) эквивариантного ростка $f$ нулевая. Предположим сначала, что росток содержит моном $xy$. В этом случае росток $f$ с помощью эквивариантной замены переменных приводится к виду $xy + F(z)$, где $F$ — эквивариантная функция одной переменной. Это утверждение доказывается так же, как аналогичное утверждение в предыдущем абзаце. Отличие только в том, что привести квадратичную форму $xy$ к сумме квадратов с помощью эквивариантных замен нельзя, поскольку форма $x^2 + y^2$ не является эквивариантной. Наконец, эквивариантная функция $F$ с помощью эквивариантной замены переменной $z$ приводится к виду $z^{3k+2}$ $(k \geqslant 1)$. Простота ростков вида $xy + z^{3k+2}$ следует из того, что к орбите такого ростка примыкают только орбиты ростков того же вида с меньшими $k$, которых конечное число.

Теперь предположим, что росток $f$ не содержит монома $xy$, но содержит моном $xz^2$. Тогда росток имеет вид

$$f(x, y, z) = axz^2 + z^2 f_1(x, y, z) + y^{3k+1} f_2(x, y, z) + y^{3l+2} z f_3(x, y, z),$$

где $a \in \mathbb{C}^*$, $k, l \in \mathbb{N}$, $f_i$ — инвариантные функции. С помощью эквивариантной замены переменной $\tilde{x} = ax + bf_1(x, y, z)$ росток приводится к виду

$$f(x, y, z) = xz^2 + y^{3k+1} f_2(x, y, z) + y^{3l+2} z f_3(x, y, z),$$

где $k$ и $l$ выбраны так, чтобы каждая из функций $f_2$ и $f_3$ имела ненулевой свободный член либо была тождественно нулевой. Если $f_2 \not\equiv 0$ и либо $k \leqslant l$, либо $f_3 \equiv 0$, то с помощью эквивариантной замены переменной $\tilde{y} = y \cdot \big(f_2(x, y, z) + y^{3l-3k+1} z f_3(x, y, z)\big)^{1/(3k+1)}$ росток приводится к виду $f(x, y, z) = xz^2 + y^{3k+1}$. Если $f_3 \not\equiv 0$ и либо $k > l$, либо $f_2 \equiv 0$, то с помощью эквивариантной замены переменной $\tilde{y} = y \cdot \big(y^{3k-3l-1} f_2(x, y, z) + f_3(x, y, z)\big)^{1/(3l+2)}$ росток приводится к виду $f(x, y, z) = xz^2 + y^{3l+2} z$. Эквивариантная простота таких ростков следует из того, что к орбите такого ростка примыкают только орбиты ростков этих же видов с меньшими $k$ и $l$. Наконец, если $f_2 \equiv 0 \equiv f_3$, то росток имеет вид $f(x, y, z) = xz^2$ и не является эквивариантно простым, поскольку к нему примыкают все ростки вида $xz^2 + y^{3k+1}$ и $xz^2 + y^{3l+2} z$, а число таких ростков неограниченно возрастает при увеличении длины струй, в пространстве которых рассматривается примыкание.

Наконец, предположим, что росток $f$ не содержит мономов $xy$ и $xz^2$. В этом случае к нему примыкает орбита ростка вида $ay^2z + byz^3 + cz^5 + dx^2y + ex^2y^2$, который не является эквивариантно простым в силу леммы 2 (нужно применить эту лемму для $\underline{\alpha} = (4, 2, 3)$; в этом случае в обозначениях леммы $d = 4$, а размерность пространства ростков вышеуказанного вида равна 5).

Теорема 3 для случая (1.15) доказана.

## 5.6 Случай (1.17)

Отсутствие эквивариантно простых ростков в этом случае следует из теоремы 1.

## 5.7 Случай (1.18)

Доказательство теоремы для этого случая основывается на следующих двух леммах.

**Лемма 14.** *В окрестности начала координат росток $f$ с помощью эквивариантной замены координат приводится к виду*

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \varphi(\tilde{x}) + Q(\tilde{y}),$$

*где $Q$ — невырожденная квадратичная форма,* $\dim\{\tilde{y}\} = \mathrm{rk}(d^2 f|_0) = \rho$, $\dim\{\tilde{x}\} = 3 - \rho$.

