МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Дулина Ксения Михайловна

Асимптотическая классификация решений дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений
механико–математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Асташова Ирина Викторовна

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Морозов Альберт Дмитриевич, профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»,

доктор физико-математических наук, профессор
Щепакина Елена Анатольевна, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева».

Ведущая организация:
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Защита диссертации состоится «16» июня 2017 г. в 15^{00} на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП–1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8й этаж)
и на сайте механико-математического факультета:
http://mech.math.msu.ru/~snark/index.cgi.

Автореферат разослан « » мая 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физико–математических наук, профессор

Власов Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Диссертация является исследовательской работой в области качественной теории дифференциальных уравнений. В диссертации изучается асимптотическое поведение всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка при различных условиях на потенциал, зависящий от независимой и всех фазовых переменных.

Актуальность темы

Рассмотрим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + p(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)})\, |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad k > 0,\ k \neq 1. \tag{1}$$

Уравнение (1) является обобщением хорошо известного уравнения Эмдена–Фаулера

$$y'' + x^{\sigma}\, |y|^{k-1}\, y = 0, \tag{2}$$

имеющего ряд физических приложений. В астрофизике оно впервые появилось в работе Р. Эмдена[1] в виде уравнения, описывающего распределение плотности в политропной модели звезды по мере удаления от ее центра массы. Значительный вклад в изучение уравнения Эмдена и его обобщения внес Р. Фаулер[2]. В атомной физике уравнение (2) появилось в виде уравнения Томаса–Ферми[3,4], описывающего распределение электронов в тяжелом атоме.

Уравнению Эмдена–Фаулера и его обобщениям посвящено огромное количество работ, основной целью которых является изучение качественных свойств решений и исследование их асимптотического поведения. Вопросы продолжаемости или непродолжаемости, колеблемость, асимптотическое поведение решений уравнения (2) при различных значениях параметров σ, k подробно описаны в монографиях Р. Беллмана[5], Дж. Сансоне[6], Ф. Хартмана[7].

Важным вопросом качественной теории дифференциальных уравнений является вопрос колеблемости решений. Основополагающими исследованиями в теории колеблемости являются исследования А. Кнезера[8], Ф. Аткинсона[9]. Свойства колеблемости решений уравнения (2) и уравнений второго порядка более общего вида изучали S. Belohorec, И. Т. Кигурадзе, M. Jasny, J. Kurzweil, Z. Nehari, J. S. W. Wang, P. Waltman и другие.

Качественные и асимптотические свойства решений уравнения типа Эмдена–Фаулера высокого порядка (1) изучались в работах И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурии, В. А. Кондратьева,

---

[1] *Emden R.* Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Warmtheorie auf Kosmologie und meteorologische Probleme. Leipzig–Berlin: Teubner, 1907.

[2] *Fowler R. H.* Further studies of Emden's and similar differential equations // Quart. Journ. Math. 1931. V. 2. № 2. P. 259–288.

[3] *Thomas L. H.* The calculation of atomic fields // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1927. V. 23. P. 542–548.

[4] *Fermi E.* Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprieta dell'atomo // Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei. 1927. V. 6. P. 602–607.

[5] *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.

[6] *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1954. Т. 1, 2.

[7] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[8] *Kneser A. J.* Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen beigrosser reden // Wethen der Arguments, I. J. Reine und angew. Math. 1898. V. 116. P. 173–212.

[9] *Atkinson F. V.* On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math. 1955. V. 5. № 1. P. 643–647.

Н. А. Изобова, А. В. Костина, В. М. Евтухова, И. В. Асташовой, А. А. Конькова, В. А. Козлова, T. Kusano, M. Naito, M. Bartušek и многих других.

И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией[10] получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка

$$y'' + p(x)\ |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad k > 0,\ k \neq 1. \tag{3}$$

В частности, И. Т. Кигурадзе для непрерывной отрицательной функции $p(x)$ доказано, что существует решение с любой наперед заданной вертикальной асимптотой, и все решения с вертикальной асимптотой имеют степенную асимптотику.

Изучению поведения решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка также посвящена работа[11] В. А. Кондратьева и В. А. Никишкина. Авторами получена полная асимптотическая классификация положительных решений уравнения в случае регулярной нелинейности $k > 1$ и $p(x) < 0$. Функция $p(x)$ предполагается аналитической, что позволяет авторам получить классификацию с произвольным числом членов асимптотики.

M. Naito исследовалось асимптотическое поведение решений уравнения (3) с интегрируемым коэффициентом $p(x) > 0$. В работе[12] автором получены необходимые и достаточные условия существования решений, асимптотически эквивалентных линейной функции на бесконечности. В работе[13] для уравнения (1) n-го четного порядка исследован вопрос существования решений с заданным числом нулей на отрезке в случае непрерывной положительной на рассматриваемом отрезке функции $p = p(x)$.

T. Kusano, M. Naito, J. Manojlović[14] при $k > 1$ в терминах регулярной вариации и предположении, что $p(x)$ является непрерывной интегрируемой положительной функцией, получены достаточные условия существования решений уравнения (3). Применение теории регулярной вариации позволяет авторам определять точное асимптотическое поведение решений, также имеющих регулярную вариацию. T. Kusano, J. Manojlović[15] рассмотрено следующее обобщение уравнения (3):

$$y''(x) + q(x)\varphi(y(x)) = 0,$$

где $q(x)$, $\varphi(t)$ — непрерывные положительные функции регулярной вариации, кроме того, функция $\varphi(t)$ является возрастающей. Работа посвящена изучению вопроса существования и асимптотического поведения положительных решений рассматриваемого уравнения.

---

[10] *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.

[11] *Кондратьев В. А., Никишкин В. А.* О положительных решениях уравнения $y'' = p(x)\,y^k$ // В сб.: Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением. Саранск. 1980. С. 131–141.

[12] *Naito M.* Integral averages and the asymptotic behavior of solutions of second order ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1992. V. 164(2). P. 370–380.

[13] *Naito M.* On the number of bounded nonoscillatory solutions to higher-order nonlinear ordinary differential equations // Archivum Mathematicum. 2007. V. 43. P. 39–53.

