ФГБОУ ВО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи

Перез Ортиз Ромео

Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в задачах наследственной механики и теплофизики

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2017

Работа выполнена на кафедре математического анализа Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель: **Власов Виктор Валентинович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Исмагилов Раис Сальманович**
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана»,
профессор кафедры ФН-1 высшей математики

Сакбаев Всеволод Жанович
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»,
профессор кафедры высшей математики

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет МЭИ (Московский энергетический институт)»

Защита диссертации состоится «16» июня 2017 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу Москва, Ломоносовский проспект, 27, сектор А и на сайте системы «ИСТИНА» `https://istina.msu.ru/dissertation_councils/councils/842462/`, а также на сайте Механико-математического факультета `http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi`.

Автореферат разослан «04» мая 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физ.-мат. наук, профессор — Власов Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Спектральный анализ оператор-функций является важным разделом общей спектральной теории операторов, которая в свою очередь является важнейшей частью функционального анализа. Диссертация посвящена спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве. На основании локализации спектра и оценок указанных оператор-функций установлена корректная разрешимость начальных задач для упомянутых интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра $\theta \in [0,1]$ в весовых пространствах Соболева, определенных на положительной полуоси, а также установлены представления сильных решений таких интегро-дифференциальных уравнений в виде слагаемых, отвечающих точкам спектра, соответствующих оператор-функций.

В диссертации изучается начальная задача для интегро-дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K(t-s)A^{2\theta}u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \tag{2}$$

где A – самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Вещественное число θ принадлежит отрезку $[0,1]$, а функция $K(t)$– ядро интегрального оператора. В зарубежной литературе уравнение вида (1) нередко называют уравнением Гуртина–Пипкина.

Интегро-дифференциальные уравнения, рассматриваемые в предлагаемой работе, являются операторными моделями уравнений, возникающих во многих областях механики и физики таких, как теория теплопроводности в средах с памятью[1,2,3] (уравнения Гуртина–Пипкина) и теория вязкоупругости[4].

---

[1]Gurtin M. E., Pipkin A. C. A General theory of heat conduction with finite wave speeds. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1968, Vol. 31, No. 2, 113–126.

[2] Pandolfi L. and Ivanov S. Heat equations with memory: lack of controllability to the rest. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, Vol. 355, 1–11.

[3] Лыков А.В. Проблема тепло и массообмена. Наука и техника, Минск, 1976.

[4]Dafermos C.M. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1970, Vol. 37, 297–308.

Уравнения такого вида возникают также в кинетической теории газов[5], в теории усреднения в многофазных средах[6,7], в теории акустики эмульсий[8], в динамике вязкоупругих твердых тел и в задачах управляемости термоупругих систем с памятью[9] (см. главы 18 и 19, соответственно, указанной монографии[9]).

Задача (1)–(2) является задачей для вязкоупругого стержня Кирхгофа в случае, когда $Au = -\Delta u$ и $\theta = 1/2$ (подробнее, см. работы[10,11] авторов Х.Е. Муньос Ривера, М.Г. Насо, Ф.М. Вегни, А. Аросио и С. Паниззи). Задача (1)–(2) представляет собой также изотропную модель вязкоупругости, если полагать $A^2u = -\Delta u$ и $\theta = 1$ или $A^2u = -\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} u)$ и $\theta = 1$, где μ и λ являются *параметрами Ламе* упругой среды (подробнее, см. работы[10,12,13,14] авторов Х.Е. Муньос Ривера, М.Г. Насо, Е. Вук, Ф.М. Вегни, М. Фабризио и В. Лаззари).

Основная цель работы состоит в исследовании спектра оператор-функций $L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \widehat{K}(\lambda)A^{2\theta}$ в случае, когда параметр θ принадлежит отрезку $[0, 1]$. Здесь, оператор-функции $L(\lambda)$ являются символами уравнений вида (1), а $\widehat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа ядра $K(t)$.

Отметим, что в случае $\theta = 1$ спектральный анализ уравнений вида (1)

[5]Guyer, R.A., Krumhansl, J.A. Solution of the linearized phonon Boltzmann equation. *Physical Review*, 1966, Vol. 148, 766–778.

[6]Sanchez-Palencia E. Nonhomogeneous Media and Vibration Theory. Lecture notes in physics, 1980, Vol. 127.

[7]Шамаев А.С., Шумилова В.В. Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью. *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*, 2011, No. 2, 92–103.

[8]Гавриков А.А., Шамаев А.С. Некоторые вопросы акустики эмульсий. *Труды семинара имени И. Г. Петровского*, 2011, том 28, 114–146.

[9] Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M. Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications, 2012.

[10]Muñoz Rivera J. E., Naso M.G., Vegni F.M. Asymptotic behavior of the energy for a class of a weakly dissipative second-order systems with memory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, Vol. 286, 692–704.

[11] Arosio A., Panizzi S. On the well-posedness of the Kirchhoff string. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1996, Vol. 348, 305–330.

[12] Muñoz Rivera J.E, Naso M.G. On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation. *Asymptotic Analysis*, 2006, Vol. 49, 189–204.

[13]Muñoz Rivera J.E., Naso M.G., Vuk E. Asymptotic behavior of the energy for electromagnetic systems with memory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2004, Vol. 27, 819–841.

[14] Fabrizio M., Lazzari B. On the existence and the asymptotic stability of solutions for linearly viscoelastic solids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1991, Vol. 116, 139–152.

подробно проводился в работах[15,16,17,18] В.В. Власова, Д.А. Медведева, Н.А. Раутиан и А.С. Шамаева. Исследование спектральных вопросов для уравнения типа Гуртина–Пипкина при иных предположениях относительно ядра $K(t)$ и при $\theta = 1$ в случае оператора $A = -y''(x)$, $y(0) = y(\pi) = 0$ проводилось также в работе[19] А. Э. Еременко и С.А. Иванова. Наличие параметра $\theta \in [0, 1)$ весьма существенно меняет структуру спектра оператор-функций $L(\lambda)$. При этом появляется ряд новых эффектов по сравнению со случаем $\theta = 1$.

