ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

ГУСАК Юлия Валерьевна

Стохастические модели перестрахования и их оптимизация

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей
механико–математического факультета ФГБОУ ВО
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Булинская Екатерина Вадимовна.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Рыков Владимир Васильевич,
профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
ФГБОУ ВО «Российский государственный университет нефти и газа (НИУ)
имени И.М. Губкина»;

кандидат физико-математических наук,
Румянцев Александр Сергеевич,
научный сотрудник лаборатории телекоммуникационных систем
ФГБУН «Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук».

Ведущая организация:
ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН».

Защита диссертации состоится «23» июня 2017 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП–1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
(Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, $8^{й}$ этаж),
и на сайте http://mech.math.msu.ru/~snark/index.cgi.

Автореферат разослан «   » мая 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физико–математических наук, профессор — Власов Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность и история вопроса

Страхование является неотъемлемой частью современного мира, причем потребность в нем возрастает с развитием экономики и социальной структуры общества. К факторам, стимулирующим рост страхового дела можно отнести следующие события. Это увеличение предпринимательских рисков, возникающее в связи с усложнением хозяйственных связей, особенно в сфере финансовых рынков. Это новые риски, порождаемые научно-техническим прогрессом и требующие разработки специального аппарата управления. К списку факторов можно также отнести увеличение частоты стихийных бедствий и рост продолжительности жизни в развитых странах, влекущий развитие медицинского и пенсионного страхования. Важно упомянуть и повышение вероятности возникновения зависимых рисков, которые образуются в силу уплотнения при размещении объектов производства, жилья, исторических памятников. Согласно определению из книги Булинской[1],

Страхование — операция, посредством которой одна из сторон (страхователь), внося определенную сумму денег (премию или страховой взнос), обеспечивает себе или третьему лицу (выгодоприобретатель) при осуществлении риска (т.е. наступлении страхового случая) выплату возмещения другой стороной (страховщиком), принимающим на себя целый ансамбль рисков, которые он компенсирует в соответствии с законами теории вероятностей.

Возмещая ущерб одной финансовой организации, страховщик тем самым обеспечивает бесперебойную работу целого рыночного сектора, частью которого является застрахованная сторона. Более того, аккумулируя поступающие премии, страховая компания превращает их в инвестиционный капитал, стимулирующий развитие экономики. Имущественное, гражданское и медицинское страхование защищает физических лиц от крупных потерь, способствуя увеличению их платежеспособности. Таким образом, деятельность страховых компаний значительно влияет на состояние экономической и социальной сфер общества. Следовательно, важно осуществлять грамотное управление компанией, чтобы не допустить возникновения кризисной ситуации на рынке. В свете вышесказанного актуальность развития математического аппарата для анализа страховых моделей очевидна.

Первостепенной задачей страховой компании является удовлетворение требований полисодержателей. Производя выплаты по страховым случаям, компания рискует обанкротиться, так как размер иска, имеющего случайную природу, может превысить собственный капитал страховщика. В связи с этим на протяжении уже более ста лет исследование

[1] Булинская Е.В. (2008). *Теория риска и перестрахование.* Изд-во ООО "МЭЙЛЕР" , Москва. 190 с.

вероятности разорения является одной из основных задач актуарной математики (см. книгу Asmussen and Albrecher[2]). Начиная с работы Lundberg[3], в которой было предложено описывать процесс поступающих требований с помощью пуассоновского потока, было написано немало статей, рассматривающих работу страховой компании в непрерывном времени. В классической модели Крамера-Лундеберга[4] капитал компании U_t в момент t удовлетворяет следующему уравнению

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

где X_i — величина i-го поступившего требования, u — начальный капитал, $c > 0$ — приход страховых премий в единицу времени, N_t — число требований, поступивших за время t. Данная модель и ее различные модификации до сих пор являются популярными объектами исследования.

Будучи финансовой корпорацией, страховая компания обладает рисками, связанными с выплатами дивидендов своим акционерам. Первые значительные результаты, связанные с изучением подобных рисков, были получены de Finetti[5]. Данное направление исследований является актуальным и по сей день, большое количество работ, посвященное этой тематике, описывает функционирование компании в непрерывном времени. Сегодня рынки финансовых и страховых услуг тесно взаимодействуют друг с другом[6]. Банки торгуют страховыми и перестраховыми контрактами, в то время как страховые компании интересуются возможностями, связанными с инвестированием и вливанием капитала. К статьям по данной тематике можно отнести Dickson and Waters[7], Gerber et al.[8], Beveridge et al.[9], Kulenko and Schmidli[10], Eisenberg and Schmidli[11].

---

[2] Asmussen S., Albrecher H. (2010). *Ruin Probabilities.* World Scientific, 602 p.

[3] Lundberg F. (1903). *Approximations of the probability function / Reinsurance of Collective Risks.* Doctoral thesis.

[4] Cramér H. (1930). *On the mathematical theory of risk, Försäkringsaktiebolaget.* Skandia, Stockholm, 2, pp. 7–84.

[5] de Finetti B. (1957). *Su un' impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio.* Transactions of the XVth International Congress of Actuaries, 2, pp. 433–443.

[6] Yang H., Gao W. and Li J. (2016). *Asymptotic ruin probabilities for a discrete-time risk model with dependent insurance and financial risks.* Scandinavian Actuarial Journal, 1, pp. 1–17.

[7] Dickson D. C.M., Waters H.R. (2004). *Some optimal dividends problems.* Astin Bulletin, 34, pp. 49–74.

[8] Gerber H.U., Shiu E.S.W. and Smith N. (2006). *Maximizing dividends without bankruptcy.* Astin Bulletin, 36, pp. 5–23.

[9] Beveridge C.J., Dickson D.C.M. and Wu X. (2008). *Optimal Dividends under Reinsurance.* Mitteilungen der Schweiz Aktuarvereinigung, Heft 2008.

[10] Kulenko N., Schmidli H. (2008). *Optimal dividend strategies in a Cramer-Lundberg model with capital injections.* Insurance: Mathematics and Economics, 43, pp. 270–278.

[11] Eisenberg J., Schmidli H. (2009). *Optimal control of capital injections by reinsurance in a diffusion approximation.* Blatter der DGVFM, 30(1), pp. 1–13.

Несмотря на то, что подавляющее число статей по страховой математике рассматривают модели с непрерывным временем, на практике многие события, будь то решение о выплате дивидендов или заключением договора перестрахования, происходят в конце финансового года, то есть в детерминированные моменты времени. Поэтому изучение моделей страхования в дискретном времени представляется разумным и необходимым в сегодняшние дни. Dickson and Waters[12] предъявили способ дискретизации модели Крамера-Лундберга, обосновав переход к дискретному времени. Gerber[13] предложил рассматривать составную биномиальную модель в качестве аналога составной пуассоновской модели. Согласно этой модели капитал компании U_n в момент n удовлетворяет следующему уравнению

$$U_n = u + cn - \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где X_i — совокупные требования за i-ый промежуток времени. Публикации Li et al.[14], Castañer et al.[15], Булинская[16] [17] посвящены изучению моделей страхования в дискретном времени. Рассматриваемые в данной диссертации модели страхования являются дискретными.