[14] *Kusano T., Naito M., Manojlović J.* Asymptotic analysis of Emden–Fowler differential equations in the framework of regular variation // Annali di Matematica. 2011. V. 190. P. 619–644.

[15] *Kusano T., Manojlović J.* Asymptotic behavior of positive solutions of sublinear differential equations of Emden–Fowler type // Computers and Mathematics with Applications. 2011. V. 62. P. 551–565.

А. В. Костиным, В. М. Евтуховым также рассматривался более общий вид уравнения (3):

$$y'' = p(x)|y'|^{\lambda} y^{k},$$

где функция $p(x)$ непрерывна. В. М. Евтуховым[16] установлены асимптотические формулы решений уравнения при $\lambda \neq 1$ и $k + \lambda \neq 1$. Случай $k + \lambda = 1$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 2$ рассмотрен отдельно в работе[17]. В работе[18] автором исследуется асимптотическое поведение положительных решений уравнения, снимается ограничение на гладкость функции $p(x)$, она предполагается локально суммируемой. В. М. Евтуховым[19] при $p(x) < 0$ и $k > -1, \lambda < 1$ установлены достаточные условия колеблемости всех правильных решений, дополняющие классические результаты при $\lambda = 0$. В. М. Евтуховым были также рассмотрены некоторые классы дифференциальных уравнений второго порядка, правые части которых содержат нелинейности более общего вида, чем нелинейности уравнений типа Эмдена–Фаулера, например,

$$y'' = \alpha\, p(x)\, \varphi_0(y)\, \varphi_1(y'), \quad \alpha = \pm 1,$$

где $p(x) > 0$ — непрерывная функция, а φ_0, φ_1 — регулярно меняющиеся функции в смысле Караматы. Для рассматриваемых классов уравнений установлены условия существования некоторых типов решений уравнений, получено их асимптотическое представление.

И. Т. Кигурадзе[20] получены условия существования решений уравнения типа Эмдена–Фаулера высокого порядка (1), у которых $\lim\limits_{x \to a-0} |y'(x)| = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$. Оставался открытым вопрос, будет ли при этом решение также стремиться к бесконечности или может стремиться к конечному пределу при $x \to a - 0$, то есть вопрос различения двух случаев:

$$\lim_{x \to a-0} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \to a-0} |y(x)| = +\infty, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to a-0} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \to a-0} |y(x)| < +\infty. \tag{5}$$

В работе[16] В. М. Евтуховым получен ответ на этот вопрос.

Решения, обладающие свойством (5), также возникают в уравнениях вида:

$$(|y'|^{-\alpha})' + q(x)\,|y|^{\beta} = 0, \quad \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Изучением свойств решений уравнений такого вида в случае непрерывной и положительной

[16] *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. 1984. Т. 115. С. 215–236.

[17] *Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 5. С. 776–787.

[18] *Евтухов В. М.* Об асимптотике монотонных решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1076–1078.

[19] *Евтухов В. М.* Об условиях неколеблемости решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Математические заметки. 2000. Т. 67. № 2. С. 201–210.

[20] *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во Тбилисского университета, 1975.

функции $q(x)$ занимались J. Jaroš, T. Kusano[21]. Авторами доказано существование решений, обладающих свойством (5), и такие решения были названы *black hole* решениями.

M. Kitano и T. Kusano[22] рассмотрено уравнение более общего вида, чем (6):

$$(|y'|^{\alpha} \operatorname{sgn} y')' + q(x)|y|^{\beta} \operatorname{sgn} y = 0, \quad \alpha,\ \beta > 0,$$

где функция $q(x)$ является непрерывной и колеблющейся. Авторами исследованы вопросы глобального существования решений, поведения на бесконечности колеблющихся и неколеблющихся решений уравнения. Более общее квазилинейное уравнение

$$(p(x)|y'|^{\alpha} \operatorname{sgn} y')' + q(x)|y|^{\beta} \operatorname{sgn} y = 0 \tag{7}$$

при $\alpha,\ \beta > 0$ для непрерывных и положительных функций $p(x),\ q(x)$ рассмотрено M. Naito[23]. В этом случае получены необходимые и достаточные условия существования медленно растущих положительных решений, изучено асимптотическое поведение медленно растущих и медленно убывающих решений на бесконечности. При $\alpha,\ \beta > 1$ для непрерывной положительной функции $p(x)$ и непрерывной отрицательной функции $q(x)$ Z. Došlá, M. Cecchi, M. Marini[24] изучали вопросы существования и единственности решений уравнения (7), стремления решений к нулю на бесконечности, получены асимптотические оценки некоторых типов решений. Уравнение (7) в случае $\alpha < \beta$ рассмотрено Z. Došlá и M. Marini в работах[25,26], в которых авторы исследовали вопрос существования решений уравнения и изучали проблему одновременного существования нескольких типов решений. Уравнение (7) в случае $\alpha > \beta > 0$ рассмотрено J. Jaroš, T. Kusano, J. Manojlović в работе[27] в предположении, что $p(x),\ q(x)$ являются обобщенными функциями регулярной вариации. Авторами получены необходимые и достаточные условия существования решений, изучено асимптотическое поведение решений.

Асимптотические свойства решений следующего обобщения уравнения Эмдена–Фаулера:

$$(p(x)y'(x))' = p(x)\, f(y(x)),$$

при условиях, что функция $f(t)$ липшицева и имеет по крайней мере два нуля, функция $p(x)$ непрерывна на $[0,\ +\infty)$, имеет положительную производную на $(0,\ +\infty)$ и $p(0) = 0$, изучали

[21] *Jaroš J., Kusano T.* On black hole solutions of second order differential equations with a singular nonlinearity in the differential operator // Funkcialaj Ekvacioj. 2000. V. 43. № 5. P. 491–509.

[22] *Kitano M., Kusano T.* On a class of second order quasilinear ordinary differential equations // Hiroshima Math. J. 1995. V. 25. P. 321–355.

[23] *Naito M.* On the asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second order quasilinear ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 381. P. 315–327.

[24] *Došlá Z., Cecchi M., Marini M.* On the dynamics of the generalized Emden–Fowler equation // Georgian Mathematical Journal. 2000. V. 7. № 2. P. 269–282.