Следует отметить, что при $\theta = 1$ представление решений в виде рядов по экспонентам было получено ранее в работах Н.А. Раутиан[26] и В.В. Власова[20] (см. также монографии[15,16]). В предлагаемой работе представление решений в виде рядов по экспонентам получено для всех $\theta \in [0, 1]$.

Отметим также, что в работах[17,18,21] указанных авторов при $\theta = 1$ была установлена корректная разрешимость задачи (1)–(2) в весовом пространстве Соболева на положительной полуоси. В предлагаемой работе, на основе спектрального анализа установлена корректная разрешимость задачи (1)–(2) в случае, когда параметр θ принадлежит отрезку $[0, 1]$.

Ряд глубоких результатов о корректной разрешимости вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной, а также результатов о спектре соответствующих оператор-функций получен Н.Д. Копачевским и его учени-

[15] Власов В.В., Медведев Д.А., Раутиан Н.А. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. Современные проблемы математики и механики, том VIII, вып. 1, издательство МГУ, 2011, 308 С.

[16] Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений, издательство МАКС Пресс, Москва, 2016, 488 С.

[17] Власов, В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегро-дифференциальных уравнений. *Труды семинара имени И. Г. Петровского*, 2011, том 28, 75–113.

[18] Vlasov V.V., Rautian N.A., Shamaev A. S. Spectral analysis and correct solvability of abstract integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics. *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, Vol. 190, No. 1, 34–65.

[19] Eremento A., Ivanov S. Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2011, Vol. 43, No. 5, 2296–2306.

[20] Vlasov V.V., Rautian N.A. Spectral analysis and representations of solutions of abstract integro-differential equations in Hilbert space. *Operator Theory: Advances and Applications*, 2014. Vol. 236, 517–535.

[21] Власов В.В., Ву Дж., Кабирова Г.Р. Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последействием. *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2010, том 35, 44–59.

ками. Ограничимся здесь указанием работ[22,23,24].

Укажем также работу[25] Л. Пандолфи в которой изучалась задача для уравнения типа Гуртина–Пипкина. Отметим, что в отличие от результатов второй главы диссертации в указанных работах разрешимость изучалась в пространствах, непрерывно дифференцируемых функций на конечном интервале по временной переменной t.

Здесь уместно подчеркнуть, что уравнения вида (1) изучались многими авторами (см., например, монографию[9] и приведенную в ней библиографию, работы[10,12,13] Х.Е. Муньос Ривера и соавторов, работы[18,20,26] В.В. Власова и соавторов и работу[14] М. Фабризио и В. Лаззари). Ограничимся здесь указанием работ Ф.М. Вегни[10], М. Фабризио и В. Лаззари[14], Х.Е. Муньос Ривера[12,13] и соавторов, в которых рассматривался случай $\theta \in [0,1]$. В указанных работах с помощью энергетических функционалов показано, что решение задачи (1)–(2) либо убывает полиномиально[10,13] либо экспоненциально[14] когда время t стремится к $+\infty$. Отметим при этом, что в известных нам работах при $\theta \in [0,1]$, спектральный анализ символов уравнений вида (1) не проводился.

Цель работы. Провести спектральный анализ оператор-функций $L(\lambda)$, являющихся символами уравнений вида (1) в случае, когда $\theta \in [0,1]$. Получить асимптотику комплексной части спектра, в зависимости от свойств ядра рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений. На основании локализации спектра и оценок указанных оператор-функций получить результаты о корректной разрешимости начальных задач для интегро-дифференциальных уравнений вида (1) в случае, когда параметр θ принадлежит отрезку $[0,1]$ и установить результаты о представлении сильных решений интегро-дифференциальных уравнений вида (1) в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра указанных оператор-функций $L(\lambda)$ в случае $\theta \in [0,1]$.

[22]Копачевский Н. Д. Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций.- Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012.

[23]Kopachevsky N. D., Syomkina E. V. Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative. *Eurasian Mathematical Journal*, 2013, Vol. 4, No. 4, 64–87.

[24]Zakora D. A., Abstract linear Volterra second-order integro-differential equations. *Eurasian Mathematical Journal*, 2016, Vol. 7, No. 2, 75–91.

[25]Pandolfi L. The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach. *Applied Mathematics and Optimization*, 2005, Vol. 52, 143–165.

[26]Раутиан Н.А. О структуре и свойствах решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике. *Математические заметки*, 2011, том 90, No. 3, 470–473.

Методы исследования. В работе применяются методы спектральной теории операторов и оператор-функций, методы комплексного анализа, а также методы теории дифференциальных уравнений.

Научная новизна. В диссертации получены новые результаты, которые состоят в следующем:

1) Проведен спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами интегро-дифференциальных уравнений вида (1): установлена общая структура спектра, получены асимптотики вещественной и комплексной частей спектра указанных оператор-функций $L(\lambda)$ в случае, когда $\theta \in [0,1]$. Изучена зависимость локализации спектра от свойств ядра интегрального оператора, входящего в изучаемые уравнения.

2) На основе спектрального анализа получены следующие новые результаты:

   - Теоремы о корректной разрешимости начальных задач в пространствах Соболева вектор-функций на положительной полуоси для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка (1) по временной переменной в случае, когда $\theta \in [0,1]$.
   - Теоремы о представлении сильных решений в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра оператор-функций $L(\lambda)$, являющихся символами изучаемых уравнений.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по спектральной теории операторных пучков (оператор-функций), теории целых и мероморфных функций, теории интегро-дифференциальных уравнений, а также в дальнейших исследованиях ряда математических задач теории управления и задач прикладного характера, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизики.

Апробация работы. Постановки задач и результаты диссертации обсуждались и докладывались на следующих научных семинарах:

- Научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов» кафедры математического анализа Механико-математического факультета МГУ под руководством академика В.А. Садовничего, 2016 г.

- Научный семинар «Операторные модели в математической физике» кафедры теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета МГУ под руководством профессора А.А. Шкаликова, 2014–2017 гг. (неоднократно).

- Научный семинар «Спектральная теория неограниченных операторов в гильбертовом пространстве» кафедры математического анализа Механико-математического факультета МГУ под руководством профессоров В.В. Власова и К.А. Мирзоева, 2016–2017 гг. (неоднократно).

