МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

механико-математический факультет
кафедра теории вероятностей

На правах рукописи
УДК 519.2

Гусак Юлия Валерьевна

Стохастические модели перестрахования и их оптимизация

Специальность
«01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
профессор, доктор физ.-мат. наук
Булинская Екатерина Вадимовна

Москва — 2017 г.

Содержание

Введение

Актуальность и история вопроса

Страхование является неотъемлемой частью современного мира, причем потребность в нем возрастает с развитием экономики и социальной структуры общества. К факторам, стимулирующим рост страхового дела можно отнести следующие события. Это увеличение предпринимательских рисков, возникающее в связи с усложнением хозяйственных связей, особенно в сфере финансовых рынков. Это новые риски, порождаемые научно-техническим прогрессом и требующие разработки специального аппарата управления. К списку факторов можно также отнести увеличение частоты стихийных бедствий и рост продолжительности жизни в развитых странах, влекущий развитие медицинского и пенсионного страхования. Важно упомянуть и повышение вероятности возникновения зависимых рисков, которые образуются в силу уплотнения при размещении объектов производства, жилья, исторических памятников. Согласно определению из книги Булинской ([3], §1.2),

Страхование — операция, посредством которой одна из сторон (страхователь), внося определенную сумму денег (премию или страховой взнос), обеспечивает себе или третьему лицу (выгодоприобретатель) при осуществлении риска (т.е. наступлении страхового случая) выплату возмещения другой стороной (страховщиком), принимающим на себя целый ансамбль рисков, которые он компенсирует в соответствии с законами теории вероятностей.

Возмещая ущерб одной финансовой организации, страховщик тем самым обеспечивает бесперебойную работу целого рыночного сектора, частью которого является застрахованная сторона. Более того, аккумулируя поступающие премии, страховая компания превращает их в инвестиционный капитал, стимулирующий развитие экономики. Имущественное, гражданское и медицинское страхование защищает физических лиц от крупных потерь, способствуя увеличению их платежеспособности. Таким образом, деятельность страховых компаний значительно влияет на состояние экономической и социальной сфер общества. Следовательно, важно осуществлять грамотное управление компанией, чтобы не допустить возникновения кризисной ситуации на рынке. В свете вышесказанного актуальность развития математического аппарата для анализа страховых моделей очевидна.

Первостепенной задачей страховой компании является удовлетворение требований полисодержателей. Производя выплаты по страховым случаям, компания рискует обанкротиться, так как размер иска, имеющего случайную природу, может превысить собственный капитал страховщика. В связи с этим на протяжении уже более ста лет исследование вероятности разорения является одной из основных задач актуарной математики (см. книгу Asmussen and Albrecher [12]). Начиная с работы Lundberg [38], в которой было предложено описывать процесс поступающих требований с помощью пуассоновского потока, было написано немало статей, рассматривающих работу страховой компании в непрерывном времени. В классической модели Крамера-Лундеберга (Cramér [21]) капитал компании U_t в момент t удовлетворяет следующему уравнению

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

где X_i — величина i-го поступившего требования, u — начальный капитал, $c > 0$ — приход страховых премий в единицу времени, N_t — число требований, поступивших за время t. Данная модель и ее различные модификации до сих пор являются популярными объектами исследования.

Будучи финансовой корпорацией, страховая компания обладает рисками, связанными с выплатами дивидендов своим акционерам. Первые значительные результаты, связанные с изучением подобных рисков, были получены de Finetti [23]. Данное направление исследований является актуальным и по сей день, большое количество работ, посвященное этой тематике, описывает функционирование компании в непрерывном времени. Сегодня рынки финансовых и страховых услуг тесно взаимодействуют друг с другом (см. Yang et al. [47]). Банки торгуют страховыми и перестраховыми контрактами, в то время как страховые компании интересуются возможностями, связанными с инвестированием и вливанием капитала. К статьям по данной тематике можно отнести Dickson and Waters [26], Gerber et al. [29], Beveridge et al. [14], Kulenko and Schmidli [35], Eisenberg and Schmidli [27].

Несмотря на то, что подавляющее число статей по страховой математике рассматривают модели с непрерывным временем, на практике многие события, будь то решение о выплате дивидендов или заключением договора перестрахования, происходят в конце финансового года, то есть в детерминированные моменты времени. Поэтому изучение моделей страхования в дискретном времени представляется разумным и необходимым в сегодняшние дни. Dickson and Waters [25] предъявили способ дискретизации модели Крамера-Лундберга, обосновав переход к дискретному времени. Gerber [28] предложил рассматривать составную биномиальную модель в качестве аналога составной пуассоновской модели. Согласно этой модели капитал компании U_n в момент n удовлетворяет следующему уравнению

$$U_n = u + cn - \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где X_i — совокупные требования за i-ый промежуток времени. Публикации Li et al. [36], Castañer et al. [19], Булинская [2, 17] посвящены изучению моделей страхования в дискретном времени. Рассматриваемые в данной диссертации модели страхования являются дискретными.

Как было замечено выше, сбои в работе страховой компании, вызванные нехваткой средств для возмещение убытков, могут привести к ее банкротству. Чтобы избежать подобной участи страховщик использует различные инструменты для стабилизации работы компании. Одним из основных является перестрахование. В книге Булинской ([3], §1.7) дано следующее определение.

Перестрахование — операция, посредством которой одна сторона (перестрахователь или цедент), выплачивая некоторую сумму (премию перестрахования) другой стороне (перестраховщику), передает ей тем самым часть принятого на гарантию риска, то есть обеспечивает выплату ею определенной части возникающего ущерба.

Далее, используя термин *страховщик*, будем иметь в виду страховую компанию, выступающую в роли цедента и заключающую договор перестрахования.

Перестрахование может быть факультативным и обязательным. Последнее подразумевает, что цедент и перестраховщик заключают договор, согласно которому при наступлении страхового случая обе стороны обязаны выполнить обязательства, прописанные в соглашении. Обязательное перестрахование делится на пропорциональное и непропорциональное. Наиболее часто встречающийся на практике пример пропорционального договора — квотный, непропорционального — эксцедентный.

Пусть X — величина поступивших требований; $R(X) \in [0, X]$ — сумма, перешедшая под ответственность перестраховщика; $I(X, R) = X - R(X)$ — риск, удерживаемый страховщиком; π_{re} — премии, отдаваемые в перестрахование.

Если заключен *квотный договор* перестрахования, то при поступлении совокупных требований размера X страховщик выплачивает величину $I(X, R) = \beta X$, а риск в размере $R(X) = (1 - \beta)X$ передает перестраховщику, где $\beta \in (0, 1)$. В случае *эксцедентного договора* страховщик покрывает риск в размере $I(X, R) = \min(X, B)$ и передает перестраховщику $R(X) = (X - B)^+$, параметр $B > 0$ называется *уровнем собственного удержания.*

В данной диссертации будут рассматриваться эти виды перестрахования. Более подробную классификацию существующих договоров можно найти в книге Булинской ([4], гл.2).

Одной из важнейших задач актуарной математики является выбор наилучшей программы перестрахования. В силу разнообразия страховых моделей не существует универсального решения, поэтому поиск оптимального перестрахования остается актуальной задачей уже более пятидесяти лет. К первым исследованиям в данной области можно отнести работу Borch [15]. С практической точки зрения, перестрахование — эффективная мера управления риском, поэтому страховые компании заинтересованы в изучении новых стратегий перестрахования. С теоретической точки зрения, поиск оптимального перестрахования подразумевает постановку и решение задач оптимального управления.

Перечисленные выше причины способствуют появлению новых интересных подходов к изучению оптимального перестрахования.

Модели перестрахования можно классифицировать по нескольким признакам. Во-первых, все модели делятся на одношаговые и многошаговые. То есть можно рассматривать перестрахование рисков, возникающих как за единичный промежуток времени, так и за последовательности промежутков.

Во-вторых, в зависимости от того, применяется перестрахование к каждому отдельно взятому риску или сразу к совокупности (сумме) рисков, все модели можно разделить, соответственно, на локальные и глобальные. То есть в глобальных моделях нам достаточно знать только распределение совокупных рисков, в то время как в локальных необходима информация о совместном распределении всех рисков. Большинство работ по оптимальному перестрахованию рассматривает глобальные модели.

И в-третьих, оптимизация может производится только в интересах страховщика или же затрагивать интересы обеих сторон.

Для формулировки задачи оптимального перестрахования необходимо сделать предположение о: 1) критерии оптимизации, выбрав ту или иную меру риска, 2) принципе подсчета перестраховочной премии.

Перечислим критерии, которые широко используются в качестве оптимизационных в моделях перестрахования, учитывающих интересы страховщика. Для каждого критерия приведем основные результаты, описывающие вид оптимального договора в глобальных моделях перестрахования. Итак, применяются следующие критерии.

1) Минимизация дисперсии удерживаемого риска страховщика, то есть минимизация величины $\mathbb{D}(I(X,R))$. Для моделей с данным критерием оптимизации Borch [15] показал, что эксцедентный договор перестрахования является оптимальным, когда премии перестрахования подсчитываются по принципу среднего, то есть когда $\pi_{re} = m\mathbb{E}R(X)$, где $m > 1$ — коэффициент нагрузки на премии. Kaluszka [32] обобщил результаты, полученные Borch, на более широкий класс премий. Beard et al. [13] показали, что квотный договор является оптимальным в том смысле, что это наиболее экономный способ добиться того, чтобы дисперсия удерживаемого риска имела заданный уровень, когда коэффициент нагрузки на премии увеличивается одновременно с дисперсией риска, передаваемого в перестрахование.

2) Максимизация ожидаемой полезности страховщика, то есть максимизация величины $\mathbb{E}w(u - I(X,R) - \pi_{re})$, где w — неубывающая выпуклая вверх функция (функция полезности), u — начальный капитал. Arrow [11] показал, что эксцедентный договор перестрахования является оптимальным, когда премии, отдаваемые в перестрахование, подсчитываются по принципу среднего. Young [46] обобщила результат Arrow предположив, что премии рассчитываются согласно принципу Ванга, то есть $\pi_{re} = \int_0^\infty \mathbb{P}(R(X) \geq t)^p\, dt,\ 0 < p < 1$

(см. Wang [44]).

3) Также в литературе широко изучаются модели, в которых страховщик стремится минимизировать некоторый (выпуклый вниз) функционал от удерживаемого риска. Отметим, что множество моделей, минимизирующих дисперсию, есть подмножество моделей, максимизирующих ожидаемую полезность, которые, в свою очередь, являются подмножеством моделей, минимизирующих меру риска. Kaluszka and Okolewski [34] показали, что договоры, являющиеся модификацией эксцедентного, оптимальны при многих критериях оптимизации, включая максимизацию ожидаемой полезности и минимизацию вероятности разорения цедента.

4) Минимизация вероятности разорения страховщикаи, то есть минимизация функции $\psi(u) = P(\tau < \infty | U_0 = u)$, где $\tau = \min\{n > 0 | U_n < 0\}$ — момент разорения компании.

В связи с ростом разнообразия страховых и финансовых инструментов, появляются новые критерии оптимизации, требующие математического описания. В статье Булинской [2] впервые было предложено использовать в качестве меры риска издержки, возникающие при функционировании страховой компании, причем был рассмотрен случай дискретного времени. Стоимостной подход также был использован в Bulinskaya [17], и тоже для дискретного времени. В настоящей диссертации применяется критерий минимизации вливаний капитала (дополнительных издержек).

Еще одной важной задачей актуарной математики является определение оптимальных параметров договора перестрахования в предположении, что тип договора известен. Например, de Finetti [22] рассмотрел квотное перестрахование n независимых рисков в глобальной модели, где в качестве оптимизационного критерия применяется минимизация дисперсии удерживаемого риска в предположении, что ожидаемая прибыль цедента равна некоторой константе. Он получил оптимальные значения доли удерживаемых рисков для каждого из n договоров. Bühlmann [16] рассмотрел аналогичную задачу для эксцедентного договора перестрахования полагая, что каждый риск имеет составное пуассоновское распределение.

В настоящей диссертации исследуются многошаговые модели страхования в дискретном времени, минимизирующие вливания капитала путем выбора оптимальных параметров эксцедентного перестрахования. В литературе многошаговые модели рассматривались в основном в предположении о непрерывности времени. Shmidli [41] исследовал стратегию пропорционального перестрахования в непрерывном времени в классической модели Крамера-Лундберга, минимизирующую вероятность разорения страховщика. Он не нашел явный вид оптимальной стратегии перестрахования, но описал ее свойства и соответствующие свойства вероятности разорения. Он также показал, что если начальный капитал компании достаточно мал, наилучшей стратегией для страховщика является отказ от перестрахования. Shael [43] также изучал стратегию пропорционального перестрахования, но в отличие от Shmidli, рассматривал модель в дискретном времени. В качестве критерия оптимизации он использовал как максимизацию ожидаемой полезности, так и минимизацию вероятности разорения страховщика. Ему не удалось вывести явный вид оптимальной стратегии, но он смог найти условия, при которых отказ от перестрахования есть наиболее выгодное поведение страховой компании. После Shael поиском оптимального квотного перестрахования в дискретном времени, минимизирующего вероятность разорения страховщика, занимались Irgens and Paulsen [31], Chan and Zang [20], Wei and Hu [45], Diasparra and Romera [24]. Li and Cong [37] решали подобную задачу на конечном промежутке времени. Им удалось вывести необходимые условия существования оптимальной стратегии пропорционального перестрахования в многошаговой модели и доказать, что принцип динамического программирования может быть использован в задаче минимизации вероятности разорения. Eisenberg and Shmidli [27] рассматривали модель с непрерывным временем, где помимо пропорционального перестрахования используется и вливание капитала. Критерий оптимизации заключался в минимизации дополнительных вливаний. Используя принцип динамического программирования, им удалось найти явный вид оптимальной стратегии перестрахования.

Наряду с моделями, использующими эксцедентное перестрахование, в данной диссертации рассматривается модель функционирования страховой компании при наличии комбинированного договора перестрахования. Оптимизируются параметры договора, являющегося комбинацией пропорционального и непропорционального перестрахования. Мотивацией для исследования подобной модели является ее широкая применимость на практике и существование теоретических результатов, доказывающих оптимальность комбинированных программ перестрахования для некоторых критериев оптимизации. Например, Kaluszka [32, 33] для довольно широкого класса премий и критерия минимизации дисперсии получил, что оптимальным договором перестрахования является комбинация эксцедентного и квотного перестрахования. В отличие от Kaluszka, мы рассматриваем критерий минимизации ожидаемых дополнительных издержек и устанавливаем для него оптимальную стратегию комбинированного перестрахования.

Из приведенного выше обзора литературы видно, что оптимальный вид договора перестрахования сильно зависит от выбранного критерия оптимизации и принципа подсчета премий. При этом нахождение явного вида параметров перестрахования является нетривиальной задачей, которая не имеет общего решения для всех критериев оптимизации.

Цели работы

Целями диссертационной работы являются:

- Исследование различных моделей страхования в дискретном времени при наличии непропорционального перестрахования. Нахождение стратегий перестрахования, минимизирующих ожидаемые дисконтированные дополнительные издержки, идущие на поддержание работы страховой компании. Изучение чувствительности оптимальной стратегии к флуктуациям параметров модели.

- Оценка устойчивости модели оптимального перестрахования по отношению к малым возмущениям в распределениях страховых требований. Исследование предельного поведения капитала страховщика при использовании стратегии оптимального вида.

- Нахождение оптимального договора перестрахования, минимизирующего издержки страховщика, для моделей страхования, использующих комбинированные договоры перестрахования.

Научная новизна работы

Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

- Для многошаговой модели страхования с вливанием капитала и эксцедентным перестрахованием найдена оптимальная стратегия перестрахования, минимизирующая ожидаемые дисконтированные вливания капитала. Доказана устойчивость минимальных вливаний к возмущениям в распределении страховых требований. Получена асимптотическая оценка погрешности вычислений оптимальных параметров модели.

- Установлена оптимальная стратегия перестрахования в многошаговой модели с банковскими займами и эксцедентным перестрахованием. Проведена оценка чувствительности управляющих параметров модели к флуктуациям коэффициентов нагрузки на премии страховщика и перестраховщика. Доказаны предельные теоремы для процесса капитала страховщика.

- Для модели с комбинированным перестрахованием доказано, что при различных соотношениях на параметры модели оптимальным поведением страховщика является заключение либо чисто квотного, либо чисто эксцедентного договора перестрахования, либо отказ от услуг перестраховщика.

Методы исследования

В работе используются классические методы теории вероятностей и случайных процессов; аналитические методы; методы динамического программирования; модифицированный метод анализа чувствительности Соболя; методы теории оптимизации и выпуклого анализа.

Практическая и теоретическая значимость работы

Результаты диссертация носят теоретический характер. Они могут быть полезны специалистам, занимающимся исследованиями в сфере актуарной математики и теории перестрахования.

Краткое содержание диссертации

Настоящая диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Нумерация утверждений, перечисленных ниже, совпадает с их нумерацией в соответствующих главах.

Во **введении** определены основные объекты исследования, представлен краткий исторический обзор результатов, а также приведено краткое содержание данной диссертации.

В **главе 1** рассматриваются модели функционирования страховой компании в дискретном времени в течение n лет.

Предполагается, что суммы совокупных годовых требований по страховым случаям образуют последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $\{X_i\}_{i\geq 1}$ с функцией распределения F, плотностью распределения f и конечным математическим ожиданием γ. В начале каждого года от клиентов поступают премии размера $c > 0$, а конце года страховщик производит выплаты по требованиям, поступившим в течение этого года. Для стабилизации своей работы компания использует различные финансовые инструменты.

Раздел 1.1 посвящен модели страхования, в рамках которой применяются такие инструменты, как вливание капитала и эксцедентное перестрахование. Вливания производятся для поддержания капитала компании не ниже фиксированного уровня a и влекут возникновение дополнительных издержек. Премии страховщика и перестраховщика рассчитываются по принципу среднего с нагрузкой безопасности. Для рассматриваемой модели решается задача минимизации ожидаемых дисконтированных дополнительных издержек путем выбора оптимальных параметров перестрахования. Полагается, что параметр перестрахования (в случае эксцедентного договора — уровень собственного удержания) может корректироваться каждый год.

Пусть u — начальный капитал компании, l и m — коэффициенты нагрузки на премии страховщика и перестраховщика соответственно.

В разделе 1.1.1 рассматривается одношаговая модель, соответствующая случаю $n =$

1. Пусть X — размер поступивших за год требований, z — уровень собственного удержания, тогда премии страховщика с учетом перестрахования имеют вид

$$c(z) = l\gamma - m\mathbb{E}(X-z)^+,$$

а ожидаемые издержки равны

$$H_1(u,z) = \mathbb{E}J(u,z),$$

где $J(u,z) = (\min(X,z) - e(u,z))^+,\ e(u,z) = u - a + c(z)$.

Нижеследующие теоремы 1.1 - 1.3 содержат в себе утверждения об оптимальном уровне собственного удержания $z_1(u)$ и минимальных издержках $h_1(u) = \inf_{z>0} H_1(u,z)$ для одношагового случая. В их формулировках используются следующие обозначения

$$g(z) = z - c(z), \quad z_* = F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right), \quad u_* = a + z_* - l\gamma, \quad u_1^* = a + g(z_*),$$

$$D_1 = \{(l,m)|a > u_1^*\}, \quad D_2 = \{(l,m)|u_* < a \le u_1^*\}, \quad D_3 = \{(l,m)|a \le u_*\},$$

$$z_{r1}(u) - \text{наибольший корень уравнения } g(z) = u - a.$$

Теорема 1.1. *Если $(l,m) \in D_1$, то минимальные ожидаемые издержки за год $h_1(u)$ равны 0 для любого начального капитала $u \ge a$.*

Оптимальным уровнем собственного удержания при этом является $z_1(u) = z_{r1}(u)$.

Более того, $z_1(u)$ является выпуклой вверх возрастающей функцией и $z_1'(u) \to 1$ при $u \to \infty$.

Теорема 1.2. *Если $(l,m) \in D_2$, то*

1) $h_1(u) = 0$ при $u \ge u_1^*$. Оптимальным уровнем собственного удержания в этом случае является функция $z_1(u) = z_{r1}(u)$. Более того, $z_1(u_1^*) = z_*$ и $z_1'(u) \to \infty$ при $u \searrow u_1^*$.

2) При $u \in [a, u_1^*)$ оптимальный уровень $z_1(u) = z_0(u)$, где $z_0(u)$ — единственный корень уравнения $e(u,z) = z_*$. Функция $z_0(u)$ является убывающей выпуклой вниз, $z_0(u) \to z_*$ и $z_0'(u) \to -1$ при $u \nearrow u_1^*$.

Теорема 1.3. *Если $(l,m) \in D_3$, то*

1) при $u \ge u_1^*$ и при $u \in (u_*, u_1^*)$ минимальные ожидаемые издержки $h_1(u)$ и оптимальный уровень собственного удержания $z_1(u)$ вычисляются, как в пунктах 1) и 2) теоремы 1.2 соответственно.

2) Если же $u \in [a, u_*]$, оптимальной стратегией будет отказ от услуг перестраховщика, то есть $z_1(u) = \infty$.

Для доказательства перечисленных выше теорем устанавливается справедливость лемм 1.1 - 1.4, содержащих утверждения о свойствах функций $c(z), g(z)$ и множеств $D_i, i = \overline{1,3}$. Следствие 1.1 дает представление о виде производной функции минимальных издержек $h_1(u)$.

Далее **в разделах 1.1.2 - 1.1.3** рассматривается многошаговая модель, соответствующая случаю $n > 1$. Пусть $z_k(u)$ — оптимальный уровень собственного удержания, действующий на первом шаге k-шагового процесса с начальным капиталом u. *Стратегией перестрахования*, рассчитанной на n лет, будем называть набор функций $\{z_k\}_{k=1}^n$. Решается задача минимизации ожидаемых дисконтированных дополнительных издержек $h_n(u)$ за n-летний промежуток времени и устанавливается оптимальная стратегия перестрахования, при которой достигается минимум.

В разделе 1.1.2 доказываются вспомогательные леммы 1.5-1.8 о свойствах функции минимальных издержек $h_n(u)$, которая согласно принципу оптимальности Беллмана удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$h_n(u) = \inf_{z>0} \left[H_1(u,z) + \alpha \mathbb{E} h_{n-1} \left(\max(a, u + c(z) - \min(z, X)) \right) \right],$$

где α — коэффициент дисконтирования, $0 < \alpha < 1$, X — размер совокупных требований за n-ый год, z — уровень собственного удержания в этот год.

Раздел 1.1.3 включает в себя следующие теоремы, устанавливающие оптимальную стратегию перестрахования в n-шаговой модели.

Теорема 1.4. *Если $(l,m) \in D_1$, то минимальные ожидаемые издержки за n лет $h_n(u)$ равны 0 для любого начального капитала $u \geq a$ и $n \geq 1$.*

Оптимальный уровень собственного удержания $z_n(u)$ на первом шаге n-шагового процесса функционирования компании равен $z_{r1}(u)$ для любого $n \geq 1$.

Теорема 1.5. *Если $(l,m) \in D_2 \cup D_3$, то минимальные ожидаемые издержки за n лет $h_n(u)$ равны 0 при начальном капитале $u \geq u_n^*$, где $u_n^* = a + ng(z_*)$.*

Оптимальный уровень собственного удержания на первом шаге n-шагового процесса равен $z_n(u) = z_1(u - (n-1)g(z_*))$ для $u \geq u_n^*$.

Теорема 1.6. *Если $(l,m) \in D_2 \cup D_3$, то при $u \in (\max(a, u_*), u_1^*)$ оптимальный уровень собственного удержания $z_n(u)$ является выпуклой вниз убывающей функцией, более того, $z_n(u) > z_1(u)$ и $z_n'(u) = -(c'(z_n(u)))^{-1}$.*

Далее будем использовать обозначение $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

Теорема 1.7. *Если $(l,m) \in D_2$, то оптимальный уровень собственного удержания на первом шаге двухшагового процесса при $u \in (u_1^*, u_2^*)$ имеет вид*

$$z_2(u) = \min\left(z_0(u - g(z_*)),\ \max(z_{r1}(u), z_0^{(21)}(u)) \right),$$

где $z_0(u)$ является корнем уравнения $e(u,z) = z_*$, а $z_0^{(21)}$ — корнем уравнения

$$1 - (m-\alpha)\overline{F}(e(u,z)) - \alpha \overline{F}(e(u - g(z_*), z)) = 0.$$

Теорема 1.8. *Если* $(l, m) \in D_2$, *то минимальные ожидаемые дисконтированные издержки* $h_n(u)$ *сходятся равномерно по* u *при* $n \to \infty$.

Численные примеры, иллюстрирующие вид оптимальной стратегии перестрахования и минимальных издержек, приведены в **разделе 1.1.4**

Раздел 1.2 посвящен модели страхования с банковскими займами и эксцедентным перестрахованием. Поступление премий и требований по страховым случаям происходит по такому же принципу, как и в модели из раздела 1.1. При нехватке собственных средств для погашения требований, страховщик обращается в банк, чтобы взять займ в размере недостающей суммы под процент r, $0 < r < 1$. Причем предполагается, что компания сама возвращает величину займа, используя для этого будущие премии, а вот проценты по займу погашают акционеры. Поэтому целью страховщика является минимизация ожидаемых процентов по займам путем выбора оптимальной стратегии перестрахования (определение стратегии совпадает с приведенным ранее). Капитал компании в данной модели может принимать любые значения, в том числе отрицательные.

Теоремы 1.9-1.11 из **раздела 1.2.1** устанавливают вид оптимальной стратегии перестрахования и минимальных издержек для одношаговой и многошаговой моделей.

В **разделе 1.2.2** вводится метод анализа чувствительности функции к флуктуации параметров, являющийся модификацией метода Соболя из [8]. В **разделе 1.2.3** в предположении, что нагрузочные коэффициенты l, m на премии страховщика и перестраховщика соответственно являются равномерно распределенными случайными величинами, исследуется чувствительность функции $u_1^* = g(z_*)$, влияющей на вид оптимальной стратегии перестрахования, к изменению в значениях l, m. Приводятся численные результаты.

Глава 2 посвящена оценке качества оптимальных моделей, найденных в главе 1, и исследованию предельного поведения капитала страховой компании.

В разделе 2.1 исследуется устойчивость минимальных ожидаемых дисконтированных издержек к изменению в распределении страховых требований.

Постановка задачи приводится в **разделе 2.1.1**. Пусть $h_{n_X}(u)$ и $h_{n_Y}(u)$ — минимальные издержки за n-летний промежуток функционирования компании с начальным капиталом u в предположении, что страховые требования подчиняются законам распределения $law(X)$ и $law(Y)$ соответственно. Тогда в рамках модели с вливанием капитала и перестрахованием задача об устойчивости формулируется следующим образом. Требуется оценить величину $\Delta_n = \sup_{u>a} |h_{n_X}(u) - h_{n_Y}(u)|$ при условии, что расстояние Канторовича $\kappa(X, Y)$ между случайными величинами X и Y имеет конечное значение ρ. Согласно определению из [39] $\kappa(X, Y) = \int_{\mathbb{R}} |F_X(t) - F_Y(t)| dt$, где F_X, F_Y — функции распределения X и Y соответственно.

Результат об устойчивости минимальных издержек в одношаговой модели сформулирован в теореме 2.1 из **раздела 2.1.2**.

Теорема 2.1. *Пусть X, Y — неотрицательные случайные величины с конечными математическими ожиданиями, причем $\varkappa(X,Y) = \rho$. Тогда*

$$\Delta_1 \leq (1 + l + m)\rho,$$

где $l, m, 1 < l < m$ — коэффициенты нагрузки на премии страховщика и перестраховщика соответственно.

Для доказательства вышеприведенной теоремы устанавливается справедливость лемм 2.1-2.3.

В **разделе 2.1.3** с помощью леммы 2.4 доказывается теорема 2.2 об устойчивости минимальных издержек в многошаговой модели.

Лемма 2.4. *Для любого $n \geq 0$, любого $u \geq a$ и коэффициента дисконтирования $0 < \alpha < 1$ имеет место оценка*

$$|h_n(u + \Delta u) - h_n(u)| \leq \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}\Delta u.$$

Теорема 2.2. *Пусть X, Y — неотрицательные случайные величины с конечными математическими ожиданиями, причем $\varkappa(X,Y) = \rho$. Тогда*

$$\Delta_n \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} - n\alpha^n\right)(1 + l + m)\rho,$$

где $\alpha \in (0,1)$ — коэффициент дисконтирования; $l, m,\ 1 < l < m,$ — нагрузочные факторы на премии страховщика и перестраховщика соответственно.

В **разделе 2.2** изучается, как сильно замена теоретической функции распределения требований на эмпирическую при вычислении оптимальных параметров модели влияет на их значение.

В **разделе 2.2.1** приводится оценка погрешности при вычислении минимальных ожидаемых издержек. Пусть F — истинная функция распределения совокупных годовых требований, а F_N — эмпирическая функция, построенная по N наблюдениям. Оценивается случайная величина $\eta_N = \sup_u |h_F(u) - h_{F_N}(u)|$, где $h_F(u)$ и $h_{F_N}(u)$ — минимальные ожидаемые издержки за n лет, рассчитанные с учетом того, что совокупные годовые требования имеют функцию распределения F и F_N соответственно.

Теорема 2.3. *Если существует $q > 2$ такое, что $\int_{\mathbb{R}} |x|^q dF(x) < \infty$, то для любого $N \geq 1$, $y \in (0, \infty)$ и $0 < \theta < 1$ верна следующая оценка*

$$P\left(|\eta_N| \leq y\right) \geq 1 - \theta \quad \textit{при} \quad y = C\sqrt{-\frac{\ln(\theta/c_1)}{c_2 N}},$$

где c_1, c_2, C - положительные константы, не зависящие от q, N, y.

В **разделе 2.2.2** получены оценки погрешностей, возникающих при вычислении характеристик оптимальной стратегии перестрахования. Основные результаты сформулированы в теореме 2.4.

Теорема 2.4. *Для любого $0 < \theta < 1$ асимптотические доверительные интервалы для z_{*,F_N}, u_{*,F_N} и u^*_{1,F_N} при $N \to \infty$ имеют вид*

$$P\left(z_{*,F_N} \in (z_{*,F} - y_{z_*,\theta}, z_{*,F} + y_{z_*,\theta})\right) \geq 1-\theta, \quad \text{где} \quad y_{z_*,\theta} = \sqrt{\frac{\ln(\theta/2)}{2f^2\left(F^{-1}(p)\right)N}},$$

$$P\left(u_{*,F_N} \in (u_{*,F} - y_{u_*,\theta}, u_{*,F} + y_{u_*,\theta})\right) \geq 1-\theta, \quad \text{где} \quad y_{u_*,\theta} = 2l\sqrt{\frac{DX_1}{N\theta}},$$

$$P\left(u^*_{1,F_N} \in (u^*_{1,F} - y_{u^*_1,\theta}, u^*_{1,F} + y_{u^*_1,\theta})\right) \geq 1-\theta, \quad \text{где} \quad y_{u^*_1,\theta} = 4m\sqrt{\frac{DX_1 + \mathbb{E}X_1^2}{N\theta}}.$$

В последней лемме символы F и F_N, стоящие в индексах после запятой, показывают, какая функция распределения используется при вычислении соответствующих величин.

Заключительный **раздел 2.3** главы 2 содержит результаты о предельном поведении капитала в модели с банковскими займами и перестрахованием. Пусть U_n — капитал страховщика в конце n-летнего промежутка функционирования компании.

В **разделе 2.3.1** устанавливается поведение капитала страховщика при константной стратегии перестрахования z и теоретически определяемом распределении требований. В теореме 2.5 с основными результатами используется обозначение $\tilde{X}_n = c(z) - \min(X_n, z)$, где X_n — страховые требования, поступившие в течение n-го года.

Теорема 2.5. *Для процесса капитала U_n, удовлетворяющего уравнению $U_n = U_{n-1} + \tilde{X}_n$, верны следующие утверждения.*

1) Если $\mathbb{E}X_1 < \infty$, то

$$\frac{U_n - u}{n} \to \mathbb{E}\tilde{X}_1 \quad \text{п.н.},$$

2) Если $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$, то

$$\frac{U_n - u - n\mathbb{E}\tilde{X}_1}{\sqrt{nD\tilde{X}_1}} \to^d \mathcal{N}(0,1).$$

3) Если $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$, $\mathbb{E}\tilde{X}_1^2 > 0$ и выполняется $(l-m)\mathbb{E}X_1 + (m-1)\mathbb{E}\min(X_1, z) = 0$, то

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{U_n - u}{\psi(n)} = 1 \quad \text{п.н.},$$

где $\psi(n) = \sqrt{2\mathbb{E}\tilde{X}_1^2 n \ln\ln n}$.

В **разделе 2.3.2** получены результаты о поведении капитала страховщика U_n при эмпирически определяемом распределении требований. То есть в предположении, что уровень собственного удержания на i-ом шаге рассчитывается как $z = F^{-1}_{i-1}\left(\frac{m}{m-1}\right)$, где F_{i-1} —

эмпирическая функция распределения, построенная по наблюдениям $X_1, ..., X_{i-1}$. С помощью утверждения, полученного в лемме 2.8, доказана следующая теорема.

Теорема 2.6. *Пусть*

$$A_n = u + (c - m\mathbb{E}X_1)n + m\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\min\left(X_i, F_{i-1}^{-1}(p)\right) - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\min(X_i, F^{-1}(p)),$$

тогда

$$\frac{U_n - A_n}{\sqrt{n}\ln^2 n} \to 0 \quad \text{п.н.}, \quad n \to \infty.$$

Замечание . *В типичной ситуации слагаемое A_n имеет порядок n, поэтому из теоремы 2.6 будет следовать*

$$U_n = A_n\left(1 + o\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad n \to \infty.$$

В главе 3 рассматривается модель работы страховой компании с начальным капиталом u, использующей комбинацию пропорционального и непропорционального перестрахования. Как и в разделе 1.2, страховщик стремится минимизировать процентные выплаты по банковским займам путем выбора оптимальной стратегии перестрахования.

Раздел 3.1 содержит в себе три подраздела. Описание модели с комбинированным договором перестрахованием содержится в **разделе 3.1.1**. Пусть X — совокупный размер требований за год, причем случайная величина X положительна, имеет абсолютно непрерывную функцию распределения F и конечное математическое ожидание. Пусть β, $\beta \in (0, 1]$ — параметр квотного договора перестрахования, $B > 0$ — эксцедентного. Тогда согласно комбинированной программе перестрахования ответственность страховщика равняется $\min(\beta X, B)$. Полагается, что страховщику выплачивается комиссия по квотному договору перестрахования в размере $k(1-\beta)c$, где $k \in (0, 1)$ — коэффициент комиссии, $c > 0$ — премии компании в начале периода. Премии эксцедентного перестрахования рассчитываются по принципу среднего с нагрузкой безопасности $m > 1$. Таким образом, премии страховщика с учетом перестрахования имеют вид $c(\beta, B) = \beta c(1-k) + kc - m\mathbb{E}[\beta X - B]^+$.

В разделе 3.1.2 в лемме 3.2 доказаны утверждения о свойствах выпуклости функции премий $c(\beta, B)$ и вспомогательной функции $g(\beta, B) = B - c(\beta, B)$. Доказательство опирается на результат, полученный в лемме 3.1

Лемма 3.2. *На множестве $\Gamma = \{(\beta, B) : (\beta, B) \in (0, 1] \times (0, \infty]\}$*
а) функция премий $c(\beta, B)$ является выпуклой вверх;
б) функция

$$g(\beta, B) := B - c(\beta, B)$$

является выпуклой вниз.

В **разделе 3.1.3** приведены определения и результаты теории оптимизации, использующиеся в дальнейших секциях при доказательстве теорем.

Раздел 3.2 посвящен поиску оптимальной стратегии перестрахования с целью минимизации выплат по банковским займам, где выплаты определяются как $H(u,\beta,B) = \mathbb{E}[\min(\beta X, B) - u - c(\beta,B)]^+$.

В **разделе 3.2.1** в лемме 3.3 решена задача оптимизации

$$g(\beta,B) \to \inf_{(\beta,B)}, \quad -c(\beta,B) \le 0, \quad (\beta,B) \in \Gamma. \tag{$*$}$$

Обозначения $b_* = \overline{F}^{-1}\left(\frac{1}{m}\right)$ и $\Gamma_0 = \{(\beta,B) \mid (\beta,B) \in (0,1] \times (0,\infty],\ c(\beta,B) \ge 0\}$ используются в нижеследующей формулировке.

Лемма 3.3. *Справедливы следующие утверждения.*

Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1,b_*) > 0$, *то решением задачи* $(*)$ *является точка* $(\beta,B) = (1,b_*)$, *а соответствующее минимальное значение* $\min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B)$ *равно*

$$g(1,b_*) = -\left(c - m\int_{b_*}^{\infty} x\,dF(x)\right) = -\frac{\partial c}{\partial \beta}(1,b_*) - kc.$$

Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1,b_*) = 0$, *то решением задачи* $(*)$ *является множество* $\{(\beta,B) \in \Gamma | \frac{B}{\beta} = b_*\}$, *при этом* $\min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B) = -kc$.

Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1,b_*) < 0$, *то решением задачи* $(*)$ *является* $(\beta,B) = (0,0)$, *и при этом* $\min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B) = -kc$.

Задача минимизации выплат по займам путем выбора оптимальной комбинированной стратегии перестрахования,

$$H(u,\beta,B) \to \inf_{(\beta,B)}, \quad c(\beta,B) \ge 0, \quad (\beta,B) \in \Gamma,$$

решается в **разделах 3.2.2 - 3.2.3**. Множество Γ_0 разбивается на $\Gamma_u^r, \Gamma_u^m, \Gamma_u^l$ такие, что

$$\begin{aligned}
\Gamma_u^r &:= \{(\beta,B) \in \Gamma_0,\ g(\beta,B) < u\},\\
\Gamma_u^m &:= \{(\beta,B) \in \Gamma_0,\ -c(\beta,B) \le u \le g(\beta,B)\},\\
\Gamma_u^l &:= \{(\beta,B) \in \Gamma_0,\ -c(\beta,B) > u\}.
\end{aligned}$$

В леммах 3.4, 3.6, 3.9 для всех возможных значений капитала u находятся минимальные значения функции $H(u,\beta,B)$ на каждом из множеств $\Gamma_u^r, \Gamma_u^m, \Gamma_u^l$. Затем, пользуясь результатами этих лемм, находятся оптимальные параметры перестрахования и соответствующие им значения минимальных издержек для любого начального капитала. Основные результаты содержатся в теоремах 3.3-3.5. Леммы 3.5, 3.7, 3.8 носят вспомогательный характер.