[25] *Došlá Z., Marini M.* On super-linear Emden–Fowler type differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 416. P. 497–510.

[26] *Došlá Z., Marini M.* A coexistence problem for nonoscillatory solutions to Emden–Fowler type differential equations // EPAM. 2016. V. 2. № 1. P. 87–104.

[27] *Jaroš J., Kusano T., Manojlović J.* Asymptotic analysis of positive solutions of generalized Emden–Fowler differential equations in the framework of regular variation // Cent. Eur. J. Math. 2013. № 11(12). P. 2215–2233.

I. Rachůnková, L. Rachůnek, J. Tomeček[28]. Авторами получены условия на функции $f(t)$, $p(x)$, обеспечиваюшие стремление колеблющихся решений к нулю на бесконечности.

В работе[29] J. Burkotová, M. Hubner, I. Rachůnková, E. B. Weinmüller рассмотрен более общий вид уравнения:

$$(p(x)y'(x))' + q(x)\, f(y(x)) = 0,$$

где f, p — функции регулярной вариации, и f имеет по крайней мере три нуля $f(L_0) = f(0) = f(L) = 0$, $L_0 < 0 < L$. Исследован вопрос существования *кнезеровских решений* (определение впервые введено И. Т. Кигурадзе[30]) рассматриваемого уравнения и изучено асимптотическое поведение кнезеровских решений и их первых производных на бесконечности.

Изучение вопроса существования, единственности решений краевых задач и их свойств также используется при исследовании качественных и асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, но оно выходит за рамки рассматриваемой в диссертации задачи. Различные методы решения краевых задач и исследования свойств решений представлены в работах И. Т. Кигурадзе, Б. Л. Шехтера, А. Г. Ломтатидзе, L. Malaguti, N. Partsvania, F. Sadyrbaev, I. Rachůnková и других.

Вернемся к уравнению типа Эмдена–Фаулера высокого порядка. В продолжение исследований И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурии, в работах И. В. Асташовой (см. обзор в монографии[31]) для уравнения (1) доказано существование знакопеременных решений, решений с вертикальной асимптотой, имеющих степенную асимптотику, а для уравнений четного порядка — кнезеровских решений, имеющих степенную асимптотику; для уравнений третьего и четвертого порядка подтверждена гипотеза И. Т. Кигурадзе о том, что все решения с вертикальной асимптотой имеют степенную асимптотику; для уравнений четвертого порядка — что все кнезеровские решения имеют степенную асимптотику; для уравнения третьего порядка доказана непрерывная зависимость положения асимптот от начальных условий решений, а также существование максимально продолженных решений с заданной областью определения; для уравнения третьего порядка получены равномерные оценки решений. Для квазилинейных уравнений n-го порядка ($n \geq 2$) доказано существование равномерных оценок положительных решений с общей областью определения, зависящих от оценок коэффициентов уравнений и не зависящих от самих коэффициентов; получен критерий колеблемости всех решений; описано асимптотическое поведение всех непродолжаемых решений квазилинейных уравнений второго порядка.

---

[28] *Rachůnková I., Rachůnek L., Tomeček J.* Existence of oscillatory solutions of singular nonlinear differential equations // Abstract and Applied Analysis. 2011. Article ID 408525. 20 pages.

[29] *Burkotová J., Hubner M., Rachůnková I., Weinmüller E. B.* Asymptotic properties of Kneser solutions to nonlinear second order ODEs with regularly varying coefficients // Applied Mathematics and Computation. 2016. V. 274. P. 65–82.

[30] *Kiguradze I. T.* On the oscilattory and monotone solutions of ordinary differential equations // Arch. Math. 1978. V. 14. № 1. P. 21–44.

[31] *Асташова И. В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание по ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.

Кроме того, в работах И. В. Асташовой[31,32,33,34] для $n = 3$, $p = p(x)$ и $n = 4$, $p \equiv p_0$ получена асимптотическая классификация решений уравнения (1) в случаях регулярной ($k > 1$) и сингулярной ($0 < k < 1$) нелинейности. Заметим, что в случае $0 < k < 1$ условия классической теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1) не выполняются. Тем не менее, справедливо следующее утверждение:

Теорема.[31] *Пусть функция $p\,(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ непрерывна по x и липшицева по $y_0, \ldots, y_{n-1}$. Тогда для любого набора чисел x_0, y_0, …, y^0_{n-1}, у которого не все y^0_i равны нулю, соответствующая задача Коши для уравнения* (1) *имеет единственное решение.*

В случае сингулярной нелинейности решения уравнения (1) могут иметь особое поведение не только вблизи границ, но и во внутренней точке области определения. Поэтому рассматриваются так называемые *μ–решения*, введенные И. В. Асташовой[33,35].

Определение 1. Решение обыкновенного дифференциального уравнения $y\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, называется *$\mu$–решением,* если:

1) уравнение не имеет других решений, равных y на некотором подынтервале $(a,\, b)$ и не равных y в некоторой точке из $(a,\, b)$;

2) уравнение либо не имеет решений, определенных на другом интервале, содержащем $(a,\, b)$, и равных y на $(a,\, b)$, либо имеет по крайней мере два таких решения, не равных друг другу в точках, сколь угодно близких к границе $(a,\, b)$.

Цель работы

Целью диссертационной работы является: получение полной асимптотической классификации максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера

$$y'' + p(x,\, y,\, y')\ |y|^k \operatorname{sgn} y = 0 \tag{8}$$

в случае регулярной нелинейности и μ-решений в случае сингулярной нелинейности с ограниченным и отделенным от нуля потенциалом $p(x,\, u,\, v)$; исследование асимптотического поведения решений в случае неограниченного и неотделенного от нуля потенциала.

Научная новизна работы

Задача асимптотической классификации, в которой потенциал может зависеть от независимой и всех фазовых переменных, для уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка ставится впервые. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные результаты состоят в следующем:

[32] *Асташова И. В.* Об асимптотической классификации решений нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. 2015. № 2(59). С. 3–25.

[33] *Astashova I. V.* On asymptotic classification of solutions to fourth-order differential equations with singular power nonlinearity // Mathematical Modelling and Analysis. 2016. V. 21. № 4. P. 502–521.

[34] *Astashova I. V.* On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. United States: New York. 2016. P. 185–197.