- Научный семинар «Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения» кафедры дифференциальных уравнений и математической физики РУДН под руководством профессора А.Л. Скубачевского, 2014 г.

- Научный семинар «Асимптотические методы в уравнениях математической физики» кафедры дифференциальных уравнений Механико-математического факультета МГУ под руководством профессоров В.В. Жикова, А.С. Шамаева, Т.А. Шапошниковой и Е.В. Радкевича, 2014 г.

- Научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» кафедры теории упругости Механико-математического факультета МГУ под руководством профессоров С.А. Агафонова, Д.В. Георгиевского и М.В. Шамолина, 2015 г.

- Научный семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» кафедры общих проблем управления Механико-математического факультета МГУ под руководством чл.-корр. РАН, профессора М.И. Зеликина, чл.- корр. РАН, профессора В.Ю. Протасова, и профессоров В.М. Тихомирова и А.В. Фурсикова, 2015 г.

- Научный семинар по дифференциальным уравнениям кафедры математического моделирования института автоматики и вычислительной техники (АВТИ) НИУ «МЭИ» под руководством профессоров А.А. Амосова и Ю.А. Дубинского, 2016–2017 гг. (неоднократно).

Результаты диссертации докладывались на следующих Международных и Всероссийских научных конференциях:

- Международная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А. Самарского в связи с 95-летием со дня его рождения (ВМК МГУ, Москва, 2014 г.).

- Международная конференция «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященная 100-летию Б.М. Левитана (МГУ, Москва, 2014 г.).

- Международная конференция «Функциональные пространства и теория приближения функций», посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (МИАН, Москва, 2015 г.).

- Научная конференция «Тихоновские чтения», посвященная памяти академика А.Н. Тихонова. (ВМК МГУ, Москва, 2015 г.).

- 58-ая научная конференция МФТИ «Управление динамическими системами» (ИПМех РАН, Москва, 2015 г.).

- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (ВлГУ, Суздаль, 2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 печатных работах, список которых приведен в конце автореферата [1–11]. Из них 4 в журналах из перечня ВАК [1–4], 2 в электронном arXiv [5, 6] и 5 в сборниках тезисов [7–11].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых, в общей сложности, на 12 параграфов, а также списка литературы из 58 наименований. Общий объем диссертации составляет 123 страницы.

Обзор содержания диссертации

Введем некоторые определения и обозначения, используемые в дальнейшем и приведем формулировки основных результатов диссертации.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Обозначим через $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям a_n: $Ae_n = a_n e_n, n \in \mathbb{N}$.

На положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим начальную задачу (1)–(2) для интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Предполагается, что скалярная функция $K(t)$ допускает представление

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{-\gamma_k t}, \quad k \in \mathbb{N},\ c_k > 0,\ \gamma_{k+1} > \gamma_k > 0,$$

где $\gamma_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Более того, предполагается, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1. \tag{3}$$

Наряду с этим условием, в ряде случаев будет также использоваться условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty. \tag{4}$$

Условие (3) в рассматриваемом случае означает, что ядро $K(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$ и $\|K\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} < 1$. А условия (3) и (4) означают, что ядро $K(t)$ принадлежит скалярному пространству Соболева $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим оператор-функцию

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \widehat{K}(\lambda) A^{2\theta}, \qquad 0 \le \theta \le 1,$$

являющуюся символом (аналогом характеристического полинома) уравнения (1), где $\widehat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}$ является преобразованием Лапласа функции $K(t)$, I — единичный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Первая глава посвящена спектральному анализу интегро-дифференциального уравнения (1) при выполнении условия

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \{\gamma_k (\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty. \tag{5}$$

Рассмотрим сужение оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n:

$$\ell_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n^2\left(1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda+\gamma_k}\right),\ 0 \le \theta \le 1. \qquad (6)$$

При этом предполагается, что собственные значения оператора A удовлетворяют неравенствам $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$, при $a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, где $Ae_n = a_n e_n$. Таким образом, получаем счетный набор мероморфных функций $\ell_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1. Резольвентным множеством $R(\lambda)$ оператор-функции $L(\lambda)$ будем называть множество всех значений $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ существует и ограничена. Дополнение множества $R(\lambda)$ в комплексной плоскости, т. е., $\sigma(L) = \{\mathbb{C} \setminus R(\lambda)\}$, будем называть спектром оператор-функции $L(\lambda)$.

В **первой главе** доказаны следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3) *и* $a_1 \ge 1$. *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *содержится в левой полуплоскости* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$.

Замечание 1. Условие $a_1 \ge 1$ существенно для того, чтобы спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежал в левой полуплоскости. Если $a_j < 1$, $j = 1, \ldots, n$ и выполнено условие (3), то в правой полуплоскости лежит n положительных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3), (4), (5) *и* $a_1 \ge 1$. *Тогда, для каждого фиксированного* $n \in \mathbb{N}$, *множество нулей мероморфной функции* $\ell_n(\lambda)$ *представляет собой объединение счетного множества вещественных нулей* $\{\lambda_{n,k}(\theta) | k \in \mathbb{N}\}$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\cdots - \gamma_k < \lambda_{n,k}(\theta) < \cdots < -\gamma_1 < \lambda_{n,1}(\theta) < 0, \quad и \quad \lim_{n\to+\infty}\lambda_{n,k}(\theta) = -\gamma_k, \qquad (7)$$

а также пары нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta)$, *которые, при достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$, *являются невещественными, комплексно-сопряженными* $\lambda_n^{+}(\theta) = \overline{\lambda_n^{-}}(\theta)$ *и асимптотически представимыми в виде*

$$\lambda_n^{\pm}(\theta) = -\frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k}{a_n^{2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{4-2\theta}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{3-2\theta}}\right)\right), a_n \to +\infty. \qquad (8)$$

Замечание 2. В соотношении (8) подчиненные слагаемые, содержащие символы $O\left(\frac{1}{a_n^k}\right)$ выписаны отдельно для вещественной и мнимой части нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta)$.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 2, спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с замыканием множества нулей $\{\lambda_n^{\pm}(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{n,k}(\theta)\}_{n,k=1}^{\infty,\infty}$ мероморфных функций $\ell_n(\lambda)$, т. е. представи́м в виде*

$$\sigma(L) = \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}(\theta)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\pm}(\theta)\right)}.$$