Как было замечено выше, сбои в работе страховой компании, вызванные нехваткой средств для возмещение убытков, могут привести к ее банкротству. Чтобы избежать подобной участи страховщик использует различные инструменты для стабилизации работы компании. Одним из основных является перестрахование. В книге Булинской[1] дано следующее определение.

Перестрахование — операция, посредством которой одна сторона (перестрахователь или цедент), выплачивая некоторую сумму (премию перестрахования) другой стороне (перестраховщику), передает ей тем самым часть принятого на гарантию риска, то есть обеспечивает выплату ею определенной части возникающего ущерба.

Далее, используя термин *страховщик*, будем иметь в виду страховую компанию, выступающую в роли цедента и заключающую договор перестрахования.

Перестрахование может быть факультативным и обязательным. Последнее подразуме-

[12] Dickson D.C.M., Waters H.R. (1991). *Recursive calculations of survival probabilities.* Astin Bulletin, 21(2), с. 199-221.

[13] Gerber H.U. (1988). *Mathematical fun with compound binomial model.* Astin Bulletin, 18(2), с. 161-168.

[14] Li Sh., Lu Y. and Garrido J. (2009). *A review of discrete-time risk models.* Rev. R. Acad. Cien, Serie A. Mat., 103(2), pp. 321–337.

[15] Castañer A., Claramunt M.M., Gathy M., Lefèvre C. and Mármol M. (2013). *Ruin problems for a discrete-time risk model with non-homogeneous conditions.* Scandinavian Actuarial Journal, 2, pp. 83–102.

[16] Булинская Е.В. (2003). *О стоимостном подходе в страховании.* Обозрение прикладной и промышленной математики, 10(2), с. 276–286.

[17] Bulinskaya E. (2010). *Stochastic Insurance Models: Their Optimality and Stability.* Christos H. Skiadas, ed., Advances in Data Analysis. Birkhäuser, pp.129–140.

вает, что цедент и перестраховщик заключают договор, согласно которому при наступлении страхового случая обе стороны обязаны выполнить обязательства, прописанные в соглашении. Обязательное перестрахование делится на пропорциональное и непропорциональное. Наиболее часто встречающийся на практике пример пропорционального договора — квотный, непропорционального — эксцедентный.

Пусть X — величина поступивших требований; $R(X) \in [0, X]$ — сумма, перешедшая под ответственность перестраховщика; $I(X, R) = X - R(X)$ — риск, удерживаемый страховщиком; π_{re} — премии, отдаваемые в перестрахование.

Если заключен *квотный договор* перестрахования, то при поступлении совокупных требований размера X страховщик выплачивает величину $I(X, R) = \beta X$, а риск в размере $R(X) = (1 - \beta)X$ передает перестраховщику, где $\beta \in (0, 1)$. В случае *эксцедентного договора* страховщик покрывает риск в размере $I(X, R) = \min(X, B)$ и передает перестраховщику $R(X) = (X - B)^+$, параметр $B > 0$ называется *уровнем собственного удержания*.

В данной диссертации будут рассматриваться эти виды перестрахования. Более подробную классификацию существующих договоров можно найти в книге Булинской[1].

Одной из важнейших задач актуарной математики является выбор наилучшей программы перестрахования. В силу разнообразия страховых моделей не существует универсального решения, поэтому поиск оптимального перестрахования остается актуальной задачей уже более пятидесяти лет. К первым исследованиям в данной области можно отнести работу Borch[18]. С практической точки зрения, перестрахование — эффективная мера управления риском, поэтому страховые компании заинтересованы в изучении новых стратегий перестрахования. С теоретической точки зрения, поиск оптимального перестрахования подразумевает постановку и решение задач оптимального управления. Перечисленные выше причины способствуют появлению новых интересных подходов к изучению оптимального перестрахования.

Модели перестрахования можно классифицировать по нескольким признакам. Во-первых, все модели делятся на одношаговые и многошаговые. То есть можно рассматривать перестрахование рисков, возникающих как за единичный промежуток времени, так и за последовательности промежутков.

Во-вторых, в зависимости от того, применяется перестрахование к каждому отдельно взятому риску или сразу к совокупности (сумме) рисков, все модели можно разделить, соответственно, на локальные и глобальные. То есть в глобальных моделях нам достаточно знать только распределение совокупных рисков, в то время как в локальных необходима информация о совместном распределении всех рисков. Большинство работ по оптимальному перестрахованию рассматривает глобальные модели.

[18] Borch K. (1960). *An attempt to determine the optimum amount of stop loss reinsurance.* Transactions of the 16th International Congress of Actuaries, pp. 597–610.

И в-третьих, оптимизация может производится только в интересах страховщика или же затрагивать интересы обеих сторон.

Для формулировки задачи оптимального перестрахования необходимо сделать предположение о: 1) критерии оптимизации, выбрав ту или иную меру риска, 2) принципе подсчета перестраховочной премии.

Перечислим критерии, которые широко используются в качестве оптимизационных в моделях перестрахования, учитывающих интересы страховщика. Для каждого критерия приведем основные результаты, описывающие вид оптимального договора в глобальных моделях перестрахования. Итак, применяются следующие критерии.

1) Минимизация дисперсии удерживаемого риска страховщика, то есть минимизация величины $\mathbb{D}(I(X,R))$. Для моделей с данным критерием оптимизации Borch[18] показал, что эксцедентный договор перестрахования является оптимальным, когда премии перестрахования подсчитываются по принципу среднего, то есть когда $\pi_{re} = m\mathbb{E}R(X)$, где $m > 1$ — коэффициент нагрузки на премии. Kaluszka[19] обобщил результаты, полученные Borch, на более широкий класс премий. Beard et al.[20] показали, что квотный договор является оптимальным в том смысле, что это наиболее экономный способ добиться того, чтобы дисперсия удерживаемого риска имела заданный уровень, когда коэффициент нагрузки на премии увеличивается одновременно с дисперсией риска, передаваемого в перестрахование.

2) Максимизация ожидаемой полезности страховщика, то есть максимизация величины $\mathbb{E}w(u - I(X,R) - \pi_{re})$, где w — неубывающая выпуклая вверх функция (функция полезности), u — начальный капитал. Arrow[21] показал, что эксцедентный договор перестрахования является оптимальным, когда премии, отдаваемые в перестрахование, подсчитываются по принципу среднего. Young[22] обобщила результат Arrow предположив, что премии рассчитываются согласно принципу Ванга[23], то есть $\pi_{re} = \int_0^\infty \mathbb{P}(R(X) \geq t)^p \, dt, \ 0 < p < 1$.