Теорема 3.3. *Для любого* $u \geq \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B)$ *минимальные ожидаемые издержки,* $\min\limits_{\Gamma_0} H(u, \beta, B)$, *равны нулю и достигаются на множестве пар* $\{(\beta, B) \in \Gamma \mid g(\beta, B) \leq u\}$.

Теорема 3.4. *Для любого* $u < -c$ *верны следующие утверждения о минимальных ожидаемых издержках* $\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B)$ *и оптимальной стратегии перестрахования.*

1) Если $c(1-k) < \mathbb{E}X$, *то оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование. Издержки при этом равны*

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = -u - kc.$$

2) Если $c(1-k) = \mathbb{E}X$, *то оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование или чисто квотное перестрахование с параметром* $\beta > 0$. *Издержки при этом равны*

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = -u - kc.$$

3) Если $c(1-k) > \mathbb{E}X$, *то наилучшей стратегией для страховщика будет отказ от услуг перестрахования. Издержки при этом равны*

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = \mathbb{E}X - u - c.$$

Теорема 3.5. *Для* $-c \leq u < \min_{\Gamma_0} g(\beta, B)$ *верны следующие утверждения о минимальных ожидаемых издержках* $\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B)$ *и оптимальной стратегии перестрахования.*

1. *Если* $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) < 0$, *то*

   (i) *При* $c(1-k) < \mathbb{E}X$ *оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование. Издержки при этом равны*

   $$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = -u - kc.$$

   (ii) *При* $c(1-k) = \mathbb{E}X$ *оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование или чисто квотное перестрахование с параметром* $\beta \in (0, \beta_u]$, *где* $\beta_u = \frac{-u-kc}{c(1-k)}$. *Издержки при этом равны*

   $$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = -u - kc.$$

   (iii) *При* $c(1-k) > \mathbb{E}X$ *наилучшей стратегией для страховщика с начальным капиталом* $u \in [-c, u_m]$ *является отказ от услуг перестраховщика, при этом минимальные издержки равны*

   $$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = \mathbb{E}(X - u - c)^+, \quad u \in [-c, u_m],$$

а для страховщика с исходным капиталом $u \in [u_m, -kc)$ *— чисто квотное с параметром* $\beta_u^0 = \frac{u+kc}{u_m+kc}$ *и издержками*

$$\min_{\Gamma_0} H(u,\beta,B) = (-u-kc)\overline{F}\left(u_m+c\right), \quad u \in [u_m, \min_{\Gamma_0} g(\beta,B)],$$

где u_m *- корень уравнения*

$$\overline{F}(u+c)c(1-k) - \int_{u+c}^{\infty} xf(x)dx = 0.$$

2. *Если* $\frac{\partial c}{\partial \beta}\left(1,b_*\right) \geq 0$, *то* $c(1-k) \geq \mathbb{E}X$ *и наилучшей стратегией для страховщика с начальным капиталом* $u \in [-c, -c+b_*]$ *является отказ от перестрахования, минимальные издержки при этом равны*

$$\min_{\Gamma_0} H(u,\beta,B) = \mathbb{E}\left(X-u-c\right)^+.$$

Для страховщика с исходным капиталом $u \in [-c+b_*, -kc]$ *оптимальной стратегией является чисто эксцедентный договор перестрахования с уровнем собственного удержания* B_*, *где* B_* *— корень уравнения*

$$m\mathbb{E}(X-B)^+ = u+c-b_*.$$

Соответствующие минимальные издержки равны

$$\min_{\Gamma_0} H(u,\beta,B) = \frac{1}{m}\left(-u+g\left(1,b_*\right)\right).$$

В **заключении** перечислены основные результаты диссертационной работы и возможные направления для дальнейших исследований.

Апробация диссертации

Результаты диссертации неоднократно докладывались автором на следующих научно-исследовательских семинарах:

- Большой семинар кафедры теории вероятностей под руководством академика РАН, профессора А.Н. Ширяева в 2013-2016 гг., механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

- Семинар «Проблемы теории запасов и страхования» под руководством доктора физико-математических наук, профессора Е.В. Булинской в 2013-2016 гг., кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- VIII Московская международная конференция по Исследованию Операций (ORM 2016), Москва, Россия, 2016.
- Международная конференция по стохастическим методам, Абрау-Дюрсо, Россия, 2016.
- The Tenth Bachelier Colloquium on Mathematical Finance and Stochastic Calculus, Metabief, France, 2016.
- The 16th Conference of Applied Stochastic Models and Data Analysis International Society (ASMDA 2015), Piraeus, Greece, 2015.
- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, Россия, 2013-2016 гг.

Публикации

Основные результаты диссертации содержатся в работах [48]- [59], представленных в конце списка литературы. Среди них три статьи в журналах из перечня ВАК.

Глава 1

Многошаговые модели перестрахования

В данной главе рассматриваются две модели функционирования страховой компании с дискретным временем. В обеих моделях полагается, что для уменьшения вероятности разорения страховщик пользуется услугами перестраховщика. В первой модели в качестве дополнительного финансового инструмента, стабилизирующего работу компании, страховщик использует денежные вливания, поступающие извне. Во второй модели при нехватке средств страховая компания обращается за займом в банк. Для каждой модели приводится оптимальная стратегия перестрахования, а именно стратегия, минимизирующая ожидаемые совокупные дополнительные расходы за все время функционирования компании.

§1.1 Модель с перестрахованием и вливанием капитала

Мы рассматриваем работу страховой компании в дискретном времени с начальным капиталом u. Предполагаем, что ежегодно поступающие от клиентов требования (страховые иски) образуют последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $\{X_i\}_{i\geq 1}$ с функцией распределения F, плотностью распределения f и конечным математическим ожиданием γ. Суммы, покрывающие страховые иски, выплачиваются в конце каждого года. В начале каждого года в страховую компанию поступают премии размера c, рассчитывающиеся по принципу среднего с коэффициентом нагрузки l, то есть

$$c = l\mathbb{E}X_1 = l\gamma, \quad l > 1. \tag{1.1}$$

В данной модели мы также полагаем, что если при удовлетворении поступивших требований капитал страховой компании опускается ниже фиксированного уровня a, то в тот же момент производятся дополнительные денежные вливания, восстанавливающие капитал до уровня a.

Каждый год страховщик использует непропорциональное перестрахование для минимизации совокупных денежных вливаний за все время работы компании. А именно, уровень собственного удержания z на следующий год фиксируется сразу после покрытия страховых требований за текущий год и вливания денежных средств (если таковые имели место). Согласно договору перестрахования при поступлении требований размера X страховщик выплачивает сумму $\min(X, z)$, в то время как перестраховщик возмещает сумму $\max(0, X - z) = (X - z)^+$. Премии, отдаваемые в перестрахование, также рассчитываются по принципу среднего, то есть равняются $m\mathbb{E}(X - z)^+$, где $m > 1$ — страховая нагрузка перестраховщика. Естественно полагать, что $m > l$, так как в противном случае страховая компания могла бы получить положительную прибыль при нулевом риске, переложив всю ответственность по выплатам на перестраховщика. Иными словами, на рынке финансовых услуг возникла бы арбитражная стратегия, мы же будем рассматривать случай безарбитражного рынка. Из вышесказанного вытекает, что годовые премии страховщика с учетом перестрахования $c(z)$ имеют вид

$$c(z) = c - m\mathbb{E}(X - z)^+ = l\gamma - m\mathbb{E}(X - z)^+. \tag{1.2}$$

Следовательно, капитал компании в начале n-го периода, обозначаемый далее U_n, удовлетворяет следующему уравнению

$$U_n = \max\left(U_{n-1} + c(z) - \min(X, z),\ a\right), \quad U_0 = u, \tag{1.3}$$

где X и z обозначают, соответственно, размер исков, поступивших в течение n-го года, и уровень собственного удержания в этот период. Заметим, что в силу наличия денежных вливаний, капитал страховщика в начале i-го года, $i \geq 2$, не может опуститься ниже уровня a. Поэтому естественно положить $u \geq a$.

1.1.1 Оптимальная стратегия перестрахования в одношаговой модели

Приступим к поиску оптимальной стратегии перестрахования в одношаговой модели. Пусть u, z, X – начальный капитал страховой компании, уровень собственного удержания и требования в рассматриваемый единичный промежуток времени, соответственно. Премии страховщика с учетом перестрахования рассчитываются согласно формуле (1.2). Тогда размер ожидаемых вливаний капитала в конце данного года будет выражаться с помощью функции

$$H_1(u, z) := \mathbb{E}J(u, z),$$

где

$$J(u, z) = (\min(X, z) - e(u, z))^+, \quad e(u, z) = u - a + c(z). \tag{1.4}$$

Величина $J(u, z)$ есть не что иное, как сумма, необходимая для поддержания капитала компании не ниже заданного уровня a. Перепишем функцию $H_1(u, z)$ в виде

$$H_1(u, z) = \int_0^z (x - e(u, z))^+ f(x)\, dx + (z - e(u, z))^+ \overline{F}(z), \tag{1.5}$$

где $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Нашей задачей является нахождение минимальных ожидаемых вливаний капитала

$$h_1(u) := \inf_{z>0} H_1(u, z) \tag{1.6}$$

и уровня собственного удержания z, при котором они достигаются. Так как мы исключаем сценарий развития событий, когда весь риск передается в перестрахование, то $z > 0$ в правой части (1.6). Отметим, что $z = \infty$ соответствует ситуации, когда страховщик не пользуется услугами перестраховщика.

Сначала исследуем свойства функции $c(z)$, которая характеризует зависимость премий страховщика от уровня собственного удержания и рассчитывается по формуле (1.2).

Лемма 1.1. *$c(z)$ является неубывающей выпуклой вверх функцией, такой что $c(0) = (l-m)\gamma$ и $c(z) \to l\gamma$ при $z \to \infty$.*

Доказательство. Согласно уравнению (1.2) $c(z) = l\gamma - m\mathbb{E}(X-z)^+$, где X — размер совокупных требований за год, в течение которого уровень собственного удержания равен z. Распишем, чему равна функция $\mathbb{E}(X-z)^+$ и ее производная. Но вначале отметим, что так как поступающие требования являются неотрицательными величинами, функция плотности $f(x)$ может быть отлична от нуля только при $x \geq 0$.

$$\mathbb{E}(X-z)^+ = \int\limits_z^\infty (x-z)f(x)\,dx = -\int\limits_z^\infty (x-z)\,d\overline{F}(x) =$$

$$= -(x-z)\overline{F}(x)|_z^\infty + \int\limits_z^\infty \overline{F}(x)\,dx = \int\limits_z^\infty \overline{F}(x)\,dx,$$

$$(\mathbb{E}(X-z)^+)'_z = \left(\int\limits_z^\infty \overline{F}(x)\,dx\right)'_z = -\overline{F}(z) < 0.$$

Следовательно, с ростом z среднее значение совокупных годовых убытков перестраховщика уменьшается. С учетом проделанных выкладок получаем

$$c'(z) = m\overline{F}(z) > 0, \quad c''(z) = -mf(z) < 0,$$

что означает рост премий страховщика при увеличении уровня собственного удержания и выпуклость вверх функции $c(z)$. Также несложно заметить, что $c(z) \to c(\infty) = l\gamma > 0$ при $z \to \infty$ и $c(0) = l\gamma - m\mathbb{E}X = (l-m)\gamma < 0$. □

Учитывая лемму 1.1, получим следующий график зависимости премий страховщика $c(z)$ от уровня собственного удержания z.

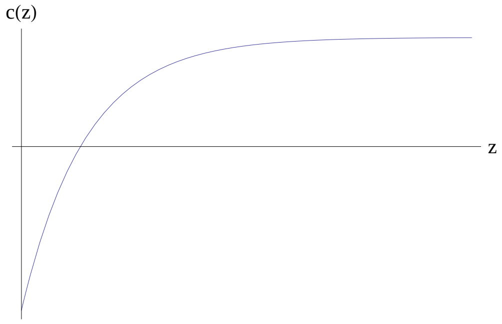


Рис. 1: Зависимость премий страховщика $c(z)$, вычисленных с учетом перестрахования, от уровня собственного удержания z.

Из (1.5) вытекает, что $H_1(u,z) = 0$ при $z - e(u,z) < 0$. Так как нашей задачей является поиск уровня собственного удержания z, минимизирующего ожидаемые издержки $H_1(u,z)$, исследуем поведение $z - e(u,z) = z - (u-a) - c(z)$ в зависимости от z. Для этого опишем свойства функции

$$g(z) := z - c(z). \tag{1.7}$$

Лемма 1.2. *$g(z)$ является выпуклой вниз функцией, минимум которой достигается в точке $z_* = F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)$.*

Доказательство. В силу того, что $g(z) = z - c(z)$ и $c'(z) = m\overline{F}(z)$, получаем

$$g'(z) = 1 - m\overline{F}(z).$$

Отсюда вытекает, что экстремум функции достигается в точке $z_* = F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)$. И так как $g''(z) = mf(z) > 0$, заключаем, что $g(z)$ является выпуклой вниз функцией и, следовательно, принимает минимальное значение в точке z_*. □

Чтобы определить, чему равняется минимум функции $g(z)$ при различных значениях нагрузочного коэффициента m на премии перестраховщика, рассмотрим $g(z_*)$ как функцию переменной m. Введем обозначение

$$q(m) := z_* - c(z_*) = z_* - l\gamma + m\mathbb{E}(X - z_*)^+.$$

Лемма 1.3. *$q(m)$ является возрастающей выпуклой вверх функцией, при этом существует единственное значение $m_0 > 1$ такое, что $q(m_0) = 0$.*

Доказательство. Из определения $q(m)$ и Леммы 1.2 вытекает, что

$$q(m) = z_* - c + m\mathbb{E}(X - z_*)^+ = F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right) - c + m\int\limits_{F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)}^{\infty} \overline{F}(x)\,dx.$$

Вычисляя производную по m, получим

$$q'(m) = \left(F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)\right)' + \int\limits_{F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)}^{\infty} \overline{F}(x)\,dx - m\overline{F}\left(F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)\right)\left(F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)\right)' =$$

$$= \left(F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)\right)' + \int\limits_{F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)}^{\infty} \overline{F}(x)\,dx - \left(F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)\right)' = \int\limits_{F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)}^{\infty} \overline{F}(x)\,dx > 0,$$

откуда следует, что $q(m)$ является возрастающей функцией. Далее, в силу возрастания функции $F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)$ при увеличении m получаем, что $q'(m)$ убывает по m, то есть $q(m)$ есть выпуклая вверх функция. Заметим, что

$$q(1) = -l\gamma + \int\limits_{0}^{\infty} \overline{F}(x)\,dx = -l\gamma + \gamma < 0,$$

и следовательно, существует единственное $m_0 > 1$ такое, что $q(m_0) = 0$. □

Далее, рассмотрим функцию $k(z)$ такую, что

$$g(z) = z - c(z) = z + m\int\limits_{z}^{\infty} \overline{F}(x)dx - l\gamma = k(z) - l\gamma.$$

Заметим, что $k(z) > z$ для любого $z > 0$ и $k(z) \to z$ при $z \to +\infty$. В силу того, что функции $g(z)$ и $k(z)$ отличаются только на константу, их первые и вторые производные совпадают, поэтому график $k(z)$ имеет следующий вид

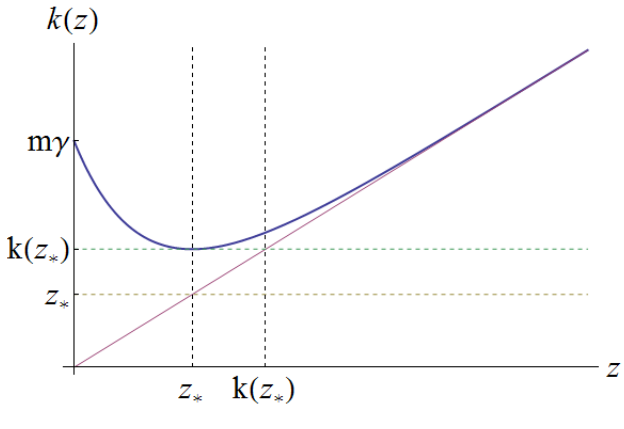


Рис. 2: График функции $k(z) = g(z) - l\gamma$.

Из графика на рисунке 2 и того, что $g(z_*) = k(z_*) - l\gamma$, несложно получить следующую зависимость минимума функции $g(z)$ от значения $l\gamma$

$l\gamma < z_*$	$g(z_*) > 0$
$z_* < l\gamma \le k(z_*)$	$g(z_*) \ge 0$
$k(z_*) < l\gamma < m\gamma$	$g(z_*) < 0$

Замечание 1. *Важно подчеркнуть, что справедливо неравенство $k(z_*) > z_*$ и $l\gamma$ всегда попадает в один из отрезков $(-\infty, z_*)$, $[z_*, k(z_*))$, $[k(z_*), m\gamma)$. Также стоит отметить, что $g(0) = -c(0)$ и $g(z) > -c(z)$ при $z > 0$.*

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} D_3 &:= \{(l,m) : \gamma < l\gamma \le z_*\}, \\ D_2 &:= \{(l,m) : z_* < l\gamma \le k(z_*)\}, \\ D_1 &:= \{(l,m) : k(z_*) < l\gamma < m\gamma\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Очевидно, что если для пар (l,m) выполняется неравенство $g(z_*) < 0$, то они входят в область D_1, если верно $g(z_*) \ge 0$, то содержатся в объединении $D_2 \cup D_3$ и при $z_* - c \ge 0$ принадлежат области D_3. Введем обозначения

$$u_* := a + z_* - l\gamma, \quad u_1^* := a + k(z_*) - l\gamma = a + g(z_*), \tag{1.9}$$

тогда верно следующие утверждение

Лемма 1.4. *Выполнение неравенств $a > u_1^*$, $u_* < a \le u_1^*$ и $a \le u_*$ равносильно тому, что $(l,m) \in D_1$, $(l,m) \in D_2$ и $(l,m) \in D_3$, соответственно.*

Доказательство. Справедливость утверждения сразу вытекает из определения множеств $D_i, i = 1,2,3$. □

Перейдем к формулировкам и доказательствам теорем, описывающих значение минимальных ожидаемых издержек и уровня собственного удержания при оптимальной стратегии перестрахования в одношаговой модели.

Через $z_{r1}(u)$ здесь и далее будем обозначать наибольший корень уравнения $g(z) = u - a$.

Теорема 1.1. *Если $(l,m) \in D_1$, то минимальные ожидаемые издержки за год $h_1(u)$ равны 0 для любого начального капитала $u \ge a$.*

Оптимальным уровнем собственного удержания при этом является $z_1(u) = z_{r1}(u)$.

Более того, $z_1(u)$ является выпуклой вверх возрастающей функцией и $z_1'(u) \to 1$ при $u \to \infty$.

Доказательство. В силу того, что при $x \in [0,z]$ имеет место неравенство

$$x - e(u,z) \;\le\; z - (u - a + c(z)) = a - u + g(z),$$

из (1.5) вытекает, что $H_1(u,z)=0$ при выполнении $g(z)\le u-a$. При $(l,m)\in D_1$ справедлива оценка $k(z_*)<l\gamma$, которая равносильна выполнению условия $g(z_*)<0$. Следовательно, при $u\ge a$ уравнение $g(z)=u-a$ имеет корень $z_{r1}(u)\ge z_*$.

Более того, если $u<a+(m-l)\gamma$, то существует и второй корень $z_{l1}(u)\le z_*$. Следовательно,

$$H_1(u,z)=0 \quad \text{для} \quad z\in[z_{l1}(u),z_{r1}(u)],$$

$$H_1(u,z)\ge(a-u+g(z))\overline{F}(z)>0 \quad \text{для} \quad z>z_{r1}(u).$$

В качестве оптимального уровня собственного удержания $z_1(u)$ мы выбираем $z_{r1}(u)$, так как при такой стратегии страховщик получит наибольшую прибыль (в силу того, что функция $c(z)$ не убывает согласно Лемме 1.1). Использую правила дифференцирования неявной функции, получаем

$$z_1'(u)=(1-m\overline{F}(z_1(u)))^{-1}>0, \tag{1.10}$$

$$z_1''(u)=-mf(z_1(u))(1-m\overline{F}(z_1(u)))^{-3}<0. \tag{1.11}$$

Таким образом, $z_1(u)$ является выпуклой вверх возрастающей функцией и $z_1'(u)\to 1$, так как $z_1(u)\to\infty$ при $u\to\infty$. □

Теорема 1.2. *Если $(l,m)\in D_2$, то*

1) $h_1(u)=0$ при $u\ge u_1^*$. Оптимальным уровнем собственного удержания в этом случае является функция $z_1(u)=z_{r1}(u)$, определенная в теореме 1.1. Более того, $z_1(u_1^*)=z_*$ и $z_1'(u)\to\infty$ при $u\searrow u_1^*$.

2) При $u\in[a,u_1^*)$ оптимальный уровень $z_1(u)=z_0(u)$, где $z_0(u)$ — единственный корень уравнения $e(u,z)=z_*$. Функция $z_0(u)$ является убывающей выпуклой вниз, $z_0(u)\to z_*$ и $z_0'(u)\to -1$ при $u\nearrow u_1^*$.

Доказательство. При $(l,m)\in D_2$ в силу леммы 1.4 выполняется неравенство $u_*<a\le u_1^*$, и значит, $g(z_*)\ge 0$.

1) Для начального капитала $u\ge u_1^*$ уравнение $g(z)=u-a$ имеет два корня $z_{l1}(u),z_{r1}(u)$, таких что $0\le z_{l1}(u)\le z_*\le z_{r1}(u)$, если верны соотношения $g(z_*)\le u-a\le(m-l)\gamma$, и единственный корень $z_{r1}(u)>z_*$, если $u-a>(m-l)\gamma$.

Пользуясь теми же соображениями, что и при доказательстве теоремы 1.1, получаем, что при $u\ge u_1^*$ оптимальным уровнем собственного удержания является $z_1(u)=z_{r1}(u)$. Несложно видеть, что $z_{l1}(u_1^*)=z_{r1}(u_1^*)=z_*$. Из (1.10) следует $z_1'(u_1^*)=+\infty$.

2) Рассмотрим теперь $a\le u<u_1^*$, в этом случае имеем $u-a<g(z_*)\le g(z)$ для любого $z>0$. Можем переписать уравнение (1.5) в виде

$$H_1(u,z)=\int_{e(u,z)^+}^{z}(x-e(u,z))f(x)\,dx+(a-u+g(z))\overline{F}(z). \tag{1.12}$$

Поэтому, если $e(u,z) \le 0$, получим

$$\frac{\partial H_1}{\partial z}(u,z) = \overline{F}(z)(1-m),$$

а при $e(u,z) > 0$ будем иметь

$$\frac{\partial H_1}{\partial z}(u,z) = \overline{F}(z)(1-m\overline{F}(e(u,z))).$$

Таким образом, для любого $z > 0$ справедливо следующее представление производной функции $H_1(u,z)$

$$\frac{\partial H_1}{\partial z}(u,z) = \overline{F}(z)G_1(u,z), \quad \text{где} \quad G_1(u,z) = 1-m\overline{F}(e(u,z)).$$

Отсюда сразу вытекает, что $G_1(u,z) = 0$, если

$$e(u,z) = z_*. \tag{1.13}$$

Последнее уравнение имеет единственное решение для любого $u \in [a, u_1^*]$, так как $l\gamma > z_*$ при $(l,m) \in D_2$. Следовательно, оно неявно определяет функцию $z_0(u)$. При $u = u_1^*$ получим

$$z_* = c(z_0(u_1^*)) + u_1^* - a = c(z_0(u_1^*)) + g(z_*),$$

следовательно

$$c(z_0(u_1^*)) = c(z_*) \quad \text{и} \quad z_0(u_1^*) = z_*.$$

Принимая во внимание (1.13) и правила дифференцирования неявной функции, получим

$$z_0'(u) = -(c'(z_0(u)))^{-1} < 0, \quad z_0''(u) = m^{-2}\overline{F}^{-3}(z_0(u))f(z_0(u)) > 0.$$

Последние неравенства позволяют заключить, что $z_0(u)$ является выпуклой вниз убывающей функцией и $z_0'(u_1^*) = -1$. Так как для $u \in [a, u_1^*]$ минимум функции $H_1(u,z)$ достигается при $z = z_0(u)$, то для значений капитала из данного промежутка оптимальным уровнем собственного удержания будет $z_1(u) = z_0(u)$. □

Теорема 1.3. *Если $(l,m) \in D_3$, то*

1) при $u \ge u_1^*$ и при $u \in (u_*, u_1^*)$ минимальные ожидаемые издержки $h_1(u)$ и оптимальный уровень собственного удержания $z_1(u)$ вычисляются, как в пунктах 1) и 2) теоремы 1.2 соответственно.

2) Если же $u \in [a, u_*]$, оптимальной стратегией будет отказ от услуг перестраховщика, то есть $z_1(u) = \infty$.

Доказательство. При $(l,m) \in D_3$ имеем $u_* \ge a$. То есть по теореме 1.2 при капитале $u \ge u_1^*$ оптимальный уровень собственного удержания $z_1(u)$ удовлетворяет уравнению $g(z_1(u)) = u - a$, а при $u \in (u, u_1^*)$ уравнению $e(u, z_1(u)) = z_*$.

Рассмотрим, что происходит при $u = u_*$. Опять же в силу теоремы 1.2 будет справедливо $e(u_*, z_1(u_*)) = z_*$, что с учетом (1.9) можно переписать в виде $c(z_1(u_*)) = l\gamma$. Следовательно, из свойств функции $c(z)$, описанных в лемме 1.1, вытекает $z_1(u_*) = \infty$. В силу того, что $c'(z) \to 0$ при $z \to \infty$, будет иметь место предел $z_1'(u) = -(c'(z_1(u)))^{-1} \to -\infty$ при $u \searrow u_*$.

Если $u \in [a, u_*)$, неравенство $e(u, z) < z_*$ справедливо для любого $z > 0$. Функция $c(z)$ является неубывающей, это влечет $z_1(u) = \infty$. Таким образом, отказ от перестрахования будет наиболее выгодной стратегией для страховщика при $u \in [a, u_*)$. □

Следствие 1.1. *Если $(l, m) \in D_3$, справедливо следующее выражение для производной минимальных ожидаемых издержек*

$$h_1'(u) = \begin{cases} -\overline{F}(l\gamma + u - a), & u \in [a, u_*), \\ -m^{-1}, & u \in [u_*, u_1^*), \\ 0, & u > u_1^*. \end{cases}$$

Доказательство. В теореме 1.3 был установлен вид оптимального уровня собственного удержания $z_1(u)$. Следовательно, $h_1(u) = H_1(u, z_1(u)) = H_1(u, \infty)$ при $u \le u_*$. В предположении, что $\gamma < \infty$, получим $z\overline{F}(z) \to 0$ при $z \to \infty$, а также $g(z)\overline{F}(z) \to 0$. Таким образом, $H_1(u, \infty) = \int_{l\gamma+u-a}^{\infty} (a - u - l\gamma + x) f(x)\, dx$. Откуда вытекает $h_1'(u) = -\overline{F}(l\gamma + u - a)$ при $u \in [a, u_*]$.

Видим, что для $u \in [u_*, u_1^*)$ можно записать следующее равенство

$$h_1'(u) = \frac{\partial H_1}{\partial u}(u, z_1(u)) + \frac{\partial H_1}{\partial z}(u, z_1(u)) z_1'(u). \tag{1.14}$$

По определению $z_1(u)$ второе слагаемое в правой части уравнения (1.14) равно 0. Более того, уравнение (1.12) влечет равенство $h_1'(u) = -m^{-1}$ при $u \in [u_*, u_1^*)$, так как

$$\frac{\partial H_1}{\partial u}(u, z_1(u)) = -\overline{F}(e(u, z_1(u))) = -\overline{F}(z_*).$$

И наконец, $h_1'(u) = 0$ при $u > u_1^*$ в силу того, что $h_1(u) = 0$ при $u \ge u_1^*$. □

Замечание 2. *Аналогичные следствия для областей D_2 и D_1 очевидным образом вытекают из следствия 1.1, поэтому отдельные формулировки для них не приводятся.*

1.1.2 Уравнение Беллмана

Рассмотрим теперь ситуацию, когда компания функционирует в течение $n \ge 2$ лет. Согласно предположениям, сделанным относительно модели страхования с вливанием капитала и перестрахованием, капитал страховщика в конце n-летнего промежутка U_n удовлетворяет соотношению (1.3):

$$U_n = \max\left(U_{n-1} + c(z) - \min(X, z),\ a\right), \quad U_0 = u,$$

где z — уровень собственного удержания, действующий в последний год, $c(z)$ — премии страховщика, определенные с помощью (1.2), X — размер совокупных требований за n-ый период, u — начальный капитал.

Мы хотим минимизировать ожидаемые дисконтированные издержки за n-летний промежуток времени и установить оптимальную стратегию перестрахования, при которой минимум достигается.

В нашей модели страховщик может менять уровень собственного удержания в начале каждого года. Обозначим через $z_k(u)$ оптимальный уровень собственного удержания, действующий на первом шаге k-шагового процесса с начальным капиталом u. *Стратегией перестрахования*, рассчитанной на n лет, будем называть набор функций $\{z_k\}_{k=1}^n$.

Интересующая нас функция, описывающая размер дополнительных вливаний за n лет, дисконтированных к начальному моменту, выглядит следующим образом

$$\mathcal{L}_n(u, z_1, \ldots, z_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^k J(U_{k-1}, z_{n-k+1}) \;\middle|\; U_0 = u\right),$$

где $z_{n-k+1} = z_{n-k+1}(U_{k-1})$ — уровень собственного удержания в k-ый период, $J(U_{k-1}, z_{n-k+1})$ — вливания капитала (определяющиеся согласно (1.4)) за k-ый период. Параметр α является коэффициентом дисконтирования, $0 < \alpha < 1$. Поясним, какой смысл несет индекс $n-k+1$. Если действовать согласно n-летней стратегии, то к k-му году у нас останется $n-k+1$ лет, для которых нужно будет выбрать уровень собственного удержания. Получается, что в k-ый год мы определяем уровень собственного удержания на первом шаге $n-k+1$-шагового процесса.

С учетом вышесказанного, минимальные ожидаемые дополнительные вливания за n лет будут определяться как

$$h_n(u) = \inf_{z_k > 0,\ k=\overline{1,n}} \mathcal{L}_n(u, z_1, \ldots, z_n). \tag{1.15}$$

В соответствии с принципом оптимальности Беллмана (Беллман [1]) функция $h_n(u)$, заданная в (1.15), удовлетворяет следующему рекуррентному уравнению

$$h_n(u) = \inf_{z>0}\left[H_1(u,z) + \alpha\mathbb{E}h_{n-1}\left(\max(a, u + c(z) - \min(z, X))\right)\right]. \tag{1.16}$$

Так как $h_0(u) \equiv 0$, то $h_1(u) = \inf_{z>0} H_1(u,z)$, и поведение этой функции мы уже исследовали в предыдущей секции.

Покажем, что инфимум в правой части (1.16) достигается, и $h_n(u)$ является непрерывной функцией начального капитала u. Для этого нам потребуется доказать несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1.5. *Фунуция $h_n(u)$, удовлетворяющая уравнению* (1.16), *является невозрастающей.*

Доказательство. Будем проводить доказательство по индукции. При $n = 0$ имеем $h_0(u) = 0$. Пусть $h_{n-1}(u)$ — невозрастающая функция аргумента u, покажем, что это утверждение останется справедливым при замене $n-1$ на n.

Функция $\max(u + c(z) - \min(\xi, z), a)$ не убывает по u, поэтому функция $h_{n-1}(\max(u + c(z) - \min(\xi, z), a))$ и математическое ожидание от нее являются невозрастающими.

Далее, $J(u, z) = (\min(\xi, z) - (u - a) - c(z))^+$ — невозрастающая функция u, следовательно, таковой является и $H_1(u, z) = \mathbb{E}J(u, z)$.

Из вышесказанного вытекает, что сумма, стоящая под знаком инфимума в (1.16), монотонна по u при любом фиксированном z. Отсюда получаем, что и инфимум по z будет монотонно не возрастать. □

Лемма 1.6. *Функция $H_1(u, z)$ непрерывна по паре аргументов (u, z).*

Доказательство. Напомним, что согласно (1.4)

$$H_1(u, z) = \mathbb{E}J(u, z) = \int_0^\infty (a - u - c(z) + \min(x, z))^+ dF(x).$$

Введем обозначение

$$J_x(u, z) := (a - u - c(z) + \min(x, z))^+.$$

Для любого $z \geq 0$ и для любого $u \geq a$ имеют место оценки

$$a - u - c(z) \leq A, \quad \min(x, z) \leq x,$$

где A является константой, $0 < A < \infty$. Значит, $|J_x(u, z)| \leq A + x$. Так как $J_x(u, z)$ непрерывна по (u, z), то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что для любого $\tilde{z} \geq 0, \tilde{u} \geq a$

$$\lim_{\substack{z \to \tilde{z} \\ u \to \tilde{u}}} H_1(u, z) = \lim_{\substack{z \to \tilde{z} \\ u \to \tilde{u}}} \mathbb{E}J(u, z) = \mathbb{E} \lim_{\substack{z \to \tilde{z} \\ u \to \tilde{u}}} J(u, z) = \mathbb{E}J(\tilde{u}, \tilde{z}) = H_1(\tilde{u}, \tilde{z}).$$

Таким образом, функция $H_1(u, z)$ непрерывна по паре аргументов (u, z). □

Лемма 1.7. *Для любого n существует u_n такое, что для любого $u \geq u_n$ выполняется $h_n(u) = 0$. В качестве u_n можно взять*

$$u_n = a + n(z_* - c(z_*)).$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

Для любого $u \geq a$ имеем $h_0(u) = 0$.

Предположим, что существует u_{n-1} такое, что для любого $u \geq u_{n-1}$ выполняется $h_{n-1}(u) = 0$. Докажем, что это утверждение останется справедливым при замене $n - 1$ на n. В силу (1.16) имеют место следующие неравенства

$$
\begin{aligned}
0 \le h_n(u) \le & \left[\mathbb{E}J(u,z) + \alpha \mathbb{E}h_{n-1}(\max(u + c(z) - \min(X,z), a))\right]\Big|_{z=z_*} = \\
= & \int\limits_0^{z_*} (a - u - c(z_*) + x)^+ f(x)dx + (a - u - c(z_*) + z_*)^+ (1 - F(z_*)) + \\
+ & \alpha \int\limits_0^{z_*} h_{n-1}(\max(u + c(z_*) - x, a)) f(x) dx + \\
+ & \alpha h_{n-1}(\max(u + c(z_*) - z_*, a))(1 - F(z_*)).
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

Далее заметим, что

1) Верно равенство $(a - u - c(z_*) + x)^+ = 0$ при $u \ge a + z_* - c(z_*)$ и $x \in [0, z_*]$.

2) $h_{n-1}(\max(u + c(z_*) - \min(x, z_*), a))$ является невозрастающей функцией переменной u. Это вытекает из леммы 1.5 и того, что $(a - u - c(z) + \min(x, z))^+$ не возрастает по u. Следовательно, получаем

$$
h_{n-1}(\max(u + c(z_*) - \min(x, z_*), a)) \le h_{n-1}(\max(u + c(z_*) - z_*, a)).
$$

3) Из предположения математической индукции вытекает, что $h_{n-1}(\max(u + c(z_*) - z_*, a)) = 0$ при $\max(u + c(z_*) - z_*, a) \ge u_{n-1}$, то есть при u таких, что $\max(u, a + z_* - c(z_*)) \ge u_{n-1} + z_* - c(z_*)$.

Если положить $u_n = \max(a + z_* - c(z_*), u_{n-1} + z_* - c(z_*))$, то, пользуясь результатами пунктов 1)-3) и неравенством (1.17), несложно показать, что $h_n(u) = 0$ при $u \ge u_n$. Учитывая, что $u_{n-1} \ge a$ и для любого $k = \overline{0, n-1}$ по предположению индукции $u_k = a + k(z_* - c(z_*))$, получим

$$
u_n = u_{n-1} + z_* - c(z_*) = u_{n-2} + 2(z_* - c(z_*)) = u_0 + n(z_* - c(z_*)) = a + n(z_* - c(z_*)).
$$

□

Далее можно считать, что $u < \infty$, так как в силу леммы 1.7 для любого n существует u_n такое, что для всех $u \ge u_n$ выполняется равенство $h_n(u) = 0$.

Введем обозначения, которые в дальнейшем будем использовать при доказательстве теорем для многошаговой модели.

$$
H_n(u,z) = H_1(u,z) + \alpha d_{n-1}(u,z), \quad \text{где} \tag{1.18}
$$

$$
d_{n-1}(u,z) = \mathbb{E}h_{n-1}(\max(a, u + c(z) - \min(z, X))). \tag{1.19}
$$

Лемма 1.8. *1) Для любого $n \ge 1$ функция $H_n(u,z)$, определенная в* (1.18)*, достигает инфимума по z.*

2) Функция $h_n(u) = \inf_{z>0} H_n(u,z)$ является непрерывной.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 0$ имеем $h_0(u) = 0$. Предположим, что $h_{n-1}(u)$ является непрерывной функцией и докажем, что функция $H_n(u, z)$ достигает инфимума по z, и $h_n(u)$ является непрерывной.

1) В силу того, что $h_{n-1}(u)$ непрерывна на любом отрезке, она ограничена на нем, следовательно, $h_{n-1}(u)$ ограничена на интервале $[0, u_{n-1}]$. И так как согласно лемме 1.7 при $u \geq u_{n-1}$ имеет место $h_{n-1}(u) = 0$, получим

$$h_{n-1}(\max(u + c(z) - \min(x, z), a)) \leq A < \infty,$$

где A — некоторая константа. Функция $H_{n-1}(u, z)$ непрерывна по (u, z), как композиция непрерывных функций, поэтому из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует, что для любых $\tilde{z} \geq 0, \tilde{u} \geq a$

$$\lim_{\substack{z \to \tilde{z} \\ u \to \tilde{u}}} d_{n-1}(u, z) = \lim_{\substack{z \to \tilde{z} \\ u \to \tilde{u}}} \int\limits_0^\infty h_{n-1}(\max(u + c(z) - \min(x, z), a)) dF(x) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \lim_{\substack{z \to \tilde{z} \\ u \to \tilde{u}}} h_{n-1}(\max(u + c(z) - \min(x, z), a)) dF(x) =$$

$$= \int\limits_0^\infty h_{n-1}(\max(\tilde{u} + c(\tilde{z}) - \min(x, \tilde{z}), a)) dF(x).$$

Таким образом, функция $d_{n-1}(u, z)$ непрерывна по паре переменных (u, z), где $(u, z) \in [a, u_n] \times [0, +\infty]$. Из непрерывности функций $H_1(u, z)$ и $d_{n-1}(u, z)$ на $[a, u_n] \times [0, +\infty]$ следует, что инфимум функции $H_n(u, z)$ достигается.