*Доказательство леммы 14.* Лемма доказывается аналогично [3, лемма 4.1]. Уточнения в эквивариантном случае требует только лемма Морса с параметром: нужно доказать, что гладко зависящее от параметра семейство функций, эквивариантных относительно представлений $(1.11)_{1112}$, с гладко зависящей от параметра невырожденной критической точкой и нулевым критическим значением приводится к сумме квадратов с помощью замены координат, эквивариантной относительно первого из представлений $(1.11)_{1112}$. Построить такую замену координат можно так же, как при доказательстве обычной леммы Морса (см., например, [15, лемма 2.2]); эквивариантность этой замены сразу следует из ее явного вида. □

**Лемма 15.** *В обозначениях леммы 14 имеет место неравенство* $\rho \geqslant 2$.

*Доказательство леммы 15.* Если $\rho < 2$, то в обозначениях леммы 14 $\varphi$ — эквивариантный росток функции двух или более переменных с нулевой 4-струей. Но классификация форм степени 5 от двух и более переменных содержит модули, поэтому росток $f$ в этом случае не будет эквивариантно простым. $\square$

Завершим рассмотрение случая (1.18). Если в обозначениях предыдущих лемм $\rho = 3$, то $f$ представляет собой невырожденную квадратичную форму от трех переменных, которую с помощью линейных замен координат можно диагонализировать, то есть привести к виду (1.18), где $k = 0$.

Если же $\rho = 2$, рассмотрим эквивариантную функцию одной переменной $\varphi$. Если производные всех порядков функции $\varphi$ в нуле равны 0, то росток $f$ — не простой (к его орбите примыкают все орбиты вида $\tilde{x}^{3k+2} + Q(\tilde{y})$). Если же $\varphi^{(i)}(0) = 0$ при $0 \leqslant i \leqslant 3k+1$, но $\varphi^{(3k+2)}(0) \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$, то росток $f$ приводится к виду (1.18) с тем же $k$. Каждый из ростков (1.18) сам является эквивариантно простым: его малая окрестность в пространстве $r$-струй эквивариантных ростков при $r \geqslant 3k+2$ пересекает лишь конечное число орбит (это орбиты ростков $x^{3l+2} + y^2 + z^2$, $0 \leqslant l \leqslant k$).

Теорема 3 для случая (1.18) доказана.

## 5.8 Случай (1.19)

Отсутствие эквивариантно простых ростков в этом случае следует из леммы 2. В обозначениях этой леммы нужно взять $\underline{\alpha} = (1, 1, 2)$ и $r = 4$, тогда $d = 8$, а размерность пространства квазиоднородных многочленов квазистепени 4 равна 9.

## 5.9 Случай (1.20)

Из леммы 2 следует, что в этом случае эквивариантно простой росток $f$ должен иметь ненулевую 2-струю в смысле $(1, 1, 2)$-квазистепени. Эта 2-струя представляет собой 2-форму от переменных $x, y$, которая с помощью эквивариантных замен переменных $x, y$ она приводится к виду $x^2 + y^2$ (если она невырожденная) или $x^2$ (если она вырожденная).

Дальнейшее доказательство проводится аналогично случаю (1.18) с помощью лемм, аналогичных леммам 14 и 15. В случае, когда (в обозначениях этих лемм) $\rho = 2$, росток $f$ приводится к виду $x^2 + y^2 + z^{3k+1}$ $(k \geqslant 1)$; все такие ростки будут эквивариантно простыми, так как примыкают к ним только ростки такого же вида с меньшими $k$. В случае $\rho = 1$ функция $\varphi(y, z)$ (вновь в обозначениях лемм 14 и 15) должна быть эквивариантно простой как функция двух переменных относительно ограничения первого из представлений $(1.11)_{1122}$ на плоскость $(y, z)$. Доказательство необходимости и достаточности этого условия для эквивариантной простоты ростка проводится так же, как при рассмотрении случая (1.12). Этим завершается доказательство теоремы 3 для случая (1.18).