3) Также в литературе широко изучаются модели, в которых страховщик стремится минимизировать некоторый (выпуклый вниз) функционал от удерживаемого риска. Отметим, что множество моделей, минимизирующих дисперсию, есть подмножество моделей, максимизирующих ожидаемую полезность, которые, в свою очередь, являются подмно-

[19] Kaluszka M. (2001). *Optimal reinsurance under mean-variance premium principles.* Insurance: Mathematics and Economics, 28, pp. 61–67.

[20] Beard R.E., Pentikainen T. and Pesonen E. (1977). *Risk Theory*, 2nd Edition. Chaman and Hall, London.

[21] Arrow K.J. (1963). *Uncertainty and the welfare of medical care.* The American Economic Review, Volume 53, Issue 5, pp. 941–973.

[22] Young V.R. (1999) *Optimal insurance under Wang's premium principle.* Insurance: Mathematics and Economics, 25, pp. 109–122.

[23] Wang Sh. (1996). *Premium calculation by transforming the layer premium density.* Astin Bulletin, 26, pp. 71–92.

жеством моделей, минимизирующих меру риска. Kaluszka and Okolewski[24] показали, что договоры, являющиеся модификацией эксцедентного, оптимальны при многих критериях оптимизации, включая максимизацию ожидаемой полезности и минимизацию вероятности разорения цедента.

4) Минимизация вероятности разорения страховщикаи, то есть минимизация функции $\psi(u) = P(\tau < \infty | U_0 = u)$, где $\tau = \min\{n > 0 | U_n < 0\}$ — момент разорения компании.

В связи с ростом разнообразия страховых и финансовых инструментов, появляются новые критерии оптимизации, требующие математического описания. В статье Булинской[16] впервые было предложено использовать в качестве меры риска издержки, возникающие при функционировании страховой компании, причем был рассмотрен случай дискретного времени. Стоимостной подход также был использован в Bulinskaya[17], и тоже для дискретного времени. В настоящей диссертации применяется критерий минимизации вливаний капитала (дополнительных издержек).

Еще одной важной задачей актуарной математики является определение оптимальных параметров договора перестрахования в предположении, что тип договора известен. Например, de Finetti[25] рассмотрел квотное перестрахование n независимых рисков в глобальной модели, где в качестве оптимизационного критерия применяется минимизация дисперсии удерживаемого риска в предположении, что ожидаемая прибыль цедента равна некоторой константе. Он получил оптимальные значения доли удерживаемых рисков для каждого из n договоров. Bühlmann[26] рассмотрел аналогичную задачу для эксцедентного договора перестрахования полагая, что каждый риск имеет составное пуассоновское распределение.

В настоящей диссертации исследуются многошаговые модели страхования в дискретном времени, минимизирующие вливания капитала путем выбора оптимальных параметров эксцедентного перестрахования. В литературе многошаговые модели рассматривались в основном в предположении о непрерывности времени. Shmidli[27] исследовал стратегию пропорционального перестрахования в непрерывном времени в классической модели Крамера-Лундберга, минимизирующую вероятность разорения страховщика. Он не нашел явный вид оптимальной стратегии перестрахования, но описал ее свойства и соответствующие свойства вероятности разорения. Он также показал, что если начальный капитал компании достаточно мал, наилучшей стратегией для страховщика является отказ от перестрахования. Shael[28] также изучал стратегию пропорционального перестрахования, но

[24] Kaluszka M., Okolewski A. (2008) *An extension of Arrow's result on optimal reinsurance contract.* The Journal of Risk and Insurance, Volume 75, Issue 2, pp. 275–288.

[25] de Finetti B. (1940). *Il problema dei "pieni".* Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 11, pp. 1–88.

[26] Bühlmann H. (1979). *Mathematical methods in risk theory.* Springer–Verlag, New York.

[27] Shmidli H. (2001). *On optimal reinsurance policies in a dynamic setting.* Scandinavian Actuarial Journal, 1, pp. 55–68.

[28] Shael M. (2004). *On discrete-time dynamic programming in insurance: exponential utility and minimizing*

в отличие от Shmidli, рассматривал модель в дискретном времени. В качестве критерия оптимизации он использовал как максимизацию ожидаемой полезности, так и минимизацию вероятности разорения страховщика. Ему не удалось вывести явный вид оптимальной стратегии, но он смог найти условия, при которых отказ от перестрахования есть наиболее выгодное поведение страховой компании. После Shael поиском оптимального квотного перестрахования в дискретном времени, минимизирующего вероятность разорения страховщика, занимались Irgens and Paulsen[29], Chan and Zang[30], Wei and Hu[31], Diasparra and Romera[32]. Li and Cong[33] решали подобную задачу на конечном промежутке времени. Им удалось вывести необходимые условия существования оптимальной стратегии пропорционального перестрахования в многошаговой модели и доказать, что принцип динамического программирования может быть использован в задаче минимизации вероятности разорения. Eisenberg and Shmidli[11] рассматривали модель с непрерывным временем, где помимо пропорционального перестрахования используется и вливание капитала. Критерий оптимизации заключался в минимизации дополнительных вливаний. Используя принцип динамического программирования, им удалось найти явный вид оптимальной стратегии перестрахования.

Наряду с моделями, использующими эксцедентное перестрахование, в данной диссертации рассматривается модель функционирования страховой компании при наличии комбинированного договора перестрахования. Оптимизируются параметры договора, являющегося комбинацией пропорционального и непропорционального перестрахования. Мотивацией для исследования подобной модели является ее широкая применимость на практике и существование теоретических результатов, доказывающих оптимальность комбинированных программ перестрахования для некоторых критериев оптимизации. Например, Kaluszka [19] [34] для довольно широкого класса премий и критерия минимизации дисперсии получил, что оптимальным договором перестрахования является комбинация эксцедентного и квотного перестрахования. В отличие от Kaluszka, мы рассматриваем критерий минимизации ожидаемых дополнительных издержек и устанавливаем для него оптимальь-

the ruin probability. Scandinavian Actuarial Journal, 3, pp. 189–210.

[29] Irgens C., Paulsen J. (2005). *Maximizing terminal utility by controlling risk exposure: a discrete-time dynamic control approach.* Scandinavian Actuarial Journal, 2, pp. 269–279.

[30] Chan W., Zhang L. (2006). *Direct derivation of finite-time ruin probabilities in the discrete risk model with exponential or geometric claims.* North American Actuarial Journal, 10(4), pp. 269–279.

[31] Wei X., Hu Y. (2006). *Ruin probabilities for discrete-time risk models with stochastic rates of interest.* Stochastic and Probability Letters, 78, pp. 707–715.

[32] Diasparra M., Romera R. (2010). *Inequalities for the ruin probability in a controlled discrete-time risk process.* European Journal of Operational Research, 204, pp. 496–504.

[33] Li Z.F., Cong J.F. (2008). *Necessary conditions of the optimal multi-period proportional reinsurance strategy.* Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 28(11), pp.1354–1362.

[34] Kaluszka M. (2005). *Optimal reinsurance under convex principles of premium calculation.* Insurance: Mathematics and Economics, 36, pp. 375–398.

ную стратегию комбинированного перестрахования.

