МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Дулина Ксения Михайловна

Асимптотическая классификация решений дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Асташова Ирина Викторовна

Москва – 2017

Оглавление

Введение 3

1 Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным ограниченным потенциалом в случае регулярной нелинейности 25

1.1 Существование решений с заданной областью определения 25

1.2 Асимптотическое поведение решений 36

2 Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным ограниченным потенциалом в случае сингулярной нелинейности 48

2.1 Качественные свойства решений 49

2.2 Асимптотическое поведение решений 55

3 О колеблемости решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным положительным потенциалом в случаях регулярной и сингулярной нелинейности 64

3.1 Качественные свойства решений 64

3.2 Асимптотическое поведение решений 74

4 Асимптотическое поведение решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с неограниченным отрицательным потенциалом в случаях регулярной и сингулярной нелинейности 93

Заключение. 103

Список литературы. 105

Введение

Диссертация подготовлена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Представленная работа является исследованием в области качественной теории дифференциальных уравнений. В диссертации рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка, изучается асимптотическое поведение всех максимально продолженных решений уравнения при различных условиях на потенциал, зависящий от независимой и всех фазовых переменных.

Актуальность темы

Рассмотрим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + p(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)})\, |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad k > 0,\ k \neq 1. \tag{0.1}$$

Уравнение (0.1) является обобщением хорошо известного уравнения Эмдена–Фаулера

$$y'' + x^{\sigma}\, |y|^{k-1}\, y = 0, \tag{0.2}$$

имеющего ряд физических приложений. В астрофизике оно впервые появилось в 1907 году в работе Р. Эмдена [54] в виде уравнения, описывающего распределение плотности в политропной модели звезды по мере удаления от ее центра массы. Значительный вклад в изучение уравнения Эмдена и его обобщения внес Р. Фаулер [86]. В атомной физике уравнение (0.2) появилось в виде уравнения Томаса–Ферми [84, 85], описывающего распределение электронов в тяжелом атоме.

Уравнению Эмдена–Фаулера и его обобщениям посвящено огромное количество работ, основной целью которых является изучение качественных свойств решений и исследование их асимптотического поведения. Так, вопросы продолжаемости или непродолжаемости, колеблемость, асимптотическое поведение решений уравнения (0.2) при различных значениях параметров уравнения σ, k

подробно описаны в монографиях Р. Беллмана [7], Дж. Сансоне [32], Ф. Хартмана [34].

Существенный вклад в развитие асимптотической теории нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка внесли И. Т. Кигурадзе [19], Я. А. Беклемишева [6], А. В. Костин [29], В. М. Евтухов [8].

Важным вопросом качественной теории дифференциальных уравнений является вопрос колеблемости решений. Основополагающими исследованиями в теории колеблемости являются исследования А. Кнезера [62], Ф. Аткинсона [44]. Ф. Аткинсон доказал критерий колеблемости всех решений уравнения $y''+f(x)y^{2k-1}=0$, $k>1$, $k\in\mathbb{Z}$, где $f(x)$ — непрерывная положительная функция при $x\geq 0$. Свойства колеблемости решений уравнения Эмдена–Фаулера и нелинейных уравнений более общего вида

$$y''+f(x)g(y)=0,\quad y''+h(x,y)=0$$

изучали S. Belohorec [47], И. Т. Кигурадзе [16], M. Jasny [55], J. Kurzweil [64], Z. Nehari [78], J. W. Masci, J. S. B. Wang [72, 88, 89], P. Waltman [87] и другие.

Качественные и асимптотические свойства решений уравнения типа Эмдена–Фаулера высокого порядка (0.1) приведены в монографии И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурии [22], в работах И. В. Асташовой [3, 39, 40, 41], В. А. Кондратьева и В. С. Самовола [24], Н. А. Изобова [14], В. А. Козлова [63], А. А. Конькова [26], T. Kusano, M. Naito [65], M. Bartušek [45, 46] и многих других.

Отметим работы И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурии [17, 18, 19, 35, 36], позднее собранные в § 20 пятой главы монографии [22]. Авторами изучено поведение решений и получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка

$$y''+p(x)\ |y|^k\operatorname{sgn}y=0,\quad k>0,\ k\neq 1. \tag{0.3}$$

В частности, И. Т. Кигурадзе для непрерывной отрицательной функции $p(x)$ доказано, что существует решение с любой наперед заданной вертикальной асимптотой, и все решения с вертикальной асимптотой имеют степенную асимптотику.

Изучению поведения решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка также посвящены работы В. А. Кондратьева и В. А. Никишкина [23, 25]. В работе [23] получена полная асимптотическая классификация положительных решений уравнения в случае регулярной нелинейности $k > 1$ с отрицательной функцией $p(x)$. Функция $p(x)$ предполагается аналитической, что позволяет авторам получить классификацию с произвольным числом членов асимптотики.

M. Naito исследовалось асимптотическое поведение решений уравнения (0.3) с интегрируемым коэффициентом $p(x) > 0$. В работе [75] автором получены необходимые и достаточные условия существования решений, асимптотически эквивалентных линейной функции на бесконечности. В работах [76] и [77] для рассматриваемого уравнения типа Эмдена–Фаулера n-го четного порядка исследован вопрос существования решений с заданным числом нулей на отрезке в случае непрерывной положительной на рассматриваемом отрезке функции $p = p(x)$.

T. Kusano, M. Naito, J. Manojlović в работе [69] в терминах регулярной вариации в случае регулярной нелинейности $k > 1$ и предположении, что $p(x)$ является непрерывной интегрируемой положительной функцией, получены достаточные условия существования решений уравнения (0.3). Применение теории регулярной вариации [59] позволяет авторам определять точное асимптотическое поведение решений, также имеющих регулярную вариацию.

В работе T. Kusano, J. Manojlović [68] рассмотрено следующее обобщение уравнения (0.3):

$$y''(x) + q(x)\varphi(y(x)) = 0,$$

где $q(x)$, $\varphi(t)$ — непрерывные положительные функции регулярной вариации, кроме того, функция $\varphi(t)$ является возрастающей. Работа посвящена изучению вопроса существования и асимптотического поведения положительных решений рассматриваемого уравнения.

А. В. Костиным [8, 29], В. М. Евтуховым [9, 10, 11] также рассматривался более общий вид уравнения (0.3):

$$y'' = p(x)|y'|^{\lambda} y^k,$$

где функция $p(x)$ непрерывна. В работе [10] В. М. Евтуховым установлены асимптотические формулы решений уравнения при $\lambda \neq 1$ и $k + \lambda \neq 1$. Случай $k + \lambda = 1$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 2$ рассмотрен отдельно в работе [11]. В работе [12] автором также исследуется асимптотическое поведение положительных решений уравнения, снимается ограничение на гладкость функции $p(x)$, она предполагается локально суммируемой. В. М. Евтуховым в [13] при $p(x) < 0$ и $k > -1, \lambda < 1$ установлены достаточные условия колеблемости всех правильных решений, дополняющие классические результаты при $\lambda = 0$.

В. М. Евтуховым были также рассмотрены некоторые классы дифференциальных уравнений второго порядка, правые части которых содержат нелинейности более общего вида, чем нелинейности уравнений типа Эмдена–Фаулера, например,

$$y'' = \alpha\, p(x)\, \varphi_0(y)\, \varphi_1(y'), \quad \alpha = \pm 1,$$

где $p(x) > 0$ — непрерывная функция, а φ_0, φ_1 — регулярно меняющиеся функции в смысле Караматы [59]. Для рассматриваемых классов уравнений установлены условия существования некоторых типов решений уравнений, получено их асимптотическое представление.

И. Т. Кигурадзе в монографии [20] получены условия существования решений уравнения типа Эмдена–Фаулера высокого порядка (0.1), у которых $\lim\limits_{x\to a-0} |y'(x)| = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$. Оставался открытым вопрос, будет ли при этом решение также стремиться к бесконечности или может стремиться к конечному пределу при $x \to a-0$, то есть вопрос различения двух случаев:

$$\lim_{x\to a-0} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x\to a-0} |y(x)| = +\infty, \tag{0.4}$$

$$\lim_{x\to a-0} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x\to a-0} |y(x)| < +\infty. \tag{0.5}$$

В работе В. М. Евтухова [10] получен ответ на этот вопрос.

Решения, обладающие свойством (0.5), также возникают в уравнениях вида:

$$(|y'|^{-\alpha})' + q(x)\,|y|^{\beta} = 0, \quad \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{0.6}$$

Изучением свойств решений уравнений такого вида в случае непрерывной и положительной функции $q(x)$ занимались J. Jaroš, T. Kusano, M. Naito в работах [56, 67]. Авторами доказано существование решений, обладающих свойством (0.5), и такие решения были названы *black hole* решениями. В работе J. Jaroš и T. Kusano [57] был рассмотрен и случай $\alpha < 0$, при котором уравнение (0.6) является обобщением уравнения типа Эмдена–Фаулера (0.3). В этом случае не существуют black hole решения, но существуют решения, обладающие свойством

$$\lim_{x \to a-0} y(x) = \text{const} \neq 0, \quad \lim_{x \to a-0} y'(x) = 0,$$

названные авторами в дальнейшем *white hole* решениями. Сингулярный случай $\beta < 0$ также исследовался в работах S. Taliaferro [83], И. Т. Кигурадзе, Б. Л. Шехтера [21], В. М. Евтухова [12], T. Kusano, T. Tanigawa [66] и многих других.

M. Kitano и T. Kusano в работе [60] рассмотрено уравнение более общего вида, чем (0.6):

$$(|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' + q(x)|y|^\beta \operatorname{sgn} y = 0, \quad \alpha,\ \beta > 0,$$

где функция $q(x)$ является непрерывной и колеблющейся. Авторами исследованы вопросы глобального существования решений, поведения на бесконечности колеблющихся и неколеблющихся решений уравнения.

Более общее квазилинейное уравнение

$$(p(x)|y'|^\alpha \operatorname{sgn} y')' + q(x)|y|^\beta \operatorname{sgn} y = 0, \tag{0.7}$$

при α, $\beta > 0$ для непрерывных и положительных функций $p(x)$, $q(x)$ рассмотрено M. Naito в работе [74]. В этом случае получены необходимые и достаточные условия существования медленно растущих положительных решений, изучено асимптотическое поведение медленно растущих и медленно убывающих решений на бесконечности.

При α, $\beta > 1$ для непрерывной положительной функции $p(x)$ и непрерывной отрицательной функции $q(x)$ в работе Z. Došlá, M. Cecchi, M. Marini [50] изучались вопросы существования и единственности решений рассматриваемого уравнения, стремления решений к нулю на бесконечности, получены асимптотические оценки некоторых типов решений.

Уравнение (0.7) в случае $\alpha < \beta$ рассмотрено Z. Došlá и M. Marini в работах [51, 52, 53], в которых авторы исследовали вопрос существования решений уравнения и изучали проблему одновременного существования нескольких типов решений.

Уравнение (0.7) в случае $\alpha > \beta > 0$ рассмотрено в работе J. Jaroš,

T. Kusano, J. Manojlović [58] в предположении, что $p(t)$, $q(t)$ являются обобщенными функциями регулярной вариации. Авторами получены необходимые и достаточные условия существования решений, изучено асимптотическое поведение решений на бесконечности.

I. Rachůnková, L. Rachůnek, J. Tomeček в работе [82] изучали асимптотические свойства решений следующего обобщения уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка:

$$(p(x)y'(x))' = p(x)\, f(y(x)),$$

при условиях, что функция $f(t)$ липшицева и имеет по крайней мере два нуля, функция $p(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, имеет положительную производную на $(0, +\infty)$ и $p(0) = 0$. Авторами получены условия на функции $f(t)$, $p(x)$, обеспечиваюшие стремление колеблющихся решений к нулю на бесконечности.

В работе J. Burkotová, M. Hubner, I. Rachůnková, E. B. Weinmüller [49] рассмотрен более общий вид уравнения:

$$(p(x)y'(x))' + q(x)\, f(y(x)) = 0,$$

где f, p — функции регулярной вариации, и f имеет по крайней мере три нуля $f(L_0) = f(0) = f(L) = 0$, $L_0 < 0 < L$. Исследован вопрос существования *кнезеровских решений* (определение впервые введено И. Т. Кигурадзе [61]) рассматриваемого уравнения и изучено асимптотическое поведение кнезеровских решений и их первых производных на бесконечности.

Изучение вопроса существования, единственности решений краевых задач и их свойств также используется при исследовании качественных и асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [27], но оно выходит за рамки рассматриваемой в диссертации задачи. Различные методы решения краевых задач и исследования свойств решений представлены в работах И. Т. Кигурадзе [20], Б. Л. Шехтера [21], А. Г. Ломтатидзе [30], L. Malaguti, [70], C. Marcelli [71], N. Partsvania [79, 80], F. Sadyrbaev [33], I. Yermachenko [90], I. Rachůnková [81] и других.

Вернемся к уравнению типа Эмдена–Фаулера высокого порядка. В продолжение исследований И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурии, в работах И. В. Асташовой (см. обзор в монографии [3]) для уравнения типа Эмдена–Фаулера высокого порядка (0.1) доказано существование знакопеременных решений, решений с вертикальной асимптотой, имеющих степенную асимптотику, а для уравнений четного порядка — кнезеровских решений, имеющих степенную асимптотику; для уравнений третьего и четвертого порядка подтверждена гипотеза И. Т. Кигурадзе о том, что все решения с вертикальной асимптотой имеют степенную асимптотику; для уравнений четвертого порядка — что все кнезеровские решения имеют степенную асимптотику; для уравнения третьего порядка доказана непрерывная зависимость положения асимптот от начальных условий решений, а также существование максимально продолженных решений с заданной областью определения; для уравнения третьего порядка получены равномерные оценки решений. Для квазилинейных уравнений n-го порядка ($n \geq 2$) в работах [2, 37] доказано существование равномерных оценок положительных решений с общей областью определения, зависящих от оценок коэффициентов уравнений и не зависящих от самих коэффициентов; получен критерий колеблемости всех решений. В работе [38] описано асимптотическое поведение всех непродолжаемых решений квазилинейных уравнений второго порядка.

Кроме того, в работах И. В. Асташовой [3, 5, 42, 43] для $n = 3$, $p = p(x)$ и $n = 4$, $p \equiv p_0$ соответственно получена асимптотическая классификация решений уравнения (0.1) в случаях регулярной ($k > 1$) и сингулярной ($0 < k < 1$) нелинейности.

Заметим, что в случае $0 < k < 1$ условия классической теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (0.1) не выполняются. Тем не менее, справедливо следующее утверждение:

Теорема. [3] *Пусть функция $p\,(x,\, y_0, \ldots,\, y_{n-1})$ непрерывна по x и липшицева по $y_0,\, \ldots,\, y_{n-1}$. Тогда для любого набора чисел $x_0,\, y_0,\, \ldots,\, y^0_{n-1}$, у которого не все y^0_i равны нулю, соответствующая задача Коши для уравнения* (0.1) *имеет единственное решение.*

В случае сингулярной нелинейности решения уравнения (0.1) могут иметь особое поведение не только вблизи границ, но и во внутренней точке области определения. Поэтому рассматриваются так называемые *μ–решения*, введенные И. В. Асташовой (см. [4, 42]).

Определение 0.1. Решение обыкновенного дифференциального уравнения $y\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, называется *$\mu$–решением,* если:

1) уравнение не имеет других решений, равных y на некотором подынтер-

вале $(a,\, b)$ и не равных y в некоторой точке из $(a,\, b)$;

2) уравнение либо не имеет решений, определенных на другом интервале, содержащем $(a,\, b)$, и равных y на $(a,\, b)$, либо имеет по крайней мере два таких решения, не равных друг другу в точках, сколь угодно близких к границе $(a,\, b)$.

Введение понятия μ–решений позволяет в дальнейшем привести полную асимптотическую классификацию решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка в случае сингулярной нелинейности.

Задача, рассматриваемая в диссертации

В диссертации рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка

$$y'' + p(x,\, y,\, y')\ |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \tag{0.8}$$

где $k > 0$, $k \neq 1$, функция $p(x,\, u,\, v)$ определена на $\mathbb{R}^3$, знакопостоянна, непрерывна по x и липшицева по u, v.

Цель работы

Получить полную асимптотическую классификацию максимально продолженных решений уравнения (0.8) в случае регулярной нелинейности $(k > 1)$ и μ–решений в случае сингулярной нелинейности $(0 < k < 1)$ с ограниченным и отделенным от нуля потенциалом $p(x,\, u,\, v)$, зависящим от независимой и всех фазовых переменных, и исследовать асимптотическое поведение решений уравнения (0.8) в случае неограниченного потенциала.

Методы исследования

В диссертации используются методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа. В дополнение к классических методам в работе используются методы, разработанные И. В. Асташовой (см. [1, 2, 3]).

Научная новизна

Задача асимптотической классификации, в которой потенциал может зависеть от независимой и всех фазовых переменных, для уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка ставится впервые. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные результаты состоят в следующем:

1. В случае регулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом. В частности, доказано, что все нетривиальные решения определены или на полупрямой, или на конечном интервале и имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения. При этом прямая, проходящая через конечную границу области определения является вертикальной асимптотой решения, а на бесконечности все решения стремятся к нулю вместе с производной. Получены оценки расстояния до вертикальной асимптоты; показана непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных условий.

2. В случае сингулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех μ–решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом: в частности, доказано, что все μ–решения или определены на всей числовой прямой, или на полупрямой и имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения. При этом установлено, что все μ–решения имеют либо ровно один нуль, либо ровно один экстремум, либо вместе со своей производной стремятся к нулю в конечной граничной точке области определения со степенной асимптотикой; получены оценки расстояния до нуля, точки экстремума и граничной точки области определения соответственно; показана непрерывная зависимость положения нуля, точки экстремума, граничной точки области определения от начальных условий.

3. В случаях регулярной и сингулярной нелинейности установлено, что все максимально продолженные решения уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка и их первые производные с ограниченным и отделенным от нуля положительным потенциалом являются колеблющимися, причем нули решений и их первых производных чередуются, и получены достаточные условия, при которых решения определены на всей числовой прямой, исследовано их асимптотическое поведение в случае выполнения или невыполнения этих достаточных условий.