Распределение точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда ядро $K(t) \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$ и $\theta = 1$ приведено в работах[15,16,17]. Структура спектра в случае, когда ядро $K(t) \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$ и $\theta \in [0,1)$ приведено на рисунке 1. При выполнении условий теоремы 2 при $\theta \in [0,1)$, невещественные части комплексно-сопряженных корней $\lambda_n^{\pm}(\theta)$ асимптотически стремятся к мнимой оси (см. рисунок 1), поскольку их действительные части стремятся к -0, при $n \to +\infty$. В случае $\theta = 1$, невещественные части комплексно-сопряженных корней $\lambda_n^{\pm}(\theta)$, при $n \to +\infty$, асимптотически стремятся к прямой, параллельной мнимой оси, поскольку их действительные части стремятся к отрицательной константе $-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ (подробнее см. работу[17] и гл. 3 монографий[15,16]). Таким образом, при $\theta \in [0,1)$ невещественный спектр оператор-функции $L(\lambda)$ близок к спектру абстрактного волнового уравнения (при $K(t) \equiv 0$).

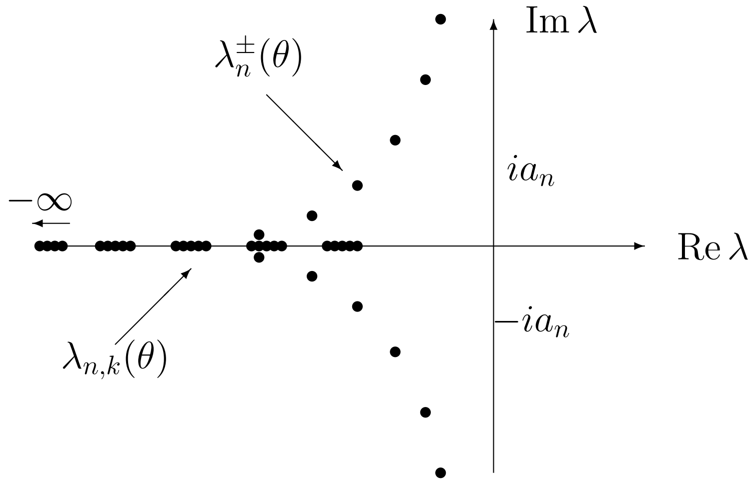

Рис. 1: Структура спектра в случае, когда $K(t) \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим случай ядра $K(t)$, принадлежащего пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$, но не принадлежащего пространству Соболева $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Условие 1. *Предположим, что последовательности* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ *имеют следующее представление*

$$c_k = \frac{\mathcal{A}}{k^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$
$$\gamma_k = \mathcal{B}k^{\beta} + O(k^{\beta-1}), \qquad k \in \mathbb{N}$$

и, при $k \to +\infty$, *они удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1,$$

где константы $\mathcal{A} > 0, \mathcal{B} > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha + \beta > 1$.

Замечание 3. Если выполнено следующее соотношение

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k \approx k^{\beta-1}, \quad k \to +\infty, \tag{9}$$

то при $\beta > 1/2$ справедливо и условие

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty.$$

Замечание 4. Отметим, что, при выполнении **Условия 1**, ядро $K(t)$ будет иметь особенность при $t = 0$, поскольку $K(0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = +\infty$. Следующая теорема представляет асимптотику пары комплексно-сопряженных нулей $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$ в случае, когда не выполнено условие (4).

Теорема 3. *Пусть* $\beta > 1/2$, $a_1 \geq 1$ *и выполнено* **Условие 1**, *а также выполнены условия* (3) *и* (5). *Тогда, для каждого фиксированного* $n \in \mathbb{N}$, *множество нулей мероморфной функции* $\ell_n(\lambda)$ *представляет собой объединение счетного множества вещественных нулей, удовлетворяющих неравенствам* (7), *а также пары нулей* $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$, *которые, при достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$, *являются невещественными, комплексно-сопряженными* $\lambda_n^{+}(\theta, r) = \overline{\lambda_n^{-}}(\theta, r)$ *и асимптотически представимыми, при* $a_n \to +\infty$, *в следующем виде*

$$\lambda_n^{\pm}(\theta, r) = -\frac{\mathcal{A}D_1\mathcal{B}^{r-1}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}} \pm i\left(a_n + \frac{\mathcal{A}D_2\mathcal{B}^{r-1}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{n_2(\theta,r)}}\right), r \in (0, \tfrac{1}{2}) \wedge \theta \in [\tfrac{1}{2}, 1), \tag{10}$$

$$\lambda_n^{\pm}(\theta, r) = -\frac{\mathcal{A}D_1\mathcal{B}^{r-1}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}} \pm i\left(a_n + \frac{\mathcal{A}D_2\mathcal{B}^{1-r}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), r \in (\tfrac{1}{2}, 1) \vee \theta \in (0, \tfrac{1}{2}), \tag{11}$$

$$\lambda_n^{\pm}(\theta, r) = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{A}}{\beta}\frac{\ln a_n}{a_n^{2(1-\theta)}} \pm i a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), \qquad r = 1, \tag{12}$$

где $n_1(\theta,r) := r + 2\left(\frac{1}{2} - \theta\right)$, $n_2(\theta,r) := \min\{2(1-\theta), 2r+3-4\theta\}$, *параметр* $r := \frac{\alpha+\beta-1}{\beta}$, α *и* β *такие, что* $\alpha \in (0,1]$, $\alpha+\beta > 1$, $\mathcal{A} > 0, \mathcal{B} > 0$ *и константы* D_1 *и* D_2 *определяются следующим образом*

$$D_1 := \frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{\sin(\pi r)}, \qquad D_2 := -\frac{\pi}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{\sin(\pi r)}.$$

Замечание 5. При $\theta = 1$, предлагаемая теорема 3 переходит в теорему 3 из работы[17].

