ОТЗЫВ

Научного руководителя на диссертацию Переза Ортиза Ромео "Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в задачах наследственной механики и теплофизики" по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Основной целью диссертационной работы Р. Переза Ортиза является систематическое исследование вопросов теории интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Диссертация посвящена спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве. На основании локализации спектра и оценок указанных оператор-функций установлена корректная разрешимость начальных задач для упомянутых интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра $\theta \in [0,1]$ в весовых пространствах Соболева, определенных на положительной полуоси, а также установлены представления сильных решений таких интегро-дифференциальных уравнений в виде слагаемых, отвечающих точкам спектра, соответствующих оператор-функций.

В диссертации изучается следующая задача для интегро-дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K(t-s)A^{2\theta}u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0,1] \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \tag{2}$$

где A — самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Ядро $K(t)$ интегрального оператора допускает представление

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{-\gamma_k t} \tag{3}$$

где $c_k > 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ и предполагается, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1. \tag{4}$$

Наряду с этим условием, в ряде случаев также предполагается, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty. \tag{5}$$

Тематика диссертации Р. Переза Ортиза является весьма актуальной. К исследованию задачи вида (1)–(2) приводят многочисленные задачи, возникающие в приложениях.

Уравнение (1) является операторной моделью интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина, описывающего процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью (в отличие от классической модели, описываемой законом Фурье). При этом оператор A реализуется следуюшим образом: $A^2 = -\Delta y$ или $A = -\Delta y$ с условием Дирихле в ограниченной области с достаточно гладкой границей. Исследованию подобных уравнений посвящено немало работ. Ограничимся здесь указанием работ М.Е. Гуртина, А.С. Пипкина[1] и Л. Пандолфи[2].

В свою очередь к уравнению вида (1) приводят задачи математической теории распространения волн в средах с памятью. Изучению данных вопросов посвящена обширная литература. Ограничимся здесь указанием монографии А.А. Локшина и Ю.В. Суворовой "Математическая теория распространения волн в средах с памятью" (там же см. соответствующую библиографию). К уравнению вида (1) могут быть приведены и многочисленные задачи теории вязкоупругости (см. монографии Р. Кристенсена[3] и А.А. Ильюшина, Б.Е. Победри[4]).

Наконец исследование процесса распространения звука в пористых (перфорированных) средах естественно приводит к изучению интегро-дифференциальных уравнений, которые могут быть приведены к виду (1) (закон Дарси) (см. работу Д.А. Космодемьянского и А.С. Шамаева[5]).

Весьма актуальным является спектральный анализ оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом уравнения (1), который позволяет исследовать структуру и качественные свойства решений интегро-дифференциального уравнения (1). Оператор

---

[1]Gurtin M. E., Pipkin A. C. A General theory of heat conduction with finite wave speeds. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, Vol. 31, No. 2, 113–126.

[2]Pandolfi L. The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach. *Applied Mathematics and Optimization*, 2005, Vol. 52, 143–165.

[3]Кристенсен П. Введение в теорию вязкоупругости// М., Мир, 1974.

[4]Ильюшина А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории вязкоупругости// М., Наука, 1970, 280 С.

[5]Космодемьянский Д.А., Шамаев А.С. О некоторых спектральных задачах в пористых средах, насыщенных жидкостью//Современная математика. Фундаментальные направления, 2006, 17, 88-109.

функция имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \widehat{K}(\lambda) A^{2\theta} \tag{6}$$

где оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1), а $\widehat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа ядра $K(t)$, I – единичный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Наконец, полученные результаты об асимптотике спектра операто-функции $L(\lambda)$ позволяют получить представления решений указанных уравнений в виде радов по экспонентам, отвечающим точкам спектра этой оператор-функции.

В диссертации Р. Переза Ортиза получены новые результаты, которые состоят в следующем:

1) Проведен спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами интегро-дифференциальных уравнений вида (1): установлена общая структура спектра, получены асимптотики вещественной и комплексной частей спектра указанных оператор-функций $L(\lambda)$ в случае, когда $\theta \in [0, 1]$. Изучена зависимость локализации спектра от свойств ядра интегрального оператора, входящего в изучаемые уравнения.

2) На основе спектрального анализа получены следующие новые результаты:

   - Теоремы о корректной разрешимости начальных задач в пространствах Соболева вектор-функций на положительной полуоси для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка (1) по временной переменной в случае, когда $\theta \in [0, 1]$.
   - Теоремы о представлении сильных решений в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра оператор-функций $L(\lambda)$, являющихся символами изучаемых уравнений.

В работе применяются методы спектральной теории операторов и оператор-функций, методы комплексного анализа, а также методы теории дифференциальных уравнений. Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по спектральной теории операторных пучков (оператор-функций), теории интегро-дифференциальных уравнений, а также в дальнейших исследованиях ряда математических задач теории управления и задач прикладного характера, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизики.

Таким образом, в работе Р. Переза Ортиза получены новые результаты, представляющие несомненный научный интерес. В процессе работы над диссертацией преодолены немалые трудности как технического так и идейного характера.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация Р. Переза Ортиза удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым как кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01,
профессор кафедры математического анализа
Механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова»
тел. +7 (495) 939-18-01
электронная почта: vicvvlasov@rambler.ru

Власов Виктор Валентинович
03.04.2017

Подпись профессора В. В. Власова заверяю
И. о. декана Механико-математического факультета МГУ,
доктор физико-математических наук
профессор

Чубариков Владимир Николаевич