2) Осталось доказать, что функция $h_n(u)$ непрерывна. Как мы показали ранее, функция $H_n(u, z)$ непрерывна по паре (u, z). Отсюда следует, что $\lim\limits_{u \to \tilde{u}} H_n(u, z) = H_n(\tilde{u}, z)$ для любого $\tilde{u} \geq a$. Пусть $h_n(\tilde{u}) = H_n(\tilde{u}, \tilde{z})$, то есть $\tilde{z} = \arg\min\limits_{z \geq 0} H_n(\tilde{u}, z)$, тогда

а) Выполнение $\lim\limits_{u \to \tilde{u}} H_n(u, \tilde{z}) = H_n(\tilde{u}, \tilde{z})$ равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что $|u - \tilde{u}| < \delta$ влечет $|H_n(u, \tilde{z}) - H_n(\tilde{u}, \tilde{z})| < \varepsilon$. Следовательно,

$$h_n(u) = \min_{z \geq 0} H_n(u, z) \leq H_n(u, \tilde{z}) \leq H_n(\tilde{u}, \tilde{z}) + \varepsilon = h_n(\tilde{u}) + \varepsilon,$$

то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что из $|u - \tilde{u}| < \delta$ вытекает

$$h_n(u) \leq h_n(\tilde{u}) + \varepsilon,$$

а значит, $\overline{\lim\limits_{u \to \tilde{u}}}\, h_n(u) \leq h_n(\tilde{u})$.

б) Далее покажем, что $\underline{\lim\limits_{u \to \tilde{u}}}\, h_n(u) \geq h_n(\tilde{u})$. Будем доказывать от противного.

Пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\varliminf_{u \to \tilde{u}} h_n(u) \le h_n(\tilde{u}) - \varepsilon$. Это равносильно тому, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют $\tilde{u}_m, \tilde{z}_m$ такие, что из $|\tilde{u}_m - \tilde{u}| \le \frac{1}{m}$ вытекает $H_n(\tilde{u}_m, \tilde{z}_m) \le h_n(\tilde{u}) - \varepsilon$.

Так как $\tilde{z}_m \in [0, +\infty]$, то существует сходящаяся подпоследовательность $\tilde{z}_{m_k}$, $\lim_{k\to\infty} \tilde{z}_{m_k} = \hat{z}$, где $\hat{z} \in [0, \infty]$. Учитывая это и то, что $\lim_{m\to\infty} \tilde{u}_m = \tilde{u}$, получаем $\lim_{k\to\infty} H_n(\tilde{u}_{m_k}, \tilde{z}_{m_k}) = H_n(\tilde{u}, \hat{z})$.

Отсюда и из непрерывности функции $H_n(u, z)$ вытекает, что

$$H_n(\tilde{u}, \hat{z}) = \lim_{k\to\infty} H_n(\tilde{u}_{m_k}, \tilde{z}_{m_k}) \le h_n(\tilde{u}) - \varepsilon = \min_{z \ge 0} H_n(\tilde{u}, z) - \varepsilon \le H_n(\tilde{u}, \hat{z}) - \varepsilon.$$

Мы пришли к противоречию. Следовательно, $\varliminf_{u\to\tilde{u}} h_n(u) \ge h_n(\tilde{u})$.

Из результатов, полученных в пунктах а) и б) вытекает, что функция $h_n(u)$ непрерывна.

□

1.1.3 Оптимальная стратегия перестрахования в многошаговой модели

Перейдем к доказательству теорем, описывающих поведение минимальных ожидаемых издержек и вид оптимальной стратегии перестрахования в многошаговой модели.

Учитывая, что $e(u, z) = u + c(z) - a$, перепишем выражение (1.19) для $d_k(u, z)$ следующим образом

$$d_k(u, z) = \begin{cases} h_k(a), & e(u, z) < 0 \\ \displaystyle\int_0^{e(u,z)} h_k(u + c(z) - x) f(x)\, dx + h_k(a)\overline{F}(e(u, z)), & e(u, z) \in [0, z], \\ \displaystyle\int_0^{z} h_k(u + c(z) - x) f(x)\, dx + h_k(u - g(z))\overline{F}(z), & e(u, z) > z. \end{cases} \tag{1.20}$$

Отсюда и из (1.18) вытекает, что

$$\frac{\partial H_{k+1}}{\partial z}(u, z) = \overline{F}(z) G_{k+1}(u, z), \tag{1.21}$$

где

$$G_{k+1}(u, z) = \begin{cases} 1 - m\overline{F}(e(u, z)) + m\alpha \displaystyle\int_0^{e(u,z)} h'_k(u + c(z) - x) f(x)\, dx, & e(u, z) \le z, \\ \alpha[m \displaystyle\int_0^{z} h'_k(u + c(z) - x) f(x)\, dx - h'_k(u - g(z)) g'(z)], & e(u, z) > z. \end{cases} \tag{1.22}$$

В частности, $G_{k+1}(u, z) = 1 - m$, если $e(u, z) < 0$.

Теорема 1.4. *Если $(l, m) \in D_1$, то минимальные ожидаемые издержки за n лет $h_n(u)$ равны 0 для любого начального капитала $u \ge a$ и $n \ge 1$.*

Оптимальный уровень собственного удержания $z_n(u)$ на первом шаге n-шагового процесса функционирования компании равен $z_{r1}(u)$ для любого $n \ge 1$.

Доказательство. Согласно лемме 1.4 при $(l,m) \in D_1$ имеем $a \geq u_1^*$. В теореме 1.1 установили, что в этом случае $h_1(u) = 0$ для любого $u \geq a$. Отсюда и из (1.18) вытекает $H_2(u,z) = H_1(u,z)$, так как $d_1(u,z) = 0$ для всех $u \geq a$ и $z > 0$. Более того, из (1.5) следует $H_1(u,z) = 0$ при $g(z) \leq u - a$. Руководствуясь, как и ранее, соображениями о том, что страховщик стремиться получить максимальные по возможности премии, выбираем в качестве оптимального уровня собственного удержания наибольшее z, являющееся корнем уравнения $H_1(u,z) = 0$, а именно, полагаем $z_2(u) = z_{r1}(u)$.

Далее будем действовать по индукции. Предположим, что $h_k(u) = 0$ для $u \geq a$ и $k \leq n-1$. Тогда из (1.19) вытекает, что $d_{n-1}(u,z) = 0$ для всех $u \geq a$ и $z > 0$. Это влечет $H_n(u,z) = H_1(u,z)$. Получаем, что оптимальной стратегией является выбор в качестве уровня собственного удержания $z_n(u) = z_1(u)$, при котором $h_n(u) = 0$. $\square$

Для коэффициентов нагрузки (l,m), не лежащих в области D_1, поиск оптимальной стратегии является более сложной задачей.

Теорема 1.5. *Если $(l,m) \in D_2 \cup D_3$, то минимальные ожидаемые издержки за n лет $h_n(u)$ равны 0 при начальном капитале $u \geq u_n^*$, где $u_n^* = a + ng(z_*)$.*

Оптимальный уровень собственного удержания на первом шаге n-шагового процесса равен $z_n(u) = z_1\left(u - (n-1)g(z_*)\right)$ для $u \geq u_n^*$.

Доказательство. Как и в теореме 1.4, проведем доказательство по индукции. Допустим, что желаемое утверждение уже доказано для $k \leq n-1$, покажем, что оно остается справедливым при $k = n$.

Для коэффициентов нагрузки $(l,m) \in D_2 \cup D_3$ из теорем 1.2 и 1.3 следует, что $h_1(u) = 0$ при $u \geq u_1^*$. В силу предположения индукции $h_{n-1} = 0$ при $u \geq u_{n-1}^*$, то есть, учитывая (1.20), $d_{n-1}(u,z) = 0$ для $u - g(z) \geq u_{n-1}^* = a + (n-1)g(z_*)$. Представление последнего неравенства в виде

$$u - (n-1)g(z_*) - a \geq g(z)$$

позволяет понять, что $d_{n-1}(u,z) = 0$, когда

$$z \in [z_{l1}(u - (n-1)g(z_*)),\ z_{r1}(u - (n-1)g(z_*))].$$

Здесь, как и ранее, $z_{l1}(u), z_{r1}(u)$ обозначают корни уравнения $u - a = g(z)$. Так как $H_1(u,z) = 0$ при $z \in [z_{l1}(u),\ z_{r1}(u)]$ и функция $z_{r1}(u)$ возрастает по u, можем взять $z_n(u) = z_{r1}(u - (n-1)g(z_*))$ и получить $h_n(u) = 0$ при $u \geq u_n^*$. $\square$

Теорема 1.6. *Если $(l,m) \in D_2 \cup D_3$, то оптимальный уровень собственного удержания $z_n(u)$ является выпуклой вниз убывающей функцией при $u \in (\max(a, u_*), u_1^*)$, более того, $z_n(u) > z_1(u)$ и $z_n'(u) = -(c'(z_n(u)))^{-1}$.*

Доказательство. Согласно лемме 1.4, для коэффициентов $(l,m) \in D_2$ верно неравенство $u_* < a \le u_1^*$, в то время как для $(l,m) \in D_3$ имеет место $a \le u_*$. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Так как по условию $u < u_1^*$, то

$$e(u,z) - z = u - a - g(z) < u_1^* - a - g(z) = g(z_*) - g(z) \le 0,$$

и в силу (1.21), (1.22) будет верно следующее соотношение

$$\frac{\partial H_2}{\partial z}(u,z) = \overline{F}(z)G_2(u,z),$$

где

$$G_2(u,z) = 1 - m\overline{F}(e(u,z)) + \alpha m \int_0^{e(u,z)} h_1'(a + e(u,z) - x) f(x)\,dx.$$

Учитывая $e_z'(u,z) = -c'(z)$, $e_u'(u,z) = 1$, несложно увидеть, что

$$\frac{\partial G_2}{\partial z}(u,z) = c'(z)\frac{\partial G_2}{\partial u}(u,z).$$

Более того, оптимальный уровень собственного удержания $z_2(u) = z_0^{(21)}(u)$ задается неявно с помощью уравнения $G_2(u, z_0^{(21)}(u)) = 0$. Следовательно,

$$z_2'(u) = -\left(\frac{\partial G_2}{\partial u} / \frac{\partial G_2}{\partial z}\right)(u, z_2(u)) = -(c'(z_2(u)))^{-1} < 0,$$

откуда очевидным образом вытекает

$$z_2''(u) = f(z_2(u))m^{-2}\overline{F}^{-3}(u, z_2(u)) > 0.$$

Учитывая, что $e(u, z_1(u)) = z_*$ для $u < u_1^*$, получим

$$G_2(u, z_1(u)) = \alpha m \int_0^{z_*} h_1'(a + z_* - x) f(x)\,dx < 0.$$

Последнее означает, что $z_1(u) < z_2(u)$ при $u < u_1^*$. Итак, мы установили справедливость утверждения для случая $n = 2$. Результат для $n > 2$ доказывается по индукции. □

Следующий результат сформулирован для случая $n = 2$.

Теорема 1.7. *Если $(l,m) \in D_2$, то оптимальный уровень собственного удержания на первом шаге двухшагового процесса при $u \in (u_1^*, u_2^*)$ имеет вид*

$$z_2(u) = \min\left(z_0(u - g(z_*)),\ \max(z_{r1}(u), z_0^{(21)}(u))\right),$$

где $z_0(u)$ является корнем уравнения $e(u,z) = z_*$, а $z_0^{(21)}$ — корнем уравнения

$$1 - (m - \alpha)\overline{F}(e(u,z)) - \alpha\overline{F}(e(u - g(z_*), z)) = 0.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.1 имеет место $h_1'(u) = -m^{-1}$ при $u \in (\max(a, u_*), u_1^*)$ и $h_1'(u) = 0$ при $u > u_1^*$.

Для $z \in A(u) = (z_{l1}(u),\ z_{r1}(u))$ выполняется $e(u,z) - z = u - a - g(z) > 0$, поэтому согласно (1.22) верно представление

$$G_2(u,z) = \alpha[m \int_0^z h_1'(a + e(u,z) - x) f(x)\, dx - g'(z) h_1'(u - g(z))]. \tag{1.23}$$

Пользуясь следующей эквивалентностью неравенств

$$a + e(u,z) - x > u_1^* \Leftrightarrow x < a + e(u,z) - u_1^* = e(u,z) - g(z_*) = e(u - g(z_*), z)$$

и видом функции $h_1'(u)$, можем переписать (1.23) в виде

$$G_2(u,z) = \alpha m^{-1}[1 - m\overline{F}(e(u - g(z_*), z))].$$

Следовательно, учитывая $\overline{F}^{-1}\left(\frac{1}{m}\right) = z_*$, решение $z_0^{(22)}(u)$ уравнения $G_2(u,z) = 0$ при фиксированном u можно задавать неявно с помощью уравнения

$$e\left(u - g(z_*),\ z_0^{(22)}(u)\right) = z_*.$$

Это означает, что

$$z_0^{(22)}(u) = z_0\left(u - g(z_*)\right),$$

и, следовательно, $z_0^{(22)}(u_2^*) = z_0(u_1^*) = z_*$ и $z_0^{(22)}(u) \to \infty$ при $u \searrow u_* + g(z_*) > u_1^*$.

Отсюда сразу вытекает, что кривые $z_0^{(22)}(u)$ и $z_{r1}(u)$ будут пересекаться в некоторой точке $\bar{u} \in (u_* + g(z_*), u_2^*)$. Поэтому, невозможно выбрать $z_0^{(22)}(u)$ в качестве оптимального уровня собственного удержания $z_2(u)$ для $u < \bar{u}$. Более того, $G_2(u, z_{r1}(u)) < 0$ для $u < \bar{u}$, но положительно для $u > \bar{u}$. Следовательно, разумно взять $z_2(u) = \min\left(z_0^{(22)}(u),\ z_{r1}(u)\right)$.

Однако требуется еще одно уточнение для окрестности точки u_1^*. Мы знаем, что для $z \notin A(u)$ выполняется $e(u,z) \le z$, поэтому согласно (1.22)

$$G_2(u,z) = g'(e(u,z)) + \alpha m \int_0^{e(u,z)} h_1'(a + e(u,z) - x) f(x)\, dx.$$

Последнее выражение может быть переписано как

$$G_2(u,z) = 1 - (m - \alpha)\overline{F}(e(u,z)) - \alpha \overline{F}(e(u - g(z_*), z)),$$

откуда очевидным образом следует, что оно возрастает по z. В ходе доказательства теоремы 1.6 мы обозначили через $z_0^{(21)}(u)$ корень уравнения $G_2(u,z) = 0$ в случае $e(u,z) \le z$. Было установлено, что функция $z_0^{(21)}(u)$ убывает и $z_0^{(21)}(u_1^*) > z_* = z_{r1}(u_1^*)$. Полагая

$$z_2(u) = \min\left(z_0^{(22)}(u),\ \max(z_0^{(21)}(u),\ z_{r1}(u))\right),$$

получим желаемый вид для $z_2(u)$. $\square$

Сформулируем последний результат, касающийся модели с вливанием капитала и перестрахованием.

Теорема 1.8. *Если $(l, m) \in D_2$, то минимальные ожидаемые дисконтированные издержки $h_n(u)$ сходятся равномерно по u при $n \to \infty$.*

Доказательство. После установления оптимального уровня собственного удержания $z_n(u)$ можем представить минимальные издержки в виде $h_n(u) = H_n(u, z_n(u))$, $n \geq 1$. Последнее влечет выполнение неравенства

$$|h_{n+1}(u) - h_n(u)| \leq \max_{z=z_n(u), z_{n+1}(u)} |H_{n+1}(u, z) - H_n(u, z)|.$$

Вводя $\delta_n = \max_{u \geq a} |h_{n+1}(u) - h_n(u)|$, легко получить, что $\delta_n \leq C\alpha^n$, где $C = h_1(a)$. Следовательно, существует $h(u) = \lim_{n\to\infty} h_n(u)$, и сходимость является равномерной по u. □

1.1.4 Численные примеры

Продемонстрируем на численных примерах, как выглядит оптимальная стратегия перестрахования. Рассмотрим случаи, когда совокупные годовые требования имеют распределение с легкими хвостами (экспоненциальное и равномерное) и с тяжелыми (распределение Парето). Численное моделирование выполнялось в программе Wolfram Mathematica.

Экспоненциальное распределение Пусть $f(x) = b\exp\{-bx\}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$, $b > 0$, тогда $\overline{F}(x) = \exp\{-bx\}$ при $x \geq 0$ и $\overline{F}(x) = 1$ при $x < 0$.

Несложно вычислить, что $\gamma = b^{-1}$, $z_* = b^{-1}\ln m$ и $\int_{z_*}^{\infty} \overline{F}(x)\,dx = (mb)^{-1}$. Поэтому, области D_i, $i = 1, 2, 3$, задаются с помощью следующих соотношений на нагрузочные коэффициенты l, m

$$D_1 = \{m > l > 1 + \ln m\}, \quad D_2 = \{1 + \ln m \geq l > \ln m\}, \quad D_3 = \{\ln m \geq l > 1\}.$$

Важно отметить, что множества D_i, $i = 1, 2, 3$, не зависят от параметра распределения b, как показано на рис. 3.

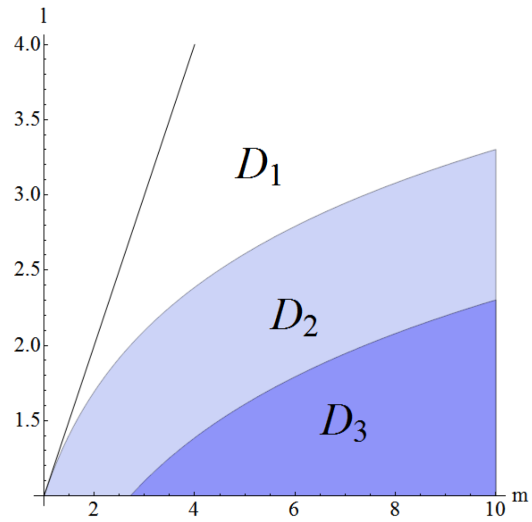


Рис. 3: Области D_i в случае экспоненциального распределения требований

Для иллюстрации теоретических результатов, полученных в предыдущих секциях, рассмотрим несколько случаев, соответствующих различным фиксированным значениям нагрузочных коэффициентов (l, m).

1. Положим $l = 2$, $m = 2.1$. Это означает, что $(l, m) \in D_1$, и следовательно, $g(z_*) < 0$. Согласно теореме 1.1 минимальные ожидаемые издержки $h_n(u)$ равны 0 для любого $n \geq 1$ и $u \geq a$, в то время как оптимальный уровень собственного удержания $z_n(u)$ равен $z_{r1}(u)$.

Используя явный вид функции $g(z) = z - b^{-1}(l - me^{-bz})$, находим максимальный корень уравнения $g(z) = u - a$ с помощью процедуры FindRoot в Wolfram Mathematica. Так как $g(z)$ является выпуклой вниз и достигает своего единственного минимума в точке z_*, то выбирая в качестве начального приближения значение большее z_*, получим, что процедура FindRoot, основанная на методе Ньютона, сойдется к $z_{r1}(u)$ для любого $u \geq a$.

График функции $z_n(u)$, $n \geq 1$, представлен на рис. 4(a). Уровень собственного удержания изображен для параметров распределения $b = 0.5$, $b = 1$ и $b = 4$. Для удобства полагаем $a = 1$. При этом отметим, что чем меньше значение b, тем выше расположен график оптимального уровню собственного удержания.

2. Теперь зафиксируем $l = 2$, $m = 5$. Для таких значений справедливо $(l, m) \in D_2$. Следовательно, $g(z_*) \geq 0$ и $z_* - c(\infty) < 0$. В этом случае выполнены условия теоремы 1.2 для $n = 1$ и $z_n(u)$, $h_n(u)$ находятся следующим образом.

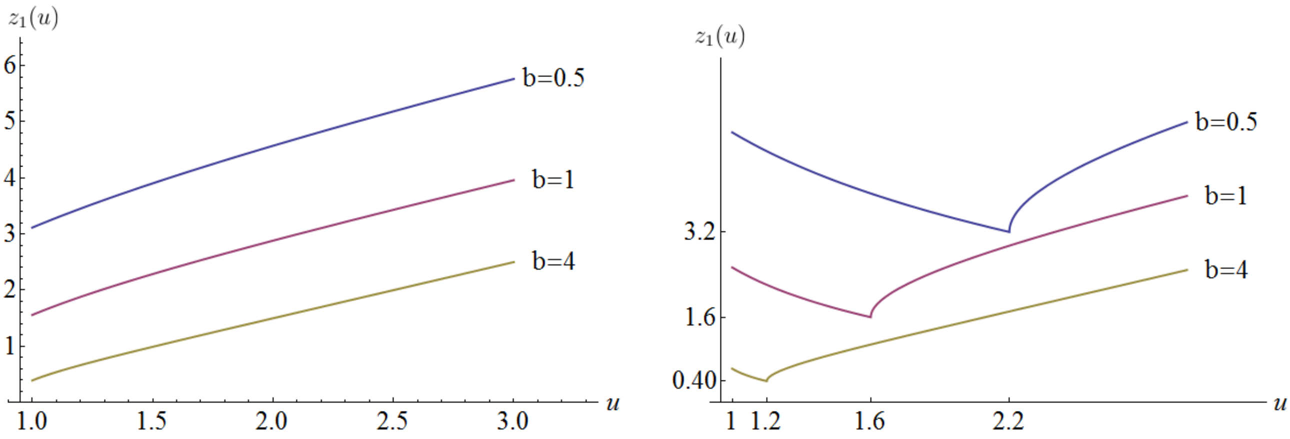
Пусть $n = 1$. Для $u \geq u_1^* = a + g(z_*)$ получим $h_1(u) = 0$ и $z_1(u) = z_{r1}(u)$, уровень собственного удержания вычисляется также, как в предыдущем пункте.

Для начального капитала $a \leq u < u_1^*$ можем легко вывести явные формулы для $z_1(u) = z_0(u)$ и $h_1(u)$. А именно, получим следующие соотношения

$$z_0(u) = c^{-1}(z_* + a - u) = b^{-1}[\ln m - \ln(l - \ln m - ba + bu)],$$

$$h_1(u) = b^{-1}(e^{-bz_*} - e^{-bz_0(u)}) = \frac{1 - l + \ln m + ba - bu}{bm}.$$

Для таких же, как и ранее, значений параметра распределения b график оптимального уровня собственного удержания $z_1(u)$ представлен на рис. 4(b).

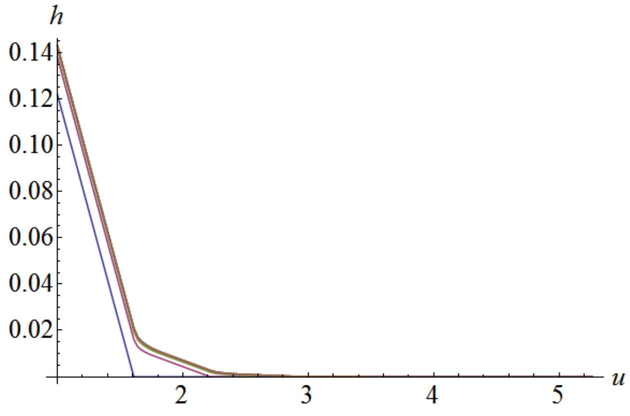


(a) $(l, m) \in D_1$ (b) $(l, m) \in D_2$

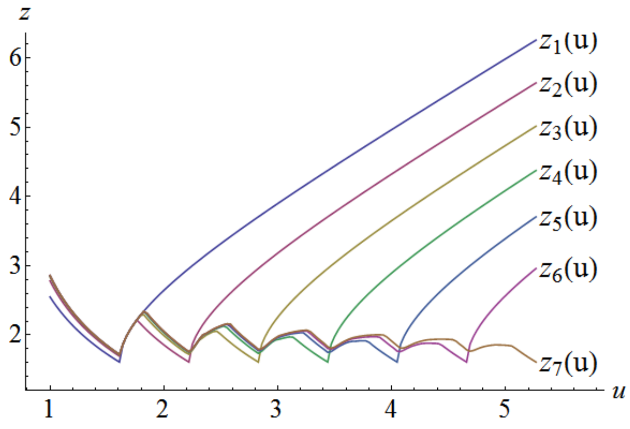
Рис. 4: Оптимальный уровень собственного удержания в случае экспоненциального распределения требований

Теперь рассмотрим случай $n > 1$. Согласно теореме 1.5 минимальные ожидаемые издержки $h_n(u)$ равны 0 при $u \geq u_n^* = a + ng(z_*)$. Кроме того, $z_n(u) = z_1(u - (n-1)g(z_*))$, то есть оптимальный уровень собственного удержания на первом шаге n-шагового процесса находится как максимальный корень уравнения $u - a = g(z) + (n-1)g(z_*)$ и может быть численно вычислен с помощью процедуры FindRoot.

Если $a \leq u < u_n^*$, то для построения $h_n(u)$ мы вычисляем $h_n(u_k) = \min_z H_n(u_k, z)$ в точках $u_k = a + kg(z_*)/20$, $k \geq 0$ и затем строим интерполяционную функцию для $h_n(u)$, которую используем на следующем $n+1$-ом шаге. Для подсчета $H_n(u, z)$ применяется численное интегрирование. Функция FindMinimum возвращает не только желаемый минимум, но и значение аргумента $z_n(u)$, на котором этот минимум достигается. В частности, при $b = 1$ графики функций $h_n(u)$, $1 \leq n \leq 7$, имеют вид, представленный на рис. 5(a). Везде полагаем, что коэффициент дисконтирования $\alpha = 0.5$.



(a) Минимальные ожидаемые дисконтированные издержки $h_n(u)$ за n лет



(b) Оптимальный уровень собственного удержания $z_n(u)$ на первом шаге n-шагового процесса

Рис. 5: Случай экспоненциального распределения требований с параметром $b = 1$

Для фиксированного начального капитала u функция минимальных издержек $h_n(u)$ возрастает по u. На приведенном рисунке можно легко распознать лишь три графика, так как при $n = 4, 5, 6, 7$ функции $h_n(u)$ практически сливаются с $h_3(u)$. Интересно также отметить, что функция $z_n(u)$ имеет n локальных минимумов, последний из которых достигается при $u = u_n^*$ (см. рис. 5(b)).

Равномерное распределение В данном случае плотность распределения имеет вид $f(x) = b^{-1}\mathbb{I}_{[0,b]}(x)$, $b > 0$. Следовательно, $\overline{F}(x) = 1$ при $x \le 0$, $\overline{F}(x) = 1 - xb^{-1}$ при $x \in [0, b]$ и $\overline{F}(x) = 0$ при $x \ge b$.

Можем вычислить $\gamma = b/2$, $z_* = b(1-m^{-1})$ и $\int_{z_*}^{b} \overline{F}(x)\,dx = \gamma m^{-2}$. Тогда несложно получить, что $D_1 = \{m > l > 2-m^{-1}\}$, $D_2 = \{2-m^{-1} \ge l > 2-2m^{-1}\}$, $D_3 = \{2 - 2m^{-1} \ge l > 1\}$. Следовательно, множества $D_i, i = \overline{1,3}$ имеют форму, представленную на рис. 6.

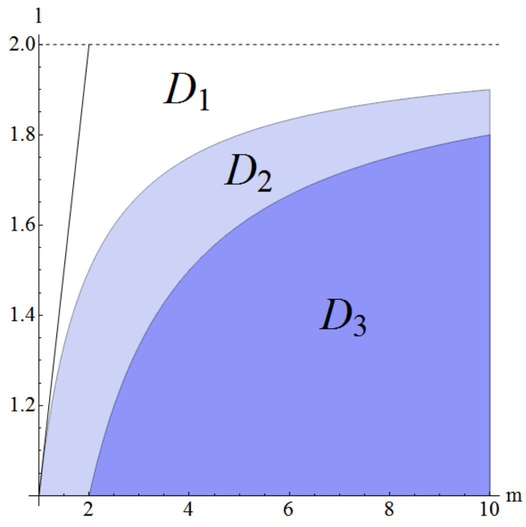


Рис. 6: Области D_i в случае равномерного распределения требований

Как и в случае экспоненциального распределения требований форма множеств D_i, $i = 1, 2, 3$, не зависит от параметра распределения b.

Процедура построения функций $z_n(u)$ и $h_n(u)$ аналогична той, что была проделана для экспоненциального случая.

1. Возьмем $l = 1.7$ и $m = 3$. Для этих значений коэффициентов нагрузки выполняется $g(z_*) < 0$. Следовательно, $h_n(u) = 0$ для любых $n \geq 1$ и $u \geq a$. Для удобства положим $a = 1$. Графики оптимального уровня собственного удержания $z_1(u)$ для значений $b = 2$, $b = 3$, $b = 4$, $b = 5$ и $b = 6$ изображены на рис. 7(a). Чем выше расположен график, тем больше соответствующее значение b.

2. Теперь положим $l = 1.5$, $m = 3$, это означает, что $g(z_*) \geq 0$ и $z_* - c(\infty) < 0$.

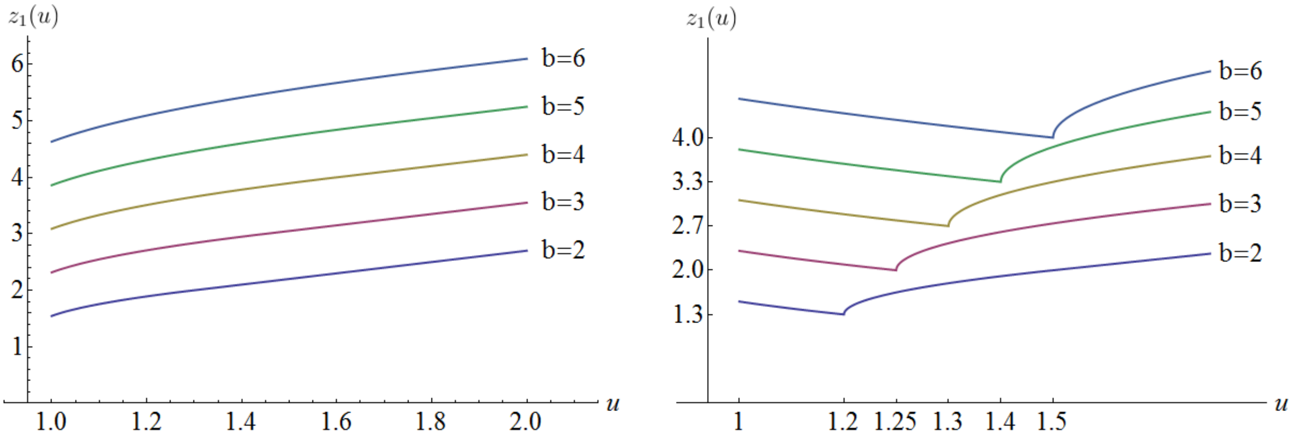
Рассмотрим случай $n = 1$. Если $u \geq u_1^*$, то $h_1(u) = 0$ и оптимальный уровень собственного удержания $z_1(u) = z_{r1}(u)$, то есть равен максимальному корню уравнения $u - a = g(z)$.

Если же $a \leq u < u_1^*$, то $z_1(u) = z_0(u)$ и мы можем получить явные формулы следующего вида для вычисления уровня собственного удержания и минимальных ожидаемых издержек $h_1(u)$

$$z_0(u) = c^{-1}(z_* + a - u) = b - b\sqrt{\left(\frac{l}{2} - 1 + \frac{1}{m} + \frac{u-a}{b}\right)\frac{2}{m}},$$

$$h_1(u) = \int\limits_{e(u,z_0(u))}^{z_0(u)} (x - e(u, z_0(u)))f(x)\,dx + (a - u + g(z_0(u)))\overline{F}(z_0(u)).$$

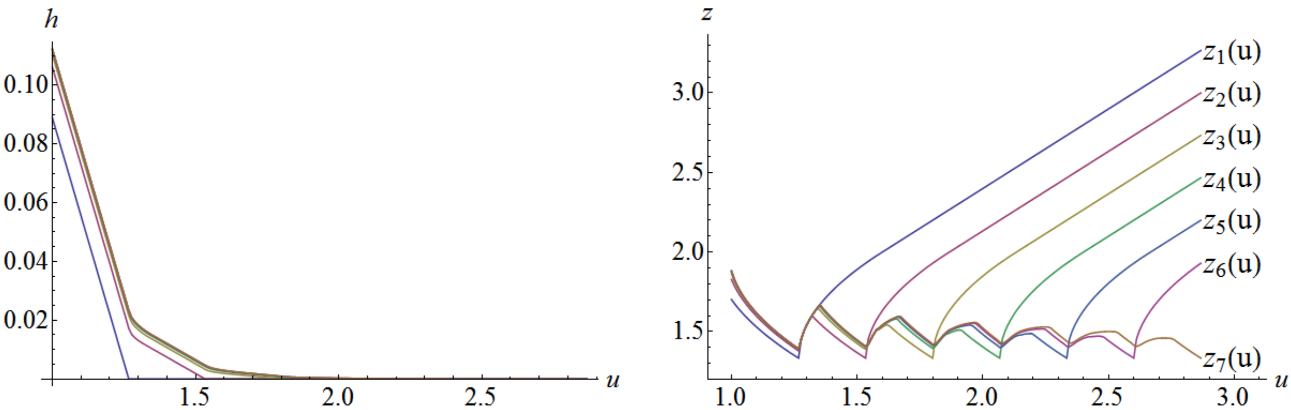
На рис. 7(b) представлены графики функции $z_1(u)$ для параметров распределения $b = 2$, $b = 3$, $b = 4$, $b = 5$ и $b = 6$.



(a) $(l, m) \in D_1$ (b) $(l, m) \in D_2$

Рис. 7: Оптимальный уровень собственного удержания в случае равномерного распределения требований

В случае $n > 1$ вычисляем $h_n(u)$ и $z_n(u)$ с помощью программы Wolfram Mathematica. Для $1 \leq n \leq 7$ и параметра распределения $b = 2$ получаем следующие результаты, изображенные на рис. 8(a).



(a) Минимальные ожидаемые дисконтированные издержки $h_n(u)$ за n лет

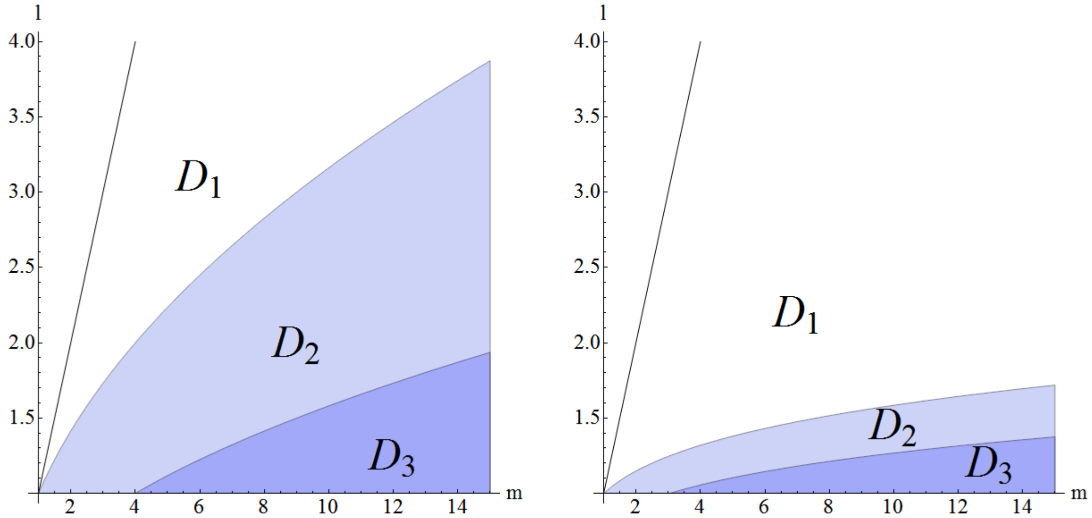
(b) Оптимальный уровень собственного удержания $z_n(u)$ на первом шаге n-шагового процесса

Рис. 8: Случай равномерного распределения на отрезке $[0, 2]$

Здесь мы не можем различить графики функций $h_n(u)$, $n \geq 5$, так как они практически сливаются с $h_4(u)$. Графики оптимальных уровней собственного удержания изображены на рис. 8(b).

Распределение Парето Данное распределение зависит от двух параметров d и b следующим образом: $f(x) = bd^b x^{-b-1}\mathbb{I}_{[d,\infty)}(x)$. Имеют место ограничения $d > 0$ и $b > 1$, так как мы полагаем, что математическое ожидание $\gamma < \infty$. Выполняется $\overline{F}(x) = 1$ при $x \leq d$ и $\overline{F}(x) = d^b x^{-b}$ при $x \geq d$.

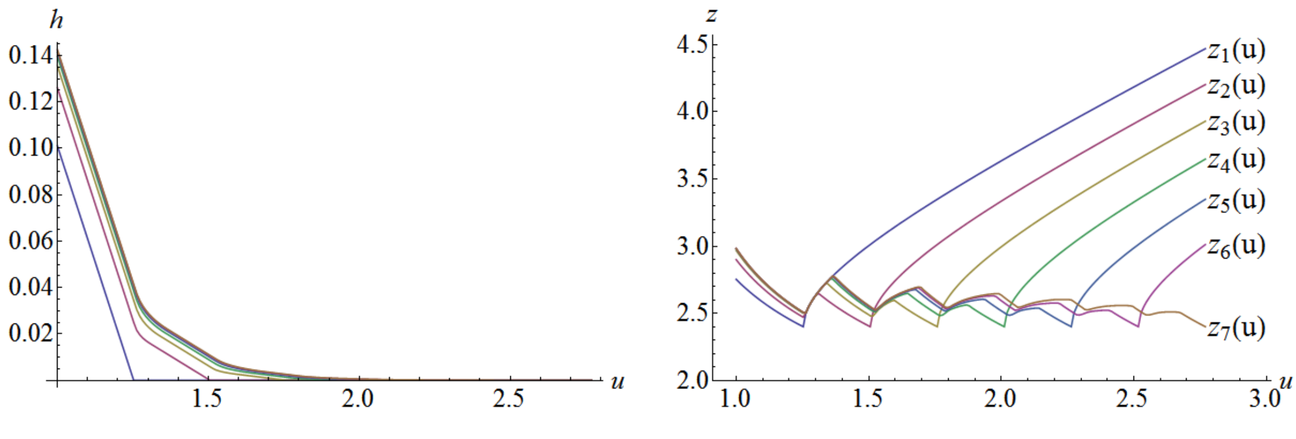
Несложно получить, что $\gamma = bd(b-1)^{-1}$, $z_* = dm^{1/b}$ и $m\int_{z_*}^{\infty} \overline{F}(x)\,dx = dm^{1/b}(b-1)^{-1}$. Это означает, что $D_1 = \{m > l > m^{1/b}\}$, $D_2 = \{m^{1/b} \geq l > (1-b^{-1})m^{1/b}\}$, $D_3 = \{(1-b^{-1})m^{1/b} \geq l > 1\}$. Видим, что множества D_i сильно зависят от значения параметра распределения b. Причем при $b \to \infty$ множество D_1 увеличивается, в то время как D_2 и D_3 уменьшаются. Это можно наблюдать на рис. 9(a) и рис. 9(b).