4. В случаях регулярной и сингулярной нелинейности исследовано асимптотическое поведение решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго поряд-

ка при различных условиях на неограниченный отрицательный потенциал: получены условия на потенциал, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка имеют вертикальную асимптоту, установлены достаточные условия на потенциал, при которых решения являются black hole решениями, и достаточные условия, при которых решения могут быть продолжены на всю числовую прямую.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер и может представлять интерес для специалистов в области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Результаты работы обсуждались и докладывались на следующих научных семинарах:

- межвузовский научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений МЭСИ, МГУ им. М. В. Ломоносова, МГТУ им. Н. Э. Баумана под руководством проф., д.ф.м.н. И. В. Асташовой, проф., д.ф.м.н. А. В. Филиновского, проф., к.ф.м.н. В. А. Никишкина (2013, 2014 гг.);
- научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф., д.ф.м.н. И. В. Асташовой, проф., д.ф.м.н. А. В. Боровских, проф., д.ф.м.н. Н. Х. Розова, проф., д.ф.м.н. И. Н. Сергеева (2015, 2016 гг.);
- межвузовский научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений РЭУ им. Г. В. Плеханова (факультет МЭСИ), МГУ им. М. В. Ломоносова, МГТУ им. Н. Э. Баумана под руководством проф., д.ф.м.н. И. В. Асташовой, проф., д.ф.м.н. А. В. Филиновского (2016 г.).

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Международная миниконференция ”Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения” Москва, МЭСИ, 22 июня и 19 декабря 2013 г., 24 мая 2014 г.

- Всероссийская научная конференция ”Понтрягинские чтения” в рамках Воронежской весенней математической школы ”Современные методы теории краевых задач”, Воронеж, ВГУ, 5–8 мая 2014 г., 3–9 мая 2015 г., 3–9 мая 2016 г.

- Международная математическая конференция ”Краевые задачи, теория функций и их применение”, Украина, Славянск, ДГПУ, 21–24 мая 2014 г.

- International Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Jasná, Slovak Republic, June 23–27, 2014.

- Международная научная конференция ”Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования”, Архангельск, САФУ, 16–21 ноября 2014 г.

- Международная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых ”Ломоносов”, Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 13–17 апреля 2015 г., 11–15 апреля 2016 г.

- Всероссийская научная конференция ”Дифференциальные уравнения и их приложения – СамДиф 2015”, Самара, СамГУ, 1–3 июля 2015 г.

- Международная конференция и молодежная школа ”Информационные технологии и нанотехнологии” (ИТНТ-2015), Самара, СГАУ, 29 июня – 1 июля 2015 г.

- Международная миниконференция ”Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения” Москва, РЭУ им. Г. В. Плеханова (факультет МЭСИ), 14, 28 мая 2016 г.

- V Международная школа-семинар ”Нелинейный анализ и экстремальные задачи”, Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 20–25 июня 2016 г.

- International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations ”QUALITDE – 2016”, Tbilisi, Georgia, December 24–26, 2016.

- Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems, Brno, Czech Republic, January 10–13, 2017.

Публикации автора

Результаты диссертации опубликованы в **20** работах, в том числе **11** статей, **3** из которых опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК, **3** работы опубликованы в журнале "Дифференциальные уравнения" (Хроника "О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете"), и **9** тезисов докладов. Их список приведен в конце диссертации.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего **110** наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет **116** страниц.

Краткое изложение содержания работы

Во **введении** приводится краткий обзор исследований, посвященных изучению поведения решений уравнения типа Эмдена–Фаулера и его обобщений. Историческая справка подкрепляется ссылками на научные работы, приведенные в списке литературы. Объясняется актуальность темы исследований автора и научная новизна поставленной задачи. Кроме того, во введении представлены основные результаты диссертации, их нумерация совпадает с нумерацией в соответствующих главах.

В **первой, второй** и **третьей главах** рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка (0.8) с ограниченным и отделенным от нуля потенциалом $p(x,\, u,\, v)$.

В **первой главе** в случае регулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения (0.8) при условии, что функция $p(x,\, u,\, v)$ отрицательна, ограничена и отделена от нуля.

В этом случае для удобства перепишем уравнение (0.8) в виде

$$y'' = p(x,\, y,\, y')\ |y|^k \operatorname{sgn} y \tag{0.9}$$

и будем далее предполагать, что функция $p(x,\, u,\, v)$ положительна.

В **первом параграфе первой главы** с использованием методов, изложенных в работах И. В. Асташовой [2] и [3], установлено, что все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (0.9) определены или на полупрямой, или на конечном интервале. При этом прямая, проходящая через конечную границу области определения является вертикальной асимптотой решения, а на бесконечности все решения стремятся к нулю вместе с производной. Получены оценки расстояния до вертикальной асимптоты; показана непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных условий.

Теорема 1.1. *Пусть $k > 1$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам*

$$0 < m \le p(x,\, u,\, v) \le M < +\infty. \tag{0.10}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, y_0 и y_1 неотрицательны и не равны нулю одновременно, z_0 и z_1 неотрицательны и не равны нулю одновременно, решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения (0.9) с начальными условиями

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(\tilde{x}_0) = z_0, \\ z'(\tilde{x}_0) = z_1, \end{cases}$$

соответственно имеют вертикальные асимптоты $x = x_1^* > x_0$ и $x = x_2^* > \tilde{x}_0$ соответственно, причем $|x_2^* - x_1^*| < \varepsilon$.

Во **втором параграфе первой главы** приводится асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения (0.9).

Для формулировки основного результата главы понадобится ряд определений и обозначений.

Определение 0.2. Решение уравнения (0.9) называется *положительным кнезеровским на интервале* $(x_0,\, +\infty)$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$ при $x > x_0$.

Определение 0.3. Решение уравнения (0.9) называется *положительным кнезеровским на интервале* $(-\infty,\, x_0)$, если оно удовлетворяет условиям

$y(x) > 0$, $y'(x) > 0$ при $x < x_0$.

Определение 0.4. Решение уравнения (0.9) называется *отрицательным кнезеровским на интервале* $(x_0, +\infty)$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$ при $x > x_0$.

Определение 0.5. Решение уравнения (0.9) называется *отрицательным кнезеровским на интервале* $(-\infty, x_0)$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) < 0$, $y'(x) < 0$ при $x < x_0$.

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{2}{k-1}, \quad C(\tilde{p}) = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{\tilde{p}(k-1)^2}{2(k+1)}\right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

Теорема 1.2. *Пусть* $k > 1$, *функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v, *удовлетворяет неравенствам* (0.10) *и имеет следующие пределы:*

1) P_+ *при* $x \to +\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$;

2) P_- *при* $x \to -\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$;

а также, при любом $c \in \mathbb{R}$,

3) P_c^+ *при* $x \to c$, $u \to +\infty$, $v \to \pm\infty$;

4) P_c^- *при* $x \to c$, $u \to -\infty$, $v \to \pm\infty$.

Тогда все максимально продолженные решения уравнения (0.9) *в соответствии со своим асимптотическим поведением делятся на следующие девять типов:*

0. Заданное на всей числовой прямой тривиальное решение $y_0(x) \equiv 0$.

1-2. Заданные на $(b, +\infty)$ *положительные и отрицательные кнезеровские решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:*

$$y_1(x) = C(P_b^+)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b+0,$$

$$y_1(x) = C(P_+)x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to +\infty,$$

и

$$y_2(x) = -C(P_b^-)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b+0,$$

$$y_2(x) = -C(P_+)x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to +\infty.$$

3-4. Заданные на $(-\infty, a)$ *положительные и отрицательные кнезеровские решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области опре-*

деления:

$$y_3(x) = C(P_a^+)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to a-0,$$

$$y_3(x) = C(P_-)|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to -\infty,$$

и

$$y_4(x) = -C(P_a^-)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to a-0,$$

$$y_4(x) = -C(P_-)|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\quad x\to -\infty.$$

5-6. Заданные на $(a,\,b)$ *знакопостоянные решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:*

$$y_5(x) = C(P_a^+)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to a+0,$$

$$y_5(x) = C(P_b^+)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to b-0,$$

и

$$y_6(x) = -C(P_a^-)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to a+0,$$

$$y_6(x) = -C(P_b^-)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to b-0.$$

7-8. Заданные на $(a,\,b)$ *решения со степенной асимптотикой и разными знаками вблизи обеих границ области определения:*

$$y_7(x) = C(P_a^+)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to a+0,$$

$$y_7(x) = -C(P_b^-)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to b-0,$$

и

$$y_8(x) = -C(P_a^-)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to a+0,$$

$$y_8(x) = C(P_b^+)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to b-0.$$

Во **второй главе** в случае сингулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех μ–решений уравнения (0.9) при условии, что функция $p(x,\,u,\,v)$ положительна, ограничена и отделена снизу от нуля.

В **первом параграфе второй главы** установлено, что все μ–решения имеют либо ровно один нуль, либо ровно один экстремум, либо вместе со своей производной стремятся к нулю в конечной граничной точке области определения, получены оценки расстояния до нуля, точки экстремума и граничной точки области определения соответственно, показана непрерывная зависимость положения нуля, точки экстремума, граничной точки области определения от начальных условий.

Теорема 2.1. *Пусть* $0 < k < 1$, *функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v *и удовлетворяет неравенствам* (0.10). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любых* y_0, z_0, y_1, z_1 *таких, что* $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 > 0$ *и* $y_1 < 0$, $z_0 > 0$ *и* $z_1 < 0$, *для решений* $y(x)$ *и* $z(x)$ *уравнения* (0.9) *с начальными условиями*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(x_0) = z_0, \\ z'(x_0) = z_1, \end{cases}$$

соответственно, у которых соответственно существуют $\lim\limits_{x \to x_1^* - 0} y^{(i)}(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x \to x_2^* - 0} z^{(i)}(x) = 0$, $i \in \{0, 1\}$, $x_0 < x_1^* < +\infty$, $x_0 < x_2^* < +\infty$, *справедливо* $|x_2^* - x_1^*| < \varepsilon$.

Во **втором параграфе второй главы** приводится асимптотическая классификация всех μ–решений уравнения (0.9).

Теорема 2.2. *Пусть* $0 < k < 1$, *функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v, *удовлетворяет неравенствам* (0.10) *и имеет следующие пределы:*

1) P_{++} *при* $x \to +\infty$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$;

2) P_{+-} *при* $x \to +\infty$, $u \to -\infty$, $v \to -\infty$;

3) P_{-+} *при* $x \to -\infty$, $u \to +\infty$, $v \to -\infty$;

4) P_{--} *при* $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$;

а также, при любом $c \in \mathbb{R}$, *обозначим* $P_c = p(c, 0, 0)$.

Тогда все μ*–решения уравнения* (0.9) *в соответствии со своим асимптотическим поведением делятся на следующие восемь типов:*

1-2. Заданные на полупрямой $(b, +\infty)$ *положительные и отрицательные стремящиеся к нулю вместе со своей первой производной при* $x \to b + 0$ *решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определе-*

ния:

$$y_1(x) = C(P_b)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to b+0,$$

$$y_1(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty,$$

и

$$y_2(x) = -C(P_b)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to b+0,$$

$$y_2(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty.$$

3-4. Заданные на полупрямой $(-\infty, a)$ положительные и отрицательные стремящиеся к нулю вместе со своей первой производной при $x \to a-0$ решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_3(x) = C(P_a)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to a-0,$$

$$y_3(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to -\infty,$$

и

$$y_4(x) = -C(P_a)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to a-0,$$

$$y_4(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to -\infty.$$

5-6. Заданные на всей числовой прямой знакопостоянные решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_5(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty,$$

$$y_5(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to -\infty,$$

и

$$y_6(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty,$$

$$y_6(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to -\infty.$$

7-8. Заданные на всей числовой прямой решения со степенной асимптотикой и разными знаками вблизи обеих границ области определения:

$$y_7(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty,$$

$$y_7(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to -\infty,$$

и

$$y_8(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\left(1+o(1)\right), \quad x \to +\infty,$$

$$y_8(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\left(1+o(1)\right), \quad x \to -\infty.$$

В **третьей главе** рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка (0.8) с положительным потенциалом $p(x,\, u,\, v)$.

В **первом параграфе третьей главы** показано, что все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (0.8) и их первые производные при выполнении условия (0.10) являются колеблющимися, причем нули решений и их первых производных чередуются; получены оценки отношения значений первых производных в последовательных нулях, оценки отношения значений решений в последовательных точках экстремума.

Теорема 3.1. *Пусть $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (0.10). *Тогда все нетривиальные максимально продолженные решения $y(x)$ уравнения* (0.8)*, как и их первые производные, являются колеблющимися при возрастании и при убывании аргумента, причем нули x_j решения и нули x'_j его первой производной чередуются, то есть*

$$\ldots < x_{j-1} < x'_j < x_j < x'_{j+1} < \ldots, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Кроме того, для любого $j \in \mathbb{Z}$ справедливы неравенства:

$$-\sqrt{\frac{M}{m}} \le \frac{y'\left(x_{j+1}\right)}{y'\left(x_j\right)} \le -\sqrt{\frac{m}{M}},$$

$$-\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}} \le \frac{y\left(x'_{j+1}\right)}{y\left(x'_j\right)} \le -\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Во **втором параграфе третьей главы** исследуется асимптотическое поведение максимально продолженных решений уравнения (0.8).

Теорема 3.2. *Пусть $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (0.10)*, кроме того, равномерно по u, v стремится к $p_+ > 0$ при $x \to +\infty$ и к $p_- > 0$ при $x \to -\infty$.*

Пусть $y(x)$ — нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (0.8), *у которого существуют конечные положительные пределы* $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y'(x_j)|$. *Тогда $y(x)$ определено на всей числовой прямой, и при $j \to \pm\infty$ справедливы соотношения:*

1) $\frac{y'(x_{j+1})}{y'(x_j)} \to -1$;

2) $\frac{y(x'_{j+1})}{y(x'_j)} \to -1$;

3) $\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}} \to 1$.

Известно [22], что если функция $p = p(x)$ является положительной, локально интегрируемой и функцией локально ограниченной вариации, то в случаях регулярной и сингулярной нелинейности любое максимально продолженное вправо решение уравнения (0.8) является правильным, то есть определено в окрестности $+\infty$. В настоящей главе построен пример непрерывной положительной функции $p = p(x)$, для которой в случае регулярной нелинейности существует решение, имеющее резонансную асимптоту $x = x^*$ $\left(\overline{\lim\limits_{x\to x^*}}\, y(x) = +\infty\right)$, то есть не являющееся правильным.

Кроме того, получены достаточны условия на $p = p(x)$, при которых решения определены на всей числовой прямой, исследовано их асимптотическое поведение в случае выполнения или невыполнения этих достаточных условий.

Теорема 3.3. *Пусть $k > 1$, функция $p = p(x)$ непрерывна, является функцией глобально ограниченной вариации и удовлетворяет неравенствам* (0.10). *Тогда для любого максимально продолженного решения $y(x)$ уравнения* (0.8) *существуют конечные положительные пределы* $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y'(x_j)|$, $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y(x'_j)|$ *и* $\lim\limits_{j\to\pm\infty} (x_{j+1} - x_j)$.

Также построен пример непрерывного положительного потенциала $p = p(x)$, для которого существует неограниченное решение уравнения (0.8), определенное на всей числовой прямой, и пример непрерывного положительного потенциала $p = p(x)$, для которого существует нетривиальное правильное колеблющееся решение, стремящееся вместе со своей первой производной к нулю на бесконечности.

В **четвертой главе** в случаях регулярной и сингулярной нелинейности изучается асимптотическое поведение решений уравнения (0.9) с неограниченной сверху и неотделенной снизу от нуля положительной функцией $p(x, u, v)$.

Получены условия существования вертикальной асимптоты у всех нетривиальных максимально продолженных решений. Кроме того, получены достаточные условия, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (0.9) обладают свойством (0.5), то есть являются black hole решениями, и условия, при которых решения могут быть продолжены на всю числовую прямую.

Установлены следующие результаты.

Лемма 4.1. *Пусть $k > 1$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и отделена снизу от нуля, а нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения (0.9) в некоторой точке x_0 удовлетворяет условию $y(x_0)\, y'(x_0) \geq 0$ или $y(x_0)\, y'(x_0) \leq 0$. Тогда для некоторого $x^* \in (x_0,\, +\infty)$ или, соответственно, $x_* \in (-\infty,\, x_0)$ выполнено равенство*

$$\lim_{x\to x^*-0} |y'(x)| = +\infty \quad \text{или, соответственно,} \quad \lim_{x\to x_*+0} |y'(x)| = +\infty. \tag{0.11}$$

Лемма 4.2. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, кроме того, $p(x,u,v)/|v|$ при $v \neq 0$ отделена снизу от нуля, а нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения (0.9) в некоторой точке x_0 удовлетворяет условию $y(x_0)\, y'(x_0) \geq 0$ или $y(x_0)\, y'(x_0) \leq 0$, но не $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Тогда для некоторого $x^* \in (x_0,\, +\infty)$ или, соответственно, $x_* \in (-\infty,\, x_0)$ выполнено равенство (0.11).*

Теорема 4.1. *Пусть $k \in (0,\, 1)\cup(1,\, +\infty)$, для некоторых $u_0,\, v_0 > 0$ функция $p(x,\, u,\, v)$ при $u > u_0,\;\; v > v_0$ представима в виде $h(u)g(v)$, где функции $h(u)$, $g(v)$ непрерывны и отделены снизу от нуля, а в случае $0 < k < 1$ функция $p(x,\, u,\, v)$ еще и удовлетворяет условиям леммы 4.2. Тогда для любого максимально продолженного вправо решения $y(x)$ уравнения (0.9) с начальными условиями $y(x_0) \geq u_0,\;\; y'(x_0) \geq v_0$ и первым из условий (0.11) прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{v\, dv}{g(v)} = +\infty. \tag{0.12}$$

Теорема 4.2. *Пусть в случае $k > 1$ или $0 < k < 1$ функция $p(x,\, u,\, v)$ удовлетворяет условиям леммы 4.1 или 4.2 соответственно, причем для* *некоторых* $u_0, v_0 > 0$ *при* $u > u_0,\ v > v_0$ *справедливо неравенство* $p(x,u,v) \leq f(x,\,u)\,g(v)$, *где функция* $f(x,\,u)$ *непрерывна по совокупности переменных, а функция* $g(v)$ *непрерывна, отделена снизу от нуля и удовлетворяет условию* (0.12). *Тогда для любого максимально продолженного вправо решения* $y(x)$ *уравнения* (0.9) *с начальными условиями* $y(x_0) \geq u_0,\ y'(x_0) \geq v_0$ *и первым из условий* (0.11) *прямая* $x = x^*$ *является вертикальной асимптотой.*

Теорема 4.3. *Пусть в случае* $k > 1$ *или* $0 < k < 1$ *функция* $p(x,\,u,\,v)$ *удовлетворяет условиям леммы 4.1 или 4.2 соответственно, причем для некоторых* $u_0, v_0 > 0$ *при* $u > u_0,\ v > v_0$ *справедливо неравенство* $p(x,u,v) \geq g(v)$, *где функция* $g(v)$ *непрерывна, отделена снизу от нуля, и условие* (0.12) *не выполнено. Тогда для любого максимально продолженного вправо решения* $y(x)$ *уравнения* (0.9) *с начальными условиями* $y(x_0) \geq u_0,\ y'(x_0) \geq v_0$ *и первым из условий* (0.11) *выполнены соотношения:*

$$0 < \lim_{x \to x^*-0} y(x) < +\infty, \quad x^* - x_0 < \frac{1}{y^k(x_0)} \int\limits_{y'(x_0)}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)}.$$

Теорема 4.4. *Пусть* $k \in (0,\,1) \cup (1,\,+\infty)$, *функция* $p(x,\,u,\,v)$ *положительна, непрерывна по* x *и липшицева по* u, v, *и для некоторых* u_0, v_0, $C > 0$, $\alpha > k - 1$ *при* $u > u_0,\ v > v_0$ *справедливо неравенство* $p(x,u,v) \leq C|v|^{-\alpha}$. *Тогда любое решение* $y(x)$ *уравнения* (0.9) *с начальными условиями* $y(x_0) \geq u_0$ *и* $y'(x_0) \geq v_0$ *неограниченно продолжается вправо и*

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} y'(x) = +\infty.$$

В **заключении** перечислены основные результаты диссертационной работы и возможные направления дальнейших исследований.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Асташовой Ирине Викторовне за постановку задачи, ее обсуждение, полезные советы, конструктивную критику и постоянную поддержку. Автор выражает благодарность своему соавтору, студентке 6-го курса механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, Корчемкиной Татьяне Александровне и сотрудникам кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за внимание к работе и ценные замечания.