Теорема 3 полностью доказана.

# Глава 6

# Некоторые обобщения

В этой главе некоторые результаты теорем 2 и 3 обобщаются на случаи действий циклических групп произвольного конечного порядка.

## 6.1 Случай скалярного действия группы $\mathbb{Z}_m\,(m \geqslant 3)$ на $\mathbb{C}^n$

Следующий результат обобщает результаты теоремы 2 (случай (1.9)) и теоремы 3 (случай (1.18)).

**Теорема 7.** *Пусть действие группы* $\mathbb{Z}_m\,(m \geqslant 3)$ *на* $\mathbb{C}^n\,(n \geqslant 2)$ *и на* $\mathbb{C}$ *задано формулами*

$$\sigma \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (\tau z_1, \ldots, \tau z_n); \quad \sigma \cdot z = \tau^2 z, \tag{6.1}$$

*где* $\sigma \in \mathbb{Z}_m$ *— образующая,* $\tau = \exp(2\pi i/m)$. *Пусть* $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *— росток с особенностью в нуле, эквивариантный относительно представлений* (6.1). *Росток* $f$ *является эквивариантно простым относительно этих представлений тогда и только тогда, когда он эквивалентен в смысле определения 2 одному из ростков*

$$z_1^{mk+2} + z_2^2 + \ldots + z_n^2 \ (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}). \tag{6.2}$$

*Доказательство.* Доказательство теоремы 8 проводится по аналогии с доказательством теоремы 3 для случая (1.18). В окрестности начала координат росток $f$ с помощью эквивариантной замены координат $\tilde{x} = \tilde{x}(z_1, \ldots, z_n)$, $\tilde{y} = \tilde{y}(z_1, \ldots, z_n)$ приводится к виду $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \varphi(\tilde{x}) + Q(\tilde{y})$, где $Q$ — невырожденная квадратичная форма, $\dim\{\tilde{y}\} = \mathrm{rk}(d^2 f|_0) = \rho$, $\dim\{\tilde{x}\} = n - \rho$ (это утверждение доказывается аналогично лемме 14). При этом имеет место неравенство $\rho \geqslant n-1$. В самом деле, если $\rho < n-1$, то $\varphi$ — эквивариантный росток функции двух или более переменных с нулевой $(m+1)$-струей. Но классификация форм степени 5 и выше от двух и более переменных содержит модули, поэтому росток $f$ в этом случае не будет эквивариантно простым.

Если в выбранных выше обозначениях $\rho = n$, то $f$ представляет собой невырожденную квадратичную форму от трех переменных, которую с помощью линейных замен координат можно диагонализировать, то есть привести к виду (6.2), где $k = 0$.

Если же $\rho = n-1$, рассмотрим эквивариантную функцию одной переменной $\varphi$. Если производные всех порядков функции $\varphi$ в нуле равны 0, то росток $f$ — не простой (к его орбите примыкают все орбиты вида $\tilde{x}^{3k+2} + Q(\tilde{y})$). Если же $\varphi^{(i)}(0) = 0$ при $0 \leqslant i \leqslant 3k+1$, но $\varphi^{(3k+2)}(0) \neq 0\,(k \in \mathbb{N})$, то росток $f$ приводится к виду (6.2) с тем же $k$. Каждый из ростков (6.2) сам является эквивариантно простым: его малая окрестность в пространстве $r$-струй эквивариантных ростков при $r \geqslant 3k+2$ пересекает лишь конечное число орбит (это орбиты ростков вида $z_1^{3l+2} + z_2^2 + \ldots + z_n^2$, $0 \leqslant l \leqslant k$). □

**Замечание.** Утверждение теоремы 8 останется верным, если в формулах (6.1) всюду заменить $\exp\left(\dfrac{2\pi i}{m}\right)$ на $\exp\left(\dfrac{2\pi i k}{m}\right)$, где НОД$(k,m) = 1$: такое изменение представлений группы соответствует выбору другой образующей в группе $\mathbb{Z}_m$.