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 3, спектр* $\sigma(L)$ *оператор-функции* $L(\lambda)$ *совпадает с замыканием множества нулей* $\{\lambda_n^\pm(\theta,r)\}_{n=1}^\infty$ *и* $\{\lambda_{n,k}(\theta)\}_{n,k=1}^{\infty,\infty}$ *мероморфных функций* $\ell_n(\lambda)$, *т. е. представи́м в виде*

$$\sigma(L) = \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}(\theta)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\lambda_n^\pm(\theta,r)\right)}.$$

Ниже приведен анализ распределения точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда $r \in (0,1)$ и $\theta \in [0,1)$. Случай $\theta = 1$ подробно изучался в работе[17], а также в главе 3 монографий[15,16] вышеупомянутых авторов.

Распределение точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда

$$a)\ r = 1, \theta = 1 \quad \text{и} \quad b)\ r = (0,1), \theta = 1$$

приведено в работах[15,16,17]. Отметим, что случай $\theta \in [0,1)$ существенно отличается от случая $\theta = 1$, поскольку в случае, когда $\theta = 1$, вещественные части нулей $\lambda_n^\pm(\theta,r)$ стремятся только к $-\infty$, при $n \to +\infty$, (подробнее см. работу[17] В.В. Власова и Н.А. Раутиан). В случае $\theta \in [0,1)$ вещественные части нулей $\lambda_n^\pm(\theta,r)$, при $n \to +\infty$, могут стремиться либо к $-\infty$ (см. рисунок 3) либо к 0 (см. рисунок 2) либо к отрицательной константе (см. рисунки 4 и 5). Тем самым, наличие параметра $\theta \in [0,1)$ значительно усложняет структуру невещественного спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Так в случаях 1) и 3) (см. рисунки 2, 4 и 5) структура невещественного спектра оператор-функции $L(\lambda)$ близка к спектру волнового уравнения, а в случае 2) (см. рисунок 3) к спектру абстрактного параболического уравнения.

При выполнении условий теоремы 3, из асимптотических формул (10)–(12) вытекает, что возможны следующие случаи:

1) При

$$a)\ r=1 \text{ и } \theta\in[0,1), \quad b)\ r\in(0,1) \text{ и } \theta=\frac{1}{2}, \theta\in\left(0,\frac{r+1}{2}\right)$$

невещественные части комплексно-сопряженных корней $\lambda_n^{\pm}(\theta,r)$, асимптотически стремятся к мнимой оси (см. рисунок 2), поскольку вещественные части корней $\lambda_n^{\pm}(\theta,r)$, стремятся к -0 при $a_n\to+\infty$.

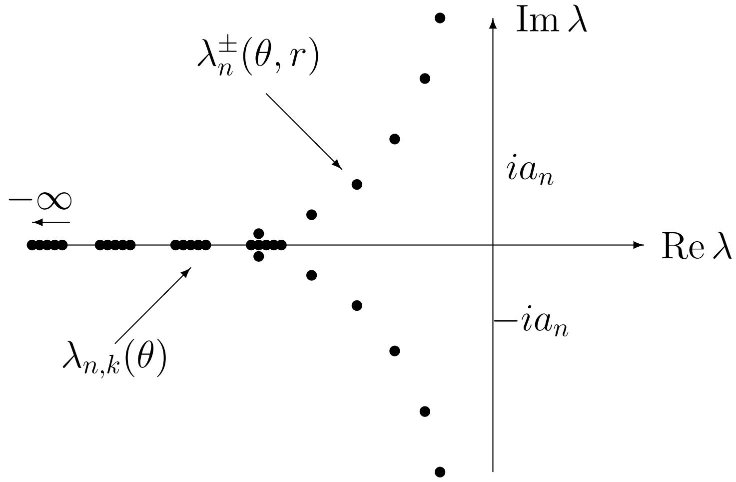

Рис. 2: Структура спектра в случае $K(t)\in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t)\notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

2) Случай $r\in(0,1)$ и $\theta\in(\frac{r+1}{2},1)$, относится к рисунку 3, поскольку $\operatorname{Re}\lambda_n^{\pm}(\theta,r)$ стремятся к $-\infty$ при $a_n\to+\infty$. Действительно, при $r\in(0,1)$ и $\theta\in(\frac{r+1}{2},1)$ верна асимптотическая формула:

$$\operatorname{Re}\lambda_n^{\pm}(\theta,r)=-\frac{\mathcal{A}D_1}{\beta\mathcal{B}^{1-r}}a_n^{2\left(\theta-\frac{r+1}{2}\right)}+O\left(\frac{1}{a_n^{\min\{2(1-\theta),2r+3-4\theta\}}}\right).$$

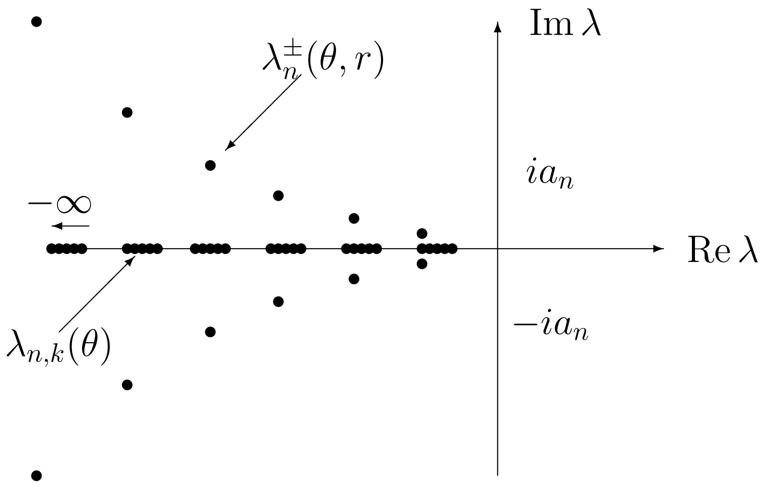

Рис. 3: Структура спектра в случае $K(t)\in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t)\notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

3) При $r \in (0,1)$ и $\theta = \frac{r+1}{2}$, верна следующая асимптотическая формула

$$\operatorname{Re} \lambda_n^{\pm}(r) = -\frac{\mathcal{A} D_1}{\beta \mathcal{B}^{1-r}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1-r}}\right),$$

зависящая только от параметра r. Отсюда, при $a_n \to +\infty$, вещественные части нулей $\lambda_n^{\pm}(r)$ стремятся к отрицательной постоянной ϑ, где $\vartheta := -\frac{\mathcal{A} D_1}{\beta \mathcal{B}^{1-r}}$. Заметим, что при $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$, спектр изображен на рисунке 4, а если $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, то на рисунке 5.