[35] *Асташова И. В.* Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 11. С. 1551–1552.

1. В случае регулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом. В частности, доказано: все нетривиальные решения определены или на полупрямой, или на конечном интервале, имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения; прямая, проходящая через конечную границу области определения, является вертикальной асимптотой решения, а на бесконечности все решения вместе с производной стремятся к нулю. Получены оценки расстояния до вертикальной асимптоты; показана непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных условий.

2. В случае сингулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех μ–решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом. В частности, доказано, что все μ–решения или определены на числовой прямой, или на полупрямой, имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения. При этом установлено, что все μ–решения имеют либо ровно один нуль, либо ровно один экстремум, либо вместе со своей производной стремятся к нулю в конечной граничной точке области определения со степенной асимптотикой; получены оценки расстояния до нуля, точки экстремума и граничной точки области определения; показана непрерывная зависимость положения нуля, точки экстремума, граничной точки области определения от начальных условий.

3. В случаях регулярной и сингулярной нелинейности установлено, что все максимально продолженные решения уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля положительным потенциалом являются колеблющимися вместе со своими первыми производными, причем нули решений и их первых производных чередуются. Получены достаточные условия, при которых решения определены на всей числовой прямой, исследовано асимптотическое поведение решений в случае выполнения или невыполнения этих достаточных условий.

4. В случаях регулярной и сингулярной нелинейности исследовано асимптотическое поведение решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка при различных условиях на неограниченный отрицательный потенциал: получены условия на потенциал, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения имеют вертикальную асимптоту, установлены достаточные условия на потенциал, при которых решения являются black hole решениями, и достаточные условия, при которых решения могут быть продолжены на всю числовую прямую.

Методы исследования

В диссертации используются методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа. В дополнение к классических методам в работе используются методы, разработанные И. В. Асташовой[31,36,37].

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация носит теоретический характер и может представлять интерес для специалистов в области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- межвузовский научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений МЭСИ, МГУ им. М. В. Ломоносова, МГТУ им. Н. Э. Баумана под руководством проф., д.ф.м.н. И. В. Асташовой, проф., д.ф.м.н. А. В. Филиновского, проф., к.ф.м.н. В. А. Никишкина (2013, 2014 гг.);
- научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф., д.ф.м.н. И. В. Асташовой, проф., д.ф.м.н. А. В. Боровских, проф., д.ф.м.н. Н. Х. Розова, проф., д.ф.м.н. И. Н. Сергеева (2015, 2016 гг.);
- межвузовский научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений РЭУ им. Г. В. Плеханова (факультет МЭСИ), МГУ им. М. В. Ломоносова, МГТУ им. Н. Э. Баумана под руководством проф., д.ф.м.н. И. В. Асташовой, проф., д.ф.м.н. А. В. Филиновского (2016 г.).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на следующих конференциях:

- Международная миниконференция ”Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения” Москва, МЭСИ, 22 июня и 19 декабря 2013 г., 24 мая 2014 г.
- Всероссийская научная конференция ”Понтрягинские чтения” в рамках Воронежской весенней математической школы ”Современные методы теории краевых задач”, Воронеж, ВГУ, 5–8 мая 2014 г., 3–9 мая 2015 г., 3–9 мая 2016 г.
- Международная математическая конференция ”Краевые задачи, теория функций и их применение”, Украина, Славянск, ДГПУ, 21–24 мая 2014 г.
- International Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Jasná, Slovak Republic, June 23–27, 2014.
- Международная научная конференция ”Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования”, Архангельск, САФУ, 16–21 ноября 2014 г.

[36] *Асташова И. В.* Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Известия РАН. 2008. Т. 72. № 6. С. 103–124.

[37] *Асташова И. В.* Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 8, С. 3–33.

- Международная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 13–17 апреля 2015 г., 11–15 апреля 2016 г.

- Всероссийская научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения – СамДиф 2015", Самара, СамГУ, 1–3 июля 2015 г.

- Международная конференция и молодежная школа "Информационные технологии и нанотехнологии" (ИТНТ-2015), Самара, СГАУ, 29 июня – 1 июля 2015 г.

- Международная миниконференция "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" Москва, РЭУ им. Г. В. Плеханова (факультет МЭСИ), 14, 28 мая 2016 г.

- V Международная школа-семинар "Нелинейный анализ и экстремальные задачи", Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 20–25 июня 2016 г.

- International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2016", Tbilisi, Georgia, December 24–26, 2016.

- Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems, Brno, Czech Republic, January 10–13, 2017.

Публикации

Основные результаты диссертации содержатся в работах [1] – [20]. Среди них 3 статьи в журналах из перечня ВАК: статьи [1], [2] входят в журналы из списка, рекомендованного ВАК, статья [3] входит в перечень ВАК согласно приказу Минобрнауки России № 793 от 25 июля 2014 г., как статья в журнале, входящем в международную реферативную базу данных и систем цитирования zbMATH. Работы [4] – [6] опубликованы в журнале «Дифференциальные уравнения» (Хроника «О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете»). Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего **110** наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет **116** страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** приводится краткий обзор исследований, посвященных изучению поведения решений уравнения Эмдена–Фаулера и его обобщений. Историческая справка подкрепляется ссылками на научные работы, приведенные в списке литературы. Объясняется актуальность темы исследований автора и научная новизна поставленной задачи. Кроме того, во введении представлены основные результаты диссертации, их нумерация совпадает с нумерацией в соответствующих главах.

В **первой** и **второй главах** рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка (8) с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом $p(x,\, u,\, v)$.

В **первой главе** в случае регулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения (8) при условии, что функция $p(x,\, u,\, v)$ отрицательна, ограничена и отделена от нуля. В этом случае для удобства перепишем уравнение (8) в виде

$$y'' = p(x,\, y,\, y')\ |y|^k \operatorname{sgn} y \tag{9}$$

и будем далее предполагать, что функция $p(x,\, u,\, v)$ положительна.

В **первом параграфе первой главы** с использованием методов, изложенных в работах[31,36] И. В. Асташовой, установлено, что все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (9) определены или на полупрямой, или на конечном интервале. При этом прямая, проходящая через конечную границу области определения, является вертикальной асимптотой решения, а на бесконечности все решения стремятся к нулю вместе с производной. Получены оценки расстояния до вертикальной асимптоты; показана непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных условий.