Из приведенного выше обзора литературы видно, что оптимальный вид договора перестрахования сильно зависит от выбранного критерия оптимизации и принципа подсчета премий. При этом нахождение явного вида параметров перестрахования является нетривиальной задачей, которая не имеет общего решения для всех критериев оптимизации.

Цели работы

Целями диссертационной работы являются:

- Исследование различных моделей страхования в дискретном времени при наличии непропорционального перестрахования. Нахождение стратегий перестрахования, минимизирующих ожидаемые дисконтированные дополнительные издержки, идущие на поддержание работы страховой компании. Изучение чувствительности оптимальной стратегии к флуктуациям параметров модели.

- Оценка устойчивости модели оптимального перестрахования по отношению к малым возмущениям в распределениях страховых требований. Исследование предельного поведения капитала страховщика при использовании стратегии оптимального вида.

- Нахождение оптимального договора перестрахования, минимизирующего издержки страховщика, для моделей страхования, использующих комбинированные договоры перестрахования.

Научная новизна работы

Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми. Получены следующие основные результаты.

- Для многошаговой модели страхования с вливанием капитала и эксцедентным перестрахованием найдена оптимальная стратегия перестрахования, минимизирующая ожидаемые дисконтированные вливания капитала. Доказана устойчивость минимальных вливаний к возмущениям в распределении страховых требований. Получена асимптотическая оценка погрешности вычислений оптимальных параметров модели.

- Установлена оптимальная стратегия перестрахования в многошаговой модели с банковскими займами и эксцедентным перестрахованием. Проведена оценка чувствительности управляющих параметров модели к флуктуациям коэффициентов нагрузки на премии страховщика и перестраховщика. Доказаны предельные теоремы для процесса капитала страховщика.

- Для модели с комбинированным перестрахованием доказано, что при различных соотношениях на параметры модели оптимальным поведением страховщика является заключение либо чисто квотного, либо чисто эксцедентного договора перестрахования, либо отказ от услуг перестраховщика.

Методы исследования

В работе используются классические методы теории вероятностей и случайных процессов; аналитические методы; методы динамического программирования; модифицированный метод анализа чувствительности Соболя; методы теории оптимизации и выпуклого анализа.

Практическая и теоретическая значимость работы

Результаты диссертация носят теоретический характер. Они могут быть полезны специалистам, занимающимся исследованиями в сфере актуарной математики и теории перестрахования.

Апробация диссертации

Результаты диссертации неоднократно докладывались автором на следующих научно-исследовательских семинарах:

- Большой семинар кафедры теории вероятностей под руководством академика РАН, профессора А.Н. Ширяева в 2013-2016 гг., механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

- Семинар «Проблемы теории запасов и страхования» под руководством доктора физико-математических наук, профессора Е.В. Булинской в 2013-2016 гг., кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- VIII Московская международная конференция по Исследованию Операций (ORM 2016), Москва, Россия, 2016.

- Международная конференция по стохастическим методам, Абрау-Дюрсо, Россия, 2016.

- The Tenth Bachelier Colloquium on Mathematical Finance and Stochastic Calculus, Metabief, France, 2016.

- The 16th Conference of Applied Stochastic Models and Data Analysis International Society (ASMDA 2015), Piraeus, Greece, 2015.

- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, Россия, 2013-2016 гг.

Публикации

Основные результаты диссертации содержатся в работах [1]- [13], представленных в конце списка литературы. Среди них три статьи в журналах из перечня ВАК.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, трех глав, заключения и списка литературы, который включает 59 наименований. Объем диссертации составляет 113 страницы.

Краткое содержание диссертации

Настоящая диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Нумерация утверждений, перечисленных ниже, совпадает с их нумерацией в соответствующих главах.

Во **введении** определены основные объекты исследования, представлен краткий исторический обзор результатов, а также приведено краткое содержание данной диссертации.

В **главе 1** рассматриваются модели функционирования страховой компании в дискретном времени в течение n лет.

Предполагается, что суммы совокупных годовых требований по страховым случаям образуют последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $\{X_i\}_{i\geq 1}$ с функцией распределения F, плотностью распределения f и конечным математическим ожиданием γ. В начале каждого года от клиентов поступают премии размера $c > 0$, а конце года страховщик производит выплаты по требованиям, поступившим в течение этого года. Для стабилизации своей работы компания использует различные финансовые инструменты.

Раздел 1.1 посвящен модели страхования, в рамках которой применяются такие инструменты, как вливание капитала и эксцедентное перестрахование. Вливания производятся для поддержания капитала компании не ниже фиксированного уровня a и влекут возникновение дополнительных издержек. Премии страховщика и перестраховщика рассчитываются по принципу среднего с нагрузкой безопасности. Для рассматриваемой модели решается задача минимизации ожидаемых дисконтированных дополнительных издержек путем выбора оптимальных параметров перестрахования. Полагается, что параметр перестрахования (в случае эксцедентного договора — уровень собственного удержания) может корректироваться каждый год.

Пусть u — начальный капитал компании, l и m — коэффициенты нагрузки на премии страховщика и перестраховщика соответственно.

В разделе 1.1.1 рассматривается одношаговая модель, соответствующая случаю $n = 1$. Пусть X — размер поступивших за год требований, z — уровень собственного удержания, тогда премии страховщика с учетом перестрахования имеют вид

$$c(z) = l\gamma - m\mathbb{E}(X - z)^+,$$

а ожидаемые издержки равны

$$H_1(u, z) = \mathbb{E}J(u, z),$$

где $J(u, z) = (\min(X, z) - e(u, z))^+,\ e(u, z) = u - a + c(z)$.

Нижеследующие теоремы 1.1 - 1.3 содержат в себе утверждения об оптимальном уровне собственного удержания $z_1(u)$ и минимальных издержках $h_1(u) = \inf_{z>0} H_1(u, z)$ для одношагового случая. В их формулировках используются следующие обозначения

$$g(z) = z - c(z), \quad z_* = F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right), \quad u_* = a + z_* - l\gamma, \quad u_1^* = a + g(z_*),$$

$$D_1 = \{(l, m)|a > u_1^*\}, \quad D_2 = \{(l, m)|u_* < a \le u_1^*\}, \quad D_3 = \{(l, m)|a \le u_*\},$$

$$z_{r1}(u) - \text{наибольший корень уравнения } g(z) = u - a.$$

Теорема 1.1. *Если $(l, m) \in D_1$, то минимальные ожидаемые издержки за год $h_1(u)$ равны 0 для любого начального капитала $u \ge a$.*

Оптимальным уровнем собственного удержания при этом является $z_1(u) = z_{r1}(u)$.

Более того, $z_1(u)$ является выпуклой вверх возрастающей функцией и $z_1'(u) \to 1$ при $u \to \infty$.

Теорема 1.2. *Если $(l, m) \in D_2$, то*

1) $h_1(u) = 0$ при $u \ge u_1^*$. Оптимальным уровнем собственного удержания в этом случае является функция $z_1(u) = z_{r1}(u)$. Более того, $z_1(u_1^*) = z_*$ и $z_1'(u) \to \infty$ при $u \searrow u_1^*$.