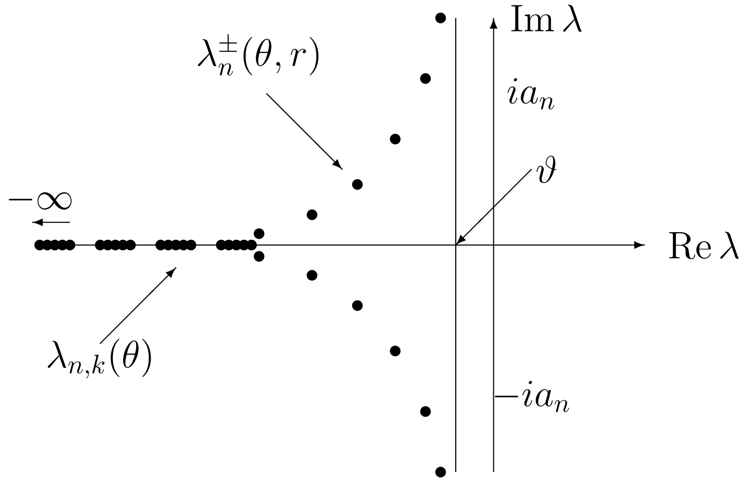

Рис. 4: Структура спектра в случае $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

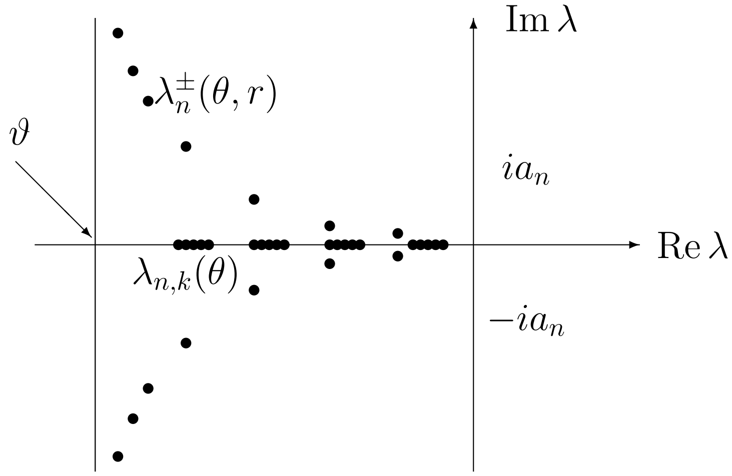

Рис. 5: Структура спектра в случае $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Вторая глава посвящена вопросам корректной разрешимости начальной задачи (1)–(2) в весовых пространствах Соболева.

Введём некоторые определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Превратим область определения $\operatorname{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $\operatorname{Dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^{β}.

Через $W_{2,\gamma}^{m}(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^{m}(\mathbb{R}_+, A^n)} \equiv \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t} \left(\|u^{(m)}(t)\|_H^2 + \|A^n u(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0. \quad (13)$$

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^{m}(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. первую главу монографии Ж.П. Лионса и Э. Мадженеса[27]. При $\gamma = 0$ полагаем $W_{2,0}^{m}(\mathbb{R}_+, A^n) \equiv W_2^m(\mathbb{R}_+, A^n)$, при $n = 0$, $m = 2$ полагаем $W_{2,\gamma}^{2}(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv W_{2,\gamma}^{2}(\mathbb{R}_+)$, а при $m = n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^{0}(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H) := \mathcal{L}_{2,\gamma}$, где через $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ обозначено пространство (классов) измеримых вектор-функций f со значениями в пространстве H, для которых

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} \equiv \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t} \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0.$$

Определение 2. Вектор-функцию u назовем сильным решением начальной задачи (1)–(2), если она принадлежит пространству Соболева $W_{2,\gamma}^{2}(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geq 0$, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальным условиям (2).

Во **второй главе** доказаны следующие результаты:

Теорема 4. *Пусть, для всех $\theta \in [0,1]$ и при некотором $\rho_0 \geq 0$, оператор-функция $A^{2-\theta} f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho_0}(\mathbb{R}_+, H)$. Тогда*

1. *Если выполнены условия* (3) *и* (4), *и $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H_1$ для всех θ, принадлежащих $[0,1]$, то найдется такое $\widetilde{\rho} > \rho_0$, что для любого $\gamma > \widetilde{\rho}$ начальная задача* (1)–(2) *имеет единственное решение $u(t)$, принадлежащее пространству Соболева $W_{2,\gamma}^{2}(\mathbb{R}_+, A^2)$ и для него справедлива следующая оценка*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^{2}(\mathbb{R}_+, A^2)} \leq d \left(\|A^{2-\theta} f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|A^2 \varphi_0\|_H + \|A \varphi_1\|_H \right),$$

с положительной постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

2. *Если выполнено условие* (3), *а условие* (4) *не выполнено* (*т. е., $K(t)$ не принадлежит $W_1^1(\mathbb{R}_+)$*) *и $\varphi_0 \in H_{2+\theta}$, $\varphi_1 \in H_{1+\theta}$ для всех θ, принадлежащих $(0,1]$, то найдется такое $\widetilde{\rho} > \rho_0$, что для любого $\gamma > \widetilde{\rho}$ начальная*

[27]Лионс Ж.П., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. МИР. 1971

задача (1)–(2) *имеет единственное решение* $u(t)$, *принадлежащее пространству Соболева* $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ *и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \le d\left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right),$$

с положительной постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Доказательство теоремы 4 основано на оценках оператор-функций $L^{-1}(\lambda)$ в правой полуплоскости с последующим доказательством того, что преобразования Лапласа вектор-функций $\frac{d^2u(t)}{dt^2}$ и $A^2u(t)$ принадлежат пространству Харди в правой полуплоскости и применением теоремы Пэли–Винера.