(a) $b = 2$ (b) $b = 5$

Рис. 9: Области D_i в случае распределения Парето

Мы также вычислили минимальные ожидаемые издержки и оптимальные уровни собственного удержания.



(a) Минимальные ожидаемые дисконтированные издержки $h_n(u)$ за n лет

(b) Оптимальный уровень собственного удержания $z_n(u)$ на первом шаге n-шагового процесса

Рис. 10: Случай распределения Парето с параметрами $b = 5$, $d = 2$

§1.2 Модель с банковскими займами и перестрахованием

Рассмотрим еще одну модель функционирования страховой компании в дискретном времени. Так же, как и в модели из раздела 1.1, в начале каждого года страховщик получает премии, а в конце каждого года погашает требования, поступившие в течение года. Ежегодные совокупные иски $\{X_i\}_{i\geq 1}$ образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F, плотностью f и математическим ожиданием $\gamma < \infty$. Если в конце года компании не хватает собственных средств для погашения требований, страховщик обращается в банк, чтобы взять займ под процент r, $0 < r < 1$, в размере недостающей суммы. Причем мы предполагаем, что компания сама возвращает величину займа, используя для этого будущие премии, а вот проценты по займу погашают акционеры. Поэтому целью страховщика является минимизация ожидаемых процентов по займам.

Отличие от модели из раздела 1.1 заключается в том, что источник дополнительных вливаний явно указан. Также капитал компании может принимать любые значения, в том числе отрицательные. То есть не существует фиксированного уровня, как в модели 1.1, выше которого требуется поддерживать капитал. Для уменьшения вероятности разорения и стабилизации работы компании страховщик заключает договор непропорционального перестрахования, а именно договор эксцедента убыточности, как в рассмотренной ранее модели. Премии c, изначально поступающие в компанию, и премии страховщика с учетом перестрахования $c(z)$ рассчитываются согласно принципу среднего по формулам (1.1) и (1.2) соответственно. С учетом сделанных предположений получим, что капитал компании в начале n-го периода, обозначаемый далее U_n, удовлетворяет уравнению, схожему с уравнением (1.3) для капитала из предыдущей модели,

$$U_n = U_{n-1} + c(z) - \min(X, z), \quad U_0 = u, \tag{1.24}$$

где X и z означают, соответственно, размер исков, поступивших в течение n-го года, и уровень собственного удержания в этот период. Подчеркнем, что в данной модели капитал U_n, $n \geq 0$, может принимать любые значения.

1.2.1 Оптимальная стратегия перестрахования в одношаговой и многошаговой моделях

С учетом предположений, сделанных относительно модели с банковскими займами, получим, что функция ожидаемых издержек (процентных выплат по займам), которую мы будем минимизировать в одношаговой модели, имеет вид

$$H_1(u, z) := \mathbb{E}J(u, z),$$

где

$$J(u, z) = r(\min(X, z) - e(u, z))^+, \quad e(u, z) = u + c(z). \tag{1.25}$$

Переменные u, z, X представляют, соответственно, начальный капитал страховой компании, уровень собственного удержания и требования в рассматриваемый единичный промежуток. Следовательно, справедливо представление

$$H_1(u, z) = r \left[\int_0^z (x - e(u, z))^+ f(x)\, dx + (z - e(u, z))^+ \bar{F}(z) \right]. \tag{1.26}$$

Величина $J(u, z)$ есть не что иное, как размер процентных выплат, погашаемых акционерами. Нашей целью является нахождение функции

$$h_1(u) := \inf_{z>0} H_1(u, z), \tag{1.27}$$

которая характеризует сумму минимальных ожидаемых выплат, и уровня собственного удержания z, при котором функция $H_1(u, z)$ принимает наименьшее значение. Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.9. *Минимум $H_1(u, z)$ при фиксированном u достигается, когда z имеет следующий вид*

$$z_1(u) = \begin{cases} \infty & \textit{при} \quad u \le u_*, \\ c^{-1}(z_* - u) & \textit{при} \quad u \in [u_*, u_1^*], \\ z_* & \textit{при} \quad u \ge u_1^*, \end{cases} \tag{1.28}$$

где $u_* = z_* - l\gamma,\ u_1^* = g(z_*)$.

Для $u \in (u_*, u_1^*)$ функция $z_1(u)$ является убывающей выпуклой вниз, $z_1'(u) \nearrow -1$ при $u \nearrow u_1^*$, $z_1'(u) \searrow -\infty$ при $u \searrow u_*$.

Доказательство. Будем руководствоваться соображениями, схожими с теми, которые были приведены в доказательствах теорем 1.1 - 1.3. Заметим, что из (1.26) вытекает

$$H_1(u, z) = 0 \quad \text{при} \quad z - e(u, z) \le 0. \tag{1.29}$$

Используя функцию $g(z)$, определенную в (1.7), неравенство из (1.29) можно переписать в виде $g(z) - u \le 0$. Тогда получим, что $H_1(u, z) = 0$ в области $A = \{(u, z) : g(z) \le u\}$.

Обозначим через $z_l(u)$ и $z_r(u)$, соответственно, левый и правый корни уравнения $g(z) = u$. Из свойств функции $g(z)$, сформулированных в лемме 1.2, вытекает, что множество $A(u) = [z_l(u), z_r(u)] \subset A$ непусто только при $u \ge u_1^*$. Очевидно, что $z_l(u) = 0$ при $u \ge (m - l)\gamma$, $z_r(u) \to \infty$ при $u \to \infty$ и $z_* \in A(u)$.

Следовательно, для фиксированного $u \geq u_1^*$ равенство $H_1(u,z) = 0$ выполняется при $z \in A(u)$. При выборе оптимального уровня собственного удержания из множества $A(u)$ мы действуем не так, как при построении оптимальной стратегии в модели из раздела 1.1. А именно, из множества $A(u)$ мы выбираем не $z_{r1}(u)$, которое соответствует максимальным премиям страховщика $c(z)$ и зависит от u, а константное значение z_*. Во-первых, это сильно упрощает расчет оптимальной стратегии на практике, во-вторых, значение минимальных ожидаемых издержек при этом остается равным 0, и в-третьих, имеет место равенство $z_l(u_1^*) = z_r^* = z_*$.

Далее, рассмотрим случай $u < u_1^*$. Несложно видеть, что для $(u,z) \in B = \{(u,z) : g(z) > u\}$ справедливо

$$\frac{\partial H_1}{\partial u}(u,z) = -r\bar{F}(e(u,z)) \tag{1.30}$$

и

$$\frac{\partial H_1}{\partial z}(u,z) = r\bar{F}(z)(1 - m\bar{F}(e(u,z))). \tag{1.31}$$

Соотношения (1.30) и (1.31) влекут выполнение

$$\frac{\partial H_1}{\partial z}(u,z) = \bar{F}(z)\left[r + m\frac{\partial H_1}{\partial u}(u,z)\right]. \tag{1.32}$$

Из (1.31) вытекает, что $\frac{\partial H_1}{\partial z}(u,z) = 0$ при

$$1 - m\bar{F}(e(u,z)) = 0. \tag{1.33}$$

Последнее условие эквивалентно уравнению $e(u,z) = z_*$, решением которого является $z_1(u) = c^{-1}(z_* - u)$. В силу того, что $u_1^* = g(z_*) = z_* - c(z_*)$, получаем $z_1(u_1^*) = z_*$. Более того,

$$z_1'(u) = -(m\bar{F}(z_1(u)))^{-1} < 0 \quad \text{и} \quad z_1''(u) = m^{-2}f(z_1(u))(\bar{F}(z_1(u)))^{-3} > 0. \tag{1.34}$$

Итак, доказали, что $z_1(u)$ является выпуклой вниз убывающей функцией при $u < u_1*$. Также заметим, что $z_1'(u_1^*) = -(m\bar{F}(z_*))^{-1} = -1$.

Далее, уравнение (1.33) имеет конечное решение только при $u > u_* = z_* - l\gamma$, так как при $u < u_*$ выполняется неравенство $e(u,z) < z_*$, которое влечет $1 - m\bar{F}(e(u,z)) < 0$. Таким образом, $H_1(u,z)$ убывает по z для любого $u < u_*$. Логично положить $z_1(u) = \infty$ для таких u, другими словами, отказаться от услуг перестраховщика. Также несложно получить, что $z_1(u) \nearrow \infty$ при $u \searrow u_*$, а значит, $z_1'(u) \searrow -\infty$ при (1.34). Все свойства оптимального уровня собственного удержания доказаны. □

Следствие 1.2. *Функция $h_1(u)$ имеет производную следующего вида*

$$h_1'(u) = \begin{cases} -r\bar{F}(u + l\gamma) & \textit{при} \quad u \leq u_*, \\ -rm^{-1} & \textit{при} \quad u \in [u_*, u_1^*), \\ 0 & \textit{при} \quad u > u_1^*. \end{cases} \tag{1.35}$$

Доказательство. Из теоремы 1.9 вытекает $h_1(u) = H_1(u, z_1(u))$, где $z_1(u)$ задается с помощью (1.28). Следовательно,

$$h_1'(u) = \frac{\partial H_1}{\partial u}(u, z_1(u)) + \frac{\partial H_1}{\partial z}(u, z_1(u))z_1'(u). \tag{1.36}$$

Согласно (1.29), (1.31) и (1.33), второе слагаемое в правой части (1.36) равно нулю. Поэтому $h_1'(u) = \frac{\partial H_1}{\partial u}(u, z_1(u))$, откуда в свою очередь вытекает $h_1'(u) = 0$ при $u > u_1^*$. Учитывая (1.32), заключаем, что $h_1'(u) = -rm^{-1}$ при $u \in (u_*, u_1^*)$. И наконец, с помощью (1.30) находим, что $h_1'(u) = -r\bar{F}(u + l\gamma)$ при $u < u_*$. □

Замечание 3. . *Стоит отметить, что $h_1'(u)$ непрерывна в точке $u = u_*$, и $h_1'(u) = -r$ при $u \leq -l\gamma$. В отличие от модели из раздела 1.1, мы ищем $h_1(u)$ и $z_1(u)$ не только для u, превышающих заданный положительный уровень, но и для отрицательных значений u. Это объясняется тем, что оптимальная стратегия на последнем интервале многошагового процесса соответствует оптимальному поведению в одногошаговой модели, и капитал в начале этого интервала может быть отрицательным.*

Также отметим, что u_1^* является функцией, зависящей от коэффициентов нагрузки l и m. И по аналогии с леммой 1.4, введем множества, соответствующие (1.8), *а именно* $D_1 = \{(l, m) : u_1^* < 0\}$, $D_2 = \{(l, m) : u_1^* \geq 0, u_* < 0\}$, $D_3 = \{(l, m) : u_* \geq 0\}$.

Рассуждая, как в статье (Bulinskaya et al [18]), можно установить, что ожидаемые минимальные дисконтированные издержки за n периодов $h_n(u)$, $n > 1$, удовлетворяют следующему уравнению Беллмана

$$h_n(u) = \inf_{z>0} H_n(u, z), \quad H_n(u, z) = H_1(u, z) + \alpha d_{n-1}(u, z), \tag{1.37}$$

где $H_1(u, z)$ задается с помощью (1.26) и $d_k(u, z) = \mathsf{E}h_k(e(u, z) - \min(z, X))$. Справедлива следующая теорема

Теорема 1.10. *Если (l, m) такие, что $u_1^* = 0$, то*

минимальные ожидаемые издержки $h_n(u)$ равны 0 для любых $n \geq 1$, $u \geq 0$, оптимальный уровень собственного удержания на первом шаге n-шагового процесса при этом равен $z_n(u) = z_*$.

Если $u < 0$, то в качестве оптимального уровня выбирается

$$z_n(u) = \min(\hat{z}_n(u), \infty),$$

где $\hat{z}_n(u)$ есть единственное решение уравнения $G_n(u, z) = 0$ и

$$G_n(u, z) = r[1 - m\bar{F}(e(u, z))] + \alpha m \int_{e(u,z)}^{z} h_{n-1}'(e(u, z) - x)f(x)\,dx$$
$$-\alpha g'(z)h_{n-1}'(e(u, z) - z). \tag{1.38}$$

Доказательство. Для $n = 1$ уже установили вид оптимального уровня собственного удержания (см. теорему 1.9). Далее будем действовать по индукции. Итак,

$$H_2(u,z) = H_1(u,z) + \alpha d_1(u,z), \quad \text{где}$$
$$d_1(u,z) = \int_0^z h_1(e(u,z)-x)f(x)\,du + h_1(e(u,z)-z)\bar{F}(z). \tag{1.39}$$

Очевидно, $d_1(u,z) = H_1(u,z) = 0$ на множестве $A = \{(u,z) : g(z) \le u\}$. Значит, чтобы выполнялось $H_2(u,z) = 0$, достаточно выбрать любое $z \in [z_l(u), z_r(u)]$. Как и в случае $n = 1$, полагаем $z_2(u) = z_*$ и получаем $h_2(u) = 0$ для $u \ge 0$.

При $u < 0$ из (1.2.1) вытекает

$$\frac{\partial H_2}{\partial z}(u,z) = \frac{\partial H_1}{\partial z}(u,z) + \alpha\frac{\partial d_1}{\partial z}(u,z), \quad \text{где} \quad \frac{\partial H_1}{\partial z}(u,z) = r\bar{F}[1 - m\bar{F}(e(u,z))]$$

и

$$\frac{\partial d_1}{\partial z}(u,z) = \bar{F}(z)[m\int_{e(u,z)}^z h_1'(e(u,z)-x)f(x)\,dx - g'(z)h_1'(e(u,z)-z)]. \tag{1.40}$$

Видим, что $\frac{\partial H_2}{\partial z}(u,z) = \bar{F}(z)G_2(u,z)$ и функция $G_2(u,z)$, определенная в (1.38) при $n = 2$, возрастает по z (при фиксированном u). Последнее утверждение верно в силу равенства

$$\frac{\partial G_2}{\partial z}(u,z) = -m^2h_1'(0)f(e(u,z))\bar{F}(z) + \\ + m^2\bar{F}(z)\int_{e(u,z)}^z h_1''(e(u,z)-x)f(x)\,dx + (g'(z))^2h_1''(u-g(z)), \tag{1.41}$$

вытекающего из (1.35). Более того, $G_2(u,0) < 0$ при $u < 0$, следовательно, или $G_2(u,z) < 0$ при всех конечных z, или существует единственное решение $\hat{z}_2(u)$ уравнения $G_2(u,z) = 0$. В первом случае оптимальной стратегией будет отказ от перестрахования, то есть, $z_2(u) = \infty$. Во втором, $\hat{z}_2(u)$ является оптимальным уровнем собственного удержания на первом шаге двухшагового процесса с начальным капиталом u.

Предположим, что утверждения теоремы 1.10 верны для $k \le n-1$. Тогда справедливы уравнения (1.40) и (1.41), в которых индекс 1 заменен на $n-1$, а индекс 2 на n. Из последнего сразу вытекает справедливость теоремы при $k = n$. □

Похожим образом получаем следующие результаты.

Теорема 1.11. *Если $(l,m) \in D_1$, то $h_n(u) = 0$ для любого $n \ge 1$, и любого $u \ge u_1^*$ при $z_n(u) = z_*$.*

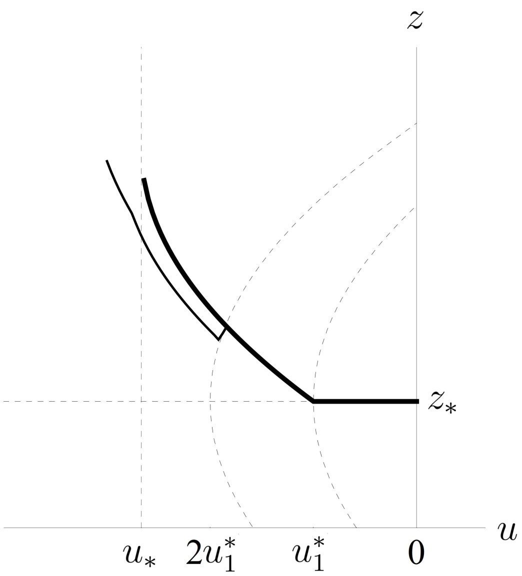
Если $(l,m) \in D_2 \cup D_3$, то $h_n(u) = 0$ для $u \ge u_n^* = nu_1^*$ при $z_n(u) = z_*$, $n \ge 1$.

Доказательство. Для $n = 1$ результаты были доказаны ранее. Из (1.2.1) вытекает $d_1(u,z) = 0$, если $e(u,z) - z \ge u_1^*$, то есть $g(z) \le u - u_1^*$.

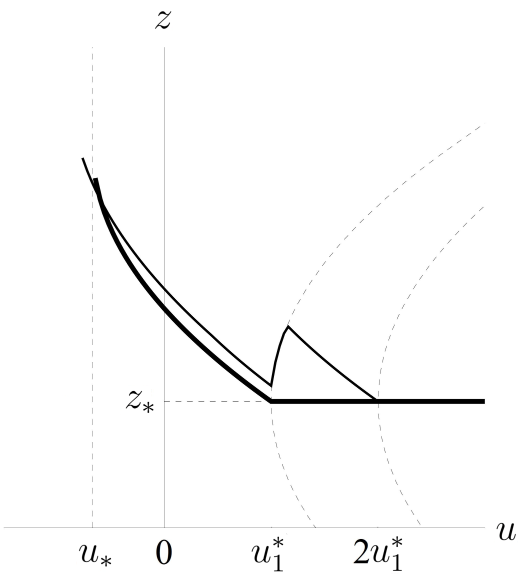
Очевидно, при $u_* < 0$ (множество D_1) имеет место $d_1(u,z) = 0$, если $H_1(u,z) = 0$.

Для случая $u_* > 0$ (множество D_3) ситуация следующая. Выполняется $H_1(u,z) = 0$, если $d_1(u,z) = 0$. В силу того, что $H_2(u,z) = H_1(u,z) + \alpha d_1(u,z)$, вытекает $H_2(u,z) = 0$, если оба слагаемых в правой части равны нулю. Значит, $h_2(u) = 0$ при $u \geq u_2$, если $u_* > 0$. Аналогично, если $u_* < 0$, то $h_2(u)$ при $u \geq u_*$. Данный уровень издержек достигается, если положить $\hat{z}_2(u) = z_*$ для заданного капитала u. Желаемые утверждения для любого n легко получаются с помощью метода математической индукции. $\square$

Мы получили, что вид оптимальной стратегии сильно зависит от величины u_1^*. Поэтому в следующих разделах будет проведен анализ чувствительности u_1^* к изменению в параметрах модели. Но перед тем, как к нему приступить, приведем графики функций $z_n(u)$, $n = 1, 2$ на рис. 11, где более жирная линия соответствует уровню собственного удержания $z_1(u)$.



(a) $u_1* = -0.3$



(b) $u_1* = 0.3$

Рис. 11: Оптимальные уровни собственного удержания, случай равномерного распределения требований на отрезке $[0, 2]$, $\alpha = 0.5$, $n \in \{1, 2\}$

1.2.2 Анализ чувствительности

Для анализа чувствительности функции к флуктуации параметров будем использовать модификацию метода, описанного в статье Соболя [8]. Сначала мы приведем общую постановку метода, а затем уже продемонстрируем результаты его применения к нашей модели.

Пусть задана функция $R = R(a)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, оценим ее чувствительность по отношению к параметрам a_i, $i = \overline{1,n}$. Полагаем, что наблюдаемые параметры a_i, $i = \overline{1,n}$, являются независимыми равномерно распределенными случайными величинами в интервалах $(a_i^0(1-\delta), a_i^0(1+\delta))$, $i = \overline{1,n}$, соответственно, где a_i^0 — начальное значение i-го параметра, $\delta \in [0,1]$. Величину δ можно понимать, как относительную ошибку при измерении параметра a_i.

Введем следующие вспомогательные функции

$$R_0 = \mathbb{E}R, \quad R_i(a_i) = c_i \int_{K_{n\setminus i}} R(a)\, \Pi_{l\neq i} da_l - R_0. \tag{1.42}$$

Запись $K_{n\setminus i}$ означает, что интегрирование производится по всем переменным за исключением i-ой. Коэффициент c_i в свою очередь рассчитывается, как величина обратная к произведению длин всех интервалов помимо i-го. Аналогично вводятся функции от двух и более переменных

$$R_{ij}(a_i, a_j) = \int_{K_{n\setminus ij}} R(a)\, \Pi_{l\neq i,j} da_l - (R_0 + R_i(a_i) + R_j(a_j)).$$

Рассмотрим величины $V[R], V_{i_1,\dots,i_s}$ такие, что

$$\begin{gathered} V[R] = \int_{K_n} R^2(a)\, da - R_0^2 = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{i<j} V_{ij} + \sum_{i<j<k} V_{ijk} + \ldots + V_{1,2,\dots,n}, \\ V_{i_1,\dots,i_s} = c_{i_1,\dots,i_s} \int_{K_{i_1,\dots,i_s}} R^2_{i_1,\dots,i_s} \Pi_{l=i_1,\dots,i_s}\, da_l, \end{gathered} \tag{1.43}$$

где

$$\begin{aligned} K_n &= \{(a_1^0(1-\delta), a_1^0(1+\delta)) \times \ldots \times (a_n^0(1-\delta), a_n^0(1+\delta))\}, \\ K_{i_1,\dots,i_s} &= [(a_{i_1}^0(1-\delta), a_{i_1}^0(1+\delta)) \times \ldots \times (a_{i_s}^0(1-\delta), a_{i_s}^0(1+\delta))], \\ c_{i_1,\dots,i_s} &= [\Pi_{l=i_1,\dots,i_s}(2\delta a_l^0)]^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $R(a), R_{i_1,\dots,i_s}$ — случайные величины, то $V[R], V_{i_1,\dots,i_s}$ являются их дисперсиями. Введем следующее

Определение 1.1. *1) Величина $S_{i_1,\dots,i_s} = V_{i_1,\dots,i_s}/V[R]$ называется индексом чувствительности группы параметров $\{a_{i_1},\dots,a_{i_s}\}$.*

2) Индексом чувствительности порядка s называется сумма $\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n} S_{i_1,\dots,i_s}$.

3) Глобальный индекс чувствительности $GI(a_i)$ переменной a_i есть сумма индексов чувствительности по всем группам параметров, содержащим a_i,

$$GI(a_i) = \frac{V_i + \sum_{i<j} V_{ij} + \ldots + V_{1,2,\dots,n}}{V[R]}. \tag{1.44}$$

Таким образом, индекс $GI(a_i)$ показывает, какая доля от общей изменчивости функции $R(a)$ вызвана изменчивостью в параметре a_i. Чем ближе значение $GI(a_i)$ к 0, тем менее чувствительна функция $R(a)$ к флуктуациям параметра a_i, чем ближе к 1 — тем более чувствительна.

В следующем разделе приведены результаты расчета глобальных индексов чувствительности $GI(\lambda)$ и $GI(\mu)$ для функции $R(\lambda, \mu) = u_1^*$, где

$$\lambda := l - 1, \quad \mu := m - 1.$$

1.2.3 Численные примеры

Итак, пусть $X \sim U[0, A]$, то есть размер совокупных годовых требований распределен равномерно на отрезке $[0, A], A > 0$. Тогда плотность и функция распределения имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} A^{-1}, & x \in [0, A] \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ xA^{-1}, & x \in [0, A] \\ 1, & x > A. \end{cases}$$

Выпишем явные выражения для функций $c(z), g(z)$. Учитывая $\mathbb{E}X = \frac{A}{2}$, получим

$$c(z) = \begin{cases} \frac{lA}{2}, & z \geq A \\ \frac{lA}{2} - \frac{m(A-z)^2}{2A}, & z < A, \end{cases} \qquad g(z) = \begin{cases} z - \frac{lA}{2}, & z \geq A \\ z - \frac{lA}{2} + \frac{m(A-z)^2}{2a}, & z < A. \end{cases}$$

В силу того, что $F^{-1}(y) = yA,\ 0 \leq y \leq 1$, находим

$$z_* = F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right) = \frac{m-1}{m}A, \quad u_1^* = g(z_*) = \left(1 - \frac{1}{2m} - \frac{l}{2}\right)A, \quad u_* = z_* - c(\infty)$$

Отсюда сразу вытекает

$$u_1^* \geq 0 \quad \text{тогда и только тогда} \quad \frac{1}{m} + l \leq 2. \tag{1.45}$$

$$u_* \geq 0 \quad \text{тогда и только тогда} \quad \frac{1}{m} + \frac{l}{2} \leq 1. \tag{1.46}$$

Несложно видеть, что множество пар (l, m), удовлетворяющих (1.45), содержит пары (l, m), для которых справедливо соотношение (1.46). Отметим, что знак u_1^* и u_1 не зависит от параметра распределения A.

Положим $A = 2$ и $\lambda = l - 1,\ \mu = m - 1$.

Допустим, что λ, μ являются не фиксированными параметрами, а равномерно распределенными случайными величинами на отрезках $[\lambda_0(1-\delta), \lambda_0(1+\delta)]$ и $[\mu_0(1-\delta), \mu_0(1+\delta)]$ соответственно, более того, $0 < \lambda_0 < \mu_0$. Так как должно выполняться неравенство $\lambda < \mu$ для любых $\lambda \in [\lambda_0(1-\delta), \lambda_0(1+\delta)]$ и $\mu \in [\mu_0(1-\delta), \mu_0(1+\delta)]$, возникает следующее ограничение на δ: $\delta < \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\mu_0 + \lambda_0}$. Принимая во внимание, что $0 < \delta < 1$, для любой фиксированной пары λ_0, μ_0 получаем $\delta \in [0, \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\mu_0 + \lambda_0}]$.

Управляющий параметр u_1^* является функцией переменных λ, μ следующего вида

$$u_1^*(\lambda, \mu) = \left(1 - \frac{1}{2(1+\mu)} - \frac{(1+\lambda)}{2}\right)A.$$

Нашей целью является оценка влияния параметров λ, μ на функцию $u_1^*(\lambda, \mu)$ для различных $0 < \delta < 1$. Для этого мы исследуем индексы чувствительности $GI(\lambda), GI(\mu)$, как функцию от δ.

Согласно формулам (1.43), дисперсии $V[u_1^*], V_\lambda, V_\mu$ вычисляются следующим образом

$$\begin{aligned} V[u_1^*] &= \frac{1}{4\delta^2\lambda_0\mu_0} \int\limits_{\lambda_0(1-\delta)}^{\lambda_0(1+\delta)} \int\limits_{\mu_0(1-\delta)}^{\mu_0(1+\delta)} (u_1^*(\lambda,\mu))^2 \, d\mu \, d\lambda - u_0^2, \\ V_\lambda &= \frac{1}{2\delta\lambda_0} \int\limits_{\lambda_0(1-\delta)}^{\lambda_0(1+\delta)} (u_\lambda(\lambda))^2 \, d\lambda, \quad V_\mu = \frac{1}{2\delta\mu_0} \int\limits_{\mu_0(1-\delta)}^{\mu_0(1+\delta)} (u_\mu(\mu))^2 \, d\mu, \end{aligned} \tag{1.47}$$

где $u_0, u_\lambda(\lambda), u_\mu(\mu)$ находятся с помощью формул (1.42)

$$u_0 = \frac{1}{4\delta^2\lambda_0\mu_0} \int\limits_{\lambda_0(1-\delta)}^{\lambda_0(1+\delta)} \int\limits_{\mu_0(1-\delta)}^{\mu_0(1+\delta)} u_1^*(\lambda,\mu) \, d\mu \, d\lambda = \frac{\beta\left(-\delta\left(\lambda_0-1\right)\mu_0 - \tanh^{-1}\left(\frac{\delta\mu_0}{\mu_0+1}\right)\right)}{2\delta\mu_0},$$

$$u_\lambda(\lambda) = \frac{1}{2\delta\mu_0} \int\limits_{\mu_0(1-\delta)}^{\mu_0(1+\delta)} u_1^*(\lambda,\mu) \, d\mu - u_0 = \frac{\beta(\lambda_0-\lambda)}{2},$$

$$u_\mu(\mu) = \frac{1}{2\delta\mu_0} \int\limits_{\mu_0(1-\delta)}^{\mu_0(1+\delta)} u_1^*(\lambda,\mu) \, d\mu - u_0 = \frac{\beta\left(\frac{-\delta\mu_0}{1+\mu} + \tanh^{-1}\left(\frac{\delta\mu_0}{\mu_0+1}\right)\right)}{2\delta\mu_0}.$$

Подставляя явные выражение для $u_0, u_\lambda(\lambda), u_\mu(\mu)$ в (1.47) и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \frac{1}{12}\beta^2\delta^2\lambda_0^2, \\ V_\mu &= \frac{1}{4}\beta^2 \left(\frac{1}{(\mu_0+1)^2 - \delta^2\mu_0^2} - \frac{\left(\tanh^{-1}\left(\frac{\delta\mu_0}{\mu_0+1}\right)\right)^2}{\delta^2\mu_0^2} \right), \\ V[u_1^*] &= V_\lambda + V_\mu. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая (1.44), можем найти глобальные индексы чувствительности по формуле

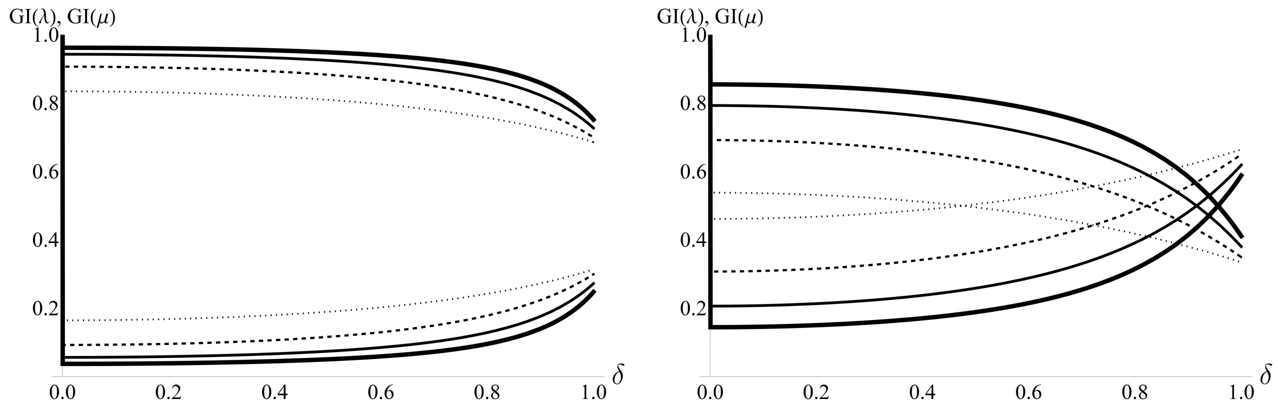
$$GI(\lambda) = 1 - \frac{V_\mu}{V[u_1^*]}, \quad GI(\mu) = 1 - \frac{V_\lambda}{V[u_1^*]}$$

для различных значений δ. Стоит отметить, что индексы чувствительности не зависят от параметра распределения требований, A.

Зафиксируем один из параметров λ_0, μ_0. Тогда меняя другой параметр, можем наблюдать изменения индексов $GI(\lambda), GI(\mu)$.

Интерес представляет рассмотрение таких пар λ_0, μ_0, что соответствующие и (l, m) лежат внутри областей D_1, D_2, D_3 или на границах областей D_1 и D_2, D_2 и D_3.

На рис. 12(a) изображены графики $GI(\lambda)$ (убывающие кривые) и $GI(\mu)$ (возрастающие кривые) при $\lambda_0 = 0.5$ и различных $\mu_0 \in \{2, 4, 6, 8\}$ (чем больше μ_0, тем жирнее соответствующая кривая). На рис. 12(b) — графики индексов чувствительности, построенные при $\lambda_0 = 0.24$ и таких же значениях μ_0, как и ранее.



(a) $\lambda_0 = 0.5$

(b) $\lambda_0 = 0.24$

Рис. 12: Индексы чувствительности, $\lambda_0 = const$

Получим, что при фиксированном δ значения индексов чувствительности, рассчитанные для каждой пары λ_0, μ_0, при росте μ_0 и неизменном λ_0 ведут себя следующим образом: $GI(\lambda)$ увеличивается (т.е. влияние параметра λ на u_1^* возрастает), а $GI(\mu)$ наоборот уменьшается (т.е. влияние параметра μ на u_1^* убывает). Это подтверждается тем, что $(GI(\lambda))'_{\mu_0} > 0$, $(GI(\mu))'_{\mu_0} < 0$ при фиксированных $\delta \in (0, 1)$.

Индексы чувствительности для случая фиксированного $\mu_0 = const$ и меняющегося λ_0 имеют аналогичную форму, поэтому здесь не приводятся.

Важно также изобразить для фиксированного δ на плоскости (λ_0, μ_0) кривые, вдоль которых индексы чувствительности $GI(\lambda)$ или $GI(\mu)$ не изменяются.

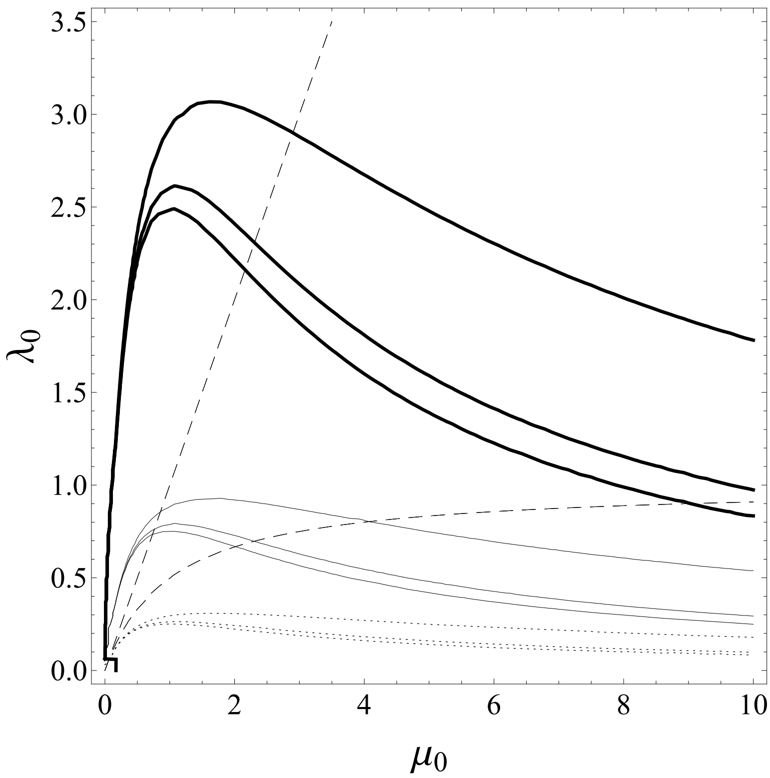


Рис. 13: $GI(\lambda) = const$

На рис. 13 изображены девять кривых $GI(\lambda) = C$ для $C \in \{0.99, 0.9, 0.5\}$ и $\delta = 0.1, \delta = 0.5, \delta = 0.9$. Они образуют три группы. Кривые одинаковой толщины соответствуют одному значению C. Чем толще кривая, тем больше C. Более того, среди кривых одинаковой толщины, кривая с большим значением δ лежит выше. Пунктирная прямая соответствует случаю $\lambda_0 = \mu_0$, пунктирная кривая $\frac{1}{1+\mu_0} + 1 + \lambda_0 = 2$ — уравнению $u_1^*(\lambda_0, \mu_0) = 0$. Стоит заметить, что кривая $GI(\lambda) = C$ совпадает с $GI(\mu) = 1 - C$, так как $GI(\lambda) + GI(\mu) = 1$.

Глава 2

Устойчивость, вероятностные оценки погрешности и предельные теоремы

В данной главе оценивается качество оптимальных стратегий перестрахования, полученных в предыдущих разделах, и исследуется предельное поведение капитала страховой компании в случае постоянной стратегии перестрахования. Существует множество различных подходов для определения качества найденного решения, мы сконцентрируемся на следующих. На проверке устойчивости решения к изменению распределения страховых требований и вероятностной оценке погрешности, возникающей при использовании теоретически найденной стратегии на эмпирических данных. Предельные теоремы для процесса капитала получены при двух различных методах вычисления уровня собственного удержания, а именно, с использованием теоретического и эмпирического знания о распределении требований.

§2.1 Устойчивость минимальных издержек в модели с перестрахованием и вливанием капитала

2.1.1 Постановка задачи об устойчивости

Рассматривается модель из главы 1, которая описывает работу страховой компании в дискретном времени в течение $n \geq 1$ лет. Совокупные годовые иски, поступающие в компанию, образуют последовательность неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, каждая из которых распределена как случайная величина ξ с конечным математическим ожиданием γ, функцией распределения F и плотностью распределения f. Чтобы обеспечить бесперебойное функционирование компании, применяется перестрахование эксцедента убыточности и производятся вливания капитала. Договор перестрахования подразумевает, что уровень собственного удержания на текущий год определяется в начале года. А дополнительные вливания производятся в конце года в случае падения капитала компании ниже фиксированного уровня a. В теоремах главы 1 находятся параметры перестрахования, минимизирующие ожидаемые совокупные вливания за n лет при условии, что премии страхования и перестрахования рассчитываются по принципу среднего с нагрузкой безопасности. Размер минимальных вливаний $h_n(u)$ является функцией от начального капитала компании $u \geq a$ и удовлетворяет рекуррентному уравнению (1.16).

Допустим, изначально мы предполагали, что $\xi \sim \text{law}(X)$. Но оказалось, что требования подчиняются не закону распределения $\text{law}(X)$, а отличному от него закону распределения $\text{law}(Y)$? Далее будем ко всем функциям, зависящим от ξ, приписывать индекс X (индекс Y), если $\xi \sim \text{law}(X)$ (соответственно $\xi \sim \text{law}(Y)$).