Глава 1. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным ограниченным потенциалом в случае регулярной нелинейности

В этой главе исследуются асимптотические свойства решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка:

$$y'' = p(x,\, y,\, y')\ |y|^k \operatorname{sgn} y, \tag{1.1}$$

где $k > 1$, функция $p(x,\, u,\, v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам

$$0 < m \le p(x,\, u,\, v) \le M < +\infty. \tag{1.2}$$

В первом параграфе настоящей главы покажем, что все максимально продолженные решения уравнения (1.1) определены или на полупрямой, или на конечном интервале. При этом прямая, проходящая через конечную границу области определения является вертикальной асимптотой решения, а на бесконечности все решения стремятся к нулю вместе с производной. Также получим оценки расстояния до вертикальной асимптоты, установим непрерывную зависимость положения вертикальных асимптот от начальных условий, с помощью которой доказывается существование решений уравнений с заданной областью определения. Во втором параграфе перейдем к изучению асимптотического поведения решений. Далее с использованием полученных результатов приведем асимптотическую классификацию всех максимально продолженных решений уравнения (1.1).

1.1 Существование решений с заданной областью определения

Покажем, что все максимально продолженные решения уравнения (1.1) имеют вертикальную асимптоту.

Замечание 1.1. *Заменами* $x \mapsto -x$ *и* $y(x) \mapsto -y(x)$ *уравнение* (1.1) *приводится к уравнению того же типа, поэтому в дальнейшем достаточно исследовать поведение максимально продолженных вправо положительных решений уравнения вблизи правой границы области определения.*

Действительно, обозначим $z(x) = y(-x)$, тогда

$$z''(x) = y''(-x) = p(-x,\, y(-x),\, y'(-x))|y(-x)|^k \operatorname{sgn} y(-x) =$$

$$= \tilde{p}(x,\, z(x),\, z'(x))|z(x)|^k \operatorname{sgn} z(x),$$

где функция $\tilde{p}(x,\, u,\, v) = p(-x,\, u,\, v)$ обладает теми же свойствами, что и функция p.

Далее обозначим $z(x) = -y(x)$, тогда

$$z''(x) = -y''(x) = -p(x,\, y(x),\, y'(x))|y(x)|^k \operatorname{sgn} y(x) =$$

$$= p(x,\, -z(x),\, -z'(x))|z(x)|^k \operatorname{sgn} z(x) = \tilde{p}(x,\, z(x),\, z'(x))|z(x)|^k \operatorname{sgn} z(x),$$

где функция $\tilde{p}(x,\, u,\, v) = p(x,\, -u,\, -v)$, опять же, обладает теми же свойствами, что и функция p.

Лемма 1.1. *Пусть* $k > 1$, *функция* $p(x,\, u,\, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v *и удовлетворяет неравенствам* (1.2). *Тогда существует такая константа* $\mu = \mu(m,\, k) > 0$, *что любое нетривиальное максимально продолженное решение* $y(x)$ *уравнения* (1.1), *удовлетворяющее в некоторой точке* x_0 *условию* $y(x_0)\, y'(x_0) > 0$ *или* $y(x_0) = 0$, *имеет вертикальную асимптоту* $x = x^* > x_0$, *причем*

$$x^* - x_0 \le \left(\mu\, |y'(x_0)|\right)^{-\frac{k-1}{k+1}}.$$

Если же нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ *в некоторой точке* x_0 *удовлетворяет условию* $y(x_0)\, y'(x_0) < 0$ *или* $y(x_0) = 0$, *то* $y(x)$ *имеет вертикальную асимптоту* $x = x_* < x_0$, *причем*

$$x_0 - x_* \le \left(\mu\, |y'(x_0)|\right)^{-\frac{k-1}{k+1}}.$$

Доказательство леммы 1.1.

В силу замечания 1.1 достаточно рассмотреть нетривиальное максимально продолженное вправо решение $y(x)$ уравнения (1.1), определенное на $[x_0,\, \tilde{x})$, где $\tilde{x} \le +\infty$, с начальными условиями $y(x_0) \ge 0$, $y'(x_0) > 0$.

На интервале $(x_0,\, \tilde{x})$ у рассматриваемого решения нет нулей. Действительно, пусть точка $\tilde{x_0} > x_0$ — ближайшая к x_0, в которой $y(\tilde{x_0}) = 0$. Заметим, что $y(x) > 0$ на интервале $(x_0,\, \tilde{x_0})$, а, значит, $y''(x) > 0$ на интервале $(x_0,\, \tilde{x_0})$ в силу уравнения (1.1), поэтому $y'(x)$ возрастает. По теореме Лагранжа существует точка $s \in (x_0,\, \tilde{x_0})$, в которой $y'(s) \le 0$. Но $y'(x_0) > 0$, и мы получаем противоречие с возрастанием первой производной на рассматриваемом интервале.

Далее покажем, что $y'(x) \to +\infty$ при $x \to \tilde{x} - 0$. От противного, пусть $y'(x) \to C$, $0 < C < +\infty$, при $x \to \tilde{x} - 0$. Так как $y'(x)$ возрастает при $x > x_0$, и по условию леммы $y'(x_0) > 0$, то $y'(x) > 0$ при $x > x_0$, и $y(x)$ возрастает.

Пусть $\tilde{x} < +\infty$. Рассмотрим полосу $[x_0,\, \tilde{x}] \times [y(x_0),\, +\infty) \subset \mathbb{R}^2$. По теореме о продолжении решений возрастающее решение $y(x)$ либо выйдет на правую границу полосы, либо уйдет на бесконечность. Тогда возможны два случая:

1. существует конечный предел $y(x)$ при $x \to \tilde{x}$. В этой точке рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1), решение которой существует и единственно в некоторой окрестности точки $\tilde{x}$, а, следовательно, совпадает с $y(x)$. Получаем противоречие с максимальной продолженностью $y(x)$.

2. $y(x) \to +\infty$ при $x \to \tilde{x} - 0$. Тогда $y'(x) \to +\infty$ при $x \to \tilde{x} - 0$, получаем снова противоречие.

Поэтому $\tilde{x} = +\infty$. В силу возрастания $y(x)$ на интервале $(x_0,\, +\infty)$ и вида уравнения (1.1) справедливо следующее неравенство

$$y'(x) > my^k(x_0)\,(x - x_0) + y'(x_0),$$

то есть $y'(x)$ больше некоторой линейной функции с положительным угловым коэффициентом. Тогда $y'(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, что противоречит предположению о стремлении $y'(x)$ к конечному пределу на правой границе области определения.

Таким образом, $y'(x) \to +\infty$ при $x \to \tilde{x} - 0$, и на интервале $(x_0,\, \tilde{x})$ у решения $y(x)$ уравнения (1.1) нет нулей и точек экстремума.

Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$. Введем обозначение $V = (y'(0))^{\frac{1}{k+1}} > 0$. Рассмотрим точку $x_1' > 0$, в которой $y'(x_1') = 2V^{k+1}$.

Такая точка существует в силу доказанного выше. Для всех $x \in [0,\, x_1']$ справедливо двойное неравенство

$$V^{k+1} \le y'(x) \le 2V^{k+1}.$$

Проинтегрируем неравенство $y'(x) \ge V^{k+1}$ на $[0,\, x]$, $x \le x_1'$:

$$y(x) \ge y(x) - y(0) \ge V^{k+1}x,$$

и в силу уравнения (1.1) имеем $y''(x) \ge mV^{k(k+1)}\, x^k$. Проинтегрируем последнее неравенство на $[0,\, x_1']$:

$$V^{k+1} = y'(x_1') - y'(0) \ge \frac{mV^{k(k+1)}}{k+1}(x_1')^{k+1},$$

тогда

$$(x_1')^{k+1} \le \frac{k+1}{m} V^{(k+1)(1-k)},$$

или

$$x_1' \le \left(\frac{k+1}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}} V^{1-k}.$$

Таким образом, существует такая положительная константа $\tilde{\mu}$, зависящая только от m и k, что точка x_1' удовлетворяет неравенству

$$x_1' \le (\tilde{\mu}\; y'(0))^{-\frac{k-1}{k+1}}\,.$$

Далее построим последовательность точек $\{x_i'\}$, $i = 0, 1, \ldots,$ выберем $x_0' = 0$, а $y'(x_i') = 2\, y'(x_{i-1}') = 2^i\, y'(0)$. Тогда

$$x_{i+1}' - x_i' \le (\tilde{\mu}\, y'(x_i'))^{-\frac{k-1}{k+1}} \le 2^{-i\frac{k-1}{k+1}} (\tilde{\mu}\, y'(0))^{-\frac{k-1}{k+1}},$$

а, значит,

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(x_{i+1}' - x_i') \le (\tilde{\mu}\, y'(0))^{-\frac{k-1}{k+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i\frac{k-1}{k+1}} < +\infty.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_i'\}$ имеет конечный предел

$x^* = \lim\limits_{i \to +\infty} x_i'$, причем

$$x^* = \sum_{i=0}^{+\infty} (x_{i+1}' - x_i') \le (\mu\, y'(0))^{-\frac{k-1}{k+1}}$$

для некоторой положительной константы μ, зависящей только от m и k.

Константа выписывается в явном виде:

$$\mu(m,\, k) = \left(\frac{m \left(1 - 2^{-\frac{k-1}{k+1}}\right)^{k+1}}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Получим оценку снизу для $y(x_1')$. По теореме Лагранжа существует точка $\tilde{s} \in (0,\, x_1')$, для которой $y''(\tilde{s})\, x_1' = y'(x_1') - y'(0) = V^{k+1}$, тогда в силу вида уравнения (1.1), неравенств (1.2) и возрастания $y(x)$ получаем оценки:

$$V^{k+1} = y''(\tilde{s})\, x_1' = p\,(\tilde{s},\, y(\tilde{s}),\, y'(\tilde{s}))\, y^k(\tilde{s})\, x_1' < M y^k(x_1')\, x_1',$$

и

$$y^k(x_1') > \frac{V^{k+1}}{M\, x_1'} \ge \frac{V^{k+1}}{C\, V^{1-k}} = \frac{V^{2k}}{C}\,,$$

где $C = M \left(\frac{k+1}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}}$. Таким образом,

$$y(x_1') > \frac{(y'(0))^{\frac{2}{k+1}}}{C^{\frac{1}{k}}}.$$

Кроме того,

$$y(x_{i+1}') > C^{-\frac{1}{k}}\, (y'(x_i'))^{\frac{2}{k+1}} = C^{-\frac{1}{k}}\, 2^{\frac{2i}{k+1}}\, (y'(0))^{\frac{2}{k+1}}\,,$$

и $y(x_i') \to +\infty$ при $i \to +\infty$, поэтому $y(x) \to +\infty$ при $x \to x^* - 0$.

Чтобы прямая $x = x^*$ являлась положением вертикальной асимптоты, достаточно показать, что $y'(x)$ не может расти быстрее, чем $y(x)$ в некоторой степени. Действительно, по теореме Лагранжа существует точка $\hat{s} \in (0,\, x)$, для которой $y''(\hat{s})\, x = y'(x) - y'(0)$, откуда в силу уравнения (1.1), неравенств (1.2) и возрастания $y(x)$ имеем

$$y'(x) \le y'(0) + y^k(\hat{s}) M x < C_1 + M x^* y^k(x) = C_1 + C_2\, y^k(x),$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные константы. Таким образом, если $y'(x) \to +\infty$, то и $y(x) \to +\infty$ при $x \to x^* - 0$. Следовательно, $x = x^*$ — положение вертикальной асимптоты.

Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. *Пусть $k > 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.2). *Тогда существует такая константа $\nu = \nu(m, k) > 0$, что любое максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения* (1.1), *удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условию $y(x_0)\, y'(x_0) > 0$, имеет вертикальную асимптоту $x = x^* > x_0$, причем*

$$x^* - x_0 \le \left(\nu\, |y(x_0)|\right)^{-\frac{k-1}{2}} .$$

Если же $y(x)$ в некоторой точке x_0 удовлетворяет условию $y(x_0)\, y'(x_0) < 0$, то $y(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = x_* < x_0$, причем

$$x_0 - x_* \le \left(\nu\, |y(x_0)|\right)^{-\frac{k-1}{2}} .$$

Кроме того, существует такая константа $\eta = \eta(M, k) > 0$, что любое максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения (1.1), *в некоторой точке x_0 удовлетворяющее условию $y'(x_0) = 0$, имеет вертикальные асимптоты $x = x^* > x_0$ и $x = x_* < x_0$, причем*

$$\left(\eta\, |y(x_0)|\right)^{-\frac{k-1}{2}} \le x^* - x_0 \le \left(\nu\, |y(x_0)|\right)^{-\frac{k-1}{2}} ,$$

$$\left(\eta\, |y(x_0)|\right)^{-\frac{k-1}{2}} \le x_0 - x_* \le \left(\nu\, |y(x_0)|\right)^{-\frac{k-1}{2}} .$$

Доказательство леммы 1.2.

Как и при доказательстве леммы 1.1 достаточно рассмотреть максимально продолженное вправо решение $y(x)$ уравнения (1.1) с начальными условиями $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) \ge 0$.

Заметим, что $y''(x_0) > 0$ в силу уравнения (1.1), значит, $y'(x)$ возрастает в некоторой окрестности точки x_0. Тогда существует точка $\tilde{x}_0 > x_0$, в которой $y'(\tilde{x}_0) > 0$, $y(\tilde{x}_0) > 0$, и, применяя лемму 1.1, получаем, что существует положение вертикальной асимптоты $x = x^*$, то есть $y(x) \to +\infty$ при $x \to x^* - 0$.

Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$. Введем обозначение $y(0) = W > 0$, и пусть $x_1 > 0$ — точка, в которой решение увеличилось в два раза, то есть $y(x_1) = 2\,y(0) = 2\,W$. Тогда на отрезке $[0,\, x_1]$ справедливо двойное неравенство $W \le y(x) \le 2\,W$, и в силу уравнения (1.1) получаем

$$m\,W^k \le y''(x) \le M\,2^k\,W^k.$$

Проинтегрируем полученное двойное неравенство на $[0,\, x]$, $x \le x_1$:

$$m\,W^k\,x \le y'(x) - y'(0) \le M\,2^k\,W^k\,x. \tag{1.3}$$

По условию $y'(0) \ge 0$, поэтому $m\,W^k\,x \le y'(x) - y'(0) \le y'(x)$. Полученное неравенство проинтегрируем на $[0,\, x_1]$:

$$\frac{m\,W^k}{2}\,x_1^2 \le y(x_1) - y(0) = W,$$

откуда

$$x_1^2 \le \frac{2}{m}\,W^{1-k}$$

или

$$x_1 \le \sqrt{\frac{2}{m}}\,\left(y(0)\right)^{-\frac{k-1}{2}}\,.$$

Построим последовательность точек $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$, выберем $x_0 = 0$, и $y(x_i) = 2\,y(x_{i-1}) = 2^i\,y(0)$. Тогда в силу неравенства выше

$$x_{i+1} - x_i \le \sqrt{\frac{2}{m}}\,\left(y(x_i)\right)^{-\frac{k-1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,2^{-\frac{i(k-1)}{2}}\,\left(y(0)\right)^{-\frac{k-1}{2}}\,.$$

Значит,

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(x_{i+1} - x_i) \le \sqrt{\frac{2}{m}}\,\left(y(0)\right)^{-\frac{k-1}{2}}\,\sum_{i=0}^{+\infty}2^{-\frac{i(k-1)}{2}} < +\infty.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_i\}$ имеет конечный предел, и так как $y(x) \to +\infty$ при $x \to x^* - 0$, то $\lim\limits_{i\to+\infty} x_i = x^*$, причем

$$x^* = \sum_{i=0}^{+\infty}(x_{i+1} - x_i) \le \left(\nu\,y(0)\right)^{-\frac{k-1}{2}}$$

для некоторой положительной константы ν, зависящей только от m и k.