2) При $u \in [a, u_1^*)$ оптимальный уровень $z_1(u) = z_0(u)$, где $z_0(u)$ — единственный корень уравнения $e(u, z) = z_*$. Функция $z_0(u)$ является убывающей выпуклой вниз, $z_0(u) \to z_*$ и $z_0'(u) \to -1$ при $u \nearrow u_1^*$.

Теорема 1.3. *Если $(l, m) \in D_3$, то*

1) при $u \ge u_1^*$ и при $u \in (u_*, u_1^*)$ минимальные ожидаемые издержки $h_1(u)$ и оптимальный уровень собственного удержания $z_1(u)$ вычисляются, как в пунктах 1) и 2) теоремы 1.2 соответственно.

2) Если же $u \in [a, u_*]$, оптимальной стратегией будет отказ от услуг перестраховщика, то есть $z_1(u) = \infty$.

Для доказательства перечисленных выше теорем устанавливается справедливость лемм 1.1 - 1.4, содержащих утверждения о свойствах функций $c(z), g(z)$ и множеств $D_i, i = \overline{1,3}$. Следствие 1.1 дает представление о виде производной функции минимальных издержек $h_1(u)$.

Далее **в разделах 1.1.2 - 1.1.3** рассматривается многошаговая модель, соответствующая случаю $n > 1$. Пусть $z_k(u)$ — оптимальный уровень собственного удержания, действующий на первом шаге k-шагового процесса с начальным капиталом u. *Стратегией перестрахования*, рассчитанной на n лет, будем называть набор функций $\{z_k\}_{k=1}^n$. Решается задача минимизации ожидаемых дисконтированных дополнительных издержек $h_n(u)$ за n-летний промежуток времени и устанавливается оптимальная стратегия перестрахования, при которой достигается минимум.

В разделе 1.1.2 доказываются вспомогательные леммы 1.5 - 1.6 о свойствах функции минимальных издержек $h_n(u)$, которая согласно принципу оптимальности Беллмана удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$h_n(u) = \inf_{z>0} \left[H_1(u,z) + \alpha \mathbb{E} h_{n-1}\left(\max(a, u + c(z) - \min(z, X))\right)\right],$$

где α — коэффициент дисконтирования, $0 < \alpha < 1$, X — размер совокупных требований за n-ый год, z — уровень собственного удержания в этот год.

Раздел 1.1.3 включает в себя следующие теоремы, устанавливающие оптимальную стратегию перестрахования в n-шаговой модели.

Теорема 1.4. *Если $(l,m) \in D_1$, то минимальные ожидаемые издержки за n лет $h_n(u)$ равны 0 для любого начального капитала $u \geq a$ и $n \geq 1$.*

Оптимальный уровень собственного удержания $z_n(u)$ на первом шаге n-шагового процесса функционирования компании равен $z_{r1}(u)$ для любого $n \geq 1$.

Теорема 1.5. *Если $(l,m) \in D_2 \cup D_3$, то минимальные ожидаемые издержки за n лет $h_n(u)$ равны 0 при начальном капитале $u \geq u_n^*$, где $u_n^* = a + ng(z_*)$.*

Оптимальный уровень собственного удержания на первом шаге n-шагового процесса равен $z_n(u) = z_1\left(u - (n-1)g(z_*)\right)$ для $u \geq u_n^*$.

Теорема 1.6. *Если $(l,m) \in D_2 \cup D_3$, то при $u \in (\max(a, u_*), u_1^*)$ оптимальный уровень собственного удержания $z_n(u)$ является выпуклой вниз убывающей функцией, более того, $z_n(u) > z_1(u)$ и $z_n'(u) = -(c'(z_n(u)))^{-1}$.*

Далее будем использовать обозначение $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

Теорема 1.7. *Если $(l,m) \in D_2$, то оптимальный уровень собственного удержания на первом шаге двухшагового процесса при $u \in (u_1^*, u_2^*)$ имеет вид*

$$z_2(u) = \min\left(z_0(u - g(z_*)),\ \max(z_{r1}(u), z_0^{(21)}(u))\right),$$

где $z_0(u)$ является корнем уравнения $e(u,z) = z_*$, а $z_0^{(21)}$ — корнем уравнения

$$1 - (m-\alpha)\overline{F}(e(u,z)) - \alpha\overline{F}(e(u-g(z_*),z)) = 0.$$

Теорема 1.8. *Если $(l,m) \in D_2$, то минимальные ожидаемые дисконтированные издержки $h_n(u)$ сходятся равномерно по u при $n \to \infty$.*

Численные примеры, иллюстрирующие вид оптимальной стратегии перестрахования и минимальных издержек, приведены в **разделе 1.1.4**

Раздел 1.2 посвящен модели страхования с банковскими займами и эксцедентным перестрахованием. Поступление премий и требований по страховым случаям происходит по такому же принципу, как и в модели из раздела 1.1. При нехватке собственных средств для погашения требований, страховщик обращается в банк, чтобы взять займ в размере недостающей суммы под процент r, $0 < r < 1$. Причем предполагается, что компания сама возвращает величину займа, используя для этого будущие премии, а вот проценты по займу погашают акционеры. Поэтому целью страховщика является минимизация ожидаемых процентов по займам путем выбора оптимальной стратегии перестрахования (определение стратегии совпадает с приведенным ранее). Капитал компании в данной модели может принимать любые значения, в том числе отрицательные.

Теоремы 1.9 - 1.11 из **раздела 1.2.1** устанавливают вид оптимальной стратегии перестрахования и минимальных издержек для одношаговой и многошаговой моделей.

В **разделе 1.2.2** вводится метод анализа чувствительности функции к флуктуации параметров, являющийся модификацией метода Соболя[35]. В **разделе 1.2.3** в предположении, что нагрузочные коэффициенты l, m на премии страховщика и перестраховщика соответственно являются равномерно распределенными случайными величинами, исследуется чувствительность функции $u_1^* = g(z_*)$, влияющей на вид оптимальной стратегии перестрахования, к изменению в значениях l, m. Приводятся численные результаты.

Глава 2 посвящена оценке качества оптимальных моделей, найденных в главе 1, и исследованию предельного поведения капитала страховой компании.

В разделе 2.1 исследуется устойчивость минимальных ожидаемых дисконтированных издержек к изменению в распределении страховых требований.

Постановка задачи приводится в **разделе 2.1.1**. Пусть $h_{n_X}(u)$ и $h_{n_Y}(u)$ — минимальные издержки за n-летний промежуток функционирования компании с начальным капиталом u в предположении, что страховые требования подчиняются законам распределения $law(X)$ и $law(Y)$ соответственно. Тогда в рамках модели с вливанием капитала и перестрахованием задача об устойчивости формулируется следующим образом. Требуется

[35]Соболь И.М. (1993). *Об оценке чувствительности в нелинейных математических моделях.* Математическое моделирование, 2(1), с. 407–414.