В данном разделе мы оцениваем, как сильно размер вливаемых средств $h_{n_Y}(u)$ отличается от $h_{n_X}(u)$, если расстояние между случайными величинами X и Y, вычисляемое с помощью метрики Канторовича и обозначаемое $\kappa(X,Y)$, равно некоторому положительному числу ρ.

Напомним, что если имеются случайные величины X и Y, обладающие конечными математическими ожиданиями, то согласно определению из Rachev et al. [39] расстояние между ними, вычисленное с помощью вероятностной метрики Канторовича, равно

$$\kappa(X,Y) = \int_{\mathbb{R}} |F_X(t) - F_Y(t)| dt,$$

где F_X, F_Y — функции распределения соответственно X и Y.

Поясним, почему в нашей задаче мы считаем метрику Канторовича естественной для измерения близости случайных величин. Значения $F_X(x)$ и $F_Y(x)$ есть вероятности того, что потери от выплаты требований X и Y соответственно не превысят уровень x. Величина $|F_X(x) - F_Y(x)|$ характеризует абсолютное отклонение этих вероятностей друг от друга при фиксированном x. Метрика Канторовича суммирует отклонения вероятностей для всех уровней x, то есть дает совокупную, "полную" информацию о различии в распределении требований, что, например, не скажешь о метрике Колмогорова. Подробное рассуждение о сути метрики Канторовича, ее актуальности для финансовой и страховой математики можно найти в книге Rachev et al. [40].

2.1.2 Устойчивость минимальных издержек в одношаговой модели

Введем обозначение

$$\Delta_n := \sup_{u>a} |h_{n_X}(u) - h_{n_Y}(u)|$$

для любого $n \geq 1$. Чтобы получить оценку для Δ_1, нам потребуется установить справедливость следующих лемм.

Лемма 2.1. *Функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — липшицева (то есть существует константа $C \geq 0$ такая, что $|h(x) - h(y)| \leq C|x - y|$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$) тогда и только тогда, когда h — абсолютно непрерывна и $|h'| \leq C$ п.н.*

Доказательство. Пусть h — липшицева. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое $\delta > 0$, чтобы выполнялось неравенство $C\delta < \varepsilon$. Пусть $\{(a_i, b_i)\}_{j=1}^{n}$ — конечная система непересекающихся интервалов такая, что $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |h(b_i) - h(a_i)| \le \sum_{i=1}^{n} C|b_i - a_i| = C\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < C\delta < \varepsilon,$$

что и означает абсолютную непрерывность функции h (если понимать определение абсолютной непрерывности, как в книге Колмогоров, Фомин [7]).

Далее, пусть p — точка, в которой существует производная h, тогда $h'(p) = \lim_{x\to p} \frac{h(x)-h(p)}{x-p}$. Но так как $\left|\frac{h(x)-h(p)}{x-p}\right| \le \frac{C|x-p|}{|x-p|} = C$, получим $|h'(p)| \le C$.

Теперь докажем утверждение в обратную сторону. В силу абсолютной непрерывности h имеем $h(y) - h(x) = \int_x^y h'(t)dt$, и следовательно,

$$|h(y) - h(x)| = \left|\int_x^y h'(t)dt\right| \le \int_x^y |h'(t)|dt \le \int_x^y Cdt = C|y - x|.$$

□

Лемма 2.2. *Пусть X, Y — случайные величины с конечными математическими ожиданиями, причем $\kappa(X, Y) = \rho$. И пусть $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ - неубывающая липшицева функция.*

Тогда для случайных величин $h(X), h(Y)$ имеем $\kappa(h(X), h(Y)) \le C\rho$, где C — константа Липшица.

Доказательство. Функция распределения случайной величины $h(X)$ вычисляется как $F_{h(X)}(t) = F_X\left(h^{\mathrm{inv}}(t)\right)$, где $h^{\mathrm{inv}}(t) = \sup\{s|h(s) = t\}$. Аналогично $F_{h(Y)}(t) = F_Y\left(h^{\mathrm{inv}}(t)\right)$. Можно заметить, что $\int_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{U}} |F_{h(X)}(t) - F_{h(Y)}(t)|dt = 0$, где $\mathbb{U} = h(\mathbb{R}^+)$. В силу неубывания функция h порождает меру и, следовательно, существует интеграл Лебега — Стилтьеса по этой мере. Согласно лемме 2.1 из липшицевости функции h вытекает абсолютная непрерывность h и ограниченность ее производной почти всюду. Это позволяет записать интеграл $\int_0^\infty f(s)dh(s)$ по мере h в виде интеграла $\int_0^\infty f(s)h'(s)ds$ по обычной мере Лебега (см. Колмогоров, Фомин [7], гл.6) и получить следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\kappa(h(X), h(Y)) &= \int_{\mathbb{R}} |F_{h(X)}(t) - F_{h(Y)}(t)|dt = \int_{\mathbb{U}} |F_{h(X)}(t) - F_{h(Y)}(t)|dt = \\ &= \int_{\mathbb{U}} \left|F_X(h^{inv}(t)) - F_Y(h^{inv}(t))\right| dt = \int_{h^{\mathrm{inv}}(\mathbb{U})} |F_X(s) - F_Y(s)|dh(s) = \\ &= \int_{h^{\mathrm{inv}}(\mathbb{U})} |F_X(s) - F_Y(s)|h'(s)ds \le C\int_{h^{\mathrm{inv}}(\mathbb{U})} |F_X(s) - F_Y(s)|ds \le \\ &\le C\int_{\mathbb{R}} |F_X(s) - F_Y(s)|ds = C\rho.\end{aligned}$$

□

Лемма 2.3. *Пусть $f(z), g(z)$ — такие функции, что для некоторого $\delta > 0$ и любого $z > 0$ верно неравенство $|f(z) - g(z)| < \delta$. Тогда $|\inf_{z>0} f(z) - \inf_{z>0} g(z)| < \delta$.*

Доказательство. Введем обозначения: $M_f = \inf_{z>0} f(z)$, $M_g = \inf_{z>0} g(z)$. По определению инфимума для любого $\varepsilon > 0$ существует $z_1(\varepsilon)$ такое, что $f(z_1(\varepsilon)) < M_f + \varepsilon$. Следовательно,

$$g(z_1(\varepsilon)) \le f(z_1(\varepsilon)) + \delta < M_f + \varepsilon + \delta \quad \Rightarrow \quad M_g \le g(z_1(\varepsilon)) < M_f + \varepsilon + \delta,$$

откуда в силу произвольности ε сразу вытекает $M_g \le M_f + \delta$.

Неравенство в обратную сторону $M_f \le M_g + \delta$ получаем аналогичными рассуждениями. Отсюда заключаем, что $|M_f - M_g| < \delta$. $\square$

Напомним, что в одношаговой модели, где ξ — размер совокупных требований, $z > 0$ — уровень собственного удержания, а $c(z)$ — премии страховщика с учетом перестрахования (рассчитывающиеся согласно (1.2)), минимальные дополнительные вливания определяются с помощью (1.6) и равны $h_1(u) = \inf_{z>0} \mathbb{E}J(u,z)$, где $J(u,z) = (\min(\xi, z) - (u-a) - c(z))^+$.

Теорема 2.1. *Пусть X, Y — неотрицательные случайные величины с конечными математическими ожиданиями, причем $\kappa(X,Y) = \rho$. Тогда*

$$\Delta_1 \le (1 + l + m)\rho,$$

где $l, m, 1 < l < m$ — коэффициенты нагрузки на премии страховщика и перестраховщика соответственно.

Доказательство. Вначале оценим величину $|\mathbb{E}J_X(u,z) - \mathbb{E}J_Y(u,z)|$. Вводя обозначения

$$C_X := -(u-a) - l\mathbb{E}X + m\mathbb{E}(X-z)^+, \quad C_Y := -(u-a) - l\mathbb{E}Y + m\mathbb{E}(Y-z)^+$$

и применяя неравенство треугольника, получаем

$$|\mathbb{E}J_X(u,z) - \mathbb{E}J_Y(u,z)| = |\mathbb{E}\,(\min(X,z) + C_X)^+ - \mathbb{E}\,(\min(Y,z) + C_Y)^+\,| \le$$
$$\le \underbrace{|\mathbb{E}\,(\min(X,z) + C_X)^+ - \mathbb{E}\,(\min(X,z) + C_Y)^+\,|}_{\delta_1(u,z)} + \underbrace{|\mathbb{E}\,(\min(X,z) + C_Y)^+ - \mathbb{E}\,(\min(Y,z) + C_Y)^+\,|}_{\delta_2(u,z)}.$$

Замечаем, что

$$\delta_1(u,z) \le \mathbb{E}|\,(\min(X,z) + C_X)^+ - (\min(X,z) + C_Y)^+\,| \le |C_X - C_Y| \le (l+m)\rho.$$

Далее, применяя лемму 2.2 к величинам X, Y и функции $h(x) = (\min(x,z) + C_Y)^+$, получаем

$$\delta_2(u,z) = |\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(Y)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \overline{F}_{h(X)}(t)dt - \int_{\mathbb{R}} \overline{F}_{h(Y)}(t)dt \right| \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}} |F_{h(X)}(t) - F_{h(Y)}(t)|dt = \kappa(h(X), h(Y)) \le 1\rho = \rho,$$

Следовательно, из леммы 2.3 вытекает оценка

$$\Delta_1 \le \sup_u |\mathbb{E}J_X(u,z) - \mathbb{E}J_Y(u,z)| \le (1 + l + m)\rho.$$

$\square$

2.1.3 Устойчивость минимальных издержек в многошаговой модели

Нижеследующая теорема 2.2 дает представление о том, насколько велика разница между совокупными дополнительными вложениями за n лет, вычисленными для различных распределений исков (близких по метрике Канторовича). При ее доказательстве нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.4. *Для любого* $n \geq 0$, *любого* $u \geq a$ *и коэффициента дисконтирования* $0 < \alpha < 1$ *имеет место оценка*

$$|h_n(u + \Delta u) - h_n(u)| \leq \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \Delta u.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 0$ в силу того, что $h_0(u)$ тождественно равна 0, получаем справедливое неравенство $|h_0(u+\Delta u) - h_0(u)| = 0 \leq 0$. Покажем, что если утверждение леммы выполняется для h_{n-1}, то оно будет верно и для h_n. Во-первых,

$$|\mathbb{E}J(u + \Delta u) - \mathbb{E}J(u, z)| \leq \Delta u. \tag{2.1}$$

Это сразу вытекает из того, что

$$\begin{aligned} &|J(u + \Delta u, z) - J(u, z)| = \\ &\qquad = \left|(\min(X, z) - (u + \Delta u - a) - c(z))^+ - (\min(X, z) - (u - a) - c(z))^+\right| \leq \Delta u. \end{aligned}$$

Во-вторых, так как

$$|\max(u + \Delta u + c(z) - \min(X, z), a) - \max(u + c(z) - \min(X, z), a)| \leq \Delta u,$$

и по предположению индукции $|h_{n-1}(u + \Delta u) - h_{n-1}(u)| \leq \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \Delta u$, получаем

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E}h_{n-1}(\max(u + \Delta u + c(z) - \min(X, z), a)) - \\ &\qquad -\mathbb{E}h_{n-1}(\max(u + c(z) - \min(X, z), a))| \leq \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha} \Delta u. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Из оценок (2.1), (2.2) вытекает следующее ограничение на изменение определенной в (1.18) функции $H_n(u, z)$ при изменение аргумента u на величину Δu:

$$|H_n(u + \Delta u, z) - H_n(u, z)| \leq \left(1 + \alpha \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha}\right) \Delta u = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \Delta u.$$

Осталось показать, что данная оценка будет верна, если вместо функции $H_n(u, z)$ взять $h_n(u) = \inf_z H_n(u, z)$. Это сразу следует из леммы 2.3, если положить в ней $f(z) = H_n(u + \Delta u, z)$ и $g(z) = H_n(u, z)$. □

Теорема 2.2. *Пусть X, Y — неотрицательные случайные величины с конечными математическими ожиданиями, причем $\kappa(X,Y) = \rho$. Тогда*

$$\Delta_n \le \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} - n\alpha^n\right)(1+l+m)\rho,$$

где $\alpha \in (0,1)$ — коэффициент дисконтирования; $l, m,\ 1 < l < m,$ — нагрузочные факторы на премии страховщика и перестраховщика соответственно.

Доказательство. Оценим разность $|h_{n_X}(u,z) - h_{n_Y}(u,z)|$. Учитывая, что

$$(u-a) + l\mathbb{E}X - m\mathbb{E}(X-z)^+ = -C_X, \quad (u-a) + l\mathbb{E}Y - m\mathbb{E}(Y-z)^+ = -C_Y,$$

получаем

$$\max(u + c(z) - \min(X,z), a) = a - (C_X + \min(X,z))^-,$$
$$\max(u + c(z) - \min(Y,z), a) = a - (C_Y + \min(Y,z))^-,$$

где $(C_X + \min(X,z))^- = \min\{0, C_X + \min(X,z)\}$. Следовательно, можем выписать следующую оценку

$$|h_{n_X}(u,z) - h_{n_Y}(u,z)| \le \underbrace{|\mathbb{E}J_X(u,z) - \mathbb{E}J_Y(u,z)|}_{\delta_{1_n}(u,z)} +$$
$$+ \alpha \left|\mathbb{E}h_{n-1_X}\left(a - (C_X + \min(X,z))^-\right) - \mathbb{E}h_{n-1_Y}\left(a - (C_Y + \min(Y,z))^-\right)\right|.$$

Первое слагаемое из правой части последнего неравенства оценивается, как в одношаговой модели, поэтому $\delta_{1_n}(u,z) \le (1+l+m)\rho$. Применяя ко второму слагаемому неравенство треугольника, ограничиваем его сверху суммой трех слагаемых:

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}h_{n-1_X}\left(a - (C_X + \min(X,z))^-\right) - \mathbb{E}h_{n-1_Y}\left(a - (C_Y + \min(Y,z))^-\right)\right| \le \\
&\quad \le \underbrace{\left|\mathbb{E}h_{n-1_X}\left(a - (C_X + \min(X,z))^-\right) - \mathbb{E}h_{n-1_Y}\left(a - (C_X + \min(X,z))^-\right)\right|}_{\delta_{2_n}(u,z)} + \\
&\quad + \underbrace{\left|\mathbb{E}h_{n-1_Y}\left(a - (C_X + \min(X,z))^-\right) - \mathbb{E}h_{n-1_Y}\left(a - (C_X + \min(Y,z))^-\right)\right|}_{\delta_{3_n}(u,z)} + \\
&\quad + \underbrace{\left|\mathbb{E}h_{n-1_Y}\left(a - (C_X + \min(Y,z))^-\right) - \mathbb{E}h_{n-1_Y}\left(a - (C_Y + \min(Y,z))^-\right)\right|}_{\delta_{4_n}(u,z)}.
\end{aligned}$$

В силу определения Δ_{n-1} для любого $u \ge a$ выполнено неравенство $|h_{n-1_X}(u) - h_{n-1_Y}(u)| \le \Delta_{n-1}$, поэтому

$$\delta_{2_n}(u,z) \le \Delta_{n-1}\int_{\mathbb{R}} dF_X(t) = \Delta_{n-1}.$$

Согласно лемме 2.4 для любого $u \ge a$ имеет место оценка

$$|h_{n-1_Y}(u + \Delta u) - h_{n-1_Y}(u)| \le \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\Delta u.$$

Следовательно,
$$\delta_{4_n}(u,z) \le \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}|C_X - C_Y| \le \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}(l+m)\rho,$$
и, применяя лемму 2.2 к функции $h(x) = h_{n-1_Y}\left(a - (C_X + \min(x,z))^-\right)$, находим
$$\delta_{3_n}(u,z) \le \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\rho.$$

Монотонность функции $h_{n-1_Y}(u)$, необходимая для использования леммы 2.2, доказана в лемме 1.5. Из полученных выше оценок вытекает, что

$$\Delta_n = \sup_u |h_{n_X}(u,z) - h_{n_Y}(u,z)| \le (1+l+m)\rho + \alpha\left(\Delta_{n-1} + \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}(1+l+m)\rho\right) =$$
$$= \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}(1+l+m)\rho + \alpha\Delta_{n-1} \le \left(\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i \frac{1-\alpha^{n-i}}{1-\alpha}\right)(1+l+m)\rho =$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} - n\alpha^n\right)(1+l+m)\rho.$$

□

Замечание 4. *Из теоремы 2.2 следует, что функция, ограничивающая сверху Δ_n, стремится к $\frac{1}{(1-\alpha)^2}(1+l+m)\rho$ при $n \to \infty$ и $0 < \alpha < 1$.*

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Чем больше расходятся распределения исков (т.е. чем больше $\kappa(X,Y)$), тем сильнее будут отличаться дополнительные издержки, связанные с этими исками. Коэффициент α является ставкой дисконтирования, т.е. с его помощью вычисляется приведенная к настоящему моменту стоимость будущих денежных потоков. На практике чем больше неопределенности в поведении капитала в будущем, тем выше коэффициент дисконтирования. Полученное в теореме неравенство подтверждает эту зависимость, так как увеличение α влечет рост значения в правой части неравенства при $n \to \infty$, что в свою очередь означает увеличение разброса ожидаемых дополнительных выплат (за время функционирования компании).

Проверка устойчивости является актуальной задачей в реальной жизни. Действительно, на практике мы обычно не знаем истинную функцию распределения исков, поэтому при расчетах либо аппроксимируем ее с помощью известной теоретической функции распределения, либо заменяем на эмпирическую. В первом случае представление о погрешности, которую мы можем допустить при оценке минимальных ожидаемых издержек, дает теорема 2.2. Вероятностная оценка ошибки вычислений, возникающей во втором случае, рассматривается в следующем разделе.

§2.2 Оценка погрешности при эмпирическом вычислении оптимальных характеристик модели перестрахования

В настоящем разделе мы рассмотрим, как могут меняться характеристики оптимальной модели перестрахования, если при их вычислении заменить теоретическую функцию распределения совокупных требований на эмпирическую.

2.2.1 Погрешность при вычислении минимальных ожидаемых издержек

Пусть F — истинная функция распределения совокупных годовых требований, а F_N — эмпирическая функция, построенная по N наблюдениям $X_j,\ j = \overline{1-N, 0}$.

Оценим величину

$$\eta_N := \sup_u |h_F(u) - h_{F_N}(u)|,$$

где $h_F(u)$ и $h_{F_N}(u)$ — минимальные ожидаемые издержки за n лет, рассчитанные с учетом того, что совокупные годовые требования $X_i,\ i = \overline{1, n}$ имеют функцию распределения F и F_N соответственно. Данная задача представляет интерес при практическом применении описанной модели перестрахования в силу того, что позволяет в некотором смысле оценить возможные убытки, вызванные неточной аппроксимацией функции распределения страховых требований.

Так как $F_N(t)$ является случайной величиной при фиксированном t, то и η_N будет случайной величиной. Следовательно, возникает задача о нахождении доверительного интервала для η_N при $N \to \infty$, если быть точнее, то задача о построении оценки асимптотического доверительного интервала. Введем обозначение

$$\xi_N := \sqrt{N} \int_{-\infty}^{\infty} |F(t) - F_N(t)| dt.$$

Полученный в теореме 2.2 результат влечет выполнение неравенства $|\eta_N| \le C \frac{\xi_N}{\sqrt{N}}$ п.н., где $C = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} - n\alpha^n \right) (1 + l + m)\rho$. Поэтому для любого $y \ge 0$ имеет место

$$P(|\eta_N| \le y) \ge P\left(\frac{\xi_N}{\sqrt{N}} \le y/C \right) = P\left(\xi_N \le \sqrt{N} y/C \right).$$

Для оценки доверительного интервала нам нужно знать скорость стремления ξ_N к предельному распределению. В статье Fournier et al. [30] сформулировано следующее утверждение.

Лемма 2.5. *(Fournier, [30]) Если существует $q > 2$ такое, что $\int_{\mathbb{R}} |x|^q F(dx) < \infty$, то для любого $N \geq 1$ и $x \in (0, \infty)$ выполняется оценка*

$$P(\kappa(F, F_N) \geq x) \leq a(N, x)\mathbb{I}\{x \leq 1\} + b(N, x),$$

где $a(N, x) = c_1 \exp(-c_2 N x^2)$ и $b(N, x) = c_1 N (Nx)^{-(q-\varepsilon)}$ для любого $\varepsilon \in (0, q)$. Константы c_1, c_2 положительны и не зависят от q, N, x.

Так как ξ_N есть не что иное, как $\sqrt{N}\kappa(F, F_N)$, то приведенная выше лемма 2.5 позволяет получить следующий результат.

Теорема 2.3. *Если существует $q > 2$ такое, что $\int_{\mathbb{R}} |x|^q \, dF(x) < \infty$, то для любого $N \geq 1$, $y \in (0, \infty)$ и $0 < \theta < 1$ верна следующая оценка*

$$P\left(|\eta_N| \leq y\right) \geq 1 - \theta \quad \textit{при} \quad y = C\sqrt{-\frac{\ln(\theta/c_1)}{c_2 N}},$$

где c_1, c_2, C - положительные константы, не зависящие от q, N, y.

Доказательство. Воспользуемся леммой 2.5, положив $x = y/(C\sqrt{N})$. То есть в нашем случае x имеет порядок $1/\sqrt{N}$ и выполняется неравенство

$$P\left(\frac{\xi_N}{\sqrt{N}} \geq x\right) \leq c_1 \left(\exp(-c_2 N x^2)\mathbb{I}\{x \leq 1\} + N(Nx)^{-(q-\varepsilon)}\right)$$

для некоторых положительных c_1, c_2.

Выбирая $\varepsilon \in (0, q)$ таким образом, чтобы было справедливо неравенство $q - \varepsilon > 2$, получим, что слагаемое $N(Nx)^{-(q-\varepsilon)}$ имеет порядок $(\sqrt{N})^{2-(q-\varepsilon)}$, то есть стремится к 0 при $N \to \infty$ и мало по сравнению с первым слагаемым, поэтому ним можно будет пренебречь.

Учитывая проделанные выше рассуждения, найдем оценку для границ асимптотического доверительного интервала уровня $1 - \theta$ из следующей цепочки неравенств

$$P\left(|\eta_N| \leq y\right) \geq P\left(\frac{\xi_N}{\sqrt{N}} \leq y/C\right) = 1 - P\left(\frac{\xi_N}{\sqrt{N}} \geq y/C\right) \geq$$
$$\geq 1 - c_1 \exp(-c_2 N (y/C)^2) \geq 1 - \theta.$$

Получим, что при $N \to \infty$ для выполнения $P\left(|\eta_N| \leq y\right) \geq 1 - \theta$ достаточно взять

$$y = C\sqrt{-\frac{\ln(\theta/c_1)}{c_2 N}}.$$

□

2.2.2 Погрешность при вычислении оптимальных параметров перестрахования

Ранее получили, что выбор оптимального уровня собственного удержания зависит от начального капитала компании. Согласно теоремам из главы 1 можно указать значения капитала u_*, u_1^*, определяемые с помощью (1.9), которые задают границы применимости разных видов стратегий перестрахования. Так как неточное определение границ может повлечь за собой использование неоптимальной стратегии, важно уметь оценивать ошибку, возникающую при расчете u_*, u_1^*.

Если распределение требований неизвестно, мы заменяем теоретическую функцию распределения на эмпирическую, поэтому возникает необходимость оценки случайных ошибок вида $|u_{*,F}-u_{*,F_N}|$, $|u^*_{1,F}-u^*_{1,F_N}|$, где символы F и F_N, стоящие в индексах после запятой, показывают, какая функция распределения используется при вычислении соответствующих величин. С учетом (1.9) и $z_* = F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)$ получаем

$$\begin{aligned}
|z_{*,F} - z_{*,F_N}| &= \left|F^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right) - F_N^{-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)\right| = \left|F^{-1}(p) - F_N^{-1}(p)\right|,\\
|u_{*,F} - u_{*,F_N}| &= |(z_{*,F} - z_{*,F_N}) - l(\mathbb{E}X - \mathbb{E}_{emp}X)| = \left|F^{-1}(p) - F_N^{-1}(p) - l\left(\mathbb{E}X - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\right|,\\
|u^*_{1,F} - u^*_{1,F_N}| &= |g(z_{*,F}) - g(z_{*,F_N})| = |z_{*,F} - z_{*,F_N} - c(z_{*,F}) + c\,(z_{*,F_N})| =\\
&= \left|F^{-1}(p) - F_N^{-1}(p) - (c - m\mathbb{E}(X - F^{-1}(p))^+) + (c - m\mathbb{E}_{emp}(X - F_N^{-1}(p))^+)\right| =\\
&= \left|F^{-1}(p) - F_N^{-1}(p) + m\left(\mathbb{E}(X - F^{-1}(p))^+ - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - F_N^{-1}(p))^+\right)\right|,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $F_N^{-1}(p) = \inf\{t : F_N(t) \geq p\}$ — эмпирический квантиль уровня p, $p = \frac{m-1}{m}$. Символ $\mathbb{E}_{emp}$ означает взятие математического ожидания по эмпирической мере, то есть

$$\mathbb{E}_{emp}X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i, \quad \mathbb{E}_{emp}\min(X, F_N^{-1}(p)) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\min(X_i, F_N^{-1}(p)).$$

Оценим размер асимптотических доверительных интервалов для случайных величин из (2.3). Используя нижеследующую лемму, будем определять границы доверительных интервалов заданного уровня значимости.

Лемма 2.6 (Serfling [42], §2.3.2, лемма(Hoeffding))**.** *Пусть $Y_1, ..., Y_i$ - независимые случайные величины такие, что $P(a \leq Y_k \leq b) = 1$ для любого k, где $a < b$. Тогда для любого $t > 0$*

$$P\left(\sum_{k=1}^{i} Y_k - \sum_{k=1}^{i}\mathbb{E}Y_k \geq it\right) \leq \exp\left\{-2\frac{it^2}{(b-a)^2}\right\}.$$

Теорема 2.4. *Для любого* $0 < \theta < 1$ *асимптотические доверительные интервалы для* z_{*,F_N}, u_{*,F_N} *и* u^*_{1,F_N} *при* $N \to \infty$ *имеют вид*

$$P\left(z_{*,F_N} \in (z_{*,F} - y_{z_*,\theta}, z_{*,F} + y_{z_*,\theta})\right) \geq 1 - \theta, \quad \text{где} \quad y_{z_*,\theta} = \sqrt{\frac{\ln(\theta/2)}{2f^2\left(F^{-1}(p)\right)N}},$$

$$P\left(u_{*,F_N} \in (u_{*,F} - y_{u_*,\theta}, u_{*,F} + y_{u_*,\theta})\right) \geq 1 - \theta, \quad \text{где} \quad y_{u_*,\theta} = 2l\sqrt{\frac{DX_1}{N\theta}},$$

$$P\left(u^*_{1,F_N} \in (u^*_{1,F} - y_{u^*_1,\theta}, u^*_{1,F} + y_{u^*_1,\theta})\right) \geq 1 - \theta, \quad \text{где} \quad y_{u^*_1,\theta} = 4m\sqrt{\frac{DX_1 + \mathbb{E}X_1^2}{N\theta}}.$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ получим

$$P(|z_{*,F} - z_{*,F_N}| > \varepsilon) = P\left(|F^{-1}(p) - F_N^{-1}(p)| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\{-2Nf^2\left(F^{-1}(p)\right)\varepsilon^2\}. \tag{2.4}$$

Пусть фиксировано $0 < \theta < 1$, мы хотим найти границу $y_{z_*,\theta}$ такую, чтобы выполнялось

$$P\left(|z_{*,F} - z_{*,F_N}| < y_{z_*,\theta}\right) = 1 - P\left(|z_{*,F} - z_{*,F_N}| > y_{z_*,\theta}\right) \geq$$
$$\geq 1 - 2\exp\{-2Nf^2\left(F^{-1}(p)\right)y^2_{z_*,\theta}\} \geq 1 - \theta.$$

Следовательно, для достаточно больших N чтобы выполнялось требуемое неравенство можем взять $y_{z_*,\theta} = \sqrt{\frac{\ln(\theta/2)}{2f^2(F^{-1}(p))N}}$.

Далее, применяя неравенство Чебышева, получаем, что при $N \to \infty$

$$P(|u_{*,F} - u_{*,F_N}| > \varepsilon) \leq P\left(|F^{-1}(p) - F_N^{-1}(p)| > \varepsilon/2\right) + P\left(l\left|\mathbb{E}X - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right| > \varepsilon/2\right) \leq$$
$$\leq 2\exp\{-2Nf^2\left(F^{-1}(p)\right)(\varepsilon/2)^2\} + \frac{DX_1}{N(\varepsilon/(2l))^2} =$$
$$= 2\exp\{-8f^2\left(F^{-1}(p)\right)N\varepsilon^2\} + \frac{4l^2DX_1}{N\varepsilon^2}, \tag{2.5}$$

Если в (2.5) ε^2 имеет порядок $\frac{\ln N}{N}$, то первое слагаемое стремится к 0 со скоростью $N^{-8f^2\left(F^{-1}(p)\right)}$, а второе со скоростью $\frac{1}{\ln N}$. Следовательно, при $N \to \infty$ можем пренебречь первым слагаемым и взяв $y_{u_*,\theta} = 2l\sqrt{\frac{DX_1}{N\theta}}$ получить

$$P(|u_{*,F} - u_{*,F_N}| < y_{u_*,\theta}) = 1 - P(|u_{*,F} - u_{*,F_N}| < y_{u_*,\theta}) \geq 1 - \theta.$$

Осталось исследовать величину $|u^*_{1,F} - u^*_{1,F_N}|$. Действуя по аналогии с предыдущим случаем, получим

$$
\begin{aligned}
&P(|u^*_{1,F} - u^*_{1,F_N}| > \varepsilon) = \\
&\qquad = P\left(|F^{-1}(p) - F^{-1}_N(p)| > \varepsilon/2\right) + P\left(m\left|\mathbb{E}(X - F^{-1}(p))^+ - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (X_i - F^{-1}_N(p))\right| > \varepsilon/2\right) = \\
&\qquad = P\left(|F^{-1}(p) - F^{-1}_N(p)| > \varepsilon/2\right) + \\
&\qquad + P\left(\left|\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}\min(X, F^{-1}(p)) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (X_i - \min(X_i, F^{-1}_N(p)))\right| > \varepsilon/(2m)\right) \le \\
&\qquad \le 2\exp\{-2Nf^2\left(F^{-1}(p)\right)(\varepsilon/2)^2\} + P\left(\left|\mathbb{E}X - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i\right| > \varepsilon/(4m)\right) + \\
&\qquad + P\left(\left|\mathbb{E}\min(X, F^{-1}(p)) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \min(X_i, F^{-1}_N(p))\right| > \varepsilon/(4m)\right) \le \\
&\qquad \le 2\exp\{-8Nf^2\left(F^{-1}(p)\right)\varepsilon^2\} + \frac{DX_1}{N(\varepsilon/(4m))^2} + \frac{D\min(X_1, F^{-1}_N(p))}{N(\varepsilon/(4m))^2} \le \\
&\qquad \le 2\exp\{-8Nf^2\left(F^{-1}(p)\right)\varepsilon^2\} + \frac{DX_1}{N(\varepsilon/(4m))^2} + \frac{\mathbb{E}X_1^2}{N(\varepsilon/(4m))^2} = \\
&\qquad = 2\exp\{-8f^2\left(F^{-1}(p)\right)N\varepsilon^2\} + \frac{(DX_1 + \mathbb{E}X_1^2)16m^2}{N\varepsilon^2}.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

И полагая $y_{u^*_1,\theta} = 4m\sqrt{\frac{DX_1+\mathbb{E}X_1^2}{N\theta}}$, придем к тому, что имеет место неравенство

$$P(|u^*_{1,F} - u^*_{1,F_N}| < y_{u^*_1,\theta}) = 1 - P(|u^*_{1,F} - u^*_{1,F_N}| < y_{u^*_1,\theta}) \ge 1 - \theta.$$

□

Замечание 5. *Мы видим, что при $N \to \infty$ интервалы $(-y_{z_*,\theta}, y_{z_*,\theta})$, $(-y_{u_*,\theta}, y_{u_*,\theta})$, $(-y_{u^*_1,\theta}, y_{u^*_1,\theta})$ сужаются, то есть при увеличении объема выборки можем с большей точностью утверждать близость значений $z_{*,F}$ и z_{*,F_N}, $u_{*,F}$ и u_{*,F_N}, $u^*_{1,F}$ и u^*_{1,F_N} соответственно.*

§2.3 Предельное распределение капитала в модели с банковскими займами

2.3.1 Предельное распределение капитала при константной стратегии и теоретически определяемом распределении требований

Рассматривается модель функционирования компании из раздела 1.2. Согласно (1.24) капитал страховщика U_n в момент времени $n \ge 1$ описывается рекуррентным уравнением

$$U_n = U_{n-1} + c(z) - \min(X_n, z), \quad U_0 = u,$$

где X_n — совокупные требования, поступившие в течение n - го года. Предполагается, что $\{X_n\}_{n\geq 1}$ образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с непрерывной функцией распределения F. Премии страховщика с учетом перестрахования $c(z)$ за n-ый год рассчитываются согласно (1.2) по формуле $c(z) = c - m\mathbb{E}(X_n - z)^+$, где $m > 1$ — нагрузочный коэффициент на премии перестраховщика.

Зафиксируем параметр собственного удержания z, тогда значение $c(z)$ будет постоянным на протяжение всего времени функционирования компании (обозначим его через c_z), а случайные величины

$$\tilde{X}_n := c_z - \min(X_n, z)$$

— независимыми одинаково распределенными с функцией распределения $F_{\tilde{X}}$ такой, что

$$F_{\tilde{X}}(t) = \begin{cases} 0, & t < c_z - z, \\ 1 - F(c_z - t), & t \geq c_z - z. \end{cases}.$$

Заметим, при выборе z таким образом, что $c_z - z < 0$, функция распределения $F_{\tilde{X}}(t)$ будет непрерывной. Выбор такого z возможен только в том случае, когда коэффициенты нагрузки на премии страховщика и перестраховщика (l, m) лежат в области D_1 (D_i, $i = \overline{1,3}$ были определены в (1.8)). В том случае, когда $(l, m) \in D_2 \cup D_3$, функция $F_{\tilde{X}}(t)$ будет иметь разрыв в точке $t = c_z - z$ независимо от значения z.

Найдем выражение для капитала компании U_n через величины $\tilde{X}_i$ при $i = \overline{1,n}$. Имеем

$$U_n = U_{n-1} + \tilde{X}_n = U_0 + \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i = u + \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i, \tag{2.7}$$

откуда следует, что функция распределения капитала в момент n описывается функцией

$$F_{U_n}(t) = F_{\tilde{X}^{*n}}(t - u),$$

где $F_{\tilde{X}^{*n}}$ — n-кратная свертка функции распределения случайной величины $\tilde{X}_1$. То есть при фиксированном n задача нахождения распределения U_n сводится к подсчету n-кратной свертки. Хочется упомянуть здесь статью Голубева и др. [6], в которой приводится эффективный с точки зрения временных затрат алгоритм численного вычисления свертки.

Покажем справедливость следующей теоремы для процесса капитала U_n.

Теорема 2.5. *Для процесса капитала U_n, удовлетворяющего уравнению (2.7), верны следующие утверждения.*

1) Если $\mathbb{E}X_1 < \infty$, то

$$\frac{U_n - u}{n} \to \mathbb{E}\tilde{X}_1 \quad \text{п.н.},$$

2) Если $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$*, то*
$$\frac{U_n - u - n\mathbb{E}\tilde{X}_1}{\sqrt{nD\tilde{X}_1}} \to^d \mathcal{N}(0,1).$$

3) Если $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$*,* $\mathbb{E}\tilde{X}_1^2 > 0$ *и выполняется* $(l-m)\mathbb{E}X_1 + (m-1)\mathbb{E}\min(X_1, z) = 0$*, то*
$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{U_n - u}{\psi(n)} = 1 \quad \text{п.н.},$$

где $\psi(n) = \sqrt{2\mathbb{E}\tilde{X}_1^2 n \ln\ln n}$*.*

Доказательство. Заметим, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\tilde{X}_1| = \mathbb{E}|c(z) - \min(X_1, z)| \le \mathbb{E}|c(z)| + \mathbb{E}\min(X_1, z) &\le \max(c, |l-m|\mathbb{E}X_1) + \mathbb{E}X_1 = \\
&= (\max(l, |l-m|) + 1)\,\mathbb{E}X_1, \\
\mathbb{E}\tilde{X}_1^2 = \mathbb{E}(c(z) - \min(X_1, z))^2 \le 2\mathbb{E}(c^2(z) + \min(X_1, z)^2) &\le 2\left(\max(c, |l-m|\mathbb{E}X_1)\right)^2 + 2\mathbb{E}X_1^2 = \\
&= 2\left(\max(l, |l-m|)\right)^2 (\mathbb{E}X_1)^2 + 2\mathbb{E}X_1^2.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\{\tilde{X}_i\}_{i\ge1}$ являются н.о.р. случайными величинами, получим

1) Из $\mathbb{E}X_1 < \infty$ вытекает $\mathbb{E}|\tilde{X}_1| < \infty$, следовательно, для $\{\tilde{X}_i\}_{i\ge1}$ выполняется усиленный закон больших чисел Колмогорова([10], гл.4, §3.3, теорема 3), то есть $(U_n - u)/n = \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i/n \to \mathbb{E}\tilde{X}_1$ п.н. при $n \to \infty$.

2) Так как $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$ влечет выполнение неравенства $\mathbb{E}\tilde{X}_1^2 < \infty$, то для $\{\tilde{X}_i\}_{i\ge1}$ имеет место центральная предельная теорема для н.о.р. случайных величин ([9], гл.3, §3.3, теорема 3), и пункт 2) теоремы доказан.

3) В силу того, что

$$c(z) = c - m(\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}\min(X_1, z)) = (l-m)\mathbb{E}X_1 - m\mathbb{E}\min(X_1, z),$$

выполняется

$$\mathbb{E}\tilde{X}_1 = \mathbb{E}(c(z) - \min(X_1, z)) = (l-m)\mathbb{E}X_1 + (m-1)\mathbb{E}\min(X_1, z),$$

откуда вытекает, что последний пункт теоремы есть не что иное, как закон повторного логарифма для величин $\{\tilde{X}_i\}_{i\ge1}$ ([10], гл.4, §4.2, теорема 3). Отметим, что уравнение в условии пункта 3) равносильно уравнению $\mathbb{E}\min(X_1, z) = \frac{m-l}{m-1}\mathbb{E}X_1$ и может иметь решение в силу справедливости соотношения $\frac{m-l}{m-1} < 1$ для коэффициентов нагрузки l, m. □

2.3.2 Предельное распределение капитала при эмпирически определяемом распределении требований

Согласно теоремам из раздела 1.2 оптимальный уровень собственного удержания зависит от функции распределения страховых требований. Поэтому, если теоретическая функция распределения неизвестна, параметр перестрахования z на i-ом интервале будет вычисляться следующим образом

$$z = z(i) = F_{i-1}^{-1}\left(\frac{m}{m-1}\right),$$

то есть будет зависеть от выборки $X_1, ..., X_{i-1}$. Следовательно, случайные величины $\{c\,(z(i)) - \min\,(X_i, z(i))\}_{i=1}^{n}$ окажутся зависимыми и применить вышеперечисленные теоремы о сходимости мы не сможем.