Теорема 1.1. *Пусть $k > 1$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам*

$$0 < m \le p(x,\, u,\, v) \le M < +\infty. \tag{10}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, y_0 и y_1 неотрицательны и не равны нулю одновременно, z_0 и z_1 неотрицательны и не равны нулю одновременно, решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения (9) с начальными условиями

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} z(\tilde{x}_0) = z_0, \\ z'(\tilde{x}_0) = z_1, \end{cases}$$

соответственно имеют вертикальные асимптоты $x = x_1^* > x_0$ и $x = x_2^* > \tilde{x}_0$ соответственно, причем $|x_2^* - x_1^*| < \varepsilon$.

Во **втором параграфе первой главы** приводится асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения (9). Для формулировки основного результата главы понадобится ряд определений и обозначений.

Определение 2. Решение уравнения (9) называется *положительным кнезеровским на интервале* $(x_0,\, +\infty)$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$ при $x > x_0$.

Определение 3. Решение уравнения (9) называется *положительным кнезеровским на интервале* $(-\infty,\, x_0)$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$ при $x < x_0$.

Определение 4. Решение уравнения (9) называется *отрицательным кнезеровским на интервале* $(x_0,\, +\infty)$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$ при $x > x_0$.

Определение 5. Решение уравнения (9) называется *отрицательным кнезеровским на интервале* $(-\infty,\, x_0)$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) < 0$, $y'(x) < 0$ при $x < x_0$.

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{2}{k-1}, \quad C(\tilde{p}) = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{\tilde{p}(k-1)^2}{2(k+1)}\right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

Теорема 1.2. *Пусть $k > 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам (10) и имеет следующие пределы:*

1) P_+ при $x \to +\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$;

2) P_- при $x \to -\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$;

а также, при любом $c \in \mathbb{R}$,

3) P_c^+ при $x \to c$, $u \to +\infty$, $v \to \pm\infty$;

4) P_c^- при $x \to c$, $u \to -\infty$, $v \to \pm\infty$.

Тогда все максимально продолженные решения уравнения (9) в соответствии со своим асимптотическим поведением делятся на следующие девять типов:

0. Заданное на всей числовой прямой тривиальное решение $y_0(x) \equiv 0$.

1-2. Заданные на $(b, +\infty)$ положительные и отрицательные кнезеровские решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_1(x) = C(P_b^+)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b+0, \quad y_1(x) = C(P_+)x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to +\infty,$$

и

$$y_2(x) = -C(P_b^-)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b+0, \quad y_2(x) = -C(P_+)x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to +\infty.$$

3-4. Заданные на $(-\infty, a)$ положительные и отрицательные кнезеровские решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_3(x) = C(P_a^+)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to a-0, \quad y_3(x) = C(P_-)|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to -\infty,$$

и

$$y_4(x) = -C(P_a^-)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to a-0, \quad y_4(x) = -C(P_-)|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to -\infty.$$

5-6. Заданные на (a, b) знакопостоянные решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_5(x) = C(P_a^+)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to a+0, \quad y_5(x) = C(P_b^+)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b-0,$$

и

$$y_6(x) = -C(P_a^-)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to a+0,\ y_6(x) = -C(P_b^-)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b-0.$$

7-8. Заданные на (a, b) решения со степенной асимптотикой и разными знаками вблизи *обеих границ области определения:*

$$y_7(x) = C(P_a^+)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to a+0,\ y_7(x) = -C(P_b^-)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b-0,$$

и

$$y_8(x) = -C(P_a^-)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to a+0,\ y_8(x) = C(P_b^+)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b-0.$$

Во **второй главе** в случае сингулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех μ–решений уравнения (9) при условии, что функция $p(x,\, u,\, v)$ положительна, ограничена и отделена снизу от нуля. В **первом параграфе второй главы** установлено, что все μ–решения имеют либо ровно один нуль, либо ровно один экстремум, либо вместе со своей производной стремятся к нулю в конечной граничной точке области определения, получены оценки расстояния до нуля, точки экстремума и граничной точки области определения соответственно, показана непрерывная зависимость положения нуля, точки экстремума, граничной точки области определения от начальных условий.

Теорема 2.1. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (10)*. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 > 0$ и $y_1 < 0$, $z_0 > 0$ и $z_1 < 0$, для решений $y(x)$ и $z(x)$ уравнения* (9) *с начальными условиями*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} z(x_0) = z_0, \\ z'(x_0) = z_1, \end{cases}$$

соответственно, у которых соответственно существуют $\lim\limits_{x \to x_1^* - 0} y^{(i)}(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_2^* - 0} z^{(i)}(x) = 0$, $i \in \{0,\, 1\}$, $x_0 < x_1^* < +\infty$, $x_0 < x_2^* < +\infty$, справедливо $|x_2^* - x_1^*| < \varepsilon$.

Во **втором параграфе второй главы** приводится асимптотическая классификация всех μ–решений уравнения (9).

Теорема 2.2. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (10) *и имеет следующие пределы:*

1) P_{++} при $x \to +\infty$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$;

2) P_{+-} при $x \to +\infty$, $u \to -\infty$, $v \to -\infty$;

3) P_{-+} при $x \to -\infty$, $u \to +\infty$, $v \to -\infty$;

4) P_{--} при $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$;

а также, при любом $c \in \mathbb{R}$, обозначим $P_c = p(c,\, 0,\, 0)$.