В работе[17] В.В. Власова и Н.А. Раутиан установлена корректная разрешимость начальной задачи (1)–(2) в пространстве Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ при $\theta = 1$. В настоящей работе устанавливается корректная разрешимость начальной задачи (1)–(2) в случае $\theta \in [0,1]$. Полученные результаты здесь являются обобщениями результатов, приведенных в работе В.В. Власова и Н.А. Раутиан[17]. Оба результата совпадают при $\theta = 1$.

Приведем результат о корректной разрешимости задачи (1)–(2) в пространстве Соболева $W^2_2((0,T), A^2)$, для любого $T > 0$. Пространство $W^2_2((0,T), A^2)$ снабжено нормой

$$\|u\|_{W^2_2((0,T),A^2)} \equiv \left(\int_0^T \left(\|u^{(2)}(t)\|^2_H + \|A^2u(t)\|^2_H\right) dt\right)^{1/2}.$$

Теорема 5. *Пусть, для всех* $\theta \in [0,1]$, *вектор-функция* $A^{2-\theta}f(t)$ *принадлежит пространству* $L_2((0,T), H)$. *Тогда*

1. *Если выполнены условия пункта 1 теоремы 4, то для произвольного* $T > 0$ *начальная задача* (1)–(2) *имеет единственное решение* $u(t)$, *принадлежащее пространству Соболева* $W^2_2((0,T), A^2)$, *и для него справедлива следующая оценка*

$$\|u\|_{W^2_2((0,T),A^2)} \le d(T)\left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_2((0,T),H)} + \|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H\right),$$

с положительной постоянной $d(T)$, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

2. *Если выполнены условия пункта 2 теоремы 4, то для произвольного* $T > 0$ *начальная задача* (1)–(2) *имеет единственное решение* $u(t)$, *принадлежащее пространству Соболева* $W^2_2((0,T), A^2)$, *и для него справедлива*

следующая оценка

$$\|u\|_{W_2^2((0,T),A^2)} \le d(T)\left(\|A^{2-\theta} f\|_{L_2((0,T),H)} + \|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right),$$

с положительной постоянной $d(T)$, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда*

1. *В случае выполнения условий п. 1) теоремы 5, для решения $u(t)$ будет справедлива оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|A^{3/2}u(t)\|_H + \sup_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}u^{(1)}(t)\|_H \le d_1(T)\left(\|A^{2-\theta} f\|_{\mathcal{L}_2} + \|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H\right),$$

где $\mathcal{L}_2 := L_2((0,T),H)$ и положительная постоянная $d_1(T)$, не зависит от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

2. *В случае выполнения условий п. 2) теоремы 5, для решения $u(t)$ будет справедлива оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|A^{3/2}u(t)\|_H + \sup_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}u^{(1)}(t)\|_H \le d_1(T)\left(\|A^{2-\theta} f\|_{\mathcal{L}_2} + \|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right),$$

где $\mathcal{L}_2 := L_2((0,T),H)$ и положительная постоянная $d_1(T)$, не зависит от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

Третья глава диссертации посвящена представлениям решений начальной задачи (1)–(2) в виде сумм слагаемых, отвечающих точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$ и изучению этих представлений в гильбертовом пространстве H.

В **третьей главе** доказаны следующие результаты.

Теорема 6. *Пусть выполнены условие 1) теоремы 4, условие (5) и $f(t) = 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$. Предположим, что вектор-функция $u(t) \in W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$, для некоторого $\gamma > 0$, является сильным решением начальной задачи (1)–(2). Тогда, для любого $t \in \mathbb{R}_+$ решение $u(t)$ начальной задачи (1)–(2) представимо в виде $u(t) = u_{\mathrm{Re}}(t) + u_{\mathrm{Im}}(t)$, где ряды*

$$u_{\mathrm{Im}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^+\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_n^+ t}}{\ell_n'(\lambda_n^+)} + \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^-\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_n^- t}}{\ell_n'(\lambda_n^-)}\right) e_n, \tag{14}$$

$$u_{\mathrm{Re}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varphi_{1n} + \lambda_{n,k}\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_{n,k} t}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})}\right) e_n, \tag{15}$$

сходятся по норме гильбертова пространства H, $\varphi_{0n} = (\varphi_0, e_n)$ *и* $\varphi_{1n} = (\varphi_1, e_n)$, $\lambda_{n,k}$ *– действительные нули мероморфной функции* (6), *а* $\lambda_n^{\pm}$, *где* $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$, *– пара комплексно-сопряженных корней асимптотически представимых в виде* (8).

Теорема 7. *Пусть* $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ *и выполнены условие* 1) *теоремы 4 и условие* (5). *Предположим, что вектор-функция* $f(t)$ *принадлежит пространству* $C([0,T],H)$ *для любого* $T > 0$. *Тогда, для любого* $t \in \mathbb{R}_+$ *решение* $u(t)$ *начальной задачи* (1)–(2), *представимо в виде*

$$u(t) = w_{\mathrm{Im}}(t) + w_{\mathrm{Re}}(t),$$

где ряды

$$w_{\mathrm{Im}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{f_n(\tau) \mathrm{e}^{\lambda_n^{+}(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^{+})} d\tau + \int_0^t \frac{f_n(\tau) \mathrm{e}^{\lambda_n^{-}(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^{-})} d\tau \right) e_n, \qquad (16)$$

$$w_{\mathrm{Re}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{f_n(\tau) \mathrm{e}^{\lambda_{n,k}(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})} d\tau \right) e_n, \qquad (17)$$

сходятся по норме гильбертова пространства H, $\lambda_{n,k}$ *– вещественные нули мероморфной функции* (6), *а* $\lambda_n^{\pm}$, *где* $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$, *– пара комплексно-сопряженных корней асимптотически представимых в виде* (8).

Замечание 6. Из асимптотики (8) теоремы 2 и случая 1) анализа распределения невещественных точек спектра $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$ оператор-функции $L(\lambda)$ (см. стр. 13, а также приведенный там рисунок 2) немедленно вытекает, что решение начальной задачи (1)–(2) не может убывать экспоненциально.