оценить величину $\Delta_n = \sup_{u>a} |h_{n_X}(u) - h_{n_Y}(u)|$ при условии, что расстояние Канторовича $\kappa(X, Y)$ между случайными величинами X и Y имеет конечное значение ρ. Согласно определению[36] $\kappa(X, Y) = \int_{\mathbb{R}} |F_X(t) - F_Y(t)|dt$, где F_X, F_Y — функции распределения X и Y соответственно.

Результат об устойчивости минимальных издержек в одношаговой модели сформулирован в теореме 2.1 из **раздела 2.1.2**.

Теорема 2.1. *Пусть X, Y — неотрицательные случайные величины с конечными математическими ожиданиями, причем $\kappa(X, Y) = \rho$. Тогда*

$$\Delta_1 \leq (1 + l + m)\rho,$$

где $l, m, 1 < l < m$ — коэффициенты нагрузки на премии страховщика и перестраховщика соответственно.

Для доказательства вышеприведенной теоремы устанавливается справедливость лемм 2.1 - 2.3.

В **разделе 2.1.3** с помощью леммы 2.4 доказывается теорема 2.2 об устойчивости минимальных издержек в многошаговой модели.

Лемма 2.4. *Для любого $n \geq 0$, любого $u \geq a$ и коэффициента дисконтирования $0 < \alpha < 1$ имеет место оценка*

$$|h_n(u + \Delta u) - h_n(u)| \leq \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \Delta u.$$

Теорема 2.2. *Пусть X, Y — неотрицательные случайные величины с конечными математическими ожиданиями, причем $\kappa(X, Y) = \rho$. Тогда*

$$\Delta_n \leq \frac{1}{1 - \alpha} \left(\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} - n\alpha^n \right) (1 + l + m)\rho,$$

где $\alpha \in (0, 1)$ — коэффициент дисконтирования; $l, m,\ 1 < l < m,$ — нагрузочные факторы на премии страховщика и перестраховщика соответственно.

В **разделе 2.2** изучается, как сильно замена теоретической функции распределения требований на эмпирическую при вычислении оптимальных параметров модели влияет на их значение.

В **разделе 2.2.1** приводится оценка погрешности при вычислении минимальных ожидаемых издержек. Пусть F — истинная функция распределения совокупных годовых требований, а F_N — эмпирическая функция, построенная по N наблюдениям. Оценивается случайная величина $\eta_N = \sup_u |h_F(u) - h_{F_N}(u)|$, где $h_F(u)$ и $h_{F_N}(u)$ — минимальные ожидаемые издержки за n лет, рассчитанные с учетом того, что совокупные годовые требования имеют функцию распределения F и F_N соответственно.

[36] Rachev S.T., Klebanov L., Stoyanov S.V. and Fabozzi F. (2013). *The Methods of Distances in the Theory of Probability and Statistics.* Springer-Verlag New York, 619 pages.

Теорема 2.3. *Если существует $q > 2$ такое, что $\int_{\mathbb{R}} |x|^q dF(x) < \infty$, то для любого $N \geq 1$, $y \in (0, \infty)$ и $0 < \theta < 1$ верна следующая оценка*

$$P\left(|\eta_N| \leq y\right) \geq 1 - \theta \quad \text{\textit{при}} \quad y = C\sqrt{-\frac{\ln(\theta/c_1)}{c_2 N}},$$

где c_1, c_2, C - положительные константы, не зависящие от q, N, y.

В **разделе 2.2.2** получены оценки погрешностей, возникающих при вычислении характеристик оптимальной стратегии перестрахования. Основные результаты сформулированы в теореме 2.4.

Теорема 2.4. *Для любого $0 < \theta < 1$ асимптотические доверительные интервалы для z_{*,F_N}, u_{*,F_N} и u^*_{1,F_N} при $N \to \infty$ имеют вид*

$$P\left(z_{*,F_N} \in (z_{*,F} - y_{z_*,\theta}, z_{*,F} + y_{z_*,\theta})\right) \geq 1 - \theta, \quad \text{\textit{где}} \quad y_{z_*,\theta} = \sqrt{\frac{\ln(\theta/2)}{2f^2\left(F^{-1}(p)\right)N}},$$

$$P\left(u_{*,F_N} \in (u_{*,F} - y_{u_*,\theta}, u_{*,F} + y_{u_*,\theta})\right) \geq 1 - \theta, \quad \text{\textit{где}} \quad y_{u_*,\theta} = 2l\sqrt{\frac{DX_1}{N\theta}},$$

$$P\left(u^*_{1,F_N} \in (u^*_{1,F} - y_{u^*_1,\theta}, u^*_{1,F} + y_{u^*_1,\theta})\right) \geq 1 - \theta, \quad \text{\textit{где}} \quad y_{u^*_1,\theta} = 4m\sqrt{\frac{DX_1 + \mathbb{E}X_1^2}{N\theta}}.$$

В последней лемме символы F и F_N, стоящие в индексах после запятой, показывают, какая функция распределения используется при вычислении соответствующих величин.

Заключительный **раздел 2.3** главы 2 содержит результаты о предельном поведении капитала в модели с банковскими займами и перестрахованием. Пусть U_n — капитал страховщика в конце n-летнего промежутка функционирования компании.

В **разделе 2.3.1** устанавливается поведение капитала страховщика при константной стратегии перестрахования z и теоретически определяемом распределении требований. В теореме 2.5 с основными результатами используется обозначение $\tilde{X}_n = c(z) - \min(X_n, z)$, где X_n — страховые требования, поступившие в течение n-го года.

Теорема 2.5. *Для процесса капитала U_n, удовлетворяющего уравнению $U_n = U_{n-1} + \tilde{X}_n$, верны следующие утверждения.*

1) Если $\mathbb{E}X_1 < \infty$, то

$$\frac{U_n - u}{n} \to \mathbb{E}\tilde{X}_1 \quad \text{\textit{п.н.}},$$

2) Если $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$, то

$$\frac{U_n - u - n\mathbb{E}\tilde{X}_1}{\sqrt{nD\tilde{X}_1}} \to^d \mathcal{N}(0,1).$$

3) Если $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$, $\mathbb{E}\tilde{X}_1^2 > 0$ и выполняется $(l-m)\mathbb{E}X_1 + (m-1)\mathbb{E}\min(X_1, z) = 0$, то

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{U_n - u}{\psi(n)} = 1 \quad \text{п.н.},$$

где $\psi(n) = \sqrt{2\mathbb{E}\tilde{X}_1^2 n \ln\ln n}$.

В **разделе 2.3.2** получены результаты о поведении капитала страховщика U_n при эмпирически определяемом распределении требований. То есть в предположении, что уровень собственного удержания на i-ом шаге рассчитывается как $z = F_{i-1}^{-1}\left(\frac{m}{m-1}\right)$, где F_{i-1} — эмпирическая функция распределения, построенная по наблюдениям $X_1, ..., X_{i-1}$. С помощью утверждения, полученного в лемме 2.8, доказана следующая теорема.