Далее докажем несколько утверждений относительно предельного поведения процесса капитала U_n в случае, когда распределение исков оценивается эмпирически.

Введем обозначение $p := \frac{m-1}{m}$, тогда

$$c(z(i)) = c - m\mathbb{E}(X_i - F_{i-1}^{-1}(p))^+,$$

где $F_{i-1}^{-1}(p)$ есть квантиль уровня p, построенный по выборке $X_1, ..., X_{i-1}$. При этом

$$F_{i-1}^{-1}(p) = \inf\{x : F_{i-1}(x) \geq p\} = \begin{cases} X_{p(i-1):i-1}, & \text{если} \quad p(i-1) - \text{целое}, \\ X_{[p(i-1)]+1:i-1}, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $X_{k:i-1}$ и F_{i-1} обозначают соответственно k-ую порядковую статистику и эмпирическую функцию распределения, строящиеся по выборке длиной $i-1$.

Заметим, что для любого $i,\ i = \overline{1,n}$, случайные величины X_i и $F_{i-1}^{-1}(p)$ являются независимыми в силу независимости $X_i,\ i = \overline{1,n}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
U_n &= U_{n-1} + c(z(n)) - \min(X_n, z(n)) = \\
&= U_{n-1} + c - m\left(\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}\min\left(X_n, F_{n-1}^{-1}(p)\right)\right) - \min\left(X_n, F_{n-1}^{-1}(p)\right) = ... \\
&= u + (c - m\mathbb{E}X_1)n + m\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\min\left(X_i, F_{i-1}^{-1}(p)\right) - \sum_{i=1}^{n}\min\left(X_i, F_{i-1}^{-1}(p)\right) = \\
&= u + (c - m\mathbb{E}X_1)n + m\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\min\left(X_i, F_{i-1}^{-1}(p)\right) - \sum_{i=1}^{n}\min(X_i, F_{i-1}^{-1}(p)) \pm \\
&\pm \sum_{i=1}^{n}\min(X_i, F^{-1}(p)) \pm \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\min(X_i, F^{-1}(p)) = \\
&= \underbrace{u + (c - m\mathbb{E}X_1)n + m\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\min\left(X_i, F_{i-1}^{-1}(p)\right) - \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\min\left(X_i, F^{-1}(p)\right)}_{A_n :=} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\min(X_i, F^{-1}(p)) - \min\left(X_i, F_{i-1}^{-1}(p)\right)\right)}_{\xi_{ni} :=} - \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\min(X_i, F^{-1}(p)) - \mathbb{E}\min(X_i, F^{-1}(p))\right)}_{\eta_i :=}.
\end{aligned}$$

То есть можем представить U_n в виде

$$U_n = A_n + \sum_{i=1}^{n}\xi_{ni} - \sum_{i=1}^{n}\eta_i, \tag{2.8}$$

где $\{\eta_i\}_{i\geq 1}$ — н.о.р. случайные величины с нулевым математическим ожиданием, A_n — константа, зависящая от n, и $\xi_{ni} = \min(X_i, F^{-1}(p)) - \min\left(X_i, F^{-1}_{i-1}(p)\right)$.

При доказательстве утверждения о сходимости $\sum_{i=1}^n \xi_{ni}$ нам потребуется результат следующей леммы.

Лемма 2.7 (Ширяев [9], гл.2, §10.3, следствие 2). *Пусть $\{\vartheta_n\}_{n\geq 1}$ - последовательность положительных чисел таких, что $\vartheta_n \downarrow 0,\ n \to \infty$.*

Тогда, если для случайных величин $\{S_n\}_{n\geq 1}, S$ выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|S_n - S| \geq \vartheta_n\right) < \infty,$$

то имеет место сходимость п.н. $S_n \to S$.

Теперь докажем справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.8. *Пусть $\xi_{ni} = \min(X_i, F^{-1}(p)) - \min\left(X_i, F^{-1}_{i-1}(p)\right)$, тогда*

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_{ni}}{\sqrt{n}\ln^2 n} \to 0 \quad \text{п.н.}, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Заметим, что имеет место оценка

$$\left|\sum_{i=1}^n \xi_{ni}\right| = \left|\sum_{i=1}^n \left(\min\left(X_i, F^{-1}_{i-1}(p)\right) - \min\left(X_i, F^{-1}(p)\right)\right)\right| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^n |\min\left(X_i, F^{-1}_{i-1}(p)\right) - \min\left(X_i, F^{-1}(p)\right)| \leq \sum_{i=1}^n |F^{-1}_{i-1}(p) - F^{-1}(p)|. \quad (2.9)$$

Следовательно, если покажем сходимость п.н. к нулю суммы $\sum_{i=1}^n |F^{-1}_{i-1}(p) - F^{-1}(p)|$, докажем утверждение леммы.

Согласно теореме 2.5.1 из Serfling [42], если $0 < p < 1$, функция распределения F дважды дифференцируема в точке $F^{-1}(p)$ и плотность $f(F^{-1}(p)) > 0$, то имеет место представление

$$F^{-1}_i(p) = F^{-1}(p) + \frac{p - F_i(F^{-1}(p))}{f(F^{-1}(p))} + R_i, \quad (2.10)$$

где $R_i = O\left(\left(\frac{\log i}{i}\right)^{3/4}\right)$ п.н. при достаточно больших i. Последнее равенство означает, что существует не зависящая от i функция $r(w)$ такая, что $|R_i| \leq r(w)\left(\frac{\ln i}{i}\right)^{3/4}$ п.н.

Разобьем сумму $\sum_{i=1}^n |F^{-1}_{i-1}(p) - F^{-1}(p)|$ на две части, в первой из которых индекс суммирования i будет пробегать значения от 1 до $[\ln^\sigma n]$, а во второй от $[ln^\sigma n]$ до n (полагаем $\sigma > 0$). В силу того, что функция $\ln^\sigma n$ возрастает при $n \to \infty$, в слагаемых $|F^{-1}_i(p) - F^{-1}(p)|$ второй суммы можем заменить величину $F^{-1}_i(p)$ ее асимптотическим представлением, найденным в теореме 2.5.1, Serfling [42]. Получим, что следующие неравенства выполняются п.н.

$$\sum_{i=1}^{n}|F_{i-1}^{-1}(p)-F^{-1}(p)| = \sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]}|F_{i-1}^{-1}(p)-F^{-1}(p)| + \sum_{i=[ln^\sigma n]}^{n}|F_{i-1}^{-1}(p)-F^{-1}(p)| =$$

$$= \sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]}|F_{i-1}^{-1}(p)-F^{-1}(p)| + \sum_{i=[\ln^\sigma n]}^{n}\left|\frac{p-F_i(F^{-1}(p))}{f(F^{-1}(p))}+R_i(w)\right| \le$$

$$\le \underbrace{\sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]}|F_{i-1}^{-1}(p)-F^{-1}(p)|}_{=:S_n^I} + \underbrace{\sum_{i=[\ln^\sigma n]}^{n}\left|\frac{p-F_i(F^{-1}(p))}{f(F^{-1}(p))}\right|}_{=:S_n^{II}} + \underbrace{r(w)\sum_{i=[\ln^\sigma n]}^{n}\left(\frac{\ln i}{i}\right)^{3/4}}_{=:S_n^{III}}. \quad (2.11)$$

Покажем, что каждая из сумм $S_n^I, S_n^{II}, S_n^{III}$, деленная на $(\sqrt{n}\ln^2 n)$, сходится п.н. к нулю при $n\to\infty$.

1) Докажем, что $S_n^{III}/(\sqrt{n}\ln^2 n)\to 0$ при $n\to\infty$ и фиксированном ω, для которого справедливо представление (2.10). Так как существует i_0 такое, что для любого $i>i_0$ выполняется $\ln i < i^{1/3}$, получим

$$\sum_{i=\ln^\sigma n}^{n}\left(\frac{\ln i}{i}\right)^{3/4} < \sum_{i=\ln^\sigma n}^{n}\frac{1}{i^{1/2}} = O(\sqrt{n})$$

для любого $n>\exp\{i_0^{1/\sigma}\}$. Следовательно, имеет место сходимость

$$S_n^{III}/(\sqrt{n}\ln^2 n)\to 0, \quad n\to\infty$$

для каждого фиксированного ω, для которых $R_i = O\left(\left(\frac{\log i}{i}\right)^{3/4}\right)$ п.н., а значит, для почти всех ω.

Теперь покажем, что имеют место сходимости почти наверное $S_n^I/(\sqrt{n}\ln^2 n)\to 0$ и $S_n^{II}/(\sqrt{n}\ln^2 n)\to 0$. Положим

$$\vartheta_n := \frac{1}{\ln^\beta n},\ 0<\beta<1.$$

Очевидно, что $\vartheta_n\downarrow 0$ с ростом n. Потребуем, чтобы параметры β,σ удовлетворяли неравенству

$$\beta+\sigma<\frac{1}{2}.$$

Необходимость введения данного ограничения будет понятна из доказательства.

2) Докажем, что $S_n^I/(\sqrt{n}\ln^2 n)\to 0$ п.н. при $n\to\infty$. Так как

$$\sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]}\frac{1}{i}\sim \ln\ln^\sigma n = O(\ln n)$$

при $n \to \infty$, то существует константа $K_1 > 0$ такая, что $\sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]} \frac{1}{i} \le K_1 \ln n$ для $n > 1$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]} \frac{1}{K_1} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{i} \le (\ln n)^{2-\beta},$$

и будет выполняться неравенство

$$P\left(\sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]} |F_{i-1}^{-1}(p) - F^{-1}(p)| > \sqrt{n}(\ln n)^{2-\beta}\right) \le$$
$$\le P\left(\sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]} |F_{i-1}^{-1}(p) - F^{-1}(p)| > \sqrt{n} \sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]} \frac{1}{K_1} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{i}\right) \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]} P\left(|F_{i-1}^{-1}(p) - F^{-1}(p)| > \sqrt{n} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{K_1 i}\right). \quad (2.12)$$

Известно, что эмпирический квантиль $F_i^{-1}(p)$ имеет асимптотическое нормальное распределение $\mathcal{N}\left(F^{-1}(p), \frac{p(1-p)}{if^2(F^{-1}(p))}\right)$ (см. Serfling [42], §2.3.3, теорема A), то есть случайная величина $F_{i-1}^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ имеет дисперсию $O\left(\frac{1}{i}\right)$, то есть существует константа K_2 такая, что

$$D(F_{i-1}^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \le \frac{K_2}{i}.$$

Следовательно, применяя неравенство Чебышева, получим

$$\sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]} P\left(|F_{i-1}^{-1}(p) - F^{-1}(p)| > \sqrt{n} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{K_1 i}\right) \le \sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]} \frac{K_1^2 i^2}{n(\ln n)^{2-2\beta}} \left(\frac{K_2}{i}\right) =$$
$$= O\left(\frac{(\ln n)^{2\sigma}}{n(\ln n)^{2-2\beta}}\right) = O\left(\frac{1}{n(\ln n)^{2-2\beta-2\sigma}}\right),$$

откуда с учетом (2.12) и определения (2.11) для S_n^I вытекает, что при $\beta + \sigma < \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{S_n^I}{\sqrt{n} \ln^2 n} > \vartheta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{[\ln^\sigma n]} |F_{i-1}^{-1}(p) - F^{-1}(p)| > \sqrt{n}(\ln n)^{2-\beta}\right) \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n(\ln n)^{2-2\beta-2\sigma}}\right) < \infty. \quad (2.13)$$

Следовательно, по лемме 2.7 имеет место сходимость $S_n^I/(\sqrt{n} \ln^2 n) \to 0$ п.н.

3) Докажем, что $S_n^{II}/(\sqrt{n} \ln^2 n) \to 0$ п.н. при $n \to \infty$. Так как $\sum_{i=[\ln^\sigma n]}^{n} \frac{1}{i} = O(\ln n)$ при $n \to \infty$, то существует константа $K_3 > 0$ такая, что

$$\sum_{i=[\ln^\sigma n]}^{n} \frac{1}{i} \le K_3 \ln n$$

для $n > 1$. Следовательно,

$$\sum_{i=[\ln^\sigma n]}^{n} \frac{1}{K_3} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{i} \leq (\ln n)^{2-\beta}$$

и будет выполняться оценка

$$P\left(\sum_{i=[\ln^\sigma n]}^{n} \left|\frac{p - F_i(F^{-1}(p))}{f(F^{-1}(p))}\right| > \sqrt{n}(\ln n)^{2-\beta}\right) \leq \sum_{i=[\ln^\sigma n]}^{n} P\left(\left|\frac{p - F_i(F^{-1}(p))}{f(F^{-1}(p))}\right| > \sqrt{n}\frac{(\ln n)^{1-\beta}}{K_3 i}\right) =$$

$$= \sum_{i=[\ln^\sigma n]}^{n} P\left(\left|pi - iF_i(F^{-1}(p))\right| > i\sqrt{n}\frac{(\ln n)^{1-\beta}}{K_3 i} f(F^{-1}(p))\right) =$$

$$= \sum_{i=[\ln^\sigma n]}^{n} P\left(\left|pi - iF_i(F^{-1}(p))\right| > \frac{1}{K_3}\sqrt{n}(\ln n)^{1-\beta} f(F^{-1}(p))\right). \quad (2.14)$$

Заметим, что

$$iF_i(F^{-1}(p)) = \sum_{k=1}^{i} \mathbb{I}\{X_k \leq F^{-1}(p)\},$$

причем величины $\{\mathbb{I}\{X_k \leq F^{-1}(p)\}\}_{k\geq 1}$ образуют последовательность н.о.р. бернулиевских случайных величин с параметром p. Следовательно, в силу того, что

$$P\left(0 \leq \mathbb{I}\{X_k \leq F^{-1}(p)\} \leq 1\right) = 1$$

для любого k, из леммы 2.6 вытекает

$$P\left(\left|pi - iF_i(F^{-1}(p))\right| > i\sqrt{n}\frac{(\ln n)^{1-\beta}}{K_3 i} f(F^{-1}(p))\right) \leq$$

$$\leq 2\exp\left\{-2\frac{i\left(\sqrt{n}\frac{(\ln n)^{1-\beta}}{K_3 i} f(F^{-1}(p))\right)^2}{(1-0)^2}\right\} = 2\exp\left\{-2n\frac{(\ln n)^{2-2\beta}}{K_3^2 i} f^2(F^{-1}(p))\right\}. \quad (2.15)$$

Учитывая, что $i \leq n$, придем к следующей оценке

$$2\exp\left\{-2n\frac{(\ln n)^{2-2\beta}}{K_3^2 i} f^2(F^{-1}(p))\right\} \leq$$

$$\leq 2\exp\left\{-\frac{2f^2(F^{-1}(p))(\ln n)^{1-2\beta}}{K_3^2}\ln n\right\} = 2\frac{1}{n^{(\ln n)^{1-2\beta}K}}, \quad (2.16)$$

где $K = \frac{2f^2(F^{-1}(p))}{K_3^2} > 0$. Принимая во внимание то, что $0 < \beta < \frac{1}{2}$, а также определение (2.11) для S_n^{II}, из (2.14), (2.16), (2.15) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{S_n^{II}}{\sqrt{n}\ln^2 n} > \vartheta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=[\ln^\sigma n]}^{n}\left|\frac{p - F_i(F^{-1}(p))}{f(F^{-1}(p))}\right| > \sqrt{n}(\ln n)^{2-\beta}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^{(\ln n)^{1-2\beta}K-1}}\right) < \infty. \quad (2.17)$$

Следовательно, по лемме 2.7 имеет место сходимость $S_n^{II}/(\sqrt{n}\ln^2 n) \to 0$ п.н.

Объединяя пункты 1)-3), получаем $(S_n^I + S_n^{II} + S_n^{III})/(\sqrt{n}\ln^2 n) \to 0$ п.н., что в совокупности с (2.9), (2.11) влечет справедливость утверждения леммы. □

Теорема 2.6. *Пусть*

$$A_n = u + (c - m\mathbb{E}X_1)n + m\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\min\left(X_i, F_{i-1}^{-1}(p)\right) - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\min(X_i, F^{-1}(p)),$$

тогда

$$\frac{U_n - A_n}{\sqrt{n}\ln^2 n} \to 0 \quad \text{п.н.}, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Напомним, что согласно (2.8) имеет место представление

$$U_n - A_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ni} - \sum_{i=1}^{n} \eta_i.$$

В лемме 2.8 была установлена сходимость $\frac{\sum_{i=1}^n \xi_{ni}}{\sqrt{n}\ln^2 n} \to 0$ п.н. Далее заметим, что величины $\eta_i = \min(X_i, F^{-1}(p)) - \mathbb{E}\min(X_i, F^{-1}(p))$ являются н.о.р. со вторым моментом

$$\mathbb{E}\eta_i^2 = \mathbb{E}\min(X_i, F^{-1}(p))^2 < \mathbb{E}X_i^2,$$

и в случае $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$ ряд $\sum_{i=1}^n \frac{D\eta_i}{n\ln^4 n}$ сходится. Отсюда по теореме Колмогорова (Ширяев [10], гл.4, §3.2, теорема 2) вытекает сходимость $\frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{\sqrt{n} ln^2 n} \to 0$ п.н. Следовательно,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_{ni} - \sum_{i=1}^n \eta_i}{\sqrt{n}\ln^2 n} \to 0 \quad \text{п.н.}, \quad n \to \infty.$$

□

Замечание 6. *В типичной ситуации слагаемое A_n имеет порядок n, поэтому из теоремы 2.6 будет следовать*

$$U_n = A_n \left(1 + o\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad n \to \infty.$$

Глава 3

Модель с комбинированным договором перестрахования

В данной секции рассматривается модель функционирования страховой компании, использующей комбинированное перестрахование. Как и в разделе 1.2, страховщик стремится минимизировать процентные выплаты по банковским займам путем выбора оптимальной стратегии перестрахования. В отличие от задач, рассмотренных в предыдущих главах, компания заключает договор сразу с несколькими перестраховщиками, поэтому минимизация издержек подразумевает выбор оптимальных параметров одновременно для нескольких договоров перестрахования .

§3.1 Основные характеристики модели

3.1.1 Описание модели с комбинированным договором перестрахования

Полагаем, что страховая компания с начальным капиталом u использует комбинацию пропорционального и непропорционального перестрахования. Будем рассматривать её работу в течение фиксированного промежутка времени, например, одного года. Считаем, что в начале года компания получает премии размера $c > 0$. Выплаты по требованиям, поступившим в течение года, производятся в конце этого периода. Если у компании не хватает собственных средств для удовлетворения требований по страховым случаям, недостающая сумма берется в банке под процент r, $0 < r < 1$. Как и в разделе 1.2, нашей целью является минимизация процентов по займу в силу того, что ответственность за погашение этой суммы несут акционеры компании.

Пусть X — совокупный размер требований за год. Считаем, что случайная величина X положительна, имеет непрерывную функцию распределения F, плотность f и конечное математическое ожидание. Мы полагаем, что программа перестрахования состоит из квотного договора и договора эксцедента убыточности и реализуется следующим образом.

Во-первых, страховщик выбирает параметр квотного перестрахования β, $\beta \in (0, 1]$. Ответственность перестраховщика при таком договоре равна $(1 - \beta)X$. И так как перестраховщик не тратит свои средства на приобретение полисов и иные расходы, связанные с ними, мы полагаем, что он платит комиссию перестрахования, которая рассчитывается, как некоторый фиксированный процент от уступленных ему премий. То есть премии квотного перестрахования равны

$$c_q(\beta) := (1-\beta)c - k(1-\beta)c, \quad k \in (0,1),$$

где $k(1-\beta)c$ — комиссионные выплаты. Мы не будем рассматривать случай $k=0$, так как он тривиален и не подразумевает выплаты комиссионных страховщику. Случай же $k=1$ соответствует ситуации, когда перестраховщик всю свою премию тратит на выплату комиссии, то есть бесплатно принимает на себя часть риска страховщика. Мы считаем, что перестраховщик не занимается благотворительностью в рамках данного договора, поэтому случай $k=1$ тоже не рассматриваем. Что касается страховщика, то его ответственность и премии с учетом данного договора будут равны соответственно βX и

$$\beta c + k(1-\beta)c = \beta c(1-k) + kc.$$

Во-вторых, страховщик выбирает уровень собственного удержания $B>0$ такой, что совокупные убытки страховщика с учетом двух договоров перестрахования равны $\min(\beta X, B)$. Полагаем, что премии за эксцедентное перестрахование $c_e(\beta, B)$ рассчитываются по принципу среднего, то есть

$$c_e(\beta, B) := m\mathbb{E}[\beta X - \min(\beta X, B)]^+,$$

где $m>1$ является нагрузочным коэффициентом. Следовательно, величина премий страховщика с учетом двух договоров перестрахования $c(\beta, B)$ вычисляется как

$$c(\beta, B) := c - c_q(\beta) - c_e(\beta, B), \tag{3.1}$$

то есть

$$c(\beta, B) = \beta c + k(1-\beta)c - m\mathbb{E}[\beta X - \min(\beta X, B)]^+ = \beta c(1-k) + kc - m\mathbb{E}[\beta X - B]^+. \tag{3.2}$$

Отсюда вытекает, что капитал компании после возмещения требований будет равен

$$u + c(\beta, B) - \min(\beta X, B) = a(u, \beta, B) + \min(\beta X, B),$$

где

$$a(u, \beta, B) := u + c(\beta, B). \tag{3.3}$$

Для того, чтобы у страховщика не было возможности получить безрисковую прибыль при передаче всех рисков по эксцедентному договору перестрахования, мы накладываем условие

$$\beta c(1-k) + kc < m\mathbb{E}[\beta X],$$

откуда вытекает $\beta(c(1-k) - m\mathbb{E}X) < -kc < 0$. Поэтому коэффициент комиссии k и нагрузочный коэффициент m изначально следует выбирать так, чтобы выполнялось неравенство

$$c(1-k) - m\mathbb{E}X < 0, \tag{3.4}$$

так как в противном случае условие наличия арбитража у страховщика будет выполнено вне зависимости от значения параметра квотного перестрахования β .

Обозначим через $J = J(u,\beta,B,X)$ величину дополнительных выплат за год, то есть

$$J(u,\beta,B,X) := [\min(\beta X, B) - a(u,\beta,B)]^+.$$

Тогда можем сказать, что нашей целью является минимизация функции

$$H(u,\beta,B) := \mathbb{E}J(u,\beta,B,X) \tag{3.5}$$

на множестве Γ допустимых значений параметров перестрахования,

$$\Gamma := \{(\beta,B) : (\beta,B) \in (0,1] \times (0,\infty]\},$$

и Γ — выпукло. Учитывая введенные выше определения, получим

$$\begin{aligned} H(u,\beta,B) &= \int_0^\infty (\min(\beta u, B) - a(u,\beta,B))^+ f(u)\,du = \\ &= \int_0^{\frac{B}{\beta}} (\beta u - a(u,\beta,B))^+ f(u)\,du + (B - a(u,\beta,B))^+ \left(1 - F\left(\frac{B}{\beta}\right)\right) = \\ &= \int_0^{\frac{B}{\beta}} (\beta u - a(u,\beta,B))^+ f(u)\,du + (B - a(u,\beta,B))^+ \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Отметим, что случай $\beta = 1, B > 0$ соответствует чисто эксцедентному перестрахованию и, как можно видеть, премии страховщика при этом равны $c(1,B) = c - m\mathbb{E}[X-B]^+$. Если же $\beta \in (0,1], B = \infty$, мы получаем чисто квотное перестрахование, с учетом которого страховая компания получит премии в размере $c(\beta,\infty) = \beta c + k(1-\beta)c$.

Итак, для каждого фиксированного начального значения капитала u нам надо решить следующую оптимизационную задачу: минимизировать функцию $H(u,\beta,B)$ на множестве Γ при ограничении $c(\beta,B) \geq 0$,

$$H(u,\beta,B) \to \inf_{(\beta,B)}, \quad c(\beta,B) \geq 0, \quad (\beta,B) \in \Gamma. \tag{3.7}$$

Мы не включаем в систему ограничений неравенство $c(\beta,B) \leq c$, хотя и подразумеваем его выполнение, так как по определению функции $c(\beta,B)$ оно верно для любой допустимой пары (β,B).

3.1.2 Свойства выпуклости функций, характеризующих модель перестрахования

В данном разделе будут доказаны утверждения о свойствах функций $c(\beta, b)$ и $B - c(\beta, B)$, которые пригодятся нам в дальнейшем. Но вначале нам потребуется доказать следующую вспомогательную лемму.

Лемма 3.1. *Пусть $f(x)$ — функция двух переменных, определенная на выпуклом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. При этом в любой точке $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ вторые частные производные $f(x)$ отрицательны,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} < 0,$$

а определитель матрицы вторых производных равен нулю,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 0.$$

Тогда функция $f(x)$ — выпукла вверх на Ω.

Доказательство. Если f — выпукла вверх, то по определению выпуклости для любых точек $x, y \in \Omega$ и коэффициента $\alpha \in [0,1]$ точка $z_\alpha := (1-\alpha)x + \alpha y$ принадлежит отрезку, соединяющему x и y, и удовлетворяет неравенству

$$f(z_\alpha) \geq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

Зафиксируем x, y и рассмотрим $f(z_\alpha)$, как функцию от α, введя следующую функцию одной переменной

$$g(\alpha) := f(z_\alpha).$$

Заметим, что выпуклость вверх функции f на отрезке с фиксированными концами в точках x, y равносильна тому, что $g(\alpha)$ — выпуклая вверх функция α, то есть $g''(\alpha) \leq 0,\ \alpha \in [0,1]$.

Чтобы доказать утверждение леммы, предположим противное, а именно, пусть f не является выпуклой вверх, тогда существует $\alpha_0 \in (0,1)$ такое, что $g''(\alpha_0) > 0$. Производные функции $g(\alpha)$ равны

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= f'(z_\alpha)((1-\alpha)x + \alpha y)'_\alpha = f'(z_\alpha)(y-x), \\ g''(\alpha) &= (y-x)^T f''(z_\alpha)(y-x), \end{aligned}$$

где $f'(z_\alpha)$ — вектор частных производных первого порядка, $f''(z_\alpha)$ — матрица вторых производных. Следовательно, из предположения $g''(\alpha_0) > 0$ вытекает существование точки, в которой матрица $f''(z_\alpha)$ не является неположительно определенной. Но по условию таких точек у функции f нет, получили противоречие. Это означает, что наше предположение неверно и f — выпукла вверх на Ω. Лемма доказана. □

Перейдем к рассмотрению функций из нашей модели.

Лемма 3.2. *На множестве* $\Gamma = \{(\beta, B) : (\beta, B) \in (0,1] \times (0, \infty]\}$
а) функция премий $c(\beta, B)$ *является выпуклой вверх,* $-c(\beta, B)$ *— выпуклой вниз;*
б) функция

$$g(\beta, B) := B - c(\beta, B) \tag{3.8}$$

является выпуклой вниз.

Доказательство. а) Представим функцию $c(\beta, B)$, определенную в (3.2), в виде

$$c(\beta, B) = \beta c(1-k) + kc - m \int_{\frac{B}{\beta}}^{\infty} (\beta x - B) f(x) dx$$

и найдем ее производные. Получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial \beta}(\beta, B) &= c(1-k) - m \int_{\frac{B}{\beta}}^{\infty} x f(x) dx, \\
\frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2}(\beta, B) &= m \frac{B}{\beta} f\left(\frac{B}{\beta}\right)\left(-\frac{B}{\beta^2}\right) = -m \frac{B^2}{\beta^3} f\left(\frac{B}{\beta}\right) < 0, \\
\frac{\partial c}{\partial B}(\beta, B) &= m \int_{\frac{B}{\beta}}^{\infty} f(x) dx = m \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) \geq 0, \\
\frac{\partial^2 c}{\partial B^2}(\beta, B) &= -m f\left(\frac{B}{\beta}\right) \frac{1}{\beta} < 0, \\
\frac{\partial^2 c}{\partial B \partial \beta}(\beta, B) = \frac{\partial^2 c}{\partial \beta \partial B}(\beta, B) &= m \frac{B}{\beta^2} f\left(\frac{B}{\beta}\right) > 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Напомним, что исходя из соображений об отсутствии арбитража мы получили условие (3.4) на коэффициенты, участвующие в расчете премий перестрахования, а именно

$$c(1-k) - m \int_0^{\infty} x f(x) dx < 0.$$

Учитывая данное неравенство и то, что отношение $\frac{B}{\beta}$ может принимать любое значение от 0 до ∞, получаем, что может существовать как пара (β, B), для которой $\frac{\partial c}{\partial \beta} > 0$, так и пара, для которой $\frac{\partial c}{\partial \beta} < 0$.

Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(\beta, B) = 0$ при $\frac{B}{\beta} = \theta$, то на координатной плоскости с осями (β, B) множество точек, удовлетворяющих $\frac{\partial c}{\partial \beta} < 0$, будет образовано пересечением области под прямой $B = \theta\beta$ и полосы $(0,1] \times (0, \infty]$. При увеличении k или m, а также при уменьшении c прямая $B = \theta\beta$ поворачивается против часовой стрелки (θ возрастает), тем самым увеличивая площадь области $\{(\beta, B) \in (0,1] \times (0, \infty] | \frac{\partial c}{\partial \beta} < 0\}$.

Заметим, что

$$c(\beta, B) = kc + \beta \frac{\partial c}{\partial \beta} + B \frac{\partial c}{\partial B}. \tag{3.10}$$

Отсюда в силу того, что $kc > 0$ и $\frac{\partial c}{\partial B} \geq 0$, вытекает, что выполнение неравенства $\frac{\partial c}{\partial \beta} \geq 0$ влечет $c(\beta, B) \geq 0$ (наоборот неверно). Поэтому,

$$\left\{ (\beta, B) \in (0,1] \times (0,\infty] \;\middle|\; \frac{\partial c}{\partial \beta} \geq 0 \right\} \subseteq \{(\beta, B) \in (0,1] \times (0,\infty] \mid c(\beta, B) \geq 0\}.$$

Из полученных выше формул (3.9) вытекает

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} < 0, \;\; \frac{\partial^2 c}{\partial B^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2}\frac{\partial^2 c}{\partial B^2} - \left(\frac{\partial^2 c}{\partial B \partial \beta}\right)^2 = 0.$$

Следовательно, применяя лемму 3.1, получаем, что $c(\beta, B)$ — выпуклая вверх функция на множестве Г. Аналогично доказывается, что функция $-c(\beta, B)$ является выпуклой вниз на Г.

б) Функция $g(\beta, B) = B - c(\beta, B)$ является выпуклой вниз на множестве Г, как сумма выпуклой вниз и линейной функций. □

3.1.3 Вспомогательные теоремы теории оптимизациии

В данном разделе приведем некоторые определения и формулировки теорем из теории оптимизации, которыми мы воспользуемся при поиске оптимальной стратегии перестрахования.

Допустим, что мы хотим минимизировать функцию $h_0(b)$ на множестве Ω при k ограничениях типа неравенств, тогда задачу оптимизации функции $h_0(b)$ можно сформулировать в следующим образом:

$$h_0(b) \to \inf_b, \quad h_i(b) \leq 0, \; i = \overline{1,k}, \quad b \in \Omega. \tag{3.11}$$

Следуя терминологии из книги Галеев [5] (гл.1, §4.5), будем говорить, что

Определение 3.1. *задача* (3.11) *называется задачей выпуклого программирования, если*

$$h_0(b) \to \inf_b, \quad h_i(b) \leq 0, \; i = \overline{1,k}, \quad b \in \Omega, \tag{3.12}$$

$$h_i(b) \leq 0, \; i = \overline{1,k} - \text{выпуклые функции}, \quad \Omega - \text{выпуклое множество}.$$

Определение 3.2. *Точка b называется допустимой в задаче* (3.12)*, если $b \in \Omega$ и выполняются все заданные ограничения типа неравенств.*

Построим функции Лагранжа для задач (3.11) и (3.12). Они совпадают и имеют вид

$$L(b, \lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i h_i(b). \tag{3.13}$$

Далее для нахождения минимума нам потребуются следующие утверждения.

Теорема 3.1 (Галеев [5], гл.1, §3.2.1, необходимые условия локального экстремума — принцип Лагранжа)**.** *Если $\hat{b}$ — точка локального минимума в задаче* (3.11)*, и h_i, $i = \overline{0,k}$ непрерывно дифференцируемы в окрестности $\hat{b}$, то существует ненулевой вектор множителей Лагранжа $(\lambda_0, ..., \lambda_k)$ такой, что для функции Лагранжа задачи* (3.11) *выполняются условия*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \min_{b \in \Omega} L(b, \lambda) = L(\hat{b}, \lambda) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \frac{\partial h_i}{\partial b_t} = 0, \quad t = \overline{1, |\Omega|},\ b = (b_1, ..., b_{|\Omega|}), \\ &(ii) \quad \lambda_i h_i(b) = 0,\ i = \overline{1,k} \ \textit{(условие дополняющей нежесткости)}, \\ &(iii) \quad \lambda_i \geq 0,\ i = \overline{0,k} \ \textit{(условие неотрицательности)}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Определение 3.3. *Точки, удовлетворяющие необходимым условиям локального экстремума, называются критическими.*

Достаточные условия экстремума для задачи выпуклого программирования сформулированы в следующей теореме.

Теорема 3.2 (Галеев [5], гл.1, §4.5, теорема Куна-Таккера)**.** *Если для допустимой точки $\hat{b}$ выполнены условия $(i) - (iii)$ из* (3.14) *и $\lambda_0 \neq 0$, то $\hat{b}$ — глобальный минимум в задаче* (3.12).

§3.2 Оптимальная стратегия перестрахования

3.2.1 Экстремумы функций, характеризующих модель перестрахования

Перейдем к поиску минимума функции $g(\beta, B)$ на множестве

$$\Gamma_0 := \{(\beta, B) \mid (\beta, B) \in (0, 1] \times (0, \infty],\ c(\beta, B) \geq 0\}, \tag{3.15}$$

или что тоже самое, к решению задачи

$$g(\beta, B) \to \inf_{(\beta, B)}, \quad -c(\beta, B) \leq 0, \quad (\beta, B) \in \Gamma. \tag{3.16}$$

Введем обозначение:

$$b_* = \overline{F}^{-1}\left(\frac{1}{m}\right).$$

Лемма 3.3. *Справедливы следующие утверждения.*

Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) > 0$, то решением задачи (3.16) *является точка $(\beta, B) = (1, b_*)$, а соответствующее минимальное значение $\min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B)$ равно*

$$g(1, b_*) = -\left(c - m \int_{b_*}^{\infty} x f(x) dx\right) = -\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) - kc.$$

Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) = 0$, *то решением задачи* (3.16) *является множество* $\{(\beta, B) \in \Gamma | \frac{B}{\beta} = b_*\}$, *при этом* $\min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B) = -kc$.

Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) < 0$, *то решением задачи* (3.16) *является* $(\beta, B) = (0, 0)$, *и при этом* $\min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B) = -kc$.

Доказательство. Согласно лемме 3.2, функции $g(\beta, B)$ и $-c(\beta, B)$ являются выпуклыми вниз на выпуклом множестве Γ. Следовательно, задача (3.16) является задачей выпуклого программирования и может быть переформулирована следующим образом

$$g(\beta, B) \to \inf_{(\beta,B)}, \quad \begin{cases} -c(\beta, B) \le 0, \\ \beta - 1 \le 0, \\ -\beta < 0, \\ -B < 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

Функция Лагранжа (3.13) для данной задачи имеет вид

$$L(\beta, B, \lambda) = \lambda_0 g(\beta, B) - \lambda_1 c(\beta, B) + \lambda_2(\beta - 1) - \lambda_3 \beta - \lambda_4 B.$$

Положим $\lambda_0 = 1$. В силу того, что $\lambda_0 \ne 0$, из теоремы 3.2 вытекает, что если условия (3.14) выполняются для некоторой точки $\hat{b}$ (то есть $\hat{b}$ — критическая точка), то она является глобальным минимумом. Условия (3.14) записываются следующим образом

$$\begin{aligned}
(i) \quad & -\frac{\partial c}{\partial \beta} - \lambda_1 \frac{\partial c}{\partial \beta} + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\
& \left(1 - \frac{\partial c}{\partial B}\right) - \lambda_1 \frac{\partial c}{\partial B} - \lambda_4 = 0, \\
(ii) \quad & \lambda_1 c(\beta, B) = 0, \\
& \lambda_2(\beta - 1) = 0, \\
& \lambda_3 \beta = 0, \\
& \lambda_4 B = 0, \\
(iii) \quad & \lambda_i \ge 0, \ i = \overline{0, 4}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно несколько случаев, чтобы найти все критические точки.

а) Пусть $\lambda_3 \ne 0$, тогда $\beta = 0$ и

$$g(0, B) = B - c(0, B) = B - kc.$$

Следовательно, минимальное значение функции $g(\beta, B)$ будет приниматься при $(\beta, B) = (0, 0)$ и равняться $-kc$.

б) Пусть $\lambda_4 \ne 0$, тогда $B = 0$ и

$$g(\beta, 0) = -c(\beta, 0) = -kc - \beta \left(c(1 - k) - m \int_0^\infty x f(x) dx \right).$$

В силу предположения (3.4) выражение в скобках отрицательно, поэтому минимум $g(\beta, 0)$ будет достигаться в точке $(\beta, B) = (0, 0)$ и равняться $-kc$.

Теперь положим $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. С учетом того, что $\lambda_0 = 1$, система, дающая решение для экстремальной задачи (3.17), примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial \beta} = \dfrac{\lambda_2}{1+\lambda_1}, \\ \dfrac{\partial c}{\partial B} = \dfrac{1}{1+\lambda_1}, \\ \lambda_1 c(\beta, B) = 0, \\ \lambda_2(\beta - 1) = 0, \\ \lambda_i \geq 0, \ \ i = \overline{1,2}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Рассмотрим следующие случаи.