## 6.2 Случаи действий группы $\mathbb{Z}_m\,(m \geqslant 3)$ на $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3$ с одной нетривиальной компонентой

Следующий результат обобщает результаты теоремы 2 (случаи (1.6), (1.7)).

**Теорема 8.** *Пусть действие группы $\mathbb{Z}_m\,(m \geqslant 3)$ на $\mathbb{C}^2$ и на $\mathbb{C}$ задано формулами*

$$\sigma \cdot (x, y) = (x, \tau y); \quad \sigma \cdot z = \tau^r z, \tag{6.3}$$

*где* $\sigma \in \mathbb{Z}_3$ *— образующая,* $\tau = \exp(2\pi i/m)$, $r \in \{1, \dots, m-1\}$.
*Пусть* $f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *— росток с особенностью в нуле, эквивариантный относительно представлений* (6.3). *Росток* $f$ *является эквивариантно простым относительно этих представлений тогда и только тогда, когда он эквивалентен в смысле определения 2 одному из следующих ростков:*

$$
\begin{aligned}
&y^r \ (\textit{только при } r \geqslant 2);\\
&xy^r;\\
&x^k y^r + y^{m+r} \ (k \geqslant 2);\\
&x^3 y^r + y^{2m+r};\\
&x^k y^r + xy^{m+r} \ (k \geqslant 3);\\
&x^2 y^r + y^{3k+r} \ (k \geqslant 3).
\end{aligned}
$$

*Доказательство.* Сравним множества эквивариантных мономов в случае действий $(1.5)_{011}$ и в случае действий (6.3). В первом случае эквивариантный моном может иметь любую степень по переменной $x$ и степень, делящуюся на 3 с остатком 1, по переменной $y$. Во втором случае эквивариантный моном может иметь любую степень по переменной $x$ и степень, делящуюся на $m$ с остатком $r$, по переменной $y$. Отсюда следует, что между множествами эквивариантных мономов, соответствующих этим двум случаям, существует биекция

$$b_{m,r}\colon x^s y^{3t+1} \mapsto x^s y^{mt+r}.$$

Биекция $b_{m,r}$ продолжается на множество эквивариантных функций и их ростков в начале координат, а также не множество эквивариантных бирациональных автоморфизмов пространства $\mathbb{C}^n$ и их ростков в начале координат. Очевидно. что эта биекция сохраняет отношение примыкания орбит ростков (см. определение 3) в пространствах струй любой длины. Поэтому при $r = 1$ под действием отображения $b_{m,r}$ множество эквивариантно простых ростков в случае действий $(1.5)_{011}$ переходит в множество эквивариантно простых ростков в случае действий (6.3) совпадают. Отличие случая $r > 1$ только в том, что в случае действий (6.3) эквивариантно простым оказывается также росток $y^r$ (его прообраз $y$ при отображении

$b_{m,r}$ не является эквивариантно простым, поскольку не имеет критической точки в начале координат). $\square$

Следующий результат обобщает результаты теоремы 3 (случаи (1.12), (1.13)).

**Теорема 9.** *Пусть действие группы* $\mathbb{Z}_m$ $(m \geqslant 3)$ *на* $\mathbb{C}^3$ *и на* $\mathbb{C}$ *задано формулами*

$$\sigma \cdot (x, y, z) = (x, y, \tau z); \quad \sigma \cdot w = \tau^r w, \tag{6.4}$$

*где* $\sigma \in \mathbb{Z}_3$ *— образующая,* $\tau = \exp(2\pi i/m)$, $r \in \{1, \ldots, m-1\}$.
*Пусть* $f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *— росток с особенностью в нуле, эквивариантный относительно представлений* (6.3). *Росток* $f$ *является эквивариантно простым относительно этих представлений тогда и только тогда, когда он эквивалентен в смысле определения 2 одному из следующих ростков:*

$$\begin{aligned}
&z^r \ (\textit{только при } r \geqslant 2);\\
&xz^r;\\
&F_1(x, y) \cdot z^r + z^{m+r};\\
&(x^2 + y^3) \cdot z^r + z^{2m+r};\\
&(x^3 + y^3) \cdot z^r + z^{2m+r};\\
&(x^2 + y^2) \cdot z^r + z^{km+r} \ (k \geqslant 3),
\end{aligned}$$