Тогда все μ–решения уравнения (9) *в соответствии со своим асимптотическим поведением делятся на следующие восемь типов:*

1-2. Заданные на полупрямой $(b,\, +\infty)$ положительные и отрицательные стремящиеся к нулю вместе со своей первой производной при $x \to b+0$ решения со степенной асимпто-

тикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_1(x) = C(P_b)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b+0, \quad y_1(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to +\infty,$$

и

$$y_2(x) = -C(P_b)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b+0, \quad y_2(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to +\infty.$$

3-4. Заданные на полупрямой $(-\infty,\, a)$ положительные и отрицательные стремящиеся к нулю вместе со своей первой производной при $x \to a-0$ решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_3(x) = C(P_a)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to a-0, \quad y_3(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to -\infty,$$

и

$$y_4(x) = -C(P_a)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to a-0, \quad y_4(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to -\infty.$$

5-6. Заданные на всей числовой прямой знакопостоянные решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_5(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to +\infty, \quad y_5(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to -\infty,$$

и

$$y_6(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to +\infty, \quad y_6(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to -\infty.$$

7-8. Заданные на всей числовой прямой решения со степенной асимптотикой и разными знаками вблизи обеих границ области определения:

$$y_7(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to +\infty, \quad y_7(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to -\infty,$$

и

$$y_8(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to +\infty, \quad y_8(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to -\infty.$$

В **третьей главе** рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка (8) с ограниченным и отделенным от нуля положительным потенциалом $p(x,\, u,\, v)$.

В **первом параграфе третьей главы** показано, что все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (8) и их первые производные при выполнении условия (10) являются колеблющимися, причем нули решений и их первых производных чередуются; получены оценки отношения значений первых производных в последовательных нулях, оценки отношения значений решений в последовательных точках экстремума.

Теорема 3.1. *Пусть $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (10)*. Тогда все нетривиальные максимально продолженные решения $y(x)$ уравнения* (8)*, как и их первые производные, являются колеблющимися при возрастании и при убывании аргумента, причем нули x_j решения и нули x'_j его первой производной чередуются, то есть*

$$\ldots < x_{j-1} < x'_j < x_j < x'_{j+1} < \ldots, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Кроме того, для любого $j \in \mathbb{Z}$ справедливы неравенства:

$$-\sqrt{\frac{M}{m}} \le \frac{y'(x_{j+1})}{y'(x_j)} \le -\sqrt{\frac{m}{M}}, \qquad -\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}} \le \frac{y\left(x'_{j+1}\right)}{y\left(x'_j\right)} \le -\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Во **втором параграфе третьей главы** исследуется асимптотическое поведение максимально продолженных решений уравнения (8).

Теорема 3.2. *Пусть $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (10)*, кроме того, равномерно по u, v стремится к $p_+ > 0$ при $x \to +\infty$ и к $p_- > 0$ при $x \to -\infty$.*

Пусть $y(x)$ — нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (8)*, у которого существуют конечные положительные пределы $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y'(x_j)|$. Тогда $y(x)$ определено на всей числовой прямой, и при $j \to \pm\infty$ справедливы соотношения:*

1) $\frac{y'(x_{j+1})}{y'(x_j)} \to -1$;

2) $\frac{y(x'_{j+1})}{y(x'_j)} \to -1$;

3) $\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}} \to 1$.

Известно[10], что если функция $p = p(x) > 0$ является локально интегрируемой и функцией локально ограниченной вариации, то в случаях регулярной и сингулярной нелинейности любое максимально продолженное вправо решение уравнения (8) является *правильным*, то есть определено в окрестности $+\infty$. В настоящей главе построен пример непрерывной функции $p = p(x) > 0$, для которой в случае регулярной нелинейности существует решение, имеющее резонансную асимптоту $x = x^*$ $\left(\overline{\lim\limits_{x\to x^*}}\, |y(x)| = +\infty\right)$, то есть не являющееся правильным.

Кроме того, получены достаточные условия на $p = p(x)$, при которых решения определены на всей числовой прямой, исследовано их асимптотическое поведение в случае выполнения или невыполнения этих достаточных условий.

Теорема 3.3. *Пусть $k > 1$, функция $p = p(x)$ непрерывна, является функцией глобально ограниченной вариации и удовлетворяет неравенствам* (10)*. Тогда для любого максимально продолженного решения $y(x)$ уравнения* (8) *существуют конечные положительные пределы $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y'(x_j)|$, $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y(x'_j)|$ и $\lim\limits_{j\to\pm\infty} (x_{j+1} - x_j)$.*

Также построен пример непрерывной функции $p = p(x) > 0$, для которой существует неограниченное решение уравнения (8), определенное на всей числовой прямой, и пример непрерывной функции $p = p(x) > 0$, для которой существует нетривиальное правильное колеблющееся решение, стремящееся вместе со своей производной к нулю на бесконечности.

В **четвертой главе** в случаях регулярной и сингулярной нелинейности изучается асимптотическое поведение решений уравнения (9) с неограниченной сверху и неотделенной снизу от нуля положительной функцией $p(x, u, v)$. Получены условия существования вертикальной асимптоты у всех нетривиальных максимально продолженных решений. Кроме того, получены достаточные условия, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (9) обладают свойством (5), то есть являются black hole решениями, и условия, при которых решения могут быть продолжены на всю числовую прямую.

Лемма 4.1. *Пусть $k > 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и отделена снизу от нуля, а нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения* (9) *в некоторой точке x_0 удовлетворяет условию $y(x_0)\, y'(x_0) \ge 0$ или $y(x_0)\, y'(x_0) \le 0$. Тогда для некоторого $x^* \in (x_0, +\infty)$ или, соответственно, $x_* \in (-\infty, x_0)$ выполнено равенство*

$$\lim_{x \to x^*-0} |y'(x)| = +\infty \quad \text{или, соответственно,} \quad \lim_{x \to x_*+0} |y'(x)| = +\infty. \tag{11}$$

Лемма 4.2. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, кроме того, $p(x,u,v)/|v|$ при $v \ne 0$ отделена снизу от нуля, а нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения* (9) *в некоторой точке x_0 удовлетворяет условию $y(x_0)\, y'(x_0) \ge 0$ или $y(x_0)\, y'(x_0) \le 0$, но не $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Тогда для некоторого $x^* \in (x_0, +\infty)$ или, соответственно, $x_* \in (-\infty, x_0)$ выполнено равенство* (11).