Представления (14)–(15) и (16)–(17) получены в результате применения преобразования Лапласа и его обращения для решения задачи (1)–(2), с использованием интегрирования по прямоугольным контурам, разделяющим точки $-\gamma_k$ (для построения этих контуров используется конструкция, схожая с приведённой в главе 3 монографий[15,16] В. В. Власова, Н.А. Раутиан и Д.А. Медведева). Существенную роль при этом играют оценки оператор-функции $L(\lambda)$ на указанных контурах.

При $\theta = 1$ теоремы 6 и 7 изложены в работе Н.А. Раутиан[26], а также в монографиях[15,16] В.В. Власова, Н.А. Раутиан и Д.А. Медведева.

Заключение

В диссертации установлена общая структура спектра оператор-функций $L(\lambda)$, являющихся символами интегро-дифференциальных уравнений вида (1), получены асимптотики вещественной и комплексной частей спектра указанных оператор-функций $L(\lambda)$ в случае, когда параметр θ принадлежит отрезку $[0, 1]$. Изучена зависимость локализации спектра от свойств ядра $K(t)$ интегрального оператора, входящего в изучаемые уравнения.

На основе спектрального анализа получены следующие новые результаты:

1. Теоремы о корректной разрешимости начальных задач в пространствах Соболева вектор-функций на положительной полуоси для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка (1) по временной переменной в случае, когда $\theta \in [0, 1]$.

2. Теоремы о представлении сильных решений в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра оператор-функций $L(\lambda)$, являющихся символами изучаемых уравнений.

Полученные в диссертации результаты имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по спектральной теории операторных пучков (оператор-функций), теории целых и мероморфных функций, теории интегро-дифференциальных уравнений, а также в дальнейших исследованиях ряда математических задач теории управления и задач прикладного характера, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизики.

На наш взгляд перспективными направлениями для дальнейших исследований по тематике диссертации являются:

1. Распространение, полученных в первой главе результатов, о локализации и структуре спектров соответствующих оператор-функций на случай более общих ядер интегральных операторов в уравнении вида (1) с целью расширения круга исследования задач, возникающих в приложениях, приводящих к задачам вида (1)–(2).

2. Использование результатов, полученных в первой главе, о локализации и структуре спектров оператор-функций, являющихся символами изучаемых уравнений для исследования спектров и резольвент генераторов

полугрупп сдвигов вдоль траекторий решений изучаемых уравнений вида (1)–(2), а также исследование геометрических свойств экспоненциальных решений (полнота, минимальность, базисность) с использованием результатов из обстоятельного обзора[28] А. А. Шкаликова.

3. Получение результатов о корректной разрешимости начальной задачи вида (1)–(2) в различных функциональных пространствах и при разном понимании решений (сильное решение, обобщенное решение, слабое решение и т. д.).

4. Дальнейшее исследование разложений решений уравнения (1) в ряды, полученных в третьей главе, с целью изучения их сходимости в различных функциональных пространствах и, на этой основе получение более полной и детальной информации об асимптотическом поведении решений уравнений вида (1).

Благодарности. Автор глубоко благодарен своему научному руководителю профессору Виктору Валентиновичу Власову за постановку задач, постоянное внимание к работе, за многочисленные обсуждения и ценные рекомендации, а также доценту Надежде Александровне Раутиан за полезные замечания и предложения.

Автор выражает глубокую благодарность участникам семинара под руководством профессора А. А. Шкаликова за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта Мексиканского центра экономических и социальных исследований (CEMEES).

[28] Шкаликов А. А. Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром. *Успехи математических наук*, 2016, том 71, вып. 5 (431), 113–174.

Публикации автора по теме диссертации

Из официального перечня ВАК.

1. Перез Ортиз Р., Власов В. В. Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике. *Математические заметки*, 2015, том 98, No. 4, 630–634. (Автору диссертации принадлежат теоремы 2 и 3).

2. Перез Ортиз Р. Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра. *Труды МФТИ*, 2015, том 7, No. 2, 27–38.

3. Perez Ortiz R., Vlasov V. V. Correct solvability of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (EJQTDE)* 2016, No. 31, 1–17. (Автору диссертации принадлежит теорема 2.2).

4. Перез Ортиз Р., Раутиан Н. А. Представление решений интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра. *Дифференциальные уравнения*, 2017, том 53, No. 1, 140–144. (Автору диссертации принадлежат теоремы 3 и 5).

Прочие работы.

5. Perez Ortiz R., Vlasov V. V. Spectra of the Gurtin-Pipkin type equations with the kernel, depending on the parameter//arXiv:1403.4382 [27 pp.]. (Автору диссертации принадлежат теоремы 2.2 и 2.3).

6. Perez Ortiz R., Vlasov V. V. Correct solvability of hyperbolic Volterra equations with kernels depending on the parameter//arXiv:1412.1067 [18 pp.]. (Автору диссертации принадлежит теорема 2.1).

7. Перез Ортиз Р., Власов В. В. Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве//Международная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А. А. Самарского в связи с 95-летием со дня его

рождения, г. Москва, ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова: 2014, С. 129–130.

8. Перез Ортиз Р., Власов В. В., Раутиан Н. А. Исследование интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в задачах теплопроводности с памятью и вязкоупругости//Международная конференция «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященная 100-летию Б. М. Левитана, г. Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова: 2014, С. 67.

9. Перез Ортиз Р. Представление решений одного класса интегро-дифференциалных уравнений с операторными коэффициентами//Международная конференция «Функциональные пространства и теория приближения функций», посвященная 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского, г. Москва, МИАН: 2015, С. 197–198.

10. Перез Ортиз Р., Власов В. В. Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра//Научная конференция «Тихоновские чтения», посвященная памяти академика А. Н. Тихонова, г. Москва, ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова: 2015, С. 91.

11. Перез Ортиз Р. Представление решений вольтерровых уравнений с ядрами зависящими от параметра//Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, г. Суздаль, ВлГУ: 2016, С. 158–159.

Все результаты совместных публикаций [1, 3, 4, 5, 6], включенные в диссертацию, получены лично Перезом Ортизом Ромео.