*где* $F_1$ *— любой (неэквивариантно) простой росток функции двух переменных типов* $A_k, D_k, E_k$ *(см. формулы* (1.1)*).*

*Доказательство.* Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 8. Оно основывается на том, что между множествами эквивариантных мономов в случае действий $(1.5)_{0011}$ и в случае действий (6.4) существует биекция

$$b_{m,r}\colon x^s y^t z^{3u+1} \mapsto x^s y^t z^{mu+r},$$

которая сохраняет отношение примыкания. Как и при доказательстве теоремы 8, отдельного рассмотрения требует только росток $z^r$ при $r > 1$. $\square$

# Заключение

В заключение еще раз перечислим основные результаты работы.

1. В главе 2 получено необходимое условие эквивариантной простоты ростка относительно конечных циклических групп в аналитической и геометрической форме. С его помощью доказано отсутствие эквивариантно простых ростков в случае согласованных скалярных действий конечной циклической группы на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$.

2. В главе 3 метод полных трансверсалей и теорема о конечной определенности адаптированы для применения к классификации эквивариантно простых особенностей.

3. В главах 4 и 5 получена полная классификация эквивариантно простых ростков функций двух и трех переменных относительно всевозможных нетривиальных действий группы из трех элементов.

4. В главе 6 получена классификация эквивариантно простых ростков функций многих переменных относительно некоторых нетривиальных действий конечных циклических групп.

Перечислим несколько возможных направлений дальнейшего исследования, открытых вопросов и нерешенных задач, а также трудности, которые предстоит преодолеть при их решении.

1. **Получение классификации эквивариантно простых особенностей для всех случаев действия конечных циклических групп на комплексных пространствах.** Основная трудность при решении этой задачи

состоит в большом количестве возможных действий группы $\mathbb{Z}_m$ на пространстве $\mathbb{C}^n$, которое растет с ростом $m$ и $n$. Кроме того, имеются некоторые существенные различия между случаями простого и составного $m$. Требуется описать все попарно неэквивалентные случаи таких действий и получить классификацию эквивариантно простых особенностей для каждого из них.

2. В контексте п.1 самостоятельный интерес представляет следующий вопрос: **в каких случаях эквивариантно простых ростков не существует вовсе?** Теорема 1 дает лишь частичный ответ на этот вопрос; так, в теореме 3 возникает два случая, которые не являются частными случаями теоремы 1, но в которых эквивариантно простых ростков не существует. Из леммы 2, в частности, следует, что с ростом $n$ число эквивариантно простых ростков в некоторых аналогичных друг другу случаях действий группы $\mathbb{Z}_m$ в целом уменьшается. С другой стороны, с ростом $m$ и $n$ увеличивается количество попарно неэквивалентных действий группы $\mathbb{Z}_m$.

3. Задачу, поставленную в п.1, можно обобщить на случаи **действий произвольной конечной абелевой группы**.

4. При решении задачи, поставленной в п.3, существенно облегчить работу мог бы ответ на следующий вопрос: **как непосредственно получить классификацию эквивариантно простых ростков на прямой сумме комплексных пространств, если такая классификация известна на каждом прямом слагаемом?** На данный момент ответ на этот вопрос известен только в тех случаях, когда возможно разделение переменных, приводящее к отщеплению от ростка эквивариантной квадратичной формы (см., например, доказательство теоремы 3, случаи (1.18) и (1.20), а также доказательство теоремы 8). Существенную роль здесь играет связь между понятиями простого ростка функции и простого ростка гиперповерхности.

5. В связи с вопросом, поставленным в п.4, возникает следующий вопрос: **в каких случаях можно выполнить разделение переменных для эквивариантного ростка?** Как было отмечено выше, в некоторых случаях из

ростков удается отщепить эквивариантные квадратичные формы. Можно ли расширить класс функций, которые отщепляются в эквивариантных ростках? С. М. Гусейн-Заде была высказана гипотеза, что отщепляются в точности те функции, эквивариантные версальные деформации которых тривиальны. Однако на сегодняшний день эта гипотеза не доказана и не опровергнута.