Теорема 4.1. *Пусть $k \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, для некоторых u_0, $v_0 > 0$ функция $p(x, u, v)$ при $u > u_0$, $v > v_0$ представима в виде $h(u)g(v)$, где функции $h(u)$, $g(v)$ непрерывны и отделены снизу от нуля, а в случае $0 < k < 1$ функция $p(x, u, v)$ еще и удовлетворяет условиям леммы 4.2. Тогда для любого максимально продолженного вправо решения $y(x)$ уравнения* (9) *с начальными условиями $y(x_0) \ge u_0$, $y'(x_0) \ge v_0$ и первым из условий* (11) *прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой тогда и только тогда, когда*

$$\int_{v_0}^{+\infty} \frac{v\, dv}{g(v)} = +\infty. \tag{12}$$

Теорема 4.2. *Пусть в случае $k > 1$ или $0 < k < 1$ функция $p(x, u, v)$ удовлетворяет условиям леммы 4.1 или 4.2 соответственно, причем для некоторых u_0, $v_0 > 0$ при $u > u_0$, $v > v_0$ справедливо неравенство $p(x,u,v) \le f(x, u)\, g(v)$, где функция $f(x, u)$ непрерывна по совокупности переменных, а функция $g(v)$ непрерывна, отделена снизу от нуля и удовлетворяет условию* (12). *Тогда для любого максимально продолженного вправо решения $y(x)$ уравнения* (9) *с начальными условиями $y(x_0) \ge u_0$, $y'(x_0) \ge v_0$ и первым из условий* (11) *прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой.*

Теорема 4.3. *Пусть в случае $k > 1$ или $0 < k < 1$ функция $p(x, u, v)$ удовлетворяет условиям леммы 4.1 или 4.2 соответственно, причем для некоторых u_0, $v_0 > 0$ при $u > u_0$, $v > v_0$ справедливо неравенство $p(x,u,v) \ge g(v)$, где функция $g(v)$ непрерывна, отделена* *снизу от нуля, и условие* (12) *не выполнено. Тогда для любого максимально продолженного вправо решения* $y(x)$ *уравнения* (9) *с начальными условиями* $y(x_0) \geq u_0,\ y'(x_0) \geq v_0$ *и первым из условий* (11) *выполнены соотношения:*

$$0 < \lim_{x \to x^* - 0} y(x) < +\infty, \quad x^* - x_0 < \frac{1}{y^k(x_0)} \int\limits_{y'(x_0)}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)}.$$

Теорема 4.4. *Пусть* $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$*, функция* $p(x,\, u,\, v)$ *положительна, непрерывна по* x *и липшицева по* $u,\ v$*, и для некоторых* $u_0,\ v_0,\ C > 0,\ \alpha > k - 1$ *при* $u > u_0, v > v_0$ *справедливо неравенство* $p(x, u, v) \leq C|v|^{-\alpha}$*. Тогда любое решение* $y(x)$ *уравнения* (9) *с начальными условиями* $y(x_0) \geq u_0$ *и* $y'(x_0) \geq v_0$ *неограниченно продолжается вправо и*

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} y'(x) = +\infty.$$

Заключение

В диссертационной работе исследовано асимптотическое поведение решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка при различных условиях на потенциал, зависящий от независимой и всех фазовых переменных.

В случае регулярной нелинейности получена полная асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом. В частности, доказано, что все нетривиальные решения определены или на полупрямой, или на конечном интервале и имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения. При этом прямая, проходящая через конечную границу области определения, является вертикальной асимптотой решения, а на бесконечности все решения вместе с производной стремятся к нулю. Получены оценки расстояния до вертикальной асимптоты; показана непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных условий.

В случае сингулярной нелинейности решения уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка могут иметь особое поведение не только вблизи границ, но и во внутренней точке области определения, поэтому рассматриваются μ–решения. В терминах μ–решений получена полная асимптотическая классификация решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом: в частности, доказано, что все μ–решения или определены на всей числовой прямой, или на полупрямой и имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения. При этом установлено, что все μ–решения имеют либо ровно один нуль, либо ровно один экстремум, либо вместе со своей производной стремятся к нулю в конечной граничной точке области определения со степенной асимптотикой; получены оценки расстояния до нуля, точки экстремума и граничной точки области определения; показана непрерывная зависимость положения нуля, точки экстремума, граничной точки области определения от начальных условий.

В случаях регулярной и сингулярной нелинейности для решений уравнения типа Эмдена–

Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля положительным потенциалом установлено, что все максимально продолженные решения уравнения и их первые производные являются колеблющимися, причем нули решений и их первых производных чередуются. Получены достаточные условия, при которых решения определены на всей числовой прямой, исследовано их асимптотическое поведение в случае выполнения или невыполнения этих достаточных условий. Построены примеры непрерывных положительных потенциалов, для которых соответственно существует решение, имеющее резонансную асимптоту, существует неограниченное решение, определенное на всей числовой прямой, и существует нетривиальное колеблющееся решение, определенное на всей числовой прямой, стремящееся вместе со своей первой производной к нулю на бесконечности.

Кроме того, в случаях регулярной и сингулярной нелинейности исследовано асимптотическое поведение решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка при различных условиях на неограниченный отрицательный потенциал. Разграничены случаи поведения решений уравнения типа Эмдена–Фаулера при условии, что производная решений стремится к бесконечности в конечной граничной точке области определения: получены условия на потенциал, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения имеют вертикальную асимптоту, установлены достаточные условия на потенциал, при которых решения являются black hole решениями (производная решения стремится к бесконечности на границе области определения, а решение в этой точке имеет конечный предел). Получены достаточные условия продолжаемости решений на всю числовую прямую.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с изучением асимптотического поведения решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с неограниченным и неотделенным от нуля потенциалом. Большой интерес представляет изучение свойств решений при отрицательном показателе нелинейности.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Асташовой Ирине Викторовне за постановку задачи, ее обсуждение, полезные советы, конструктивную критику и постоянную поддержку. Автор выражает благодарность своему соавтору, студентке 6-го курса механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, Корчемкиной Татьяне Александровне и сотрудникам кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за внимание к работе и ценные замечания.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах из перечня ВАК

[1] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2015. Т. 128. № 6. С. 50–56 (Дулиной К. М. принадлежат теоремы 2.1 и 2.2, Корчемкиной Т. А. принадлежит техническая часть).

[2] Дулина К. М. Об асимптотическом поведении решений с бесконечной производной регулярных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2016. Т. 26. № 2. С. 207–214.