Теорема 2.6. *Пусть*

$$A_n = u + (c - m\mathbb{E}X_1)n + m\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\min\left(X_i, F_{i-1}^{-1}(p)\right) - \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\min(X_i, F^{-1}(p)),$$

тогда

$$\frac{U_n - A_n}{\sqrt{n}\ln^2 n} \to 0 \quad \text{п.н.}, \quad n\to\infty.$$

Замечание . *В типичной ситуации слагаемое A_n имеет порядок n, поэтому из теоремы 2.6 будет следовать*

$$U_n = A_n\left(1 + o\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad n\to\infty.$$

В главе 3 рассматривается модель работы страховой компании с начальным капиталом u, использующей комбинацию пропорционального и непропорционального перестрахования. Как и в разделе 1.2, страховщик стремится минимизировать процентные выплаты по банковским займам путем выбора оптимальной стратегии перестрахования.

Раздел 3.1 содержит в себе три подраздела. Описание модели с комбинированным договором перестрахованием содержится в **разделе 3.1.1**. Пусть X — совокупный размер требований за год, причем случайная величина X положительна, имеет абсолютно непрерывную функцию распределения F и конечное математическое ожидание. Пусть β, $\beta \in (0,1]$ — параметр квотного договора перестрахования, $B > 0$ — эксцедентного. Тогда согласно комбинированной программе перестрахования ответственность страховщика равняется $\min(\beta X, B)$. Полагается, что страховщику выплачивается комиссия по квотному договору перестрахования в размере $k(1-\beta)c$, где $k \in (0,1)$ — коэффициент комиссии, $c > 0$ — премии компании в начале периода. Премии эксцедентного перестрахования рассчитываются по принципу среднего с нагрузкой безопасности $m > 1$. Таким образом, премии страховщика с учетом перестрахования имеют вид $c(\beta, B) = \beta c(1-k) + kc - m\mathbb{E}[\beta X - B]^+$.

В разделе 3.1.2 в лемме 3.2 доказаны утверждения о свойствах выпуклости функции премий $c(\beta, B)$ и вспомогательной функции $g(\beta, B) = B - c(\beta, B)$. Доказательство опирается на результат, полученный в лемме 3.1.

Лемма 3.2. *На множестве* $\Gamma = \{(\beta, B) : (\beta, B) \in (0,1] \times (0, \infty]\}$
а) функция премий $c(\beta, B)$ *является выпуклой вверх;*
б) функция

$$g(\beta, B) := B - c(\beta, B)$$

является выпуклой вниз.

В **разделе 3.1.3** приведены определения и результаты теории оптимизации, использующиеся в дальнейших секциях при доказательстве теорем.

Раздел 3.2 посвящен поиску оптимальной стратегии перестрахования с целью минимизации выплат по банковским займам, где выплаты определяются как $H(u, \beta, B) = \mathbb{E}[\min(\beta X, B) - u - c(\beta, B)]^+$.

В **разделе 3.2.1** в лемме 3.3 решена задача оптимизации

$$g(\beta, B) \to \inf_{(\beta, B)}, \quad -c(\beta, B) \leq 0, \quad (\beta, B) \in \Gamma. \qquad (*)$$

Обозначения $b_* = \overline{F}^{-1}\left(\frac{1}{m}\right)$ и $\Gamma_0 = \{(\beta, B) \mid (\beta, B) \in (0,1] \times (0, \infty],\ c(\beta, B) \geq 0\}$ используются в нижеследующей формулировке.

Лемма 3.3. *Справедливы следующие утверждения.*

Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) > 0$, *то решением задачи* $(*)$ *является точка* $(\beta, B) = (1, b_*)$, *а соответствующее минимальное значение* $\min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B)$ *равно*

$$g(1, b_*) = -\left(c - m \int_{b_*}^{\infty} x \, dF(x)\right) = -\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) - kc.$$

Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) = 0$, *то решением задачи* $(*)$ *является множество* $\{(\beta, B) \in \Gamma | \frac{B}{\beta} = b_*\}$, *при этом* $\min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B) = -kc$.

Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) < 0$, *то решением задачи* $(*)$ *является* $(\beta, B) = (0, 0)$, *и при этом* $\min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B) = -kc$.

Задача минимизации выплат по займам путем выбора оптимальной комбинированной стратегии перестрахования,

$$H(u, \beta, B) \to \inf_{(\beta, B)}, \quad c(\beta, B) \geq 0, \quad (\beta, B) \in \Gamma,$$

решается в **разделах 3.2.2 - 3.2.3**. Множество Γ_0 разбивается на $\Gamma_u^r, \Gamma_u^m, \Gamma_u^l$ такие, что

$$\Gamma_u^r := \{(\beta, B) \in \Gamma_0,\ g(\beta, B) < u\},$$
$$\Gamma_u^m := \{(\beta, B) \in \Gamma_0,\ -c(\beta, B) \le u \le g(\beta, B)\},$$
$$\Gamma_u^l := \{(\beta, B) \in \Gamma_0,\ -c(\beta, B) > u\}.$$

В леммах 3.4, 3.6, 3.9 для всех возможных значений капитала u находятся минимальные значения функции $H(u, \beta, B)$ на каждом из множеств $\Gamma_u^r, \Gamma_u^m, \Gamma_u^l$. Затем, пользуясь результатами этих лемм, находятся оптимальные параметры перестрахования и соответствующие им значения минимальных издержек для любого начального капитала. Основные результаты содержатся в теоремах 3.3 - 3.5. Леммы 3.5, 3.7, 3.8 носят вспомогательный характер.

Теорема 3.3. *Для любого* $u \ge \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B)$ *минимальные ожидаемые издержки,* $\min\limits_{\Gamma_0} H(u, \beta, B)$*, равны нулю и достигаются на множестве пар* $\{(\beta, B) \in \Gamma \mid g(\beta, B) \le u\}$.