Константа выписывается в явном виде:

$$\nu(m,\,k) = \left(\frac{m\left(1 - 2^{-\frac{k-1}{2}}\right)^2}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Если же $y'(0) = 0$, то неравенство (1.3) примет вид

$$m\,W^k\,x \le y'(x) \le M\,2^k\,W^k\,x.$$

Проинтегрируем неравенство $y'(x) \le M\,2^k\,W^k\,x$ на $[0,\,x_1]$:

$$W = y(x_1) - y(0) \le \frac{M\,2^k\,W^k}{2}\,x_1^2,$$

откуда

$$x_1^2 \ge \frac{2^{1-k}}{M}\,W^{1-k}$$

или

$$x_1 \ge \sqrt{\frac{2^{1-k}}{M}}\,\left(y(0)\right)^{-\frac{k-1}{2}}.$$

Рассмотрим построенную выше последовательность точек $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$. В силу неравенства выше

$$x_{i+1} - x_i \ge \sqrt{\frac{2^{1-k}}{M}}\,\left(y(x_i)\right)^{-\frac{k-1}{2}} = 2^{-i\frac{k-1}{2}}\sqrt{\frac{2^{1-k}}{M}}\,\left(y(0)\right)^{-\frac{k-1}{2}}.$$

Поэтому

$$x^* = \sum_{i=0}^{+\infty}(x_{i+1} - x_i) \ge \sqrt{\frac{2^{1-k}}{M}}\,\left(y(0)\right)^{-\frac{k-1}{2}}\,\sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i\frac{k-1}{2}} = \left(\eta\,y(0)\right)^{-\frac{k-1}{2}}$$

для некоторой положительной константы η, зависящей только от M и k.

Константа выписывается в явном виде:

$$\eta(m,\,k) = \left(\frac{M}{2^{1-k}}\left(1 - 2^{-\frac{k-1}{2}}\right)^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Лемма 1.2 доказана.

Замечание 1.2. *Из лемм 1.1 и 1.2 очевидным образом следует, что при $k > 1$ любое нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (1.1), имеющее в некоторой точке нуль или экстремум, имеет вертикальные асимптоты и слева, и справа от этой точки. Таким образом, любое такое решение определено на конечном интервале.*

Далее покажем непрерывную зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных условий.

Теорема 1.1. *Пусть $k > 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам (1.2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x_0, \tilde{x}_0, y_0, z_0, y_1, z_1$ таких, что $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, y_0 и y_1 неотрицательны и не равны нулю одновременно, z_0 и z_1 неотрицательны и не равны нулю одновременно, решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения (1.1) с начальными условиями*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} z(\tilde{x}_0) = z_0, \\ z'(\tilde{x}_0) = z_1, \end{cases} \tag{1.5}$$

соответственно имеют вертикальные асимптоты $x = x_1^* > x_0$ и $x = x_2^* > \tilde{x}_0$ соответственно, причем $|x_2^* - x_1^*| < \varepsilon$.

Доказательство теоремы 1.1.

Пусть $y(x)$ — максимально продолженное решение задачи Коши (1.1), (1.4). В силу замечания 1.2 существует положение вертикальной асимптоты $x = x_1^* > x_0$ и $y'(x) \to +\infty$ при $x \to x_1^* - 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\tilde{y}_1 > y_1$, что $\tilde{y}_1 > \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}$, где $\mu = \mu(m, k) > 0$ — константа из леммы 1.1. Более того, существует точка $x_0' \in (x_0, x_1^*)$, в которой $y'(x_0') = \tilde{y}_1 > 0$, и $(\mu\,\tilde{y}_1)^{-\frac{k-1}{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем $\tilde{\delta} = \frac{1}{2}\left(\tilde{y}_1 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\right) > 0$. Тогда справедлива цепочка неравенств:

$$\tilde{\delta} < \tilde{y}_1 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \Rightarrow \tilde{y}_1 - \tilde{\delta} > \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\mu\left(\tilde{y}_1 - \tilde{\delta}\right)\right)^{\frac{k-1}{k+1}} > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \left(\mu\left(\tilde{y}_1 - \tilde{\delta}\right)\right)^{-\frac{k-1}{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\tilde{z}(x)$ — решение задачи Коши для уравнения (1.1) с такими начальными условиями $\tilde{z}(x'_0) = \tilde{z}_0 > 0$, $\tilde{z}'(x'_0) = \tilde{z}_1$, что $|\tilde{z}_0 - y(x'_0)| < \tilde{\delta}$, $|\tilde{z}_1 - \tilde{y}_1| < \tilde{\delta}$. Тогда в силу леммы 1.1 решение $\tilde{z}(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = \tilde{x}^* > x'_0$.

Так как $\tilde{y}_1 - \tilde{\delta} < \tilde{z}_1 < \tilde{y}_1 + \tilde{\delta}$, то $(\mu\,\tilde{z}_1)^{-\frac{k-1}{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$, и справедлива оценка:

$$|x_1^* - \tilde{x}^*| \leq |x_1^* - x'_0| + |\tilde{x}^* - x'_0| \leq (\mu\,\tilde{y}_1)^{-\frac{k-1}{k+1}} + (\mu\,\tilde{z}_1)^{-\frac{k-1}{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Рассмотрим $z(x)$ — решение задачи Коши (1.1), (1.5). В силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий для любого $\tilde{\delta}$ существует такое δ, что если $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|y_0 - z_0| < \delta$, $|y_1 - z_1| < \delta$, то $|y(x'_0) - z(x'_0)| < \tilde{\delta}$, $|y'(x'_0) - z'(x'_0)| < \tilde{\delta}$, причем $z(x)$ можно продолжить до x'_0. Тогда в силу полученной выше оценки и леммы 1.1 получаем, что $z(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = x_2^* > x'_0 > \tilde{x}_0$, причем $|x_1^* - x_2^*| < \varepsilon$.

Таким образом, непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты справа от неотрицательных начальных условий доказана.

Теорема 1.1 доказана.

Замечание 1.3. *Результаты теоремы 1.1 в силу замечания 1.1 могут быть обобщены следующим образом:*

1. *Пусть* $k > 1$, *функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v *и удовлетворяет неравенствам* (1.2). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любых* x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1 *таких, что* $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \geq 0$ *и* $y_1 \leq 0$ *и не равны нулю одновременно,* $z_0 \geq 0$ *и* $z_1 \leq 0$ *и не равны нулю одновременно, решения* $y(x)$ *и* $z(x)$ *уравнения* (1.1) *с начальными условиями* (1.4) *и* (1.5) *соответственно имеют вертикальные асимптоты* $x = x_{1*} < x_0$ *и* $x = x_{2*} < \tilde{x}_0$ *соответственно, причем* $|x_{2*} - x_{1*}| < \varepsilon$.

2. *Пусть* $k > 1$, *функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v *и удовлетворяет неравенствам* (1.2). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любых* x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1 *таких, что* $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \leq 0$ *и* $y_1 \geq 0$ *и не равны нулю одновременно,* $z_0 \leq 0$ *и* $z_1 \geq 0$ *и не равны нулю одновременно, решения* $y(x)$ *и* $z(x)$ *уравнения* (1.1) *с начальными условиями* (1.4) *и* (1.5) *соответственно имеют вертикальные асимптоты* $x = x_{1*} < x_0$ *и* $x = x_{2*} < \tilde{x}_0$ *соответственно, причем* $|x_{2*} - x_{1*}| < \varepsilon$.

3. Пусть $k > 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам (1.2). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \le 0$ и $y_1 \le 0$ и не равны нулю одновременно, $z_0 \le 0$ и $z_1 \le 0$ и не равны нулю одновременно, решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения* (1.1) *с начальными условиями* (1.4) *и* (1.5) *соответственно имеют вертикальные асимптоты $x = {x_1}^* < x_0$ и $x = {x_2}^* < \tilde{x}_0$ соответственно, причем $|x_2^* - x_1^*| < \varepsilon$.*

Таким образом, для максимально продолженных решений уравнения (1.1), имеющих нуль или экстремум, показана непрерывная зависимость левой и правой вертикальных асимптот от начальных условий. Опираясь на факт непрерывной зависимости положения вертикальных асимптот от начальных условий, Т. А. Корчемкиной в работе [28] доказано существование максимально продолженных знакопостоянных решений уравнения (1.1) с произвольной наперед заданной областью определения:

Лемма 1.3. [28] *Пусть $k > 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.2). *Тогда для любых конечных значений x_* и $x^* > x_*$ существуют положительное и отрицательное решения уравнения* (1.1), *определенные на* (x_*, x^*) *и имеющие вертикальные асимптоты $x = x_*$ и $x = x^*$.*

Перейдем к рассмотрению решений, не имеющих нулей и точек экстремума на всей области определения. И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией в монографии [22] было доказано, что существует континуум таких решений — кнезеровских решений, все эти решения продолжаемы на полубесконечный интервал и являются исчезающими на бесконечности. Отметим, что И. В. Асташовой в [3] показано, что кнезеровские решения уравнения типа Эмдена–Фаулера высокого порядка ($n \ge 2$) вместе со своими производными стремятся к нулю на бесконечности.

Лемма 1.4. [22] *Пусть $k > 1$. Для любого $x_* \in \mathbb{R}$ существует кнезеровское решение уравнения* (1.1), *имеющее вертикальную асимптоту слева $x = x_*$, определенное на интервале* $(x_*, +\infty)$ *и стремящееся к нулю при $x \to +\infty$.*

Лемма 1.5. [22] *Пусть $k > 1$. Для любого $x^* \in \mathbb{R}$ существует кнезеровское решение уравнения* (1.1)*, имеющее вертикальную асимптоту справа $x = x^*$, определенное на интервале $(-\infty, x^*)$ и стремящееся к нулю при $x \to -\infty$.*

Так как тривиальное решение определено на всей числовой прямой, то общей формулировкой для сформулированных выше лемм 1.3–1.5 может служить следующая:

Лемма 1.6. *Пусть $k > 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.2)*. Тогда для любых конечных или бесконечных значений $x_* < x^*$ существует решение уравнения* (1.1)*, определенное на (x_*, x^*).*

1.2 Асимптотическое поведение решений

В предыдущем параграфе показано, что существуют нетривиальные решения уравнения (1.1), определенные на конечном интервале, и кнезеровские решения, определенные на полупрямой. Сначала изучим асимптотическое поведение первого типа решений. В силу замечания 1.1 исследуем асимптотическое поведение положительных решений уравнения (1.1) вблизи правой границы области определения — положения вертикальной асимптоты $x = x^*$.

Лемма 1.7. *Пусть $k > 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (1.2) *и имеет конечный предел $p_0 > 0$ при $x \to x^* - 0$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$. Тогда любое положительное решение уравнения* (1.1) *с вертикальной асимптотой справа $x = x^*$ имеет следующий асимптотический вид:*

$$y(x) = C(p_0)(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0, \tag{1.6}$$

где

$$\alpha = \frac{2}{k-1}, \quad C(p) = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{p}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{1.7}$$

Доказательство леммы 1.7.

В работе Г. Г. Квиникадзе [15] для решения уравнения (1.1) с вертикальной асимптотой $x = x^*$ доказано существование таких положительных констант

C_1 и C_2, что в некоторой левой окрестности точки x^* справедливо:

$$C_1(x^* - x)^{-\alpha} \le y(x) \le C_2(x^* - x)^{-\alpha}. \tag{1.8}$$

Введем обозначения $\beta = 1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{k+1}{2} > 0$, $w = y'\, y^{-\beta}$. Тогда любому положительному вместе с первой производной решению уравнения (1.1) соответствует некоторая кривая w в $\mathbb{R}_+$ (так как $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$). Параметризуем эту кривую переменной

$$t = \int\limits_{x_0}^{x} y^{\frac{1}{\alpha}}(s)\, ds.$$

В силу оценок (1.8) имеем $t \to +\infty$ при $x \to x^* - 0$. Вычислим $\dot{w} = \frac{dw}{dt}$ в этом случае:

$$\dot{w} = \left(y''y^{-\beta} - \beta y^{-\beta-1}(y')^2\right) y^{-\frac{1}{\alpha}} = y''y^{-\beta-\frac{1}{\alpha}} - \beta(y')^2 y^{-2\beta} = \varphi(t) - \beta w^2,$$

где $\varphi(t)$ — композиция функции $p(x,\, y(x),\, y'(x))$ и функции, обратной к функции $t(x)$. Таким образом, функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{w} = \varphi(t) - \beta w^2, \tag{1.9}$$

Пусть теперь $y(x)$ — решение уравнения (1.1) при $p \equiv p_0$:

$$y'' = p_0 |y|^k \operatorname{sgn}\, y, \quad k > 1. \tag{1.10}$$

Очевидно, что в этом случае функция w как функция от t удовлетворяет уравнению

$$\dot{w} = p_0 - \beta w^2. \tag{1.11}$$

Обозначим через $a = \sqrt{\frac{p_0}{\beta}}$ единственную неподвижную точку этого уравнения в $\mathbb{R}_+$, а через $\tilde{a} = -\sqrt{\frac{p_0}{\beta}}$ единственную неподвижную точку в $\mathbb{R}_-$.

Лемма 1.8. *Пусть $w(t)$ — положительное решение уравнения* (1.11). *Тогда $w(t) \to a$ при $t \to +\infty$.*

Доказательство леммы 1.8.

Рассмотрим отрезки $\left[a\theta,\, \frac{a}{\theta}\right]$, где $0 < \theta \le 1$, содержащие точку a. При

$\theta = 1$ отрезок вырождается в точку a. Границы отрезков не пересекаются между собой при различных θ, а объединение $\bigcup\limits_{\theta\in(0,\,1]} \left\{a\theta,\, \frac{a}{\theta}\right\}$ совпадает с $\mathbb{R}_+$. Таким образом, точка $\tilde{w}$ из $\mathbb{R}_+$ однозначно определяет такое θ, что $\tilde{w} \in \left\{a\theta,\, \frac{a}{\theta}\right\}$, поэтому рассматриваемое решение $w(t)$ уравнения (1.11) однозначно определяет функцию $\theta(t)$.

Покажем, что $\theta(t)$ возрастает, другими словами, если решение $w(t)$ пересекает границу отрезка $\left[a\theta,\, \frac{a}{\theta}\right]$, то касательный вектор в точке пересечения направлен внутрь отрезка. Для этого при $\theta \neq 1$ оценим производную функции $w(t)$ в точках $a\theta,\, \frac{a}{\theta}$:

$$\dot{w}|_{w=a\theta} = p_0 - \beta\, a^2\, \theta^2 = p_0\, (1 - \theta^2) > 0,$$

$$\dot{w}|_{w=\frac{a}{\theta}} = p_0 - \beta \frac{a^2}{\theta^2} = p_0 \left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right) < 0.$$

Итак, функция $\theta(t)$ возрастает, ограничена сверху, значит, стремится к конечному пределу θ^*. Если $\theta^* = 1$, то лемма доказана. В противном случае $w(t)$ стремится к точкам $a\theta^*$ и $\frac{a}{\theta^*}$, то есть все предельные точки принадлежат множеству $\left\{a\theta^*,\, \frac{a}{\theta^*}\right\}$, значит, согласно [31] существует решение, полностью лежащее в $\left\{a\theta^*,\, \frac{a}{\theta^*}\right\}$. Но в силу строгости оценок решение уравнения (1.11) не может находиться постоянно в одной из точек $a\theta^*$ или $\frac{a}{\theta^*}$, а в рассматриваемой области только одна неподвижная точка a. Получаем противоречие.

Лемма 1.8 доказана.

Вернемся к доказательству леммы 1.7. Используя оценки (1.8), условия (1.2) на функцию $p(x,\, u,\, v)$ и вид уравнения (1.1), покажем, что функция $w = y'\, y^{-\beta}$ как функция от t ограничена при достаточно больших значениях t.

Действительно, $y'' \geq mC_1^k(x^* - x)^{-k\alpha}$, тогда существуют положительные константы A_1, B_1, для которых $y' \geq A_1 + B_1(x^* - x)^{-k\alpha+1}$. Значит, при x достаточно близких к x^* справедливо:

$$w \geq (A_1 + B_1(x^* - x)^{-k\alpha+1})(C_2(x^* - x)^{-\alpha})^{-\beta} \geq E_1(x^* - x)^{-k\alpha+1+\alpha\beta},$$

и, поскольку $-k\alpha + 1 + \alpha\beta = -k\alpha + 1 + \alpha\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha(1-k) + 2 = 0$, то $w \geq E_1$.

Покажем ограниченность w сверху. Действительно, $y'' \leq MC_2^k(x^* - x)^{-k\alpha}$, тогда существуют положительные константы $A_2,\, B_2$, для которых справедливо

$y' \leq A_2 + B_2(x^* - x)^{-k\alpha+1}$. Значит, при x достаточно близких к x^* справедливо:

$$w \leq (A_2 + B_2(x^* - x)^{-k\alpha+1})(C_1(x^* - x)^{-\alpha})^{-\beta} \leq E_2(x^* - x)^{-k\alpha+1+\alpha\beta},$$

и тогда $w \leq E_2$.

Следствием ограниченности функции $w(t)$ является наличие у нее хотя бы одной предельной точки. Отметим, что при достаточно большом значении t функция $w(t)$ отделена от нуля, поэтому начиная с некоторого момента, $w(t)$ должна принадлежать отрезку $\left[a\theta, \frac{a}{\theta}\right]$, $0 < \theta \leq 1$. То же самое, очевидно, относится и ко всем предельным точкам функции $w(t)$.

Лемма 1.9. *Множество предельных точек решений* $w(t)$ *уравнения* (1.9) *состоит из траекторий решений уравнения* (1.11).

Доказательство леммы 1.9.

Пусть w^* — предельная точка для функции $w(t)$. Тогда найдется такая последовательность $\{t_j\}$, что $w(t_j) \to w^*$ и $t_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Проведем через w^* траекторию решения уравнения (1.11). Покажем, что любая точка этой траектории также является предельной для $w(t)$. Докажем от противного. Предположим, что $w^0(t)$ является таким решением уравнения (1.11), что выполняется $w^0(t_0) = w^*$, $w^0(t_0 + T) = w^{**}$, $T > 0$, и точка w^{**} не является предельной для $w(t)$. Тогда существует такое значение $\varepsilon > 0$, что при достаточно большом t выполняется неравенство $|w(t) - w^{**}| > \varepsilon$. С другой стороны, по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий и правой части, для любого $\tilde{\varepsilon} > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если $|\varphi(t) - p_0| < \delta$, то любая функция $w(t)$, удовлетворяющая уравнению (1.9) и условию $|w(t_0) - w^*| < \delta$, удовлетворяет также условию

$$|w(t_0 + T) - w^0(t_0 + T)| < \tilde{\varepsilon}.$$

Поэтому, выбрав t_0 из последовательности $\{t_j\}$ настолько большим, чтобы выполнялось $|w(t_0) - w^*| < \delta$ и $|\varphi(t) - p_0| < \delta$ при $t > t_0$, получим противоречие.