6. Имея список нормальных форм простых особенностей, эквивариантных относительно действий некоторой конечной абелевой группы, можно изучать, например, вопрос о том, какие из этих особенностей могут иметь функции, заданные многочленами фиксированной степени, мультистепени или квазистепени. Кроме того, по аналитическому виду нормальных форм можно вычислять некоторые топологические инварианты соответствующих особенностей, например, число Милнора.

7. Наконец, можно существенно расширить изначальную постановку задачи и рассматривать не только ростки функций, эквивариантные относительно действий конечных абелевых групп, но и **ростки функций, эквивариантных относительно других конечных и бесконечных групп**. Например, интерес может представлять изучение функций многих комплексных переменных (но уже не являющихся комплексно-аналитическими), которые эквивариантны относительно комплексного сопряжения по некоторым переменным. Рассмотрение подобных задач требует описания соответствующих отношений эквивалентности на множестве эквивариантных функций, а методы классификации могут существенно отличаться от использованных в настоящей работе.

# Список публикаций по теме диссертации

[1.1] Е. А. Асташов. О классификации особенностей, эквивариантно простых относительно представлений циклических групп // Вестник Удмуртского университета. Серия «Математика. Механика. Компьютерные науки», 26:2 (2016), 155–159.

[1.2] Е. А. Асташов. О классификации ростков функций двух переменных, эквивариантно простых относительно действий циклической группы порядка три // Вестник Самарского университета. Естественно-научная серия, 3–4 (2016), 7–13.

# Литература


[1] В. И. Арнольд. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли $B_k, C_k, F_4$ и особенности эволют // Успехи математических наук, 33:5 (1978), 91–107.

[2] W. Domitrz, M. Manoel, P. de M. Rios. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions // Journal of Geometry and Physics, 71 (2013), 58–72.

[3] В. И. Арнольд. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля $A_k, D_k, E_k$ и лагранжевы особенности // Функциональный анализ и его приложения, 6:4 (1972), 3–25.

[4] J. Kollár. An effective Łojasiewicz inequality for real polynomials // Periodica math. hung., 38:3 (1999), 213–221.

[5] С. М. Гусейн-Заде, Н. Н. Нехорошев. Об особенностях типа $A_k$ на плоских кривых фиксированной степени // Функциональный анализ и его приложения, 34:3 (2000), 69–70.

[6] Е. А. Асташов. Алгебраические кривые фиксированной степени со сложными особенностями // "Дни студенческой науки. Весна-2011." Сборник научных трудов — М.: МЭСИ (2011), 28–38.

[7] E. Astashov. On algebraic hypersurfaces of fixed degree in $\mathbb{C}^n$ with prescribed singularities // Proc. Int. miniconf. "Qualitative theory of differential equations and applications" (16 June 2012). M.: MESI (2013), 5–19.

[8] Е. А. Асташов. Об особенностях типа $A_k$ на кривых и поверхностях заданной степени, квазистепени и мультистепени // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика, 6 (2015), 3–9.

[9] S. Bochner. Compact groups of differentiable transformations // Ann. Math., 2:46 (1945), 372–381.

[10] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk. Lie groups // Springer, 2000.

[11] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений // М.: МЦНМО, 2009.

[12] J. W. Bruce, N. P. Kirk, A. A. du Plessis. Complete transversals and the classification of singularities // Nonlinearity, 10 (1997), 253–275.

[13] P. Slodowy. Einige Bemerkungen zur Entfaltung symmetrischer Funktionen // Math. Z., 158 (1978), 157–170.

[14] M. Giusti. Classification des singularités isolées simples d'intersections complètes // Proceedings of symposia in pure mathematics, 40:1 (1983), 457–494.

[15] Дж. Милнор. Теория Морса: пер. с англ. Изд. 2-е // М.: Изд-во ЛКИ, 2008.