Теорема 3.4. *Для любого* $u < -c$ *верны следующие утверждения о минимальных ожидаемых издержках* $\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B)$ *и оптимальной стратегии перестрахования.*

1) Если $c(1-k) < \mathbb{E}X$*, то оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование. Издержки при этом равны*

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = -u - kc.$$

2) Если $c(1-k) = \mathbb{E}X$*, то оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование или чисто квотное перестрахование с параметром* $\beta > 0$*. Издержки при этом равны*

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = -u - kc.$$

3) Если $c(1-k) > \mathbb{E}X$*, то наилучшей стратегией для страховщика будет отказ от услуг перестрахования. Издержки при этом равны*

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = \mathbb{E}X - u - c.$$

Теорема 3.5. *Для* $-c \le u < \min_{\Gamma_0} g(\beta, B)$ *верны следующие утверждения о минимальных ожидаемых издержках* $\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B)$ *и оптимальной стратегии перестрахования.*

1. *Если* $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) < 0$*, то*

   (i) При $c(1-k) < \mathbb{E}X$ *оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование. Издержки при этом равны*

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = -u - kc.$$

(ii) При $c(1-k) = \mathbb{E}X$ оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование или чисто квотное перестрахование с параметром $\beta \in (0, \beta_u]$, где $\beta_u = \frac{-u-kc}{c(1-k)}$. Издержки при этом равны

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = -u - kc.$$

(iii) При $c(1-k) > \mathbb{E}X$ наилучшей стратегией для страховщика с начальным капиталом $u \in [-c, u_m]$ является отказ от услуг перестраховщика, при этом минимальные издержки равны

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = \mathbb{E}(X - u - c)^+, \quad u \in [-c, u_m],$$

а для страховщика с исходным капиталом $u \in [u_m, -kc)$ — чисто квотное с параметром $\beta_u^0 = \frac{u+kc}{u_m+kc}$ и издержками

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = (-u - kc)\overline{F}\left(u_m + c\right), \quad u \in [u_m, \min_{\Gamma_0} g(\beta, B)],$$

где u_m - корень уравнения

$$\overline{F}(u + c)c(1 - k) - \int_{u+c}^{\infty} xf(x)dx = 0.$$

2. Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}\left(1, b_*\right) \geq 0$, то $c(1-k) \geq \mathbb{E}X$ и наилучшей стратегией для страховщика с начальным капиталом $u \in [-c, -c + b_*]$ является отказ от перестрахования, минимальные издержки при этом равны

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = \mathbb{E}\left(X - u - c\right)^+.$$

Для страховщика с исходным капиталом $u \in [-c+b_*, -kc]$ оптимальной стратегией является чисто эксцедентный договор перестрахования с уровнем собственного удержания B_*, где B_* — корень уравнения

$$m\mathbb{E}(X - B)^+ = u + c - b_*.$$

Соответствующие минимальные издержки равны

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = \frac{1}{m}\left(-u + g\left(1, b_*\right)\right).$$

В **заключении** перечислены основные результаты диссертационной работы и возможные направления для дальнейших исследований.

Заключение

Для двух моделей функционирования страховой компании в дискретном времени найдены стратегии перестрахования, минимизирующие ожидаемые дисконтированные дополнительные издержки. Как для модели с вливанием капитала и перестрахованием, так и для модели с банковскими займами и перестрахованием оптимальные стратегии получены для одношагового и многошагового процессов. Оптимальное поведение установлено для страховых компаний с любым начальным значением капитала. Получены свойства оптимальных стратегий и соответствующих минимальных издержек. Проведена оценка чувствительности управляющих параметров модели к флуктуациям коэффициентов нагрузки на премии страховщика и перестраховщика.

Доказана устойчивость модели оптимального перестрахования по отношению к малым возмущениям распределения страховых требований. Получена асимптотическая оценка погрешности вычислений оптимальных параметров модели, возникающая в результате использования при расчетах эмпирической функции распределения требований вместо теоретической. Доказаны предельные теоремы для процесса капитала страховщика при константной стратегии перестрахования и теоретически определяемом распределении требований, а также при эмпирически определяемом распределении требований.

Исследована модель страхования, в которой помимо вливаний капитала используется комбинация пропорционального и непропорционального договоров перестрахования. Доказаны утверждения о свойствах выпуклости и экстремумах функций, характеризующих модель перестрахования. Найдена оптимальная стратегия перестрахования, минимизирующая ожидаемые дополнительные издержки. Доказано, что в зависимости от соотношения параметров распределения требований, премий страхования, нагрузочных коэффициентов на премии и величины комиссионных оптимальным поведением страховщика является заключение либо чисто квотного, либо чисто эксцедентного договора перестрахования, либо отказ от услуг перестраховщика.

Одно из возможных направлений для дальнейших исследований — поиск оптимальных с точки зрения и страховщика, и перестраховщика стратегий перестрахования. Также интерес представляет изучение устойчивости таких стратегий к изменению параметров, зависящих от ситуации на рынке страховых услуг.

Работы автора по теме диссертации

[1] Гусак Ю.В. (2017). *Об устойчивости решения в задаче оптимального перестрахования.* Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика. 2017(2), с. 58 – 61.

[2] Bulinskaya E., Gusak J. (2016). *Optimal Control and Sensitivity Analysis for Two Risk Models.* Communications in Statistics - Simulation and Computation. Taylor & Francis. 45(5), pp. 1451–1466. [Булинской Е.В. принадлежит постановка задачи, теоремы 4 - 6, лемма 1; Гусак Ю.В. принадлежат теоремы 1 - 3, следствие 1].

[3] Bulinskaya E., Gusak J. and Muromskaya A. (2015). *Discrete-time Insurance Model with Capital Injections and Reinsurance.* Methodology and Computing in Applied Probability. Springer US. 17(4), pp. 899–914. [Булинской Е.В. принадлежит постановка задачи, следствие 1; Гусак Ю.В. принадлежат теоремы 1 - 8, леммы 1 - 3; Муромской А.А. принадлежат рис.8а),8б)].

[4] Гусак Ю.В. (2017). *Оптимальное комбинированное перестрахование и предельные теоремы в модели страхования с дискретным временем.* Москва. Деп. в ВИНИТИ 09.03.2017, № 34-В2017. 32 с.

[5] Gusak J.V. (2016). *Stability of the solution in the optimal reinsurance problem.* Maks Press, Moscow. VIII Moscow International Conference on Operational Research (ORM 2016), Conference Proceedings, Volume 1, pp. 212–213.

[6] Гусак Ю.В.(2016). *Устойчивость решения задачи оптимизации в одной модели страхования.* Материалы Международной конференции по стохастическим методам в Абрау-Дюрсо, с. 57.

[7] Гусак Ю.В. (2016). *Устойчивость решения в задаче оптимального перестрахования.* Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов - 2016». [Электронный ресурс]. Макс Пресс, Москва.

[8] Gusak J. (2015). *Optimal combination of reinsurance treaties.* ISAST, 16th Conference of Applied Stochastic Models and Data Analysis International Society (ASMDA 2015), Book of abstracts, pp. 66–67.

[9] Гусак Ю.В. (2015). *Оптимизация в случае комбинированного договора перестрахования.* Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов - 2015». [Электронный ресурс]. Макс Пресс, Москва.

[10] Гусак Ю.В. (2014). *Минимизация издержек в модели с банковскими займами и перестрахованием.* Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 21, в. 4, с. 352.

[11] Гусак Ю.В. (2014). *Оптимальное перестрахование в модели с банковскими займами.* Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов - 2014». [Электронный ресурс]. Макс Пресс, Москва.

[12] Гусак Ю.В. (2013). *Оптимальная стратегия перестрахования эксцедента убыточности.* Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов - 2013». [Электронный ресурс]. Макс Пресс, Москва.

[13] Гусак Ю.В. (2012). *Оптимальные стратегии перестрахования.* Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов - 2012». [Электронный ресурс]. Макс Пресс, Москва.