в) Пусть $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (то есть если минимум достигается, то внутри области), тогда $\frac{\partial c}{\partial B} = 1$, $\frac{\partial c}{\partial \beta} = 0$. Подставляя данные значения производных в соответствующие равенства из (3.9), получим

$$\frac{B}{\beta} = b_*,$$
$$\frac{\partial c}{\partial \beta}\left(\beta, \beta b_*\right) = c(1-k) - m\int_{b_*}^{\infty} x f(x)dx = 0. \tag{3.19}$$

То есть если параметры c, k, m и параметры распределения требований удовлетворяют уравнению (3.19), то минимум функции $g(\beta, B)$ достигается на всех элементах множества $\{(\beta, B) \in \Gamma \mid \frac{B}{\beta} = b_*\}$ и, учитывая (3.8), (3.10), равен

$$g\left(\beta, \beta b_*\right) = \beta b_* - (kc + 0 + \beta b_*) = -kc.$$

г) Пусть $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, тогда $c(\beta, B) = 0$ (это означает, что если минимум достигается, то на границе $c(\beta, B) = 0$). Учитывая, что $k > 0, c > 0$, $\frac{\partial c}{\partial B} > 0$, и принимая во внимание, что система (3.18) разрешима только при $\frac{\partial c}{\partial \beta} \geq 0$, из (3.10) получим $c(\beta, B) > 0$. Следовательно, при таких предположениях о λ_1 задача не имеет решения.

д) Пусть теперь $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$ (это означает, что если минимум достигается, то на границе $\beta = 1$). Решая систему (3.18), получим

$$\lambda_1 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial c}{\partial B} = 1 \Longrightarrow m\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) = 1 \Longrightarrow \frac{B}{\beta} = b_*,$$
$$\lambda_2 \neq 0 \Longrightarrow \beta = 1.$$

Следовательно, если $\frac{\partial c}{\partial \beta}\left(1, b_*\right) > 0$, то система (3.18) разрешима и инфимум функции $g(\beta, B)$ достигается в точке $(\beta, B) = (1, b_*)$, и учитывая (3.9), равен

$$g\left(1, b_*\right) = b_* - \left(kc + \frac{\partial c}{\partial \beta} + b_* \frac{\partial c}{\partial B}\right) = -\left(c - m\int_{b_*}^{\infty} x f(x)dx\right). \tag{3.20}$$

Если $B = \infty$, то $g(\beta, B) = \infty$ и минимум при данном значении B явно не достигается. Осталось заметить, что в силу (3.9), (3.20) имеет место

$$\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) = -g(1, b_*) - kc, \tag{3.21}$$

то есть в случаях а) и б), когда минимальное значение функции $g(\beta, B)$ равняется $-kc$, справедливо неравенство $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) < 0$. □

Следствие 3.1. *Справедливо неравенство*

$$\min_{\Gamma_0} g(\beta, B) \leq -kc < 0,$$

где множество Γ_0 *определено в* (3.15).

3.2.2 Формулировка задачи оптимизации ожидаемых дополнительных издержек

Перейдем к решению задачи 3.7. Она может быть сформулирована в следующем виде

$$H(u, \beta, B) \to \inf, \quad \begin{cases} -c(\beta, B) \leq 0, \\ \beta - 1 \leq 0, \\ -\beta < 0, \\ -B < 0, \end{cases} \tag{3.22}$$

Замечание 7. *Все ограничения из задачи* (3.22) *являются выпуклыми вниз функциями.*

Функция Лагранжа для задачи (3.22) имеем вид

$$L = \lambda_0 H(u, \beta, B) - \lambda_1 c(\beta, B) + \lambda_2(\beta - 1) + \lambda_3 \beta + \lambda_4 B.$$

Выпишем систему уравнений, удовлетворяющую условиям $(i) - (iii)$ из (3.14). Получим

$$\begin{aligned} (i) \quad & \lambda_0 \frac{\partial H}{\partial \beta} - \lambda_1 \frac{\partial c}{\partial \beta} + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ & \lambda_0 \frac{\partial H}{\partial B} - \lambda_1 \frac{\partial c}{\partial B} - \lambda_4 = 0, \\ (ii) \quad & \lambda_1 c(\beta, B) = 0, \\ & \lambda_2(\beta - 1) = 0, \\ & \lambda_3 \beta = 0, \\ & \lambda_4 B = 0, \\ (iii) \quad & \lambda_i \geq 0, \ i = \overline{0, 4}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Рассмотрим множество $\Gamma_0 = \{(\beta, B) \mid (\beta, B) \in (0,1] \times (0,\infty],\ c(\beta, B) \geq 0\}$, определенное в (3.15). Для каждого фиксированного начального капитала u введем множества $\Gamma_u^r, \Gamma_u^m, \Gamma_u^l$ такие, что

$$\begin{aligned}
\Gamma_u^r &:= \{(\beta, B) \in \Gamma_0,\ a(u,\beta,B) > B\} &&= \{(\beta, B) \in \Gamma_0,\ g(\beta,B) < u\}, \\
\Gamma_u^m &:= \{(\beta, B) \in \Gamma_0,\ 0 \leq a(u,\beta,B) \leq B\} &&= \{(\beta, B) \in \Gamma_0,\ -c(\beta,B) \leq u \leq g(\beta,B)\}, \\
\Gamma_u^l &:= \{(\beta, B) \in \Gamma_0,\ a(u,\beta,B) < 0\} &&= \{(\beta, B) \in \Gamma_0,\ -c(\beta,B) > u\}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Эти множества содержат допустимые пары (β, B), для которых значение определенной в (3.3) функции $a(u,\beta,B)$ лежит на действительной оси соответственно справа от B, между 0 и B, слева от 0. Отметим, что для фиксированного u данные множества не пересекаются.

Замечание 8. *Согласно известным свойствам (Галеев [5], гл.1, §4) для любой выпуклой вниз функции $f(u)$ и выпуклой вверх функции $g(u)$, определенных на выпуклом множестве $M \subseteq \mathrm{R}^n$, множества $\{u \in M | f(u) \leq \zeta, \zeta = const\}$ и $\{u \in M | g(u) \geq \zeta, \zeta = const\}$ являются выпуклыми.*

Следовательно, множества Γ_u^r, $\Gamma_u^m \cup \Gamma_u^r$, и $\Gamma_u^l \cup \Gamma_u^m \cup \Gamma_u^r = \Gamma_0$ являются выпуклыми.

Замечание 9. *В силу определения* (3.8) *функции $g(\beta, B)$ и справедливости соотношения $c(\beta,B) \leq c$ для любых пар (β, B), выполняется неравенство $\min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B) \geq -c$. Поэтому учитывая результаты следствия 3.1, получим*

$$\begin{cases}
\Gamma_u^l = \emptyset,\ \Gamma_u^m \cup \Gamma_u^r = \Gamma_0, & \textit{при } u > 0, \\
\Gamma_u^l \cup \Gamma_u^m \cup \Gamma_u^r = \Gamma_0, & \textit{при } \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B) < u < 0, \\
\Gamma_u^l \cup \Gamma_u^m = \Gamma_0,\ \Gamma_u^r = \emptyset, & \textit{при } -c < u < \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B), \\
\Gamma_u^l = \Gamma_0,\ \Gamma_u^m \cup \Gamma_u^r = \emptyset, & \textit{при } u < -c.
\end{cases} \tag{3.25}$$

3.2.3 Поиск оптимальной стратегии перестрахования

Зафиксируем начальный капитал u и рассмотрим поведение функции ожидаемых издержек $H(u,\beta,B)$ в каждой из областей $\Gamma_u^l, \Gamma_u^m, \Gamma_u^r$. Ранее в (3.6) было получено, что

$$H_1(u,\beta,B) = \int_0^{\frac{B}{\beta}} (\beta x - a(u,\beta,B))^+ f(x)\,dx + (B - a(u,\beta,B))^+ \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right).$$

Введем вспомогательные функции

$$\begin{aligned}
H(u,\beta,B) &:= \int_0^{\frac{B}{\beta}} (\beta x - a(u,\beta,B))^+ f(x)\,dx, \\
H_2(u,\beta,B) &:= (B - a(u,\beta,B))^+ \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

тогда

$$H(u,\beta,B) = H_1(u,\beta,B) + H_2(u,\beta,B). \tag{3.27}$$

Следовательно, для того, чтобы найти производные функции $H(u,\beta,B)$ по переменным (β,B), достаточно подсчитать соответсвующие производные функций $H_1(u,\beta,B), H_2(u,\beta,B)$.

Поиск минимальных ожидаемых издержек на множестве параметров перестрахования Γ_u^r.

Лемма 3.4. *Пусть начальный капитал и фиксирован, тогда для любых* $(\beta,B) \in \Gamma_u^r$ *выполняется*

$$H(u,\beta,B) = 0.$$

Доказательство. Из определения (3.24) следует, что для любого$(\beta,B) \in \Gamma_u^r$ справедливо $H_1(u,\beta,B) = H_2(u,\beta,B) = 0$. Поэтому в силу разложения (3.27) имеем $H(u,\beta,B) = 0$. □

Случай оптимального комбинированного перестрахования при начальном капитале $u \geq \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B)$.

Теорема 3.3. *Для любого* $u \geq \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B)$ *минимальные ожидаемые издержки,* $\min\limits_{\Gamma_0} H(u,\beta,B)$, *равны нулю и достигаются на множестве пар* $\{(\beta,B) \in \Gamma \mid g(\beta,B) \leq u\}$.

Доказательство. Так как для любого фиксированного $u \geq \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B)$ множество Γ_u^r непусто, то согласно лемме 3.4 найдется пара $(\beta,B) \in \Gamma_u^r$ такая, что $H(u,\beta,B) = 0$. □

Поиск минимальных ожидаемых издержек на множестве параметров перестрахования Γ_u^l.

Если $(\beta,B) \in \Gamma_u^l \cup \Gamma_u^m$, то для функций, определенных в (3.26), получим следующее представление

$$\begin{aligned} H_1(u,\beta,B) &= \int_{(a(u,\beta,B))^+}^{\frac{B}{\beta}} (\beta x - a(u,\beta,B))\, f(x)dx, \\ H_2(u,\beta,B) &= (B - a(u,\beta,B))\, \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Лемма 3.5. *Пусть и фиксировано, тогда на множестве* Γ_u^l *функция* $H(u,\beta,B)$ *является выпуклой вниз по паре аргументов* (β,B) *и имеет производные следующего вида*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \beta} = \displaystyle\int_0^{\frac{B}{\beta}} xf(x)dx - c(1-k) + m\int_{\frac{B}{\beta}}^{\infty} xf(x)dx = \\ \qquad = \mathbb{E}X - c(1-k) + (m-1)\displaystyle\int_{\frac{B}{\beta}}^{\infty} xf(x)dx, \\ \dfrac{\partial H}{\partial B} = (1-m)\overline{F}\left(\dfrac{B}{\beta}\right) \leq 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Доказательство. Учитывая представление (3.28), получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial B} &= \int_0^{\frac{B}{\beta}} -\frac{\partial c}{\partial B} f(x)dx + (B - a(u,\beta,B)) f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{1}{\beta} = \\
&= -\frac{\partial c}{\partial B} F\left(\frac{B}{\beta}\right) + (B - a(u,\beta,B)) f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{1}{\beta}, \\
\frac{\partial H_1}{\partial \beta} &= \int_0^{\frac{B}{\beta}} \left(x - \frac{\partial c}{\partial \beta}\right) f(x)dx - (B - a(u,\beta,B)) f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{B}{\beta^2} = \\
&= \int_0^{\frac{B}{\beta}} x f(x)dx - \frac{\partial c}{\partial \beta} F\left(\frac{B}{\beta}\right) - (B - a(u,\beta,B)) f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{B}{\beta^2}, \\
\frac{\partial H_2}{\partial B} &= \left(1 - \frac{\partial c}{\partial B}\right)\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) - (B - a(u,\beta,B)) f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{1}{\beta}, \\
\frac{\partial H_2}{\partial \beta} &= -\frac{\partial c}{\partial \beta}\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) + (B - a(u,\beta,B)) f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{B}{\beta^2}.
\end{aligned}$$

В итоге имеем

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial H}{\partial \beta} = \displaystyle\int_0^{\frac{B}{\beta}} x f(x)dx - \frac{\partial c}{\partial \beta}, \\
\dfrac{\partial H}{\partial B} = -\dfrac{\partial c}{\partial B} + \overline{F}\left(\dfrac{B}{\beta}\right).
\end{cases} \tag{3.30}$$

Подстановка найденных в (3.9) выражений для $\frac{\partial c}{\partial B}, \frac{\partial c}{\partial \beta}$ дает искомые формулы (3.29) для $\frac{\partial H}{\partial \beta}, \frac{\partial H}{\partial B}$.

Выпишем теперь, чему равны частные производные второго порядка и смешанная производная функции $H(u,\beta,B)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} &= -f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{B^2}{\beta^3} - \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} = (m-1) f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{B^2}{\beta^3} > 0, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial B^2} &= -\frac{\partial^2 c}{\partial B^2} - f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{1}{\beta} = (m-1) f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{1}{\beta} > 0, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial B \partial \beta} &= -\frac{\partial^2 c}{\partial B \partial \beta} + f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{B}{\beta^2} = -(m-1) f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{B}{\beta^2} < 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} > 0, \ \frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2}\frac{\partial^2 H}{\partial B^2} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial B \partial \beta}\right)^2 = 0.$$

Рассуждая как в лемме 3.1, несложно показать, что $H(u,\beta,B)$ является выпуклой вниз функцией пары переменных (β, B) на множестве Γ_u^l. □

Лемма 3.6. *Пусть начальный капитал $u < -kc$ фиксирован и параметры $(\beta, B) \in \Gamma_u^l$.*
1) При $u < -c$ минимальное значение функции $H(u,\beta,B)$ на множестве Γ_u^l достигается

i) на множестве пар $\{(0,B),\ B > 0\}$, если $c(1-k) < \mathbb{E}X$, и равно

$$H(u, 0, B) = -u - kc,$$

ii) на множестве пар $\{(\beta, B) \in \Gamma \mid \beta = 0, B > 0$ *или* $B = \infty, \beta > 0\}$, *если* $c(1-k) = \mathbb{E}X$, *и равно*

$$H(u, \beta, B) = -u - kc,$$

iii) при $\beta = 1, B = \infty$, *если* $c(1-k) > \mathbb{E}X$, *и равно*

$$H(u, 1, \infty) = \mathbb{E}X - u - c.$$

2) При $-c \leq u < -kc$ *минимальное значение функции* $H(u, \beta, B)$ *на множестве* Γ_u^l *достигается*

i) на множестве пар $\{(0, B),\ B > 0\}$, *если* $c(1-k) < \mathbb{E}X$, *и равно*

$$H(u, 0, B) = -u - kc,$$

ii) на множестве пар $\left\{(\beta, B) \in \Gamma \mid \beta = 0, B > 0 \text{ или } B = \infty, \beta \in \left(0, \frac{-u-kc}{c(1-k)}\right]\right\}$, *если* $c(1-k) = \mathbb{E}X$, *и равно*

$$H(u, \beta, B) = -u - kc,$$

iii) при $\beta = \frac{-u-kc}{c(1-k)}$, $B = \infty$, *если* $c(1-k) > \mathbb{E}X$, *и равно*

$$H\left(u, \frac{-u-kc}{c(1-k)}, B\right) = \frac{-u-kc}{c(1-k)}\mathbb{E}X.$$

Замечание 10. *Так как* β *определено на положительном интервале* $(0, 1]$, *то равенство* $\beta = 0$ *понимаем, как* $\beta = \lim\limits_{\beta \to 0+} \beta$, *а отношение* $\frac{B}{\beta}$ *считаем равным* $+\infty$.

Доказательство леммы 3.6. Нахождение решения задачи оптимизации

$$H(u, \beta, B) \to \inf_{(\beta, B)}, \quad (\beta, B) \in \Gamma_u^l \tag{3.31}$$

равносильно решению задачи (3.22) при условии $u + c(\beta, B) < 0$. Следовательно, функция Лагранжа для задачи 3.31 равна

$$L(\beta, B) = \lambda_0 H(u, \beta, B) - \lambda_1 c(\beta, B) + \lambda_2(\beta - 1) - \lambda_3 \beta - \lambda_4 B + \lambda_5(c(\beta, B) - u).$$

Учитывая новое ограничение и (3.23), пункты $(i) - (iii)$ из (3.14) можно переписать в следующем виде

$$\begin{cases} \lambda_0 \dfrac{\partial H}{\partial \beta} - \lambda_1 \dfrac{\partial c}{\partial \beta} + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_5 \dfrac{\partial c}{\partial \beta} = 0, \\ \lambda_0 \dfrac{\partial H}{\partial B} - \lambda_1 \dfrac{\partial c}{\partial B} - \lambda_4 + \lambda_5 \dfrac{\partial c}{\partial B} = 0, \\ \lambda_1 c(\beta, B) = 0, \\ \lambda_2(\beta - 1) = 0, \\ \lambda_3 \beta = 0, \quad \lambda_4 B = 0, \\ \lambda_5(u + c(\beta, B)) = 0 \\ \lambda_i \geq 0,\ i = \overline{0, 5}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Подставляя в систему (3.32) явные выражения для производных $\frac{\partial H}{\partial \beta}$, $\frac{\partial H}{\partial B}$ из (3.30) и (3.29) соответственно, после небольшой перегруппировки слагаемых придем к

$$\begin{cases} (\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_5)\dfrac{\partial c}{\partial \beta} = \lambda_0 \displaystyle\int_0^{\frac{B}{\beta}} xf(x)dx + \lambda_2 - \lambda_3, \\ ((m-1)\lambda_0 + \lambda_1 m - \lambda_5 m)\,\overline{F}\left(\dfrac{B}{\beta}\right) = -\lambda_4, \\ \lambda_1 c(\beta, B) = 0, \\ \lambda_2(\beta - 1) = 0, \\ \lambda_3 \beta = 0, \quad \lambda_4 B = 0, \\ \lambda_5(u + c(\beta, B)) = 0 \\ \lambda_i \geq 0, \ i = \overline{1,5}. \end{cases} \tag{3.33}$$

Заметим, что при $u < -c$ уравнение $c(\beta, B) + u = 0$ не имеет корней, поэтому для таких значений u система разрешима только при $\lambda_5 = 0$. Для $-c \leq u < -kc$ наличие решения возможно в обоих случаях.

Рассмотрим отдельно решение системы (3.33) при $\lambda_5 = 0$ и $\lambda_5 \neq 0$, положив $\lambda_0 = 1$.

I) Случай $\boldsymbol{\lambda_5 = 0}$.

а) Пусть $\boldsymbol{\lambda_5 = 0}$, $\boldsymbol{\lambda_4 \neq 0}$, тогда $B = 0$. В силу выполнения $m > 1$ имеет место неравенство

$$m - 1 + \lambda_1 m > 0, \tag{3.34}$$

и второе уравнение из (3.33) не имеет корней, так как $-\lambda_4 < 0$. То есть при данном предположении о λ_4 система неразрешима.

б) Пусть $\boldsymbol{\lambda_5 = 0}$, $\boldsymbol{\lambda_4 = 0}$, тогда второе уравнение системы (3.33) примет вид

$$(m - 1 + \lambda_1 m)\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) = 0.$$

В силу (3.34) получим $\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) = 0$, то есть

$$\frac{B}{\beta} = \overline{F}^{-1}(0).$$

Если $\overline{F}^{-1}(0) = \infty$, то это означает, что либо $B = \infty, \beta > 0$, либо $\beta = 0, B > 0$.

Значение $\overline{F}^{-1}(0)$ представляет собой верхнюю границу носителя плотности случайной величины X, поэтому

$$\int_0^{\overline{F}^{-1}(0)} xf(x)dx = \mathbb{E}X, \quad \int_{\overline{F}^{-1}(0)}^{\infty} xf(x)dx = 0.$$

Учитывая (3.9) и представления (3.10), получим

$$\frac{\partial c}{\partial \beta} = c(1-k), \quad c(\beta, B) = kc + \beta c(1-k) > 0. \tag{3.35}$$

Следовательно, $\lambda_1 = 0$ и первое уравнение системы (3.33) запишется в виде

$$c(1-k) - \mathbb{E}X = \lambda_2 - \lambda_3.$$

Из последнего уравнения сразу получаем, что

i) При $c(1-k) < \mathbb{E}X$ множитель $\lambda_3 \neq 0$, поэтому $\beta = 0$. Так как согласно (3.2)

$$c(0, B) = kc, \tag{3.36}$$

то неравенство $u < -c(0, B)$ выполняется для всех $B > 0$. Другими словами, для каждого фиксированного u

$$\{(0, B) \in \Gamma \mid B > 0\} \subset \Gamma_u^l.$$

Ожидаемые издержки при этом равны

$$H(u, 0, B) = \mathbb{E}\left(\min(0, B) - u - kc\right)^+ = (-u - kc)^+ = -u - kc. \tag{3.37}$$

iii) При $c(1-k) > \mathbb{E}X$ множитель $\lambda_2 \neq 0$, то есть $\beta = 1$. В этом случае

$$c(1, B) = c(1-k) + kc - m\mathbb{E}(X - B)^+ = c - m\mathbb{E}(X - B)^+.$$

При $u < -c$ пара $(1, B)$ принадлежит Γ_u^l при любом $B > 0$. Если $-c \leq u < -kc$, то обозначив через B_u корень $c(1, B) = u$, то есть уравнения

$$m\mathbb{E}(X - B)^+ = u + c, \tag{3.38}$$

получим

$$\{(1, B) \in \Gamma \mid B \in (0, B_u]\} \subset \Gamma_u^l, \quad \{(1, B) \in \Gamma \mid B \in (B_u, \infty)\} \subset \Gamma_u^m.$$

Следовательно, издержки запишутся в виде

$$H(u, 1, B) = \mathbb{E}\left(\min(X, B) - u - c - m\mathbb{E}(X - B)^+\right)^+.$$

Учитывая (3.30), находим, что $\frac{\partial H}{\partial B} = (1-m)\overline{F}(B) < 0$, то есть H убывает по B. Тогда несложно видеть, что минимальные издержки на множестве Γ_u^l достигаются при наибольшем допустимом значении B, то есть при $B = \infty$, если $u < -c$ и при $B = B_u$, если $-c \leq u < -kc$. Соответствующие значения минимальных издержек равны

$$\begin{aligned} H(u, 1, \infty) &= \mathbb{E}(X - u - c)^+ = \mathbb{E}X - u - c, \\ H(u, 1, B_u) &= \mathbb{E}\left(\min(X, B_u) - u - c + m\mathbb{E}(X - B_u)^+\right)^+ = \\ &= \mathbb{E}\min(X, B_u) = \mathbb{E}(X - (X - B_u)^+) = \mathbb{E}X - \frac{u+c}{m}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

ii) <u>При $c(1-k)=\mathbb{E}X$</u> имеем $\lambda_2=\lambda_3=0$. То есть β может равняться 0 и тогда, как и в пункте i), нам будут подходить любые значения $B>0$. Или же $B=\infty, \beta>0$ и тогда

$$c(\beta,\infty)=\beta c(1-k)+kc,$$

$$\left\{(\beta,\infty)\in\Gamma \mid \beta\in\left(0,\frac{-u-kc}{c(1-k)}\right]\right\}\subset\Gamma_u^l, \quad \left\{(\beta,\infty)\subset\Gamma \mid \beta\in\left(\frac{-u-kc}{c(1-k)},1\right)\right\}\subset\Gamma_u^m.$$

Издержки равны $-u-kc$ в случае $\beta=0$ и рассчитываются следующим образом в случае $B=\infty$

$$H(u,\beta,\infty)=\mathbb{E}\left(\min(\beta X,\infty)-u-kc-\beta c(1-k)\right)^+=\mathbb{E}\left(\beta X-u-kc-\beta c(1-k)\right)^+.$$

Определим знак выражения, стоящего под символом математического ожидания в последней формуле. Если $u<-c$, то справедлива оценка

$$\beta X-u-kc-\beta c(1-k)>\beta X+c(1-k)-\beta c(1-k)=\beta X+(1-\beta)c(1-k)\geq 0.$$

Если же $-c\leq u<-kc$, то точки (β,∞) из множества Γ_u^l удовлетворяют условию $0<\beta\leq\frac{-u-kc}{c(1-k)}$ и имеет место $0\leq -u-kc-\beta c(1-k)<-u-kc$. Поэтому

$$\beta X-u-kc-\beta c(1-k)\geq 0 \quad \text{при} \quad (\beta,\infty)\in\Gamma_u^l.$$

Следовательно, в силу условия $\mathbb{E}X=c(1-k)$ получим, что на множестве Γ_u^l

$$H(u,\beta,\infty)=\mathbb{E}\left(\beta X-u-kc-\beta c(1-k)\right)^+=\beta\left(\mathbb{E}X-c(1-k)\right)-u-kc=-u-kc\geq 0. \tag{3.40}$$

Из рассмотренных случаев а), б) вытекает, что при $\lambda_5=0$ система (3.33) имеет следующие решения

$$\left\{(\beta,B)\in\Gamma \mid \beta=0\right\}, \quad \text{если } c(1-k)<\mathbb{E}X, \tag{3.41}$$

$$\left\{(\beta,B)\in\Gamma \mid \beta=0, B>0 \text{ или } B=\infty, \beta\in\left(0,\min\left(\frac{-u-kc}{c(1-k)},1\right)\right]\right\}, \quad \text{если } c(1-k)=\mathbb{E}X, \tag{3.42}$$

$$\left\{(\beta,B)\in\Gamma \mid \beta=1, B\in(0,\min(B_u,\infty)]\right\}, \quad \text{если } c(1-k)>\mathbb{E}X. \tag{3.43}$$

Пока мы нашли лишь решения системы (3.33), соответствующие $\lambda_5=0$. Теперь рассмотрим

II) Случай $\lambda_5\neq 0$. Данное предположение соответствует тому, что $c(\beta,B)=-u$, $\lambda_1=0$. Следовательно, согласно определению (3.5)

$$H(u,\beta,B)=\mathbb{E}\left(\min(\beta X,B)-u-c(\beta,B)\right)^+=\mathbb{E}\left(\min(\beta X,B)\right). \tag{3.44}$$

а) Пусть $\lambda_5 \neq 0$, $\lambda_4 \neq 0$, тогда $B = 0$. При $\beta > 0$ имеем $\frac{B}{\beta} = 0$, $\int_{B/\beta}^{\infty} xf(x)dx = \mathbb{E}X$ и

$$c(\beta, B) = kc + \beta(c(1-k) - m\mathbb{E}X).$$

Приравнивая выражение для $c(\beta, B)$ к $-u$, получаем

$$\beta = \frac{-u - kc}{c(1-k) - m\mathbb{E}X}.$$

Но последнее уравнение не имеет решения, так как левая часть строго больше нуля, а дробь в правой части неположительна. Это вытекает из условия (3.4), согласно которому $c(1-k) - m\mathbb{E}X < 0$, и того, что по условию данной леммы $u \leq -kc$. Следовательно, при $B = 0$ и $\beta > 0$ система (3.33) будет неразрешима.

б) Пусть $\lambda_5 \neq 0$, $\lambda_4 = 0$, тогда из второго уравнения (3.33) вытекает, что

$$m - 1 - \lambda_5 m = 0 \quad \text{или} \quad \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) = 0. \tag{3.45}$$

Если в (3.45) верно первое соотношение и $\lambda_5 = \frac{m-1}{m}$, то первое уравнение системы (3.33) превратится в

$$\frac{1}{m}\left(c(1-k) - m\int_{B/\beta}^{\infty} xf(x)dx\right) = \int_0^{B/\beta} xf(x)dx + \lambda_2 - \lambda_3,$$

что равносильно

$$\frac{1}{m}\left(c(1-k) - m\mathbb{E}X\right) = \lambda_2 - \lambda_3.$$

Так как левая часть последнего равенства отрицательна, то $\lambda_3 \neq 0$ и $\beta = 0$. Пусть $B > 0$, тогда $\frac{B}{\beta} = \infty$, $\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) = 0$, и следовательно, $-u = c(\beta, B) = kc$. То есть при $\beta = 0$ и $B > 0$ система (3.33) будет неразрешима для $u < -kc$.

Посмотрим, будут ли решения, если в (3.45) выполняется второе условие. Получим $\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) = 0$, откуда сразу вытекает, что при $\beta > 0$ имеют место соотношения $\frac{B}{\beta} = \overline{F}^{-1}(0)$, $\frac{\partial c}{\partial \beta} = c(1-k)$ и

$$-u = c(\beta, B) = kc + \beta c(1-k).$$

Следовательно,

$$\beta = \frac{-u - kc}{c(1-k)}, \quad \frac{B}{\beta} = \overline{F}^{-1}(0) \tag{3.46}$$

есть решение системы (3.33) для $-c \leq u < -kc$ (при таких u выполняется $0 < \beta \leq 1$). Учитывая (3.44), находим

$$H(u, \beta, B) = \beta\mathbb{E}\min\left(X, \frac{B}{\beta}\right) = \frac{-u - kc}{c(1-k)}\mathbb{E}\min(X, \overline{F}^{-1}(0)) = \frac{-u - kc}{c(1-k)}\mathbb{E}X. \tag{3.47}$$

III) Для $-c \le u < -kc$ сравним значения $H(u,\beta,B)$, которые соответствуют решениям системы (3.33) при $\lambda_5 = 0$ (а именно (3.39), (3.40), (3.37)), со значением (3.47), полученным при $\lambda_5 \neq 0$.

i) Пусть $c(1-k) < \mathbb{E}X$, тогда согласно (3.37) и (3.47) минимальные издержки равны $-u-kc$ или $(-u-kc)\frac{\mathbb{E}X}{c(1-k)}$. Так как $\frac{\mathbb{E}X}{c(1-k)} > 1$, то наименьшее значение $H(u,\beta,B)$ будет равно $-u-kc$ и будет соответствовать параметрам (β,B) из (3.41).

ii) Пусть $c(1-k) = \mathbb{E}X$, тогда из (3.40) и (3.47) вытекает, что минимальные издержки равны $-u-kc$.

iii) Пусть $c(1-k) > \mathbb{E}X$, тогда согласно (3.39) и (3.47) минимальные издержки равны $\mathbb{E}X - \frac{u+c}{m}$ или $(-u-kc)\frac{\mathbb{E}X}{c(1-k)}$. Учитывая соотношение (3.4), получим

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X - \frac{u+c}{m} - (-u-kc)\frac{\mathbb{E}X}{c(1-k)} &= \frac{1}{m}\left(m\mathbb{E}X - c(1-k) - u - kc + (u+kc)\frac{m\mathbb{E}X}{c(1-k)}\right) = \\ &= \frac{1}{m}\left(m\mathbb{E}X - c(1-k) + (u+kc)\frac{m\mathbb{E}X - c(1-k)}{c(1-k)}\right) = \\ &= \frac{1}{m}(m\mathbb{E}X - c(1-k))(u+c) \ge 0.\end{aligned}$$

Следовательно, в случае $c(1-k) > \mathbb{E}X$ наименьшее значение $H(u,\beta,B)$ равно $(-u-kc)\frac{\mathbb{E}X}{c(1-k)}$ и достигается при (β,B) из (3.46). $\square$

Случай оптимального комбинированного перестрахования при начальном капитале $u < -c$.

Теорема 3.4. *Для любого $u < -c$ верны следующие утверждения о минимальных ожидаемых издержках $\min_{\Gamma_0} H(u,\beta,B)$ и оптимальной стратегии перестрахования.*

1) Если $c(1-k) < \mathbb{E}X$, то оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование. Издержки при этом равны

$$\min_{\Gamma_0} H(u,\beta,B) = -u-kc.$$

2) Если $c(1-k) = \mathbb{E}X$, то оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование или чисто квотное перестрахование с параметром $\beta > 0$. Издержки при этом равны

$$\min_{\Gamma_0} H(u,\beta,B) = -u-kc.$$

3) Если $c(1-k) > \mathbb{E}X$, то наилучшей стратегией для страховщика будет отказ от услуг перестрахования. Издержки при этом равны

$$\min_{\Gamma_0} H(u,\beta,B) = \mathbb{E}X - u - c.$$

Доказательство. Заметим, что в случае $u < -c$ условие $u + c(\beta,B) < 0$ будет выполнено при любых значениях $(\beta,B) \in \Gamma_0$. Поэтому (3.31) выродится в задачу (3.22), и учитывая утверждение леммы 3.5, будет являться выпуклой задачей оптимизации. Поэтому локальные минимумы, найденные в лемме 3.6, будут глобальными.

Принимая во внимание то, что условие $\beta = 0$ означает передачу всех рисков в перестрахование, а условие $B = \overline{F}^{-1}(0)$ — отсутствие эксцедентного перестрахования (так как все риски будут меньше уровня собственного удержания), из пункта 1) леммы 3.6 вытекает утверждение теоремы. $\square$

Поиск минимальных ожидаемых издержек на множестве параметров перестрахования Γ_u^m. Для дальнейших рассуждений нам потребуется вспомогательная лемма.

Лемма 3.7. *Для функции*

$$e = e(u, \beta, B) := \frac{a(u, \beta, B)}{\beta} \tag{3.48}$$

верны следующие утверждения

$$1) \quad \frac{\partial e}{\partial B} = \frac{m}{\beta}\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) \geq 0, \quad \frac{\partial e}{\partial \beta} = -\frac{u + kc}{\beta^2} - \frac{mB}{\beta^2}\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right).$$
$$2) \quad \frac{\partial e}{\partial \beta} = -\frac{u + kc}{\beta^2} - \frac{B}{\beta}\frac{\partial e}{\partial B}.$$

Доказательство. В силу определения (3.3), $a(u, \beta, B) = u + c(\beta, B)$, поэтому

$$e = \frac{u + c(\beta, B)}{\beta} = \frac{1}{\beta}\left(u + c\beta(1 - k) + kc - m\int_{\frac{B}{\beta}}^{\infty}(\beta x - B)f(x)dx\right) =$$
$$= \frac{u + kc}{\beta} + c(1 - k) - m\int_{\frac{B}{\beta}}^{\infty} xf(x)dx + \frac{mB}{\beta}\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right),$$

следовательно,

$$\frac{\partial e}{\partial B} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial c}{\partial B} = \frac{m}{\beta}\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) \geq 0,$$
$$\frac{\partial e}{\partial \beta} = \frac{\frac{\partial c}{\partial \beta}\beta - a}{\beta^2} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial c}{\partial \beta} - e\right) = \frac{1}{\beta}\left(-\frac{u + kc}{\beta} - \frac{mB}{\beta}\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right)\right) = -\frac{u + kc}{\beta^2} - \frac{mB}{\beta^2}\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right).$$

Второй пункт леммы очевидным образом вытекает из первого. $\square$

Лемма 3.8. *Пусть начальный капитал* u *фиксирован, тогда на множестве* Γ_u^m *функция* $H(u, \beta, B)$ *имеет производные следующего вида*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial B} = \left(1 - m\overline{F}\left(\dfrac{a(u, \beta, B)}{\beta}\right)\right)\overline{F}\left(\dfrac{B}{\beta}\right), \\ \dfrac{\partial H}{\partial \beta} = \displaystyle\int_{\frac{a(u,\beta,B)}{\beta}}^{\frac{B}{\beta}} xf(x)dx - \left(c(1 - k) - m\int_{\frac{B}{\beta}}^{\infty} xf(x)dx\right)\overline{F}\left(\dfrac{a(u, \beta, B)}{\beta}\right). \end{cases} \tag{3.49}$$

Доказательство. Для функций $H_1(u,\beta,B), H_2(u,\beta,B)$, определенных в (3.26), найдем производные по β, B.

$$\frac{\partial H_1}{\partial B} = \int_{\frac{a(u,\beta,B)}{\beta}}^{\frac{B}{\beta}} -\frac{\partial c}{\partial B} f(x)dx + (B-a(u,\beta,B))f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{1}{\beta} =$$
$$= -\frac{\partial c}{\partial B}\left(\overline{F}\left(\frac{a(u,\beta,B)}{\beta}\right) - \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right)\right) + (B-a(u,\beta,B))f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{1}{\beta},$$
$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \int_{\frac{a(u,\beta,B)}{\beta}}^{\frac{B}{\beta}} \left(x - \frac{\partial c}{\partial \beta}\right) f(x)dx - (B-a(u,\beta,B))f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{B}{\beta^2} =$$
$$= \int_{\frac{a(u,\beta,B)}{\beta}}^{\frac{B}{\beta}} xf(x)dx - \frac{\partial c}{\partial \beta}\left(\overline{F}\left(\frac{a(u,\beta,B)}{\beta}\right) - \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right)\right) - (B-a(u,\beta,B))f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{B}{\beta^2},$$
$$\frac{\partial H_2}{\partial B} = \left(1 - \frac{\partial c}{\partial B}\right)\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) - (B-a(u,\beta,B))f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{1}{\beta},$$
$$\frac{\partial H_2}{\partial \beta} = -\frac{\partial c}{\partial \beta}\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) + (B-a(u,\beta,B))f\left(\frac{B}{\beta}\right)\frac{B}{\beta^2}.$$

Следовательно, учитывая (3.27), находим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial B} = -\dfrac{\partial c}{\partial B}\overline{F}\left(\dfrac{a(u,\beta,B)}{\beta}\right) + \overline{F}\left(\dfrac{B}{\beta}\right), \\ \dfrac{\partial H}{\partial \beta} = \displaystyle\int_{\frac{a(u,\beta,B)}{\beta}}^{\frac{B}{\beta}} xf(x)dx - \dfrac{\partial c}{\partial \beta}\overline{F}\left(\dfrac{a(u,\beta,B)}{\beta}\right). \end{cases} \tag{3.50}$$

Подставляя выражения для $\frac{\partial c}{\partial \beta}, \frac{\partial c}{\partial B}$ из (3.9), получим искомые формулы для $\frac{\partial H}{\partial \beta}, \frac{\partial H}{\partial B}$.

□

Лемма 3.9. *Пусть* $-c < u < \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B)$, *тогда справедливы следующие утверждения относительно минимального значения функции* $H(u,\beta,B)$ *на множестве* Γ_u^m.
Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1,b_*) < 0$, *то*

i), ii) при $c(1-k) \le \mathbb{E}X$ *минимальное значение* $H(u,\beta,B)$ *достигается при* $(\beta,B) = (\beta_u,\infty)$ *и равно* $\beta_u \mathbb{E}X$, *где* $\beta_u = \frac{-u-kc}{c(1-k)}$.

iii) при $c(1-k) > \mathbb{E}X$ *минимальное значение* $H(u,\beta,B)$ *достигается при*

$$(\beta,B) = \begin{cases} (1,\infty), & u \in [-c,u_m], \\ (\beta_u^0,\infty), & u \in [u_m, \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B)] \end{cases}$$

и равно

$$\min_{\Gamma_u^m} H(u,\beta,B) = \begin{cases} \mathbb{E}(X-u-c)^+, & u \in [-c,u_m], \\ (-u-kc)\overline{F}(u_m+c), & u \in [u_m, \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta,B)], \end{cases}$$

где $\beta_u^0 = \frac{u+kc}{u_m+kc}$ *и* u_m *— корень уравнения*

$$\overline{F}(u+c)c(1-k) - \int_{u+c}^{\infty} xf(x)dx = 0.$$

Если $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) \geq 0$,

то $c(1-k) \geq \mathbb{E}X$ *и минимальное значение* $H(u, \beta, B)$ *достигается при*

$$(\beta, B) = \begin{cases} (1, \infty), & u \in [-c, -c + b_*], \\ (1, B_*), & u \in [-c + b_*, \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B)] \end{cases}$$

и равно

$$\min_{\Gamma_u^m} H(u, \beta, B) = \begin{cases} \mathbb{E}(X - u - c)^+, & u \in [-c, -c + b_*], \\ \frac{1}{m}\left(-u + g\left(1, b_*\right)\right), & u \in [-c + b_*, \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B)], \end{cases}$$

где B_* *— корень уравнения* $m\mathbb{E}(X - B)^+ = u + c - b_*$.

Доказательство. Будем решать задачу оптимизации

$$H(u, \beta, B) \to \inf_{(\beta, B)}, \quad (\beta, B) \in \Gamma_u^m, \tag{3.51}$$

которая эквивалентна задаче (3.22) при дополнительных условиях

$$u + c(\beta, B) \geq 0, \quad u - g(\beta, B) \leq 0. \tag{3.52}$$

При составление функции Лагранжа не будем включать слагаемое $\lambda_1 c(\beta, B)$, так как условие $c(\beta, B) \geq 0$, которому оно соответствует, вытекает из первого неравенства (3.52). Заметим, что при $u < \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B)$ второе неравенство в (3.52) сохраняется для любых (β, B), поэтому его можно не рассматривать, как дополнительное ограничение. Следовательно, с учетом нового ограничения и (3.23) пункты (i) – (iii) из (3.14) (при $\lambda_0 = 1$) можно переписать в следующем виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \beta} + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_5 \dfrac{\partial c}{\partial \beta} = 0, \\ \dfrac{\partial H}{\partial B} - \lambda_4 - \lambda_5 \dfrac{\partial c}{\partial B} = 0, \\ \lambda_2(\beta - 1) = 0, \\ \lambda_3 \beta = 0, \quad \lambda_4 B = 0, \\ \lambda_5(u + c(\beta, B)) = 0 \\ \lambda_i \geq 0, \ i = \overline{2, 5}. \end{cases} \tag{3.53}$$

Подставляя в систему (3.53) явные выражения для производных $\frac{\partial H}{\partial \beta}$, $\frac{\partial H}{\partial B}$ из (3.50) и (3.49) соответственно, придем к

$$\begin{cases} (\lambda_5 + \overline{F}(e))\dfrac{\partial c}{\partial \beta} = \displaystyle\int_e^{\frac{B}{\beta}} xf(x)dx + \lambda_2 - \lambda_3 \\ \left(1 - m\overline{F}(e) - \lambda_5 m\right)\overline{F}\left(\dfrac{B}{\beta}\right) = \lambda_4, \\ \lambda_2(\beta - 1) = 0, \\ \lambda_3\beta = 0, \quad \lambda_4 B = 0, \\ \lambda_5(u + c(\beta, B)) = 0 \\ \lambda_i \geq 0, \; i = \overline{2,5}. \end{cases} \tag{3.54}$$

В силу того, что $(0, B) \notin \Gamma^u_m$ при $B > 0$ и $(\beta, 0) \notin \Gamma^m_u$ при $\beta > 0$, система может быть разрешима только при $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

I) Пусть $\lambda_5 \neq 0$. Тогда $c(\beta, B) = -u$, и следовательно, $e = 0$. Поэтому $\overline{F}(e) = 1$ и второе уравнение системы (3.54) примет вид

$$(1 - m - \lambda_5 m)\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) = 0.$$

Так как по определению нагрузочный коэффициент $m > 1$, то $(1 - m - \lambda_5 m) < 0$ и

$$\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) = 0.$$

Следовательно, $\frac{B}{\beta} = \overline{F}^{-1}(0)$ (то есть $B = \infty$, $\beta > 0$ или $\beta = 0, B > 0$). Нам надо рассмотреть только случай $B = \infty, \beta > 0$, так как при любом B точка $(0, B) \notin \Gamma^m_u$. Согласно (3.9) выполняется $\frac{\partial c}{\partial \beta} = c(1 - k)$, и (3.54) сводится к системе

$$\begin{cases} (1 + \lambda_5)c(1 - k) = \mathbb{E}X + \lambda_2, \\ \lambda_2(\beta - 1) = 0. \end{cases} \tag{3.55}$$

Перепишем первое уравнение из (3.55) в виде

$$c(1 - k) - \mathbb{E}X = \lambda_2 - \lambda_5 c(1 - k).$$

Учитывая, что в силу (3.10)

$$c(\beta, B) = kc + \beta c(1 - k),$$

рассмотрим следующие случаи.

Если $c(1 - k) - \mathbb{E}X < 0$, тогда (3.54) разрешима при равенстве нулю множителя λ_2. Приравнивая $c(\beta, B)$ к $-u$, получим

$$\beta = \frac{-u - kc}{c(1 - k)}, \quad H(u, \beta, B) = \frac{-u - kc}{c(1 - k)}\mathbb{E}X,$$

где издержки H подсчитывались так же, как и в (3.40).

Если $c(1-k) - \mathbb{E}X \geq 0$, то система (3.55) будет разрешима только при $\lambda_2 > 0$, то есть при $\beta = 1$. Следовательно, $c(\beta, B) = c$, то есть только при $u = -c$ пара $(\beta, B) = (1, \overline{F}^{-1}(0))$ будет являться решением (3.55), причем соответствующее значение $H(u, \beta, B)$ будет равно $\mathbb{E}X$.

II) Пусть теперь $\lambda_5 = 0$, тогда второе уравнение системы (3.54) будет иметь вид

$$(1 - m\overline{F}(e))\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) = 0, \tag{3.56}$$

то есть надо рассмотреть два случая

$$1 - m\overline{F}(e) = 0 \quad \text{или} \quad \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) = 0. \tag{3.57}$$

II.1) Пусть $\mathbf{1 - m\overline{F}(e) = 0}$, тогда $e = b_*$, то есть параметры (β, B) удовлетворяют уравнению

$$u + c(\beta, B) = \beta b_*. \tag{3.58}$$

Следовательно, (3.54) сведется к системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m}\left(c(1-k) - m\displaystyle\int_{b_*}^{\infty} xf(x)dx\right) = \lambda_2, \\ \lambda_2(\beta - 1) = 0. \end{cases} \tag{3.59}$$

Заметим, что выражение в скобках в первом уравнении системы (3.59) есть не что иное, как значение производной $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*)$. Так как $\lambda_2 \geq 0$, то система имеет решения только при $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) \geq 0$.

Покажем, что $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) \geq 0$ влечет $c(1-k) > \mathbb{E}X$. Рассмотрим функцию

$$s(t) := c(1-k) - \frac{1}{\overline{F}(t)}\int_t^{\infty} xf(x)dx,$$

ее производная равна

$$s'(t) = -\left(\frac{1}{\overline{F}^2(t)}f(t)\int_t^{\infty} xf(x)dx - \frac{1}{\overline{F}(t)}tf(t)\right) = -\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}\mathbb{E}(X-t)^+ \leq 0,$$

то есть $s(t)$ не возрастает по t и имеет место требуемое соотношение

$$c(1-k) - \mathbb{E}X = s(0) \geq s(b_*) = \frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) \geq 0.$$

Далее, согласно (3.5)

$$H(u, \beta, B) = \mathbb{E}\left(\min(\beta X, B) - \beta b_*\right)^+. \tag{3.60}$$

Отметим, что допустимые пары (β, B) должны удовлетворять неравенству $b_* \le \frac{B}{\beta}$, так как с учетом справедливости неравенства $u \le g(\beta, B)$ для всех $(\beta, B) \in \Gamma_u^m$ имеем

$$b_* = e = \frac{u + c(\beta, B)}{\beta} \le \frac{g(\beta, B) + c(\beta, B)}{\beta} = \frac{B}{\beta}.$$

Распишем подробнее выражение (3.60).

$$H(u,\beta,B) = \int_0^{\infty} (\min(\beta x, B) - \beta b_*)^+ f(x)dx =$$
$$= \beta \int_0^{\frac{B}{\beta}} (x - b_*)^+ f(x)dx + \int_{\frac{B}{\beta}}^{\infty} (B - \beta b_*) f(x)dx =$$
$$= \beta \left[\int_{b_*}^{\frac{B}{\beta}} (x - b_*) f(x)dx + \left(\frac{B}{\beta} - b_*\right) \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) \right].$$

Учитывая, что для любого положительного числа t верно представление $\mathbb{E}(X-t)^+ = \int_t^{\infty} x f(x)dx - t\overline{F}(t)$, получим

$$\frac{1}{\beta} H(u,\beta,B) = \int_{b_*}^{\infty} x f(x)dx - \int_{\frac{B}{\beta}}^{\infty} x f(x)dx - b_* \left(\frac{1}{m} - \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right)\right) + \left(\frac{B}{\beta} - b_*\right) \overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right) =$$
$$= \left[\int_{b_*}^{\infty} x f(x)dx - b_* \frac{1}{m}\right] - \left[\int_{\frac{B}{\beta}}^{\infty} x f(x)dx - \frac{B}{\beta}\overline{F}\left(\frac{B}{\beta}\right)\right] =$$
$$= \mathbb{E}\,(X - b_*)^+ - \mathbb{E}\left(X - \frac{B}{\beta}\right)^+. \quad (3.61)$$

То есть ожидаемые издержки имеют вид

$$H(u,\beta,B) = \beta \left[\mathbb{E}\,(X - b_*)^+ - \mathbb{E}\left(X - \frac{B}{\beta}\right)^+\right]. \quad (3.62)$$

Далее, принимая во внимание представление (3.2) для $c(\beta, B)$ и преобразовывая уравнение (3.58), находим

$$u + kc + \beta c(1-k) - m\beta \mathbb{E}\left(X - \frac{B}{\beta}\right)^+ = \beta b_*,$$
$$\mathbb{E}\left(X - \frac{B}{\beta}\right)^+ = \frac{1}{m}\left(\frac{u + kc}{\beta} + c(1-k) - b_*\right). \quad (3.63)$$

Подставляя выражение для $\mathbb{E}\left(X - \frac{B}{\beta}\right)^+$ в (3.61), получим

$$\frac{1}{\beta} H(u,\beta,B) = \int_{b_*}^{\infty} x f(x)dx - b_* \frac{1}{m} - \frac{1}{m}\left(\frac{u + kc}{\beta} + c(1-k) - b_*\right) = -\frac{1}{m}\left(\frac{u+kc}{\beta} + \frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*)\right),$$

то есть

$$H(u,\beta,B) = \frac{1}{m}\left(-u - kc - \beta \frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*)\right). \quad (3.64)$$

Вернемся к системе (3.59).

Случай $\lambda_2 \neq 0$ и $\beta = 1$ соответствует $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) > 0$. Следовательно, из (3.64) с учетом (3.21) вытекает

$$H(u, 1, B) = \frac{1}{m}\left(-u - kc - \frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*)\right) = \frac{1}{m}\left(-u + g(1, b_*)\right). \tag{3.65}$$

Заметим, что в данном случае согласно лемме 3.3 $g(1, b_*) = \min_{\Gamma_0} g(\beta, B)$. Поэтому, при $u = \min_{\Gamma_0} g(\beta, B)$ минимальные издержки равны 0 и из (3.62) сразу вытекает, что это значение достигается при $B = b_*$.

Несложно видеть из (3.64) и (3.62), что $H(u, \beta.B)$ убывает при увеличении u и возрастает при увеличении B. Поэтому, при $u < \min_{\Gamma_0} g(\beta, B)$ издержки строго больше 0 и $B > b_*$. А именно, B находится как корень уравнения $e = b_*$ при $\beta = 1$, то есть B удовлетворяет

$$m\mathbb{E}(X - B)^+ = u + c - b_*. \tag{3.66}$$

Отметим, что точка $(1, B_*)$, где B_* — решение (3.66), лежит в области Γ_u^m, так как $B_* > B_u$, где B_u доставляет решение (3.38).

Случай $\lambda_2 = 0$ соответствует $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) = 0$. При этом Из (3.64) вытекает

$$H(u, \beta, B) = \frac{-u - kc}{m}.$$

Учитывая результат леммы 3.3, снова получаем, что при $u = \min_{\Gamma_0} g(\beta, B)$ издержки равны 0.

Определим, для каких u уравнение (3.63) имеет решение. Так как

$$0 \leq \mathbb{E}\left(X - \frac{B}{\beta}\right)^+ \leq \mathbb{E}\left(X - b_*\right)^+,$$

получим

$$0 \leq \frac{u + kc}{\beta} + c(1 - k) - b_* \leq m\int_{b_*}^{\infty} xf(x)dx - b_*,$$

что равносильно

$$-kc - \beta\left(c(1 - k) - b_*\right) \leq u \leq -kc - \beta\left(\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*)\right).$$

То есть при $\beta = 1$ и $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) > 0$

$$-c + b_* \leq u \leq g(1, b_*),$$

а при $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) = 0$,

$$-kc - \beta m\mathbb{E}\left(X - b_*\right)^+ \leq u \leq -kc,$$

так как
$$c(1-k)-b_* = m\int_{b_*}^{\infty} xf(x)dx - b_* = m\mathbb{E}\left(X-b_*\right)^+.$$

Заметим, что в точке $u=-c+b_*$ имеет место равенство
$$\mathbb{E}\left(X-u-c\right)^+ = \mathbb{E}\left(X-b_*\right)^+ = \frac{1}{m}\left(m\int_{b_*}^{\infty} xf(x)dx - b_* \pm c\right) =$$
$$= \frac{1}{m}\left(c-b_*+g\left(1,b_*\right)\right) = \frac{-u+g\left(1,b_*\right)}{m},$$

и согласно (3.66) оптимальный уровень собственного удержания удовлетворяет уравнению $\mathbb{E}(X-B)^+=0$, то есть равен ∞.

II.2) Пусть теперь $\overline{\mathbf{F}}\left(\frac{\mathbf{B}}{\beta}\right)=\mathbf{0}$, то есть выполняется второе условие из (3.57). Тогда $B=\infty$, $\frac{\partial c}{\partial\beta}=c(1-k)$, $e=\frac{u+kc}{\beta}+c(1-k)$ и первое уравнение системы (3.54) запишется как
$$\underbrace{\overline{F}(e)c(1-k)-\int_e^{\infty} xf(x)dx}_{:=w(u,\beta)} = \lambda_2 \tag{3.67}$$

Вычислим производную функции $w(u,\beta)$ по β. Получим
$$(w(u,\beta))'_\beta = -f(e)e'_\beta c(1-k)+ef(e)e'_\beta = f(e)\left(\frac{-u-kc}{\beta^2}\right)\left(\frac{u+kc}{\beta}\right)<0.$$

Следовательно, при фиксированном u функция $w(u,\beta)$ убывает по β.

Введем обозначение $\beta_u := \frac{-u-kc}{c(1-k)}$. Несложно заметить, что для любого u при подстановке $\beta=\beta_u$ получим $e=0$ и
$$w(u,\beta_u)=c(1-k)-\mathbb{E}X.$$

В силу того, что $w(u,\beta)$ убывает по β и для пар (β,B), принадлежащих множеству Γ_u^m, имеет место $\beta\geq\beta_u$, верно следующее.

<u>Если $c(1-k)-\mathbb{E}X<0$</u>, то система (3.54) неразрешима, так как при $\lambda_2\geq 0$ уравнение (3.67) не имеет корней.

<u>Если $c(1-k)-\mathbb{E}X=0$</u>, то (3.54) имеет решение $\beta=\beta_u$, $B=\infty$ и издержки равны
$$H(u,\beta_u,\infty)=\frac{-u-kc}{c(1-k)}\mathbb{E}X.$$

<u>Если $c(1-k)-\mathbb{E}X>0$</u>, то рассмотрим несколько вариантов.

а) Пусть $w(u,1)>0$, где
$$w(u,1)=\overline{F}(u+c)c(1-k)-\int_{u+c}^{\infty} xf(x)dx, \tag{3.68}$$

тогда из уравнения (3.54) вытекает $\lambda_2>0$, и из условия дополняющей нежесткости $\lambda_2(\beta-1)=0$ получаем $\beta=1$.

б) Пусть $w(u,1)=0$, тогда при $\lambda_2 \neq 0$ у системы (3.54) нет решений, а при $\lambda_2 = 0$ получим $\beta = 1, B = \infty$.
В случаях а),б) издержки равны

$$H(u,1,\infty) = \mathbb{E}(X-u-c)^+.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E}(X-u-c)^+ = (-u-kc)\frac{\mathbb{E}X}{c(1-k)} = \mathbb{E}X, \quad \text{при} \quad u=-c,$$
$$\mathbb{E}(X-u-c)^+ \geq (-u-kc)\frac{\mathbb{E}X}{c(1-k)} = 0, \quad \text{при} \quad u=-kc.$$

Более того, $\mathbb{E}(X-u-c)^+ = \int_{u+c}^{\infty}(x-(u+c))f(x)\,dx$ является невозрастающей выпуклой вниз функцией переменной u, так как

$$\left(\int_{u+c}^{\infty}(x-(u+c))f(x)\,dx\right)'_u = -\int_{u+c}^{\infty}f(x)\,dx = -\overline{F}(u+c) \leq 0,$$
$$\left(\int_{u+c}^{\infty}(x-(u+c))f(x)\,dx\right)''_u = f(u+c) \geq 0.$$

Следовательно, принимая во внимание линейность по u убывающей функции $(-u-kc)\frac{\mathbb{E}X}{c(1-k)}$, получим

$$\mathbb{E}(X-u-c)^+ \leq (-u-kc)\frac{\mathbb{E}X}{c(1-k)}$$

для любого $u > -c$, лежащего левее точки пересечения двух рассмотренных функций.

в) Пусть $w(u,1) < 0$, тогда существует $\beta_u^0,\ \beta_u < \beta_u^0 < 1$ такое, что $w(u,\beta_u^0) = 0$, то есть β_u^0 — корень уравнения

$$\overline{F}\left(\frac{u+kc}{\beta} + c(1-k)\right)c(1-k) - \int_{\frac{u+kc}{\beta}+c(1-k)}^{\infty} xf(x)dx = 0 \tag{3.69}$$

при фиксированном u. Следовательно, точка (β_u^0, ∞) является решением (3.54) при $\lambda_2 = 0$ (при $\lambda_2 \neq 0$ нет решений). Издержки в данном случае равны

$$\begin{aligned}
H(u,\beta_u^0,\infty) &= \mathbb{E}(\beta_u^0 X - u - kc - \beta_u^0 c(1-k))^+ = \\
&= \beta_u^0 \int_{\frac{u+kc}{\beta_u^0}+c(1-k)}^{\infty} xf(x)dx - (u+kc+\beta_u^0 c(1-k))\overline{F}\left(\frac{u+kc}{\beta_u^0} + c(1-k)\right) = \\
&= \beta_u^0 c(1-k)\overline{F}\left(\frac{u+kc}{\beta_u^0} + c(1-k)\right) - (u+kc+\beta_u^0 c(1-k))\overline{F}\left(\frac{u+kc}{\beta_u^0} + c(1-k)\right) = \\
&= (-u-kc)\overline{F}\left(\frac{u+kc}{\beta_u^0} + c(1-k)\right).
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Заметим, что $w(u,1)$ убывает по u,

$$w(u,1)'_u = -f(u+c)c(1-k) + (u+c)f(u+c) = -f(u+c)(-u-kc) < 0,$$

и принимает следующие значения в крайних точках рассматриваемого интервала $[-c, -kc)$

$$w(-c,1) = c(1-k) - \mathbb{E}X > 0,$$
$$w(-kc,1) = \overline{F}(c(1-k))c(1-k) - \int_{c(1-k)}^{\infty} xf(x)dx = -\mathbb{E}(X - c(1-k))^+ \leq 0.$$

Следовательно, существует такое значение u_m, $-c < u_m \leq -kc$, что $w(u_m, 1) = 0$, то есть согласно (3.68) u_m — корень уравнения

$$\overline{F}(u+c)c(1-k) - \int_{u+c}^{\infty} xf(x)dx = 0. \tag{3.71}$$

Тогда при $u \in [-c, u_m]$ выполняется $w(u,1) \geq 0$ и минимальные издержки равны $\mathbb{E}(X - u - c)^+$, а при $u \in (u_m, -kc)$ верно $w(u,1) < 0$ и выражение для наименьших издержек $H(u, \beta_u^0, \infty)$ найдено в (3.70).

Заметим, что из (3.71) и уравнения на β_u^0 (3.69) вытекает

$$u_m + c = \frac{u + kc}{\beta_u^0} + c(1-k).$$

Выражая β_u^0 и подставляя его в (3.70), получим

$$\beta_u^0 = \frac{u + kc}{u_m + kc}, \quad H(1, \beta_u^0, \infty) = (-u - kc)\overline{F}\left(u_m + c\right), \tag{3.72}$$

Из последних формул следует, что

$$\beta_{u_m}^0 = 1, \quad H(1, \beta_{u_m}^0, \infty) = \mathbb{E}(X - u_m - c)^+.$$

Отметим, что $u_m \geq -c + b_*$, так как функция $w(u,1)$ убывает и выполняется

$$w\left(-c + b_*, 1\right) = \frac{1}{m}c(1-k) - \int_{b_*}^{\infty} xf(x)dx = \mathbb{E}\left(X - b_*\right)^+ \geq 0 = w(u_m, 1).$$

В случае $\frac{\partial c}{\partial \beta}\left(1, b_*\right) \geq 0$ для выбора оптимальной стратегии перестрахования надо сравнить значения издержек при $(\beta, B) = (1, B_*)$ и $(\beta, B) = (\beta_u^0, \infty)$ для всех $u \in [u_m, \min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B)]$. Согласно (3.65) и (3.72) функции $H(u, 1, B_*)$ и $H(u, \beta_u^0, \infty)$ являются линейными по u с углами наклона $-\frac{1}{m}$ и $-\overline{F}(u_m + c)$ соответственно. При этом $-\frac{1}{m} \leq -\overline{F}(u_m + c)$, так как $u_m \geq -c + b_*$. Следовательно, если точка пересечения двух графиков лежит праве $\min\limits_{\Gamma_0} g(\beta, B) = g\left(1, b_*\right)$, то будет выполнено

$$H(u, 1, B_*) \leq H(u, \beta_u^0, \infty), \quad u \in [u_m, \min_{\Gamma_0} g(\beta, B)].$$

Покажем, что это действительно так. Приравнивая значения из (3.65) и (3.72), получаем точку пересечения

$$u = \frac{kc\overline{F}(u_m + c) + \frac{1}{m}g\left(1, b_*\right)}{\frac{1}{m} - \overline{F}(u_m + c)},$$

которая оказывается больше $g(1, b_*)$ в силу следующей цепочки неравенств.

$$\frac{kc\overline{F}(u_m + c) + \frac{1}{m}g(1, b_*)}{\frac{1}{m} - \overline{F}(u_m + c)} - g(1, b_*) = \frac{(kc + g(1, b_*))\,\overline{F}(u_m + c)}{\frac{1}{m} - \overline{F}(u_m + c)} > 0,$$

так как согласно (3.21) $g(1, b_*) = -kc - \frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*)$ и $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) \geq 0$.

Сравнивая решения (β, B), найденные в пунктах I), II.1), II.2) и выбирая те, которые дают минимальное значение $H(u, \beta, B)$, получим утверждение леммы. □

Случай оптимального комбинированного перестрахования при начальном капитале $-c \leq u < \min_{\Gamma_0} g(\beta, B)$.

Теорема 3.5. *Для* $-c \leq u < \min_{\Gamma_0} g(\beta, B)$ *верны следующие утверждения о минимальных ожидаемых издержках* $\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B)$ *и оптимальной стратегии перестрахования.*

1. *Если* $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) < 0$, *то*

   (i) *При* $c(1-k) < \mathbb{E}X$ *оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование. Издержки при этом равны*

   $$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = -u - kc.$$

   (ii) *При* $c(1-k) = \mathbb{E}X$ *оптимальной стратегией является передача всех рисков в квотное перестрахование или чисто квотное перестрахование с параметром* $\beta \in (0, \beta_u]$, *где* $\beta_u = \frac{-u-kc}{c(1-k)}$. *Издержки при этом равны*

   $$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = -u - kc.$$

   (iii) *При* $c(1-k) > \mathbb{E}X$ *наилучшей стратегией для страховщика с начальным капиталом* $u \in [-c, u_m]$ *является отказ от услуг перестраховщика, при этом минимальные издержки равны*

   $$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = \mathbb{E}(X - u - c)^+, \quad u \in [-c, u_m],$$

   а для страховщика с исходным капиталом $u \in [u_m, -kc)$ — *чисто квотное с параметром* $\beta_u^0 = \frac{u+kc}{u_m+kc}$ *и издержками*

   $$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = (-u - kc)\overline{F}(u_m + c), \quad u \in [u_m, \min_{\Gamma_0} g(\beta, B)],$$

   где u_m *- корень уравнения*

   $$\overline{F}(u + c)c(1-k) - \int_{u+c}^{\infty} x f(x)dx = 0.$$

2. *Если* $\frac{\partial c}{\partial \beta}(1, b_*) \geq 0$, *то* $c(1-k) \geq \mathbb{E}X$ *и* *наилучшей стратегией для страховщика с начальным капиталом* $u \in [-c, -c+b_*]$ *является отказ от перестрахования, минимальные издержки при этом равны*

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = \mathbb{E}\left(X - u - c\right)^+ .$$

Для страховщика с исходным капиталом $u \in [-c+b_*, -kc]$ *оптимальной стратегией является чисто эксцедентный договор перестрахования с уровнем собственного удержания* B_*, *где* B_* *— корень уравнения*

$$m\mathbb{E}(X - B)^+ = u + c - b_*.$$

Соответствующие минимальные издержки равны

$$\min_{\Gamma_0} H(u, \beta, B) = \frac{1}{m}\left(-u + g\left(1, b_*\right)\right).$$

Доказательство. Сравнивая минимальные значения функции $H(u, \beta, B)$ для областей Γ_u^l и Γ_u^m, найденные в леммах 3.6 и 3.9 , получаем утверждение теоремы. □

Замечание 11. *Теоремы 3.3 – 3.5 дают описание оптимальной стратегии комбинированного перестрахования и значение минимальных ожидаемых издержек для любого начального капитала компании. Примечательно то, что при различных условиях на коэффициенты нагрузки и распределение требований оптимальным поведением страховщика является заключение либо чисто эксцедентного договора, либо чисто квотного, либо вовсе отказ от перестрахования, но никогда комбинация двух договоров.*

Заключение

Для двух моделей функционирования страховой компании в дискретном времени найдены стратегии перестрахования, минимизирующие ожидаемые дисконтированные дополнительные издержки. Как для модели с вливанием капитала и перестрахованием, так и для модели с банковскими займами и перестрахованием оптимальные стратегии получены для одношагового и многошагового процессов. Оптимальное поведение установлено для страховых компаний с любым начальным значением капитала. Получены свойства оптимальных стратегий и соответствующих минимальных издержек. Проведена оценка чувствительности управляющих параметров модели к флуктуациям коэффициентов нагрузки на премии страховщика и перестраховщика.

Доказана устойчивость модели оптимального перестрахования по отношению к малым возмущениям распределения страховых требований. Получена асимптотическая оценка погрешности вычислений оптимальных параметров модели, возникающая в результате использования при расчетах эмпирической функции распределения требований вместо теоретической. Доказаны предельные теоремы для процесса капитала страховщика при константной стратегии перестрахования и теоретически определяемом распределении требований, а также при эмпирически определяемом распределении требований.

Исследована модель страхования, в которой помимо вливаний капитала используется комбинация пропорционального и непропорционального договоров перестрахования. Доказаны утверждения о свойствах выпуклости и экстремумах функций, характеризующих модель перестрахования. Найдена оптимальная стратегия перестрахования, минимизирующая ожидаемые дополнительные издержки. Доказано, что в зависимости от соотношения параметров распределения требований, премий страхования, нагрузочных коэффициентов на премии и величины комиссионных оптимальным поведением страховщика является заключение либо чисто квотного, либо чисто эксцедентного договора перестрахования, либо отказ от услуг перестраховщика.

Одно из возможных направлений для дальнейших исследований — поиск оптимальных с точки зрения и страховщика, и перестраховщика стратегий перестрахования. Также интерес представляет изучение устойчивости таких стратегий к изменению параметров, зависящих от ситуации на рынке страховых услуг.

Список литературы

[1] Беллман Р. (1960). *Динамическое программирование.* М.: Иностранная литература, 400 с.

[2] Булинская Е.В. (2003). *О стоимостном подходе в страховании.* Обозрение прикладной и промышленной математики, 10(2), с. 276–286.

[3] Булинская Е.В. (2001). *Теория риска и перестрахование, часть 1.* Изд-во мех-мат ф-та МГУ, Москва.

[4] Булинская Е.В. (2006). *Теория риска и перестрахование, часть 2.* Изд-во мех-мат ф-та МГУ, Москва.

[5] Галеев Э.М. (2013). *Оптимизация: Теория, примеры, задачи.* М.: Книжный дом «ЛИБРКОМ», 336 с.

[6] Голубев С.Д., Черная Л.А., Шухов А.Г. (2006). *Алгоритм вычисления сверток функций распределения высокого порядка в задачах имущественного страхования и перестрахования.* Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, серия «Естественные науки», 3(22), с. 106 – 119.

[7] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. (1976). *Элементы теории функций и функционального анализа.* Издательство «Наука», Москва.

[8] Соболь И.М. (1993). *Об оценке чувствительности в нелинейных математических моделях.* Математическое моделирование, 2(1), с. 407–414.

[9] Ширяев А.Н.(2007) *Вероятность-1.* Изд-во МЦНМО, Москва.

[10] Ширяев А.Н.(2007) *Вероятность-2.* Изд-во МЦНМО, Москва.

[11] Arrow K.J. (1963). *Uncertainty and the welfare of medical care.* The American Economic Review, Volume 53, Issue 5, pp. 941–973.

[12] Asmussen S., Albrecher H. (2010). *Ruin Probabilities.* World Scientific, 602 p.

[13] Beard R.E., Pentikainen T. and Pesonen E. (1977). *Risk Theory*, 2nd Edition. Chaman and Hall, London.

[14] Beveridge C.J., Dickson D.C.M. and Wu X. (2008). *Optimal Dividends under Reinsurance.* Mitteilungen der Schweiz Aktuarvereinigung, Heft 2008.

[15] Borch K. (1960). *An attempt to determine the optimum amount of stop loss reinsurance.* Transactions of the 16th International Congress of Actuaries, pp. 597–610.

[16] Bühlmann H. (1979). *Mathematical methods in risk theory.* Springer–Verlag, New York.

[17] Bulinskaya E. (2010). *Stochastic Insurance Models: Their Optimality and Stability.* Christos H. Skiadas, ed., Advances in Data Analysis. Birkhäuser, pp.129–140.

[18] Bulinskaya E.V., Gromov A. (2016). *Asymptotic Behavior of the Processes Describing Some Insurance Models.* Communications in Statistics – Theory and Methods, Volume 45, Issue 6, pp.1778–1793.

[19] Castañer A., Claramunt M.M., Gathy M., Lefèvre C. and Mármol M. (2013). *Ruin problems for a discrete-time risk model with non-homogeneous conditions.* Scandinavian Actuarial Journal, 2, pp. 83–102.

[20] Chan W., Zhang L. (2006). *Direct derivation of finite-time ruin probabilities in the discrete risk model with exponential or geometric claims.* North American Actuarial Journal, 10(4), pp. 269–279.

[21] Cramér H. (1930). *On the mathematical theory of risk, Försäkringsaktiebolaget.* Skandia, Stockholm, 2, pp. 7–84.

[22] de Finetti B. (1940). *Il problema dei "pieni".* Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 11, pp. 1–88.

[23] de Finetti B. (1957). *Su un' impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio.* Transactions of the XVth International Congress of Actuaries, 2, pp. 433–443.

[24] Diasparra M., Romera R. (2010). *Inequalities for the ruin probability in a controlled discrete-time risk process.* European Journal of Operational Research, 204, pp. 496–504.

[25] Dickson D.C.M., Waters H.R. (1991). *Recursive calculations of survival probabilities.* Astin Bulletin, 21(2), c. 199-221.

[26] Dickson D. C.M., Waters H.R. (2004). *Some optimal dividends problems.* Astin Bulletin, 34, pp. 49–74.

[27] Eisenberg J., Schmidli H. (2009). *Optimal control of capital injections by reinsurance in a diffusion approximation.* Blatter der DGVFM, 30(1), pp. 1–13.

[28] Gerber H.U. (1988). *Mathematical fun with compound binomial model.* Astin Bulletin, 18(2), c. 161-168.

[29] Gerber H.U., Shiu E.S.W. and Smith N. (2006). *Maximizing dividends without bankruptcy.* Astin Bulletin, 36, pp. 5–23.

[30] Fournier N., Guillin A. (2015). *On the rate of convergence in Wasserstein distance of the empirical measure.* Probability Theory and Related Fields, Volume 162, Issue 3, pp. 707–738.

[31] Irgens C., Paulsen J. (2005). *Maximizing terminal utility by controlling risk exposure: a discrete-time dynamic control approach.* Scandinavian Actuarial Journal, 2, pp. 269–279.

[32] Kaluszka M. (2001). *Optimal reinsurance under mean-variance premium principles.* Insurance: Mathematics and Economics, 28, pp. 61–67.

[33] Kaluszka M. (2005). *Optimal reinsurance under convex principles of premium calculation.* Insurance: Mathematics and Economics, 36, pp. 375–398.

[34] Kaluszka M., Okolewski A. (2008) *An extension of Arrow's result on optimal reinsurance contract.* The Journal of Risk and Insurance, Volume 75, Issue 2, pp. 275–288.

[35] Kulenko N., Schmidli H. (2008). *Optimal dividend strategies in a Cramer-Lundberg model with capital injections.* Insurance: Mathematics and Economics, 43, pp. 270–278.

[36] Li Sh., Lu Y. and Garrido J. (2009). *A review of discrete-time risk models.* Rev. R. Acad. Cien, Serie A. Mat., 103(2), pp. 321–337.

[37] Li Z.F., Cong J.F. (2008). *Necessary conditions of the optimal multi-period proportional reinsurance strategy.* Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 28(11), pp.1354–1362.

[38] Lundberg F. (1903). *Approximations of the probability function / Reinsurance of Collective Risks.* Doctoral thesis.

[39] Rachev S.T., Klebanov L., Stoyanov S.V. and Fabozzi F. (2013). *The Methods of Distances in the Theory of Probability and Statistics.* Springer-Verlag New York, 619 pages.

[40] Rachev S.T., Stoyanov S.V. and Frank J. (2008) *Advanced Stochastic Models, Risk Assessment and Portfolio Optimization.* John Wiley and Sons, Inc, 382 pages.

[41] Shmidli H. (2001). *On optimal reinsurance policies in a dynamic setting.* Scandinavian Actuarial Journal, 1, pp. 55–68.

[42] Serfling R.J.(1980). *Approximation theorems of mathematical statistics.* John Wiley and Sons, Inc., 371 pages.

[43] Shael M. (2004). *On discrete-time dynamic programming in insurance: exponential utility and minimizing the ruin probability.* Scandinavian Actuarial Journal, 3, pp. 189–210.

[44] Wang Sh. (1996). *Premium calculation by transforming the layer premium density.* Astin Bulletin, 26, pp. 71–92.

[45] Wei X., Hu Y. (2006). *Ruin probabilities for discrete-time risk models with stochastic rates of interest.* Stochastic and Probability Letters, 78, pp. 707–715.

[46] Young V.R. (1999) *Optimal insurance under Wang's premium principle.* Insurance: Mathematics and Economics, 25, pp. 109–122.

[47] Yang H., Gao W. and Li J. (2016). *Asymptotic ruin probabilities for a discrete-time risk model with dependent insurance and financial risks.* Scandinavian Actuarial Journal, 1, pp. 1–17.

Публикации автора

[48] Гусак Ю.В. (2017). *Об устойчивости решения в задаче оптимального перестрахования.* Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика. Механика. 2017, 2, с. 58 – 61.

[49] Bulinskaya E., Gusak J. (2016). *Optimal Control and Sensitivity Analysis for Two Risk Models.* Communications in Statistics - Simulation and Computation. Taylor & Francis. 45(5), pp. 1451–1466.

[50] Bulinskaya E., Gusak J. and Muromskaya A. (2015). *Discrete-time Insurance Model with Capital Injections and Reinsurance.* Methodology and Computing in Applied Probability. Springer US. 17(4), pp. 899–914.

[51] Gusak J.V. (2016). *Stability of the solution in the optimal reinsurance problem.* Moscow, MAKS Press. VIII Moscow International Conference on Operational Research, Proceedings, Volume 1, pp. 212–213.

[52] Гусак Ю.В.(2016). *Устойчивость решения задачи оптимизации в одной модели страхования.* Материалы Международной конференции по стохастическим методам в Абрау-Дюрсо, с. 57.

[53] Гусак Ю.В. (2016). *Устойчивость решения в задаче оптимального перестрахования.* Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов - 2016», с. 1. [Электронный ресурс].

[54] Gusak J. (2015). *Optimal combination of reinsurance treaties.* ISAST, 16th Conference of Applied Stochastic Models and Data Analysis International Society, Book of abstracts, pp. 66–67.

[55] Гусак Ю.В. (2015). *Оптимизация в случае комбинированного договора перестрахования.* Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов - 2015», с. 1. [Электронный ресурс].

[56] Гусак Ю.В. (2014). *Минимизация издержек в модели с банковскими займами и перестрахованием.* Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 21, в. 4, с. 352.

[57] Гусак Ю.В. (2014). *Оптимальное перестрахование в модели с банковскими займами.* Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов - 2014», с. 1. [Электронный ресурс].

[58] Гусак Ю.В. (2013). *Оптимальная стратегия перестрахования эксцедента убыточности.* Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов - 2013», с. 1. [Электронный ресурс].

[59] Гусак Ю.В. (2012). *Оптимальные стратегии перестрахования.* Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов - 2012», с. 1. [Электронный ресурс].