Лемма 1.9 доказана.

Согласно лемме 1.8 любое решение уравнения (1.11) стремится к неподвижной точке a, поэтому по лемме 1.9 точка a также является предельной для $w(t)$ — решения уравнения (1.9). Как было показано выше, все предельные точки ограниченной функции $w(t)$ лежат внутри отрезка $\left[a\theta,\, \frac{a}{\theta}\right]$, $0 < \theta \leq 1$. Повторяя рассуждения доказательства леммы 1.8, получаем, что единственной возможностью, не приводящей к противоречию, является наличие у функции $w(t)$ единственной предельной точки a. А в силу компактности отрезка эта точка является пределом решения $w(t)$ уравнения (1.9) при $t \to +\infty$. Таким образом, возвращаясь к решению $y(x)$ уравнения (1.1), мы получаем

$$y'(x)y^{-\beta}(x) \sim a,\; x \to x^* - 0,$$

$$-\frac{y(x)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \sim a(x^* - x),$$

$$y(x)^{-\frac{1}{\alpha}} \sim \frac{a}{\alpha}(x^* - x),$$

$$y(x) \sim \left(\frac{a}{\alpha}(x^* - x)\right)^{-\alpha}.$$

Так как $a = \sqrt{\frac{p_0}{\beta}}$, то $\frac{a}{\alpha} = \left(\frac{p_0}{\alpha^2\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{p_0}{\alpha(1+\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}$ и тогда

$$y(x) \sim \left(\frac{p_0}{\alpha(1+\alpha)}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} (x^* - x)^{-\alpha} \sim \left(\frac{\alpha(1+\alpha)}{p_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} (x^* - x)^{-\alpha} = C(p_0)\,(x^* - x)^{-\alpha}.$$

Таким образом, любое положительное решение уравнения (1.1) вблизи правой границы области определения $x = x^*$ имеет асимптотический вид (1.6).

Лемма 1.7 доказана.

Далее перейдем к изучению асимптотического поведения решений, определенных на полупрямой. Согласно замечанию 1.1 достаточно исследовать асимптотическое поведение положительных кнезеровских решений уравнения (1.1) (в частности, (1.10)) при $x \to +\infty$.

Лемма 1.10. *Пусть* $k > 1$. *Все положительные кнезеровские решения уравнения* (1.10) *имеют вид:*

$$y(x) = C\,(x - \tilde{x})^{-\alpha}, \quad x > \tilde{x},$$

где $\tilde{x}$ *— произвольная точка, а константы* C, α *определяются формулами* (1.7).

Доказательство леммы 1.10.

Пусть $y(x)$ — положительное кнезеровское решение уравнения (1.10). Рассмотрим решение $w(t)$ уравнения (1.11), которое соответствует решению $y(x)$. Функция $w(t)$ полностью лежит в области $\mathbb{R}_-$. Эту область можно представить в виде объединения непересекающихся множеств $\left\{\frac{\tilde a}{\theta},\, \tilde a\theta\right\}$, $0<\theta\le 1$, являющихся границами отрезков $\left[\frac{\tilde a}{\theta},\, \tilde a\theta\right]$, где $\tilde a$ — единственная в рассматриваемой области неподвижная точка уравнения (1.11).

При этом у решения $w(t)$ уравнения (1.11) касательные векторы в точках его пересечения с границами отрезков $\left[\frac{\tilde a}{\theta},\, \tilde a\theta\right]$, $\theta\ne 1$, направлены из соответствующего отрезка, поскольку справедливы следующие оценки:

$$\dot w|_{w=\tilde a\theta} = p_0 - \beta\,\tilde a^2\,\theta^2 = p_0\,(1-\theta^2) > 0,$$

$$\dot w|_{w=\frac{\tilde a}{\theta}} = p_0 - \beta\frac{\tilde a^2}{\theta^2} = p_0\left(1-\frac{1}{\theta^2}\right) < 0.$$

Это означает, что функция $\theta(t)$, аналогичная введенной в лемме 1.8, строго убывает. Поскольку эта функция ограничена, она будет стремиться к пределу θ^*, где $0\le\theta^*\le 1$. Если $\theta^*=1$, то в силу убывания $\theta(t)\equiv 1$ и $w(t)=\tilde a=-a$, следовательно,

$$y'(x)y^{-\beta}(x) = -a,$$

откуда

$$y(x) = \left(\frac{a(x-\tilde x)}{\alpha}\right)^{-\alpha},\ x>\tilde x,$$

для произвольной точки $\tilde x$. Повторяя рассуждения леммы 1.7, получаем:

$$y(x) = C(p_0)\,(x-\tilde x)^{-\alpha}.$$

Для $\theta^*=1$ лемма 1.10 доказана. Покажем, что других случаев быть не может.

Пусть $0<\theta^*<1$. Тогда все предельные точки функции $w(t)$ принадлежат множеству $\left\{\frac{\tilde a}{\theta^*},\, \tilde a\theta^*\right\}$. Тогда согласно лемме 1.9 должна существовать траектория уравнения (1.11), полностью принадлежащая $\left\{\frac{\tilde a}{\theta^*},\, \tilde a\theta^*\right\}$, что невозможно, так как в этом случае функция $\theta(t)$ не будет строго убывающей.

Осталось рассмотреть случай $\theta^*=0$, то есть $\theta(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Введем на пространстве $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ отношение эквивалентности, при котором $(y_0;\,y_1)\sim(z_0;\,z_1)$, если существует такая положительная константа λ, что

$z_0 = \lambda y_0$, $z_1 = \lambda^\beta y_1$. Действительно, $z_1\, z_0^{-\beta} = y_1\, y_0^{-\beta}$.

Фактор-пространство по этому отношению топологически эквивалентно окружности

$$S^1 = \{(y_0;\, y_1) : y_0^2 + y_1^2 = 1\},$$

на которой для каждого класса эквивалентности найдется ровно один представитель.

Любому нетривиальному решению уравнения (1.10) (не обязательно всюду положительному) соответствует ориентированная кривая в $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$: $y_0 = y(x)$, $y_1 = y'(x)$, которая, в свою очередь, определяет ориентированную кривую на S^1. Опишем эти кривые, введя на окружности структуру гладкого многообразия с помощью четырех карт, определенных на полуокружностях с положительной или с отрицательной координатой y_0 и с положительной или с отрицательной координатой y_1 соответственно. Эти карты покрывают всю окружность S^1.

Координатные функции зададим следующим образом:

$$u^\pm = \frac{y_1 \operatorname{sgn}\, y_0}{|y_0|^\beta}, \quad v^\pm = \frac{y_0 \operatorname{sgn}\, y_1}{|y_1|^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Заметим, что координатные функции не зависят от выбора представителя класса эквивалентности в $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$, так как опять же $z_1\, z_0^{-\beta} = y_1\, y_0^{-\beta}$.

Ориентированная кривая $w(t)$, соответствующая кнезеровскому решению уравнения (1.10), полностью лежит в той части окружности S^1, которая удовлетворяет неравенствам $y_0 > 0$, $y_1 < 0$. Назовем эту часть окружности *кнезеровской областью* и обозначим K. Заметим, что области K соответствуют карты u^+ и v^-. Все предельные точки кривой $w(t)$ лежат в замыкании области K, причем если имеет место случай $\theta^* = 0$, то предельные точки лежат на границе K, которую обозначим I_0^-. Заметим, что хотя бы одна предельная точка w^* существует, так как замыкание области K компактно.

Пусть эта точка w^* лежит в карте u^+. В этом случае через нее должна проходить траектория $w(t)$ уравнения (1.11), полностью лежащая в I_0^-. Координата точки w^* в этой карте не может быть равна нулю. Действительно, в силу уравнения (1.11) в точке w^* справедливо $\dot{w} = p_0 > 0$, значит, $w(t)$ возрастает, ее координата станет больше нуля и покинет I_0^-, приходим к противоречию. Таким образом, координата точки w^* в карте u^+ должна быть меньше нуля (чтобы решение было кнезеровским). Это противоречит тому, что точка w^* лежит в I_0^-. Значит, точка w^* лежит за пределами карты u^+.

Предположим, что точка w^* лежит в карте v^-. Параметризуем кривые в этой области переменной

$$t_1 = \int_{x_0}^{x} |y'(s)|^{\frac{1}{\alpha+1}}\, ds.$$

Кнезеровская область задается неравенством $v^- < 0$, так как $y_0 > 0$, $y_1 < 0$. Тогда

$$\frac{dx}{dt_1} = (-y')^{-\frac{1}{\alpha+1}},$$

$$(v^-)'_x = -y'\,(-y')^{-\frac{1}{\beta}} - \frac{1}{\beta}\,(-y)\,(-y'')\,(-y')^{-\frac{1}{\beta}-1},$$

$$(v^-)'_{t_1} = (v^-)'_x\,(-y')^{-\frac{1}{\alpha+1}} = (-y')^{1-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha+1}} - \frac{1}{\beta}\,y\,y''\,(-y')^{-1-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha+1}}.$$

Заметим, что

$$1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha+1} = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha+1-\alpha-1}{\alpha+1} = 0,$$

$$-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha+1} = -1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = \frac{-\alpha-1-\alpha-1}{\alpha+1} = -2.$$

Так как $y(x)$ — решение уравнения (1.10), то

$$(v^-)'_{t_1} = 1 - \frac{p_0}{\beta}\,y^{k+1}\,(-y')^{-2}.$$

Учитывая, что

$$\left|v^-\right|^{k+1} = \frac{y^{k+1}}{(-y')^{\frac{k+1}{\beta}}},$$

$$\frac{k+1}{\beta} = \frac{k+1}{1+\frac{1}{\alpha}} = \frac{1+\frac{2}{\alpha}+1}{1+\frac{1}{\alpha}} = \frac{2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{1+\frac{1}{\alpha}} = 2,$$

получаем, что кривые $w(t)$, соответствующие решениям уравнения (1.10), описываются следующим уравнением:

$$\frac{dv^-}{dt_1} = 1 - \frac{p_0}{\beta}\left|v^-\right|^{k+1}.$$

Поскольку кривая $w(t)$, проходящая через точку w^*, полностью лежит в I_0^-, то $v^- = 0$ и $\frac{dv^-}{dt_1} = 1$. Тогда v^- должна возрастать, и, значит, $w(t)$ покинет I_0^-. Таким образом, точка w^* лежит за пределами карты v^-. Поэтому случай $\theta^* = 0$ также невозможен.

Следовательно, единственной возможностью остается случай $\theta^* = 1$.

Лемма 1.10 доказана.

Аналогичным образом любому нетривиальному решению уравнения (1.1), не обязательно всюду положительному, соответствует ориентированная кривая в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: $y_0 = y(x)$, $y_1 = y'(x)$, которая, в свою очередь, определяет ориентированную кривую на $S^1 = \{(y_0, y_1) : y_0^2 + y_1^2 = 1\}$. Эти кривые можно также описать, введя на окружности структуру гладкого многообразия с помощью карт $u^\pm$, $v^\pm$, заданных выше.

Лемма 1.11. *Пусть $k > 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (1.2) *и имеет предел $p_0 > 0$ при $x \to +\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$. Тогда любое кнезеровское решение уравнения* (1.1) *стремится к нулю с асимптотикой*

$$y(x) = Cx^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

где константы C, α определяются формулами (1.7).

Доказательство леммы 1.11.

Пусть $y(x)$ — кнезеровское решение уравнения (1.1) с начальными условиями $y(x_0) > 0$, $y(x_0) < 0$. В конце первого параграфа упоминалось, что поскольку решение уравнения (1.1) является кнезеровским, то оно вместе с первой и второй производными стремится к нулю на бесконечности, поэтому $p(x, y(x), y'(x)) \to p_0$ при $x \to +\infty$.

Рассмотрим на окружности S^1 соответствующую решению ориентированную кривую L. Так как S^1 компактна, то у этой кривой существует хотя бы одна предельная точка. Кнезеровской области соответствуют карты u^+ и v^-.

Если предельная точка лежит в карте u^+, то согласно лемме 1.9 через нее проходит траектория L^* некоторого решения уравнения (1.11), состоящая из предельных точек этой кривой L. Если траектория L^* принадлежит области K, то она соответствует кнезеровскому решению уравнения (1.10) и согласно доказательству леммы 1.10 сводится к точке $\tilde{a}$. В противном случае она принадлежит границе кнезеровской области I_0^-, и, значит, существует точка $x_1 > x_0$, в которой $y(x_1) = 0$ или $y'(x_1) = 0$. Заметим, что такая точка x_1 единственна. Действительно, если в некоторой точке решение уравнения (1.1) обратится в нуль, и его первая производная отрицательна, то далее решение убывает, становится отрицательным, его вторая производная в силу уравнения (1.1) обязана быть меньше нуля, что означает убывание отрицательного решения и его первой производной. Если же положительное решение в точке x_1 имеет экстремум, то в силу уравнения (1.1) первая производная возрастает и становится больше нуля. Таким образом, траектория L^* не сможет оставаться на границе I_0^- и выходит за пределы кнезеровской области K. Последнее невозможно, так как в этом случае и кривая L также должна выйти за пределы K.

Если предельная точка кривой L не лежит в карте u^+, то она принадлежит I_0^- и лежит в карте v^-. Но также через эту точку проходит траектория, которая, с одной стороны, состоит из предельных точек L, а, с другой стороны, покидает границу кнезеровской области, что также невозможно.

Значит, у кривой L на окружности S^1 существует только одна предельная точка, являющаяся, таким образом, пределом. В частности, в карте u^+ для кривой L справедливо соотношение $w(t) \sim \tilde{a}$, из которого вытекает, что $y'(x)y^{-\beta}(x) \sim \tilde{a}$ при $x \to +\infty$, и, повторяя рассуждения доказательства леммы 1.7, мы получаем требуемый асимптотический вид кнезеровский решений.

Лемма 1.11 доказана.

Подведем итог. Учитывая замечание 1.1, леммы 1.7 и 1.11, общей формулировкой полученных результатов будет служить следующая теорема:

Теорема 1.2. *Пусть $k > 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (1.2) *и имеет следующие пределы:*

1) P_+ при $x \to +\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$;

2) P_- при $x \to -\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$;

а также, при любом $c \in \mathbb{R}$,

3) P_c^+ при $x \to c$, $u \to +\infty$, $v \to \pm\infty$;

4) P_c^- при $x \to c$, $u \to -\infty$, $v \to \pm\infty$.

Тогда все максимально продолженные решения уравнения (1.1) *в соответствии со своим асимптотическим поведением делятся на следующие девять типов:*

0. Заданное на всей числовой прямой тривиальное решение $y_0(x) \equiv 0$.

1-2. Заданные на $(b, +\infty)$ положительные и отрицательные кнезеровские решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_1(x) = C(P_b^+)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to b+0,$$

$$y_1(x) = C(P_+)x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty,$$

и

$$y_2(x) = -C(P_b^-)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to b+0,$$

$$y_2(x) = -C(P_+)x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty.$$

3-4. Заданные на $(-\infty, a)$ положительные и отрицательные кнезеровские решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_3(x) = C(P_a^+)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to a-0,$$

$$y_3(x) = C(P_-)|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to -\infty,$$

и

$$y_4(x) = -C(P_a^-)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to a-0,$$

$$y_4(x) = -C(P_-)|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to -\infty.$$

5-6. Заданные на (a, b) знакопостоянные решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_5(x) = C(P_a^+)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to a+0,$$

$$y_5(x) = C(P_b^+)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to b-0,$$

и

$$y_6(x) = -C(P_a^-)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to a+0,$$

$$y_6(x) = -C(P_b^-)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to b-0.$$

7-8. Заданные на (a, b) решения со степенной асимптотикой и разными знаками вблизи обеих границ области определения:

$$y_7(x) = C(P_a^+)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to a+0,$$

$$y_7(x) = -C(P_b^-)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to b-0,$$

и

$$y_8(x) = -C(P_a^-)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to a+0,$$

$$y_8(x) = C(P_b^+)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to b-0.$$

Замечание 1.4. *Полученная асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения* (1.1) *для* $p = p(x)$ *совпадает с классификацией, приведенной И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией в монографии [22] .*

Замечание 1.5. *При выполнении условий теоремы 1.2 существует максимально продолженное решение уравнения* (1.1) *каждого из девяти описанных выше типов.*

Доказательство замечания 1.5.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{cases} y'' = p\,(x,\, y,\, y')\ \ |y|^k \operatorname{sgn} y, \quad k > 1, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

Зададим нулевые начальные условия $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, тогда в силу теоремы Пикара получим тривиальное решение уравнения (1.1), определенное на всей числовой прямой — решение типа 0.

И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией в монографии [22] доказано существование кнезеровских решений уравнения (1.1), то есть решений типов 1–4.

Зададим начальные условия $y_0 \neq 0$, $y_1 = 0$, тогда в силу теоремы Пикара и леммы 1.2 получим решения типов 5 и 6, в зависимости от знака y_0.

Зададим начальные условия $y_0 = 0$, $y_1 \neq 0$, тогда в силу теоремы Пикара и леммы 1.1 получим решения типов 7 и 8, в зависимости от знака y_1.

Замечание 1.5 доказано.

Глава 2. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным ограниченным потенциалом в случае сингулярной нелинейности

В настоящей главе рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера из первой главы
$$y'' = p(x,\, y,\, y')\ |y|^k \operatorname{sgn} y, \tag{2.1}$$
но в случае сингулярной нелинейности $0 < k < 1$. Функция $p\,(x,\, u,\, v)$ обладает теми же свойствами, что и ранее, а, именно, непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам

$$0 < m \le p\,(x,\, u,\, v) \le M < +\infty. \tag{2.2}$$

Как упоминалось во введении, в случае сингулярной нелинейности условия классической теоремы существования и единственности не выполнены, поэтому решения могут иметь особое поведение не только вблизи границ, но и во внутренней точке области определения, в связи с чем будет изучаться асимптотическое поведение μ–решений уравнения (2.1).

В первом параграфе настоящей главы докажем, что все μ–решения имеют либо ровно один нуль, либо ровно один экстремум, либо вместе со своей производной стремятся к нулю в конечной граничной точке области определения и получим оценки расстояния до нуля, точки экстремума и граничной точки области определения соответственно. Также установим непрерывную зависимость положения нуля, точки экстремума, граничной точки области определения от начальных условий. Во втором параграфе перейдем к изучению асимптотического поведения решений и с использованием полученных результатов приведем асимптотическую классификацию всех μ–решений уравнения (2.1).

2.1 Качественные свойства решений

Лемма 2.1. *Пусть* $0 < k < 1$, *функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v *и удовлетворяет неравенствам* (2.2). *Тогда существует такие константы* $\nu = \nu(m, k) > 0$, $\eta = \eta(m, k) > 0$, *что для любого* μ*–решения* $y(x)$ *уравнения* (2.1), *удовлетворяющего в некоторой точке* x_0 *условию* $y(x_0)\, y'(x_0) < 0$, *существует конечное значение* $x^* > x_0$, *в котором соответственно* $\lim\limits_{x \to x^*-0} y(x) = 0$ *и (или)* $\lim\limits_{x \to x^*-0} y'(x) = 0$, *причем соответственно*

$$x^* - x_0 < (\nu\, |y(x_0)|)^{\frac{1-k}{2}} \ \text{ и (или) } \ x^* - x_0 < (\eta\, |y'(x_0)|)^{\frac{1-k}{k+1}}\,.$$

Если же μ*–решение* $y(x)$ *в некоторой точке* x_0 *удовлетворяет условию* $y(x_0)\, y'(x_0) > 0$, *то существует конечное значение* $x_* < x_0$, *в котором соответственно* $\lim\limits_{x \to x_*+0} y(x) = 0$ *и (или)* $\lim\limits_{x \to x_*+0} y'(x) = 0$, *причем соответственно*

$$x_0 - x_* < (\nu\, |y(x_0)|)^{\frac{1-k}{2}} \ \text{ и (или) } \ x_0 - x_* < (\eta\, |y'(x_0)|)^{\frac{1-k}{k+1}}\,.$$

Доказательство леммы 2.1.

В силу замечания 1.1 из первой главы достаточно рассмотреть μ–решение $y(x)$ уравнения (2.1) при $x > x_0$ с начальными условиями $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) < 0$, определенное на $[x_0, \tilde{x}), \tilde{x} \le +\infty$.

Докажем от противного существование значения x^*. Предположим, что для любого $x > x_0$ справедливы неравенства $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$, тогда решение $y(x)$ является кнезеровским, определенным на полупрямой, значит, $\tilde{x} = +\infty$, и решение вместе со всеми своими производными стремится к нулю на бесконечности [3]. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$. Введем обозначение $V = (y(0))^{\frac{1}{k+1}} > 0$. Покажем, что для всех $x \in (0, \tilde{x})$, справедливо

$$-\frac{V^{k+1}}{x} < y'(x). \tag{2.3}$$

Действительно, по теореме Лагранжа существует точка $s \in (0, x)$, для которой $y'(s)\, x = y(x) - y(0)$. Поскольку для всех $x \in (0, \tilde{x})$ выполнено $y(x) > 0$, то

$$y(x) - y(0) > -y(0) = -V^{k+1}.$$

Кроме того, в силу уравнения (2.1) вторая производная положительна, тогда $y'(x)$ возрастает на интервале $(0,\, \tilde{x})$, и, значит,

$$y'(x)\, x > y'(s)\, x > -V^{k+1},$$

и мы получаем требуемую оценку (2.3).

Рассмотрим точку $x_1 \in (0,\, \tilde{x})$, в которой $y(x_1) = \frac{V^{k+1}}{2}$. Такая точка существует, так как кнезеровское решение стремится к нулю на бесконечности. Для всех $x \in [0,\, x_1]$ справедливо двойное неравенство

$$\frac{V^{k+1}}{2} \le y(x) \le V^{k+1}.$$

Далее рассмотрим отрезок $\left[\frac{x_1}{2},\, x_1\right]$. По теореме Лагранжа существует точка $s \in \left(\frac{x_1}{2},\, x_1\right)$, для которой $y''(s)\, \frac{x_1}{2} = y'(x_1) - y'\left(\frac{x_1}{2}\right)$. Заметим, что $y'(x) < 0$ на рассматриваемом интервале, и поскольку справедливо неравенство (2.3), то

$$\frac{2V^{k+1}}{x_1} > -y'\left(\frac{x_1}{2}\right) > y'(x_1) - y'\left(\frac{x_1}{2}\right) = \frac{x_1}{2}\, y''(s).$$

На интервале $\left(\frac{x_1}{2},\, x_1\right)$ решение уравнения (2.1) уменьшается не более чем в два раза, поэтому $y^k(s) \ge \frac{V^{k^2+k}}{2^k}$ для любого $s \in \left(\frac{x_1}{2},\, x_1\right)$. Тогда получаем

$$\frac{2V^{k+1}}{x_1} > \frac{x_1}{2}\, y''(s) \ge \frac{m\, x_1}{2}\, y^k(s) \ge \frac{m\, x_1}{2}\, 2^{-k}\, V^{k^2+k},$$

и

$$x_1^2 < \frac{2^{k+2}\, V^{1-k^2}}{m},$$

$$x_1 < \sqrt{\frac{2^{k+2}}{m}}\, V^{\frac{1-k^2}{2}}.$$

Таким образом, существует такая положительная константа $\tilde{\nu}$, зависящая только от m и k, что точка x_1 удовлетворяет неравенству

$$x_1 < \left(\tilde{\nu}\, y(0)\right)^{\frac{1-k}{2}}.$$

Далее построим последовательность точек $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \ldots,$ выберем

$x_0 = 0$, а $y(x_i) = \frac{y(x_{i-1})}{2}$. Тогда

$$x_{i+1} - x_i < (\tilde{\nu}\, y(x_i))^{\frac{1-k}{2}} = \left(\frac{\tilde{\nu}\, y(0)}{2^i}\right)^{\frac{1-k}{2}} = 2^{-\frac{i(1-k)}{2}} \, (\tilde{\nu}\, y(0))^{\frac{1-k}{2}},$$

а, значит,

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(x_{i+1} - x_i) \le (\tilde{\nu}\, y(0))^{\frac{1-k}{2}} \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-\frac{i(1-k)}{2}} < +\infty.$$

При этом $\tilde{x} = \lim\limits_{i\to+\infty} x_i < +\infty$, получаем противоречие. Следовательно, возможны три случая:

1. Существует конечное значение x^*, в котором $y(x^*) = 0$, $y'(x^*) \neq 0$.
2. Существует конечное значение x^*, в котором $y(x^*) \neq 0$, $y'(x^*) = 0$.
3. Существует конечное значение x^*, в котором $\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x) = \lim\limits_{x\to x^*-0} y'(x) = 0$.

В первом и третьем случаях, повторяя приведенные выше рассуждения, получаем

$$x^* = \sum_{i=0}^{+\infty}(x_{i+1} - x_i) \le (\nu\, y(0))^{\frac{1-k}{2}}$$

для некоторой положительной константы ν, зависящей только от m и k.

Константа выписывается в явном виде:

$$\nu(m,\, k) = \left(\frac{m}{2^{k+2}}\left(1 - 2^{-\frac{1-k}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Перейдем к рассмотрению второго случая. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$. Введем обозначение $y'(0) = -W^{k+1} < 0$, $W > 0$. Рассмотрим точку $x_1' \in (0,\, \tilde{x})$, в которой $y'(x_1') = -\frac{W^{k+1}}{2}$. Для всех $x \in [0,\, x_1']$ справедливо двойное неравенство

$$-W^{k+1} \le y'(x) \le -\frac{W^{k+1}}{2}.$$

Далее рассмотрим отрезок $\left[\frac{x_1'}{2},\, x_1'\right]$. По теореме Лагранжа существует точка

$s \in \left(\frac{x_1'}{2},\, x_1'\right)$, для которой $y'(s)\,\frac{x_1'}{2} = y(x_1') - y\left(\frac{x_1'}{2}\right)$. Так как $y(x_1') > 0$, то

$$y\left(\frac{x_1'}{2}\right) > y\left(\frac{x_1'}{2}\right) - y(x_1') = -y'(s)\,\frac{x_1'}{2}.$$

На интервале $\left(\frac{x_1'}{2},\, x_1'\right)$ производная увеличилась не более чем в два раза, поэтому $-y'(s) > \frac{W^{k+1}}{2}$ для любого $s \in \left(\frac{x_1'}{2},\, x_1'\right)$. Тогда получаем

$$y\left(\frac{x_1'}{2}\right) > -y'(s)\,\frac{x_1'}{2} > \frac{x_1'\,W^{k+1}}{4}.$$

Кроме того, в силу теоремы Лагранжа существует точка $s' \in \left(0,\, \frac{x_1'}{2}\right)$, для которой

$$y''(s')\,\frac{x_1'}{2} = y'\left(\frac{x_1'}{2}\right) - y'(0) = y'\left(\frac{x_1'}{2}\right) + W^{k+1} < \frac{W^{k+1}}{2}.$$

С другой стороны, решение $y(x)$ убывает, поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{W^{k+1}}{2} > y''(s')\,\frac{x_1'}{2} \geq m\,y^k(s')\,\frac{x_1'}{2} > m\,y^k\left(\frac{x_1'}{2}\right)\frac{x_1'}{2} > m\left(\frac{x_1'\,W^{k+1}}{4}\right)^k\frac{x_1'}{2}.$$

Тогда получаем

$$(x_1')^{k+1}\;\frac{m}{4^k}\,W^{k(k+1)} < W^{k+1}$$

и

$$x_1' < \left(\frac{4^k}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}}\,W^{1-k}.$$

Таким образом, существует такая положительная константа $\tilde{\eta}$, зависящая только от m и k, что точка x_1' удовлетворяет неравенству

$$x_1' < \left(\tilde{\eta}\,|y'(0)|\right)^{\frac{1-k}{1+k}}.$$

Далее построим последовательность $\{x_i'\}$, $i = 0, 1, \ldots$, выберем $x_0' = 0$, а

$y'(x'_i) = \frac{y'(x'_{i-1})}{2}$. Тогда

$$x'_{i+1} - x'_i < (\tilde{\eta}\,|y'(x_i)|)^{\frac{1-k}{1+k}} = \left(\tilde{\eta}\left|\frac{y'(0)}{2^i}\right|\right)^{\frac{1-k}{1+k}} = 2^{-\frac{i(1-k)}{1+k}}\,(\tilde{\eta}\,|y'(0)|)^{\frac{1-k}{1+k}},$$

а, значит,

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(x'_{i+1} - x'_i) < (\tilde{\eta}\,|y'(0)|)^{\frac{1-k}{1+k}}\sum_{i=0}^{+\infty}2^{-\frac{i(1-k)}{1+k}} < +\infty.$$

При этом $x^* = \lim\limits_{i\to+\infty} x'_i < +\infty$, следовательно,

$$x^* = \sum_{i=0}^{+\infty}(x'_{i+1} - x'_i) \le (\eta\,|y'(0)|)^{\frac{1-k}{1+k}}$$

для некоторой положительной константы η, зависящей только от m и k.

Константа выписывается в явном виде:

$$\eta(m,\,k) = \left(\frac{m}{4^k}\left(1 - 2^{-\frac{1-k}{1+k}}\right)^{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Лемма 2.1 доказана.

В первой главе при доказательстве лемм 1.1 и 1.2 было установлено, что решения уравнения (2.1) могут иметь не более одного нуля или экстремума, что справедливо и при $0 < k < 1$, поэтому очевидным образом получаем справедливость следующего утверждения:

Следствие 2.1. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x,\,u,\,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам (2.2). Тогда любое μ–решение уравнения (2.1) либо имеет ровно один нуль, либо ровно один экстремум, либо вместе со своей производной стремится к нулю в граничной точке области определения.*

Далее установим непрерывную зависимость положения нуля, экстремума и граничной точки области определения от начальных условий.

Теорема 2.1. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x,\,u,\,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам (2.2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 > 0$ и $y_1 < 0$, $z_0 > 0$ и $z_1 < 0$, для решений*

$y(x)$ и $z(x)$ уравнения (2.1) с начальными условиями

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} z(x_0) = z_0, \\ z'(x_0) = z_1, \end{cases} \tag{2.5}$$

соответственно, у которых соответственно существуют $\lim\limits_{x \to x_1^* - 0} y^{(i)}(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x \to x_2^* - 0} z^{(i)}(x) = 0$, $i \in \{0,\, 1\}$, $x_0 < x_1^* < +\infty$, $x_0 < x_2^* < +\infty$, *справедливо* $|x_2^* - x_1^*| < \varepsilon$.

Доказательство теоремы 2.1.

Проведем доказательство для $i = 0$, случай $i = 1$ рассматривается аналогично. Пусть $y(x)$ — μ–решение задачи Коши (2.1), (2.4). Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\tilde{y}_0 < y_1$, что $0 < \tilde{y}_0 < \frac{1}{\nu}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{2}{1-k}}$, где $\nu = \nu(m,k)$ — константа из леммы 2.1. Так как $y(x) \to 0$ при $x \to x_1^* - 0$, то существует точка $\tilde{x}_0 \in (x_0,\, x_1^*)$, в которой $y(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0 > 0$ и $(\nu\, \tilde{y}_0))^{\frac{1-k}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем $\tilde{\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{2}{1-k}} - \tilde{y}_0\right) > 0$. Тогда справедлива цепочка неравенств:

$$\tilde{\delta} < \frac{1}{\nu}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{2}{1-k}} - \tilde{y}_0 \Rightarrow \tilde{y}_0 + \tilde{\delta} < \frac{1}{\nu}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{2}{1-k}} \Rightarrow \left(\nu\left(\tilde{y}_0 + \tilde{\delta}\right)\right)^{\frac{1-k}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим $z(x)$ — решение задачи Коши (2.1), (2.5). В силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий для любого $\tilde{\delta}$ существует такое δ, что если $|y_0 - z_0| < \delta$, $|y_1 - z_1| < \delta$, то $|y(\tilde{x}_0) - z(\tilde{x}_0)| < \tilde{\delta}$, $|y'(\tilde{x}_0) - z'(\tilde{x}_0)| < \tilde{\delta}$, причем $z(x)$ можно продолжить до $\tilde{x}_0$. Введем обозначение $\tilde{z}_0 = z(\tilde{x}_0) \geq 0$. Так как $\tilde{z}_0 < \tilde{y}_0 + \tilde{\delta}$, то

$$(\nu\, \tilde{z}_0)^{\frac{1-k}{2}} < \left(\nu\left(\tilde{y}_0 + \tilde{\delta}\right)\right)^{\frac{1-k}{2}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

и в силу леммы 2.1 справедлива оценка:

$$|x_1^* - x_2^*| \leq |x_1^* - \tilde{x}_0| + |x_2^* - \tilde{x}_0| \leq (\nu\, \tilde{y}_0)^{\frac{1-k}{2}} + (\nu\, \tilde{z}_0)^{\frac{1-k}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. *Результаты теоремы 2.1 в силу замечания 1.1 из первой главы могут быть обобщены следующим образом:*

1. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам (2.2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 < 0$ и $y_1 > 0$, $z_0 < 0$ и $z_1 > 0$, для решений $y(x)$ и $z(x)$ уравнения (2.1) с начальными условиями (2.4) и (2.5) соответственно, у которых соответственно существуют $\lim\limits_{x\to x_1^*-0} y^{(i)}(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_2^*-0} z^{(i)}(x) = 0$, $i \in \{0, 1\}$, $x_0 < x_1^* < +\infty$, $x_0 < x_2^* < +\infty$, справедливо $|x_2^* - x_1^*| < \varepsilon$.*

2. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам (2.2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 > 0$ и $y_1 > 0$, $z_0 > 0$ и $z_1 > 0$, для решений $y(x)$ и $z(x)$ уравнения (2.1) с начальными условиями (2.4) и (2.5) соответственно, у которых соответственно существуют $\lim\limits_{x\to x_{1*}+0} y^{(i)}(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_{2*}+0} z^{(i)}(x) = 0$, $i \in \{0, 1\}$, $-\infty < x_{1*} < x_0$, $-\infty < x_{2*} < x_0$, справедливо $|x_{2*} - x_{1*}| < \varepsilon$.*

3. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам (2.2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 < 0$ и $y_1 < 0$, $z_0 < 0$ и $z_1 < 0$, для решений $y(x)$ и $z(x)$ уравнения (2.1) с начальными условиями (2.4) и (2.5) соответственно, у которых соответственно существуют $\lim\limits_{x\to x_{1*}+0} y^{(i)}(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_{2*}+0} z^{(i)}(x) = 0$, $i \in \{0, 1\}$, $-\infty < x_{1*} < x_0$, $-\infty < x_{2*} < x_0$, справедливо $|x_{2*} - x_{1*}| < \varepsilon$.*

2.2 Асимптотическое поведение решений

В силу замечания 1.1 из первой главы исследуем асимптотическое поведение положительных μ–решений уравнения (2.1) вблизи правой границы области определения.

Лемма 2.2. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам (2.2) и имеет конечный предел $p_0 > 0$ при $x \to +\infty$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$. Тогда любое μ–решение $y(x)$ уравнения (2.1) с неотрицательными и не равными одновременно нулю начальными* *условиями имеет следующий асимптотический вид:*

$$y(x) = C(p_0)x^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to +\infty, \tag{2.6}$$

где

$$\alpha = \frac{2}{k-1} < 0, \quad C(p) = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{p}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{p(k-1)^2}{2(k+1)}\right)^{\frac{1}{1-k}}. \tag{2.7}$$

Доказательство леммы 2.2.

Пусть $y(x)$ — μ–решение уравнения (2.1) с неотрицательными и не равными одновременно нулю начальными условиями, тогда в некоторой точке x_0 справедливо $y(x_0) = y_0 > 0$, $y'(x_0) = y_1 > 0$, и при $x > x_0$ рассматриваемое решение положительно и возрастает. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $y(x)$ — положительное μ–решение, определенное на $[x_0, \tilde{x})$, $\tilde{x} \leq +\infty$. Используем обозначения из первой главы: $\beta = 1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{k+1}{2} > 0$, $w = y'\, y^{-\beta}$. Тогда любому положительному вместе со своей первой производной решению уравнения (2.1) соответствует некоторая кривая w в $\mathbb{R}_+$. Параметризуем эту кривую переменной

$$t = \int\limits_{x_0}^{x} y^{\frac{1}{\alpha}}(s)\, ds.$$

Заметим, что $t \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Действительно, в силу оценок (2.2) имеем $y'\, y'' \leq M\, y^k\, y'$, тогда справедливо $y'^2 \leq \frac{2M}{k+1}\, y^{k+1} + y_1^2$, значит, $y' \leq Cy^{\frac{k+1}{2}}$ для некоторой константы $C > 0$. Разделим переменные и проинтегрируем последнее неравенство на $[x_0, x]$, $x < \tilde{x}$:

$$\frac{1}{-\frac{k+1}{2}+1}\left(y^{-\frac{k+1}{2}+1}(x) - y_0^{-\frac{k+1}{2}+1}\right) \leq C(x - x_0),$$

$$y^{\frac{1-k}{2}}(x) \leq \frac{C(1-k)}{2}(x - x_0) + y_0^{\frac{1-k}{2}},$$

$$y^{\frac{k-1}{2}}(x) \geq \frac{1}{\frac{C(1-k)}{2}(x - x_0) + y_0^{\frac{1-k}{2}}},$$

и тогда

$$t = \int\limits_{x_0}^{x} y^{\frac{1}{\alpha}}(s)\, ds \geq \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{\frac{C(1-k)}{2}(s-x_0) + y_0^{\frac{1-k}{2}}}\, ds =$$

$$= \frac{2}{C(1-k)} \left(\ln\left(\frac{C(1-k)}{2}(x-x_0) + y_0^{\frac{1-k}{2}} \right) - \ln y_0^{\frac{1-k}{2}} \right).$$

Следовательно, устремляя $x \to +\infty$, получаем, что $t \to +\infty$.

Как и в случае регулярной нелинейности функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{w} = \varphi(t) - \beta w^2, \tag{2.8}$$

где $\varphi(t)$ — композиция функции $p\,(x,\, y(x),\, y'(x))$ и функции, обратной к функции $t(x)$.

Пусть теперь $y(x)$ — μ–решение уравнения (2.1) при $p \equiv p_0$:

$$y'' = p_0|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad 0 < k < 1. \tag{2.9}$$

В этом случае функция w как функция от t удовлетворяет уравнению

$$\dot{w} = p_0 - \beta w^2. \tag{2.10}$$

Обозначим через $a = \sqrt{\frac{p_0}{\beta}}$ единственную неподвижную точку этого уравнения в $\mathbb{R}_+$, а через $\tilde{a} = -\sqrt{\frac{p_0}{\beta}}$ единственную неподвижную точку в $\mathbb{R}_-$.

Как и в первой главе, справедливы следующие утверждения:

Лемма 2.3. *Пусть $w(t)$ — положительное решение уравнения* (2.10). *Тогда $w(t) \to a$ при $t \to +\infty$.*

Лемма 2.4. *Множество предельных точек решений $w(t)$ уравнения* (2.8) *состоит из траекторий решений уравнения* (2.10).

Вернемся к доказательству леммы 2.2. Как и в предыдущей главе рассмотрим отрезки $\left[a\theta,\, \frac{a}{\theta}\right]$, где $0 < \theta \leq 1$, содержащие точку a. При $\theta = 1$ отрезок вырождается в точку a. Границы отрезков не пересекаются между собой при различных θ, а объединение $\bigcup\limits_{\theta \in (0,\,1]} \left\{a\theta,\, \frac{a}{\theta}\right\}$ совпадает с $\mathbb{R}_+$.

Используя условия (2.2) на функцию $p(x,\, u,\, v)$ и вид уравнения (2.1), покажем, что функция $w = y'\, y^{-\beta}$ как функция от t ограничена при достаточно больших значениях t.

Действительно, $y'\,y'' \geq m\,y^k\,y'$, тогда справедливо $y'^2 \geq \frac{2m}{k+1}(y^{k+1} - y_0^{k+1})$. Значит, существуют положительные константы A_1, B_1, для которых

$$w \geq A_1\sqrt{y^{k+1} - B_1}\,y^{-\frac{k+1}{2}} = A_1\sqrt{1 - \frac{B_1}{y^{k+1}}},$$

и, поскольку $y(x)$ неограниченно возрастает при $x \to +\infty$, то при достаточно больших t получаем $w \geq E_1$.

Покажем ограниченность w сверху. Выше показано, что справедливо неравенство $y'^2 \leq \frac{2M}{k+1}\,y^{k+1} + y_1^2$. Значит, существуют положительные константы A_2, B_2, для которых

$$w \leq A_2\sqrt{y^{k+1} + B_2}\,y^{-\frac{k+1}{2}} = A_2\sqrt{1 + \frac{B_2}{y^{k+1}}},$$

и при достаточно больших t получаем $w \leq E_2$.

Повторяя рассуждения леммы 1.7 из первой главы, получаем, что у функции $w(t)$ существует единственная предельная точка a. А в силу компактности отрезка эта точка является пределом решения $w(t)$ уравнения (1.8) при $t \to +\infty$. Таким образом, возвращаясь к решению $y(x)$ уравнения (2.1), мы получаем

$$\frac{y^{-\beta+1}(x)}{-\beta+1} \sim ax,$$

$$y^{-\frac{1}{\alpha}}(x) \sim \frac{ax}{-\alpha},$$

$$y(x) \sim \left(\frac{ax}{-\alpha}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{-\alpha} x^{-\alpha},$$

и, поскольку

$$\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{p_0}{\beta(-\alpha)^2}\right)^{\frac{1}{1-k}} = \left(\frac{2p_0(1-k)^2}{4(k+1)}\right)^{\frac{1}{1-k}} = \left(\frac{p_0(1-k)^2}{2(k+1)}\right)^{\frac{1}{1-k}} = C(p_0),$$

то $y(x) \sim C(p_0)x^{-\alpha}$ при $x \to +\infty$.

Лемма 2.2 доказана.

И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией доказано существование решений уравнения (2.1), стремящихся к нулю вместе со своей первой производной в граничной точке области определения — *сингулярных решений первого рода* (см. [22]). Авторами получен асимптотический вид решений для $p = p(x)$. Опишем асимптотическое поведение такого типа решений для $p = p(x,\, u,\, v)$.

Лемма 2.5. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (2.2)*. Тогда любое положительное μ–решение уравнения* (2.1)*, стремящееся к нулю вместе со своей первой производной в граничной точке области определения x^*, стремится к нулю с асимптотикой*

$$y(x) = C(p_0)(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0,$$

где константы C, α определяются формулами (2.7)*, $p_0 = p(x^*,\, 0,\, 0)$.*

Доказательство леммы 2.5.

Пусть $y(x)$ — положительное μ–решение уравнения (2.1), определенное на $[x_0,\, x^*)$, стремящееся к нулю вместе со своей первой производной в граничной точке области определения x^*. Введем в $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ отношение эквивалентности, при котором $(z_0;\, z_1) \sim (y_0;\, y_1)$, если существует такая положительная константа λ, что $z_0 = \lambda y_0,\ z_1 = \lambda^\beta y_1$. Как и ранее фактор-пространство $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ по этому отношению топологически эквивалентно окружности

$$S^1 = \{(y_0, y_1)\colon y_0^2 + y_1^2 = 1\}.$$

Введем на окружности структуру гладкого многообразия с помощью карт:

$$u^\pm = \frac{y_1 \operatorname{sgn} y_0}{|y_0|^\beta}, \quad v^\pm = \frac{y_0 \operatorname{sgn} y_1}{|y_1|^{\frac{1}{\beta}}}$$

Заданные таким образом функции не зависят от выбора представителя класса эквивалентности в пространстве $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$.

Рассмотрим на окружности S^1 соответствующую μ–решению $y(x)$ ориентированную кривую L, которая полностью лежит в области $K = \{(y_0,\, y_1) \in S^1\colon y_0 > 0,\, y_1 < 0\}$. Области K соответствуют карты u^+, v^-. Опять же, поскольку окружность S^1 компактна, то L имеет хотя бы одну предельную точку на замыкании K.

Если предельная точка лежит в карте u^+, то по лемме 2.4 через нее проходит траектория L^* некоторого решения $w(t)$ уравнения (2.10), состоящая из предельных точек этой кривой L.

Покажем, что если траектория L^* принадлежит области K, то она сводится к точке $-a$. Действительно, рассматриваемое решение $w(t)$ уравнения (2.10) полностью принадлежит $\mathbb{R}_-$. Как и ранее, эту область можно представить в виде объединения непересекающихся множеств $\left\{-a\theta,\, -\frac{a}{\theta}\right\}$, $0 < \theta \leq 1$, являющихся границами отрезков $\left[-\frac{a}{\theta},\, -a\theta\right]$, содержащих неподвижную точку $-a = -\sqrt{\frac{p_0}{\beta}}$ уравнения (2.10). Любая точка $\tilde{w} \in \mathbb{R}_-$ однозначно определяет такое θ, что $\tilde{w} \in \left\{-a\theta,\, -\frac{a}{\theta}\right\}$, поэтому рассматриваемое решение $w(t)$ уравнения (2.10) однозначно определяет функцию $\theta(t)$.

Повторяя рассуждения доказательства леммы 1.10 из первой главы, нетрудно показать, что ограниченная функция $\theta(t)$ строго убывает, а, значит, стремится к конечному пределу θ^*, где $0 \leq \theta^* \leq 1$. Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть $\theta^* = 1$, тогда траектория L^* сводится к точке $-a$, то есть $\theta(t) \equiv 1$, значит, $w(t) \equiv -a$ и $y'(x)\, y^{-\beta}(x) = -a$.

2. Пусть $0 < \theta^* < 1$. Это означает, что все предельные точки траектории $w(t)$ принадлежат множеству $\{-\frac{a}{\theta^*},\, -a\theta^*\}$, тогда согласно лемме 2.4 должна существовать траектория уравнения (2.10), полностью принадлежащая $\{-\frac{a}{\theta^*},\, -a\theta^*\}$, что невозможно, так как в этом случае $\theta(t)$ не будет строго убывающей.

3. Пусть $\theta^* = 0$. В силу компактности замыкания области K траектория L^* имеет хотя бы одну предельную точку, обозначим ее s^*. Все предельные точки лежат в замыкании области K. Так как $\theta^* = 0$, то либо $w(t) \to +\infty$, либо $w(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Это означает, что предельные точки лежат на границе K, которую обозначим через I_0^-. В этом случае через нее должна проходить траектория $w(t)$ уравнения (2.10), полностью лежащая в I_0^-. Координата точки s^* в этой карте не может быть равна нулю. Действительно, в точке s^* справедливо $\dot{w} = p_0 > 0$, значит, $w(t)$ возрастает, ее координата станет больше нуля и покинет I_0^-, приходим к противоречию. Таким образом, координата точки s^* в карте u^+ должна быть меньше нуля. Это

противоречит тому, что точка s^* лежит в I_0^-. Значит, точка s^* лежит за пределами карты u^+. Если же предельная точка не лежит в u^+, то она принадлежит I_0^- и лежит в карте v^-. Опираясь на доказательство леммы 1.10, вводя новую параметризацию кривых в этой области, также получим, что предельная точка лежит за пределами карты v^-. Значит, случай $\theta^* = 0$ также невозможен.

Таким образом, показано, что если траектория L^* принадлежит области K, то она сводится к точке $-a$. В противном случае траектория L^* принадлежит границе I_0^-, значит, в силу следствия 2.1 существует единственная точка $x_1 > x_0$, в которой $y(x_1) = 0$ или $y'(x_1) = 0$. И траектория L^* выйдет за границы K, а это невозможно, так как и L также должна выйти за пределы K.

Значит, у кривой L на окружности S^1 существует только одна предельная точка, являющаяся пределом. Получаем, что $w(t) \sim -a$ и, следовательно, $y'(x)\, y^{-\beta}(x) \sim -a$ при $x \to x^*$, откуда

$$y(x) \sim \left(\frac{a(x^* - x)}{-\alpha}\right)^{-\alpha} = \left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{-\alpha} (x^* - x)^{-\alpha} = C(p_0)(x^* - x)^{-\alpha}.$$

Лемма 2.5 доказана.

Подведем итог. Учитывая замечание 1.1 из первой главы, леммы 2.2 и 2.5, общей формулировкой полученных результатов будет служить следующая теорема:

Теорема 2.2. *Пусть* $0 < k < 1$, *функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v, *удовлетворяет неравенствам* (2.2) *и имеет следующие пределы:*

1) P_{++} *при* $x \to +\infty$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$;

2) P_{+-} *при* $x \to +\infty$, $u \to -\infty$, $v \to -\infty$;

3) P_{-+} *при* $x \to -\infty$, $u \to +\infty$, $v \to -\infty$;

4) P_{--} *при* $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$;

а также, при любом $c \in \mathbb{R}$, *обозначим* $P_c = p(c, 0, 0)$.

Тогда все μ*–решения уравнения* (2.1) *в соответствии со своим асимптотическим поведением делятся на следующие восемь типов:*

1-2. Заданные на полупрямой $(b, +\infty)$ *положительные и отрицательные стремящиеся к нулю вместе со своей первой производной при* $x \to b + 0$

решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_1(x) = C(P_b)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to b+0,$$

$$y_1(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty,$$

и

$$y_2(x) = -C(P_b)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to b+0,$$

$$y_2(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty.$$

3-4. Заданные на полупрямой $(-\infty, a)$ *положительные и отрицательные стремящиеся к нулю вместе со своей первой производной при* $x \to a-0$ *решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:*

$$y_3(x) = C(P_a)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to a-0,$$

$$y_3(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to -\infty,$$

и

$$y_4(x) = -C(P_a)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to a-0,$$

$$y_4(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to -\infty.$$

5-6. Заданные на всей числовой прямой знакопостоянные решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_5(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty,$$

$$y_5(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to -\infty,$$

и

$$y_6(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty,$$

$$y_6(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to -\infty.$$

7-8. Заданные на всей числовой прямой решения со степенной асимптотикой и разными знаками вблизи обеих границ области определения:

$$y_7(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,, \quad x \to +\infty,$$

$$y_7(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\left(1 + o(1)\right), \quad x \to -\infty,$$

и

$$y_8(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\left(1 + o(1)\right), \quad x \to +\infty,$$

$$y_8(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\left(1 + o(1)\right), \quad x \to -\infty.$$

Замечание 2.2. *Полученная асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения* (2.1) *для* $p = p(x)$ *совпадает с классификацией, приведенной И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией в монографии [22] .*

Замечание 2.3. *При выполнении условий теоремы 2.2 существует* μ*–решение уравнения* (2.1) *каждого из восьми описанных выше типов.*

Доказательство замечания 2.3.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{cases} y'' = p\,(x,\, y,\, y')\ \ |y|^k \operatorname{sgn} y, \quad 0 < k < 1, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией в монографии [22] доказано существование μ–решений уравнения (2.1) типов 1–4.

Зададим начальные условия $y_0 \neq 0$, $y_1 = 0$, тогда в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши в случае сингулярной нелинейности и следствия 2.1 получим решения типов 5 и 6, в зависимости от знака y_0.

Зададим начальные условия $y_0 = 0$, $y_1 \neq 0$, тогда в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши в случае сингулярной нелинейности и следствия 2.1 получим решения типов 7 и 8, в зависимости от знака y_1.

Замечание 2.3 доказано.

Глава 3. О колеблемости решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным положительным потенциалом в случаях регулярной и сингулярной нелинейности

В настоящей главе рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера с положительным потенциалом:

$$y'' + p(x,\, y,\, y')|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \tag{3.1}$$

где $k > 0$, $k \neq 1$, функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам

$$0 < m \le p(x,\, u,\, v) \le M < +\infty. \tag{3.2}$$

Покажем, что все нетривиальные максимально продолженные решения и их первые производные уравнения (3.1) являются колеблющимися, причем нули решений и их первых производных чередуются, и исследуем их асимптотическое поведение вблизи обеих границ области определения.

3.1 Качественные свойства решений

Рассмотрим траектории $\{(y(x),\, y'(x))\} \subset \mathbb{R}^2$, порожденные нетривиальными решениями уравнения (3.1). Разобьем пространство $\mathbb{R}^2$ на четыре пересекающихся только по границам замкнутых множества в соответствии со всевозможными комбинациями знаков обеих координат точек траекторий.

Введем для этих множеств следующие обозначения:

$$\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Пересечения границ множеств обозначим через

$$\begin{bmatrix} + \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} - \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ + \end{bmatrix}.$$

Например,

$$\begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix} = \{(y_0,\, y_1) \in \mathbb{R}^2 : y_0 \geq 0,\ y_1 \leq 0\},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ + \end{bmatrix} = \{(y_0,\, y_1) \in \mathbb{R}^2 : y_0 = 0,\ y_1 \geq 0\}.$$

Покажем, что траектория, порожденная любым нетривиальным решением уравнения (3.1), не может при возрастании и убывании аргумента оставаться в одном из введенных выше множеств (3.3).

В силу замечания 1.1 из первой главы достаточно исследовать поведение максимально продолженных вправо решений уравнения вблизи правой границы области определения.

Лемма 3.1. *Пусть* $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, *функция* $p\,(x,\, u,\, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v, *удовлетворяет неравенствам* (3.2) *и* $y(x)$ *— нетривиальное максимально продолженное решение уравнения* (3.1). *Тогда ни само решение* $y(x)$, *ни его производная* $y'(x)$ *не могут сохранять постоянный знак в окрестности левой и правой границ области определения.*

Доказательство леммы 3.1.

Приведем доказательство для самого решения вблизи правой границы области определения, для первой производной оно проводится аналогично. Предположим, что решение $y(x)$ уравнения (3.1) задано на конечном или бесконечном промежутке $(a,\, b)$ и является положительным в некоторой окрестности точки b. Тогда в силу вида уравнения (3.1) в этой окрестности вторая производная решения отрицательна, а, значит, его первая производная монотонно убывает, и, следовательно, имеет конечный или бесконечный предел при $x \to b - 0$. Это означает, что первая производная является знакопостоянной в некоторой окрестности точки b. Поэтому само решение $y(x)$ монотонно в некоторой окрестности точки b и стремится к некоторому конечному или бесконечному пределу при $x \to b - 0$.

Пусть $b < +\infty$. Если решение $y(x)$ (а, значит, и $y''(x)$) или его первая производная имеет конечный предел, то, интегрируя на конечном промежутке вторую или первую производную соответственно, получим, что в обоих случаях пределы решения и его первой производной должны быть конечными, что противоречит максимальной продолженности решения вправо. Если же пределы решения и его первой производной бесконечны, то они должны иметь одинаковый знак, что противоречит уравнению (3.1).

Пусть теперь $b = +\infty$. Если решение $y(x)$ (а, значит, и $y''(x)$) или его первая производная имеет ненулевой предел, то, интегрируя на всей области области определения вторую или первую производную соответственно, получим бесконечность всех пределов. В этом случае они должны иметь одинаковый знак, что противоречит уравнению (3.1). Если же пределы решения и его первой производной равны нулю, то само решение в окрестности плюс бесконечности положительно и монотонно убывает к нулю, а его первая производная отрицательна и монотонно возрастает к нулю. Это означает, что вторая производная, как и само решение, положительна и убывает к нулю в окрестности плюс бесконечности, что противоречит уравнению (3.1).

Лемма 3.1 доказана.

Теорема 3.1. *Пусть $k \in (0,\,1)\cup(1,\,+\infty)$, функция $p(x,\,u,\,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (3.2). *Тогда все нетривиальные максимально продолженные решения $y(x)$ уравнения* (3.1)*, как и их первые производные, являются колеблющимися при возрастании и при убывании аргумента, причем нули x_j решения и нули x'_j его первой производной чередуются, то есть*

$$\ldots < x_{j-1} < x'_j < x_j < x'_{j+1} < \ldots, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Кроме того, для любого $j \in \mathbb{Z}$ справедливы неравенства:

$$-\sqrt{\frac{M}{m}} \le \frac{y'\left(x_{j+1}\right)}{y'\left(x_j\right)} \le -\sqrt{\frac{m}{M}}.$$

$$-\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}} \le \frac{y\left(x'_{j+1}\right)}{y\left(x'_j\right)} \le -\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Доказательство теоремы 3.1.

Как и в доказательстве леммы 3.1 достаточно рассмотреть поведение максимально продолженных решений при возрастании аргумента.

Покажем, что траектория, порожденная произвольным нетривиальным максимально продолженным решением $y(x)$ уравнения (3.1), при возрастании аргумента может переходить между введенными выше множествами (3.3) только по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix} \\ \Big\uparrow & & \Big\downarrow \\ \begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix} & \longleftarrow & \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} \end{array}. \tag{3.4}$$

Действительно, пусть в некоторый момент точка $(y(x),\ y'(x))$ является внутренней точкой множества $\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}$. Это означает, что $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$, и $y''(x) < 0$ в силу уравнения (3.1). Следовательно, решение $y(x)$ положительно и возрастает, а его первая производная $y'(x)$ положительна и убывает, пока траектория, порожденная решением $y(x)$, лежит во внутренности множества $\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}$. Тогда либо $y'(x)$ обратится в нуль, и соответствующая траектория выйдет на границу $\begin{bmatrix} + \\ 0 \end{bmatrix}$ множества $\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}$, либо $y'(x)$ не обратится в нуль, но будет иметь неотрицательный предел при возрастании аргумента, то есть первая производная будет знакопостоянной. Это противоречит лемме 3.1. Таким образом, возможен только случай, когда траектория, порожденная решением $y(x)$, выходит на границу $\begin{bmatrix} + \\ 0 \end{bmatrix}$, то есть решение $y(x)$ положительно и имеет локальный экстремум в некоторой точке x_0', причем $y''(x_0') < 0$ в силу уравнения (3.1). Тогда для некоторого $\delta > 0$ при $x \in (x_0',\ x_0' + \delta)$ справедливы соотношения $y(x) > 0,\ y'(x) < 0$, таким образом, рассматриваемая траектория попадает во внутренность множества $\begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix}$.

Теперь $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$, и $y''(x) < 0$ и в силу уравнения (3.1). Значит, решение $y(x)$ положительно и убывает, а его производная $y'(x)$ отрицательна и убывает, пока траектория принадлежит внутренности множества $\begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix}$. Вновь в силу леммы 3.1 решение $y(x)$ не может оставаться положительным при возрастании аргумента, а, значит, обратится в нуль в некоторой точке $x_0 > x_0'$, и траектория, порожденная этим решением, выйдет на границу $\begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix}$. Поскольку $y'(x_0) < 0$, то для некоторого $\tilde{\delta} > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \tilde{\delta})$ справедливы соотношения $y(x) < 0$, $y'(x) < 0$, и рассматриваемая траектория попадает во внутренность множества $\begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}$.

Теперь $y(x) < 0$, $y'(x) < 0$. Аналогично показывается, что траектория, порожденная решением $y(x)$, при возрастании аргумента попадает на границу $\begin{bmatrix} - \\ 0 \end{bmatrix}$, то есть в некоторой точке $x_1' > x_0 > x_0'$ решение $y(x)$ имеет локальный минимум. Затем при возрастании аргумента траектория попадает во внутренность множества $\begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix}$, в силу леммы 3.1 выходит на границу $\begin{bmatrix} 0 \\ + \end{bmatrix}$ в некоторой точке $x_1 > x_1' > x_0 > x_0'$, после чего переходит во внутренность множества $\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}$.

Таким образом, любая траектория, порожденная нетривиальным максимально продолженным решением уравнения (3.1), при возрастании аргумента может переходить между множествами (3.3) только по схеме (3.4).

При этом, в силу леммы 3.1 траектория не может оставаться ни в одном из этих множеств при возрастании и убывании аргумента. Таким образом, как и решение $y(x)$ уравнения (3.1), так и его первая производная $y'(x)$ являются колеблющимися, причем нули x_j решения и нули x_j' его первой производной чередуются, то есть

$$\ldots < x_{j-1} < x_j' < x_j < x_{j+1}' < \ldots, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Используя вид уравнения (3.1) и условие (3.2) ограниченности функции $p(x, u, v)$, оценим отношение значений первой производной решения уравнения (3.1) в последовательных нулях x_j и отношение значений решения в его последовательных точках экстремума x_j'.

Без ограничения общности можно считать, что $y'(x_j) < 0$. Заметим, что

$$0 = |y(x_j)|^{k+1} - |y(x_{j+1})|^{k+1} = -(k+1) \int\limits_{y(x_j)}^{y(x_{j+1})} |y|^{k-1} y\, dy,$$

и в силу уравнения (3.1) справедливо

$$0 = -(k+1) \int\limits_{y(x_j)}^{y(x_{j+1})} |y|^{k-1} y\, dy = (k+1) \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')}\, dx =$$

$$= (k+1) \int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} \frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')}\, dx + (k+1) \int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} \frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')}\, dx. \qquad (3.5)$$

Так как $y'(x_j) < 0$, то $y'(x) < 0$ и $y''(x) > 0$ при $x \in (x_j,\, x'_{j+1})$, а при $x \in (x'_{j+1},\, x_{j+1})$ имеем $y'(x) > 0$ и $y''(x) > 0$. То есть $\frac{y''\, y'}{p(x, y, y')} < 0$ при $x \in (x_j,\, x'_{j+1})$ и $\frac{y''\, y'}{p(x, y, y')} > 0$ при $x \in (x'_{j+1},\, x_{j+1})$.

Оценим сверху выражение (3.5):

$$(k+1) \int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} \frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')}\, dx + (k+1) \int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} \frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')}\, dx \le$$

$$\le \frac{k+1}{M} \int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} y''\, y'\, dx + \frac{k+1}{m} \int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} y''\, y'\, dx =$$

$$= \frac{k+1}{M} \int\limits_{y'(x_j)}^{y'(x'_{j+1})} y'\, dy' + \frac{k+1}{m} \int\limits_{y'(x'_{j+1})}^{y'(x_{j+1})} y'\, dy' =$$

$$= \frac{k+1}{2M} \left(y'\right)^2 \Bigg|_{x_j}^{x'_{j+1}} + \frac{k+1}{2m} \left(y'\right)^2 \Bigg|_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} = -\frac{k+1}{2M} \left(y'(x_j)\right)^2 + \frac{k+1}{2m} \left(y'(x_{j+1})\right)^2,$$

откуда

$$\frac{k+1}{2M} \left(y'(x_j)\right)^2 \le \frac{k+1}{2m} \left(y'(x_{j+1})\right)^2,$$

$$\sqrt{\frac{m}{M}}\left|y'(x_j)\right| \le \left|y'(x_{j+1})\right|.$$

Теперь оценим выражение (3.5) снизу:

$$(k+1)\int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} \frac{y''\,y'}{p(x,\,y,\,y')}\,dx + (k+1)\int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} \frac{y''\,y'}{p(x,\,y,\,y')}\,dx \ge$$

$$\ge \frac{k+1}{m}\int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} y''\,y'\,dx + \frac{k+1}{M}\int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} y''\,y'\,dx =$$

$$= \frac{k+1}{m}\int\limits_{y'(x_j)}^{y'(x'_{j+1})} y'\,dy' + \frac{k+1}{M}\int\limits_{y'(x'_{j+1})}^{y'(x_{j+1})} y'\,dy' =$$

$$= \frac{k+1}{2m}(y')^2\Bigg|_{x_j}^{x'_{j+1}} + \frac{k+1}{2M}(y')^2\Bigg|_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} = -\frac{k+1}{2m}\left(y'(x_j)\right)^2 + \frac{k+1}{2M}\left(y'(x_{j+1})\right)^2,$$

откуда

$$\frac{k+1}{2m}\left(y'(x_j)\right)^2 \ge \frac{k+1}{2M}\left(y'(x_{j+1})\right)^2,$$

$$\sqrt{\frac{M}{m}}\left|y'(x_j)\right| \ge \left|y'(x_{j+1})\right|.$$

Таким образом,

$$\sqrt{\frac{m}{M}}\ \left|y'\left(x_j\right)\right| \le \left|y'\left(x_{j+1}\right)\right| \le \sqrt{\frac{M}{m}}\ \left|y'\left(x_j\right)\right| \tag{3.6}$$

и

$$\sqrt{\frac{m}{M}} \le \left|\frac{y'\left(x_{j+1}\right)}{y'\left(x_j\right)}\right| \le \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Поскольку нули x_j и экстремумы x'_j нетривиального максимально продолженного решения уравнения (3.1) чередуются, то $y'(x_{j+1})\,y'(x_j) < 0$ для любого $j \in \mathbb{Z}$, и получаем требуемое:

$$-\sqrt{\frac{M}{m}} \le \frac{y'\left(x_{j+1}\right)}{y'\left(x_j\right)} \le -\sqrt{\frac{m}{M}}.$$

Далее перейдем к получению второй оценки теоремы. Имеем $y(x'_j) > 0$. Заметим, что

$$|y(x'_j)|^{k+1} = |y(x'_j)|^{k+1} - |y(x_j)|^{k+1} = -(k+1)\int\limits_{y(x'_j)}^{y(x_j)} |y|^{k-1} y\, dy = (k+1)\int\limits_{x'_j}^{x_j} \frac{y''\, y'\, dx}{p(x,\, y,\, y')}.$$

Поскольку $y(x'_j) > 0$, то на интервале (x'_j, x_j) имеем $y'(x) < 0$ и $y''(x) < 0$, то есть $\frac{y''\, y'}{p(x, y, y')} > 0$ при $x \in (x'_j,\, x_j)$. В этом случае полученное выражение можно оценить следующим образом:

$$\frac{k+1}{M}\int\limits_{x'_j}^{x_j} y''\, y'\, dx \leq (k+1)\int\limits_{x'_j}^{x_j} \frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')}\, dx \leq \frac{k+1}{m}\int\limits_{x'_j}^{x_j} y''\, y'\, dx,$$

тогда

$$\frac{k+1}{M}\int\limits_{y'(x'_j)}^{y'(x_j)} y'\, dy' \leq |y(x'_j)|^{k+1} \leq \frac{k+1}{m}\int\limits_{y'(x'_j)}^{y'(x_j)} y'\, dy',$$

и

$$\frac{k+1}{2M}\left(y'(x_j)\right)^2 \leq |y(x'_j)|^{k+1} \leq \frac{k+1}{2m}\left(y'(x_j)\right)^2. \tag{3.7}$$

Повторяя теперь рассуждения на интервале $(x_j,\, x'_{j+1})$, получим аналогичные (3.7) оценки:

$$\frac{k+1}{2M}\left(y'(x_j)\right)^2 \leq |y(x'_{j+1})|^{k+1} \leq \frac{k+1}{2m}\left(y'(x_j)\right)^2.$$

и тогда

$$\frac{2m}{k+1}|y(x'_{j+1})|^{k+1} \leq \left(y'(x_j)\right)^2 \leq \frac{2M}{k+1}|y(x'_{j+1})|^{k+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{m}{M}|y(x'_{j+1})|^{k+1} \leq |y(x'_j)|^{k+1} \leq \frac{M}{m}|y(x'_{j+1})|^{k+1},$$

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{k+1}}\left|y(x'_{j+1})\right| \leq |y(x'_j)| \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}}\left|y(x'_{j+1})\right|,$$

и
$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{k+1}} \le \left|\frac{y\left(x'_j\right)}{y\left(x'_{j+1}\right)}\right| \le \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$
или
$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{k+1}} \le \left|\frac{y\left(x'_{j+1}\right)}{y\left(x'_j\right)}\right| \le \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Поскольку нули x_j и экстремумы x'_j нетривиального максимально продолженного решения уравнения (3.1) чередуются, то $y(x'_{j+1})\, y(x'_j) < 0$ для любого $j \in \mathbb{Z}$, и получаем требуемое:
$$-\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}} \le \frac{y\left(x'_{j+1}\right)}{y\left(x'_j\right)} \le -\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Теорема 3.1 доказана.

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 3.1, Т. А. Корчемкиной установлена справедливость следующего утверждения:

Замечание 3.1. [100] *Обозначим*
$$m_j = \min_{x\in[x_j,\, x_{j+1}]} p\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right),\ M_j = \max_{x\in[x_j,\, x_{j+1}]} p\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right), \quad j \in \mathbb{Z}.$$
Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$ справедливы следующие неравенства:
$$-\sqrt{\frac{M_j}{m_j}} \le \frac{y'\left(x_{j+1}\right)}{y'\left(x_j\right)} \le -\sqrt{\frac{m_j}{M_j}},$$
$$-\left(\frac{M_j^2}{m_j\, m_{j-1}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \le \frac{y\left(x'_j\right)}{y\left(x'_{j+1}\right)} \le -\left(\frac{m_j^2}{M_j\, M_{j-1}}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Следствие 3.1. *Пусть $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, функция $p = p(y)$ липшицева и удовлетворяет неравенствам* (3.2), *тогда все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения* (3.1) *являются периодическими.*

Доказательство следствия 3.1.

Без ограничения общности можно считать, что $y(x) \ge 0$ на $[x_j,\, x_{j+1}]$. Для удобства используем обозначения: $H_j = |y(x'_j)|$, $v_j = |y'(x_j)|$, $j \in \mathbb{Z}$. Проинтегрируем уравнение (3.1), домноженное на y' на промежутках $[x_j,\, x'_{j+1}]$,

$[x'_{j+1},\, x_{j+1}]$ и $[x_{j+2},\, x'_{j+3}]$, тогда соответственно получим

$$v_j^2 = 2\int\limits_0^{H_{j+1}} p(y)\, y^k\, dy, \quad -v_{j+1}^2 = 2\int\limits_{H_{j+1}}^{0} p(y)\, y^k\, dy, \quad v_{j+2}^2 = 2\int\limits_0^{H_{j+2}} p(y)\, y^k\, dy.$$

и, следовательно,

$$|y'(x_{j+1})| = |y'(x_j)| = \ldots = |y'(x_0)|, \quad y(x'_{j+2}) = y(x'_j),$$

В частности, для любого $j \in \mathbb{Z}$ имеем

$$y\left(x_j\right) = y\left(x_{j+2}\right) = 0, \quad y'\left(x_j\right) = y'\left(x_{j+2}\right),$$

и

$$y\left(x'_j\right) = y\left(x'_{j+2}\right), \quad y'\left(x'_j\right) = y'\left(x'_{j+2}\right) = 0.$$

Рассмотрим нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ задачи Коши для уравнения (3.1) при $p = p(y)$ с начальными условиями

$$y\left(x_j\right) = 0, \quad y'\left(x_j\right) = B,\ B \neq 0.$$

Обозначим $T = x_{j+2} - x_j$. Поскольку $y(x)$ — решение уравнения (3.1), то

$$y''(x+T) + p(y(x+T))|y(x+T)|^k \operatorname{sgn} y(x+T) = 0.$$

следовательно, $y(x+T)$ также является решением рассматриваемого уравнения. Так как в точке x_j справедливо:

$$y\left(x_j + T\right) = y\left(x_{j+2}\right) = 0, \quad y'\left(x_j\right) = y'\left(x_j + T\right) = y'\left(x_{j+2}\right) = B,$$

то $y(x)$ и $y(x+T)$ — два решения одной и той же задачи Коши, и в силу теоремы существования и единственности $y(x) \equiv y(x+T)$. Таким образом, $y(x)$ — периодическое решение.

Следствие 3.1 доказано.

3.2 Асимптотическое поведение решений

Используя результаты теоремы 3.1, исследуем поведение нетривиальных максимально продолженных решений уравнения (3.1) вблизи обеих границ области определения.

Теорема 3.2. *Пусть* $k \in (0,\,1) \cup (1,\,+\infty)$, *функция* $p(x,\,u,\,v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v, *удовлетворяет неравенствам* (3.2), *кроме того, равномерно по* u, v *стремится к* $p_+ > 0$ *при* $x \to +\infty$ *и к* $p_- > 0$ *при* $x \to -\infty$.

Пусть $y(x)$ — *нетривиальное максимально продолженное решение уравнения* (3.1), *у которого существуют конечные положительные пределы* $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y'(x_j)|$. *Тогда* $y(x)$ *определено на всей числовой прямой, и при* $j \to \pm\infty$ *справедливы соотношения:*

1) $\frac{y'(x_{j+1})}{y'(x_j)} \to -1;$

2) $\frac{y(x'_{j+1})}{y(x'_j)} \to -1;$

3) $\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}} \to 1.$

Доказательство теоремы 3.2.

Осуществляя предельный переход в оценках, приведенных в замечании 3.1, получаем справедливость первых двух утверждений теоремы. Рассмотрим случай $j \to +\infty$ (случай $j \to -\infty$ исследуется аналогично). Введем обозначения:

$$Q = \lim_{j\to+\infty} |y'(x_j)|,\ H_j = |y(x'_j)|,\ v_j = |y'(x_j)|, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Получим оценку снизу на расстояние между соседними нулями x_j и x_{j+1}. Без ограничения общности можно считать, что $y(x) \geq 0$ на $[x_j,\, x_{j+1}]$. Тогда в силу уравнения (3.1) и условия (3.2) на отрезке $[x_j,\, x_{j+1