[3] Dulina K. M. On asymptotic behavior of solutions to the second-order Emden–Fowler type differential equations with unbounded negative potential // Functional differential equations. 2016. № 23(1–2). P. 3–8. (Zbl 066766676)

Статьи в хронике «О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете» журнала «Дифференциальные уравнения»

[4] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О классификации решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 6. С. 830–832 (Дулиной К. М. принадлежит теорема 2, Корчемкиной Т. А. принадлежит теорема 1).

[5] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с положительным потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1547–1548 (Дулиной К. М. принадлежат лемма, теоремы 1 и 2, Корчемкиной Т. А. принадлежит следствие).

[6] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с неограниченным потенциалом в случаях регулярной и сингулярной нелинейности // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1574–1576 (Дулиной К. М. принадлежат леммы 1 и 2, теоремы 1, 4 и 5, Корчемкиной Т. А. принадлежат теоремы 2 и 3).

Статьи в других научных журналах и тезисы докладов в материалах научных конференций

[7] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Об асимптотической классификации решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Сборник материалов международной научной конференции "Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования". Архангельск, САФУ. 16–21 ноября 2014. С. 467–471, ISBN 978-5-261-00990-0 (Дулиной К. М. принадлежат теоремы 1 и 3, Корчемкиной Т. А. принадлежит теорема 2).

[8] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О существования решений с заданной областью определения уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Сборник трудов Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" (22 июня и 19 декабря 2013 г., 24 мая 2014 г.). М.: МЭСИ. 2014. С. 19–28, ISBN 978-5-7764-0983-7 (Дулиной К. М. принадлежат результаты, представленные в разделе 1, Корчемкиной Т. А. принадлежит теорема 2, представленная в разделе 2).

[9] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Сборник трудов международной конференции и молодежной школы "Информационные технологии и нанотехнологии" (ИТНТ-2015). СГАУ, Самара: Самарский научный центр РАН. 2015. С. 45–46, ISBN 978-5-93424-739-4 (Дулиной К. М. принадлежит теорема 2. Корчемкиной Т. А. принадлежит техническая часть).

[10] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О колеблемости решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с положительным потенциалом // Современные проблемы математики и механики. Математика. К 80-летию механико-математического факультета. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 9. Вып. 3. С. 88–97 (Дулиной К. М. принадлежат результаты, представленные в разделе 2; леммы 2 и 3, теорема 2 из раздела 3, Корчемкиной Т. А. принадлежат следствия 1 и 2 из раздела 3).

[11] Dulina K. and Korchemkina T. On asymptotic behavior of solutions to second-order regular and singular Emden–Fowler type differential equations with negative potential // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2016". Tbilisi, Georgia. December 24–26, 2016. P. 71–76, E ISSN 1512-3391 (Дулиной К. М. принадлежат теоремы 2.1, 2.2, леммы 3.1, 3.2, теоремы 3.1, 3.4, 3.5, Корчемкиной Т. А. принадлежат теоремы 3.2, 3.3).

[12] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Существование решения с заданной областью определения уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка // Материалы Всероссийской научной конференции "Понтрягинские чтения – XXV" в рамках XXV Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач". Воронеж. 3–8 мая 2014 г. Доп. выпуск. С. 4–5 (Дулиной К. М. принадлежит часть доказательства теоремы 1, в которой устанавливается, что все решения имеют вертикальную асимптоту и доказательство непрерывной зависимости положения асимптоты от начальных условий, Корчемкиной Т. А. принадлежит та часть доказательства теоремы 1, в которой доказывается существование решений с наперед заданным положением вертикальной асимптоты).

[13] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Классификация решений уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка // Материалы международной математической конференции "Краевые задачи, теория функций и их применение". Украина, Славянск. 21–24 мая 2014 г. С. 30–31 (Дулиной К. М. принадлежит теорема 2, Корчемкиной Т. А. принадлежит теорема 1).

[14] Dulina K., Korchemkina T. On classification of solutions to Emden-Fowler type second-order differential equations // Abstracts of International Conference on Differential and Difference Equations and Applications. Jasná, Slovak Republic. June 23–27, 2014. P. 21–22 (Дулиной К. М. принадлежит теорема 1, Корчемкиной Т. А. принадлежит доказательство существования решений с заданной областью определения).

[15] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О колеблемости решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с положительным потенциалом // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2015" [Электронный ресурс]. М.: МАКС Пресс. 2015. С. 1–2, ISBN 978-5-317-04946-1 (Дулиной К. М. принадлежат теоремы 1 и 2, Корчемкиной Т. А. принадлежит замечание).

[16] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Материалы Всероссийской научной конференции "Понтрягинские чтения – XXVI" в рамках XXVI Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач". Воронеж. 3–9 мая 2015 г. С. 86 (Дулиной К. М. принадлежат теоремы 1 и 2, Корчемкиной Т. А. принадлежит следствие).

[17] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений с бесконечной производной уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2016" [Электронный ресурс]. М.: МАКС Пресс. 2016. С. 1–2, ISBN 978-5-317-05237-9 (Дулиной К. М. принадлежат лемма 1, теорема 1 и доказательство первого утверждения теоремы 2, Корчемкиной Т. А. принадлежат оценки в теореме 2).

[18] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с неограниченным отрицательным потенциалом // Материалы Всероссийской научной конференции "Понтрягинские чтения – XXVII" в рамках XXVII Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач". Воронеж. 3–9 мая 2016 г. С. 89–91 (Дулиной К. М. принадлежат лемма 1, теоремы 1, 2 и 3, Корчемкиной Т. А. принадлежат примеры 1, 2).

[19] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Тезисы V Международной школы-семинара "Нелинейный анализ и экстремальные задачи". Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 20–25 июня 2016 г. С. 19–20 (Дулиной К. М. принадлежат лемма 1, теоремы 1 и 4, Корчемкиной Т. А. принадлежат теоремы 2 и 3).

[20] Dulina K., Korchemkina T. On oscillation of solutions to second-order Emden–Fowler type differential equations with positive potential // Abstracts of Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems. Brno, Czech Republic. January 10–13, 2017. P. 1–2 (Дулиной К. М. принадлежат леммы 1 и 2, теоремы 1 и 2, Корчемкиной Т. А. принадлежит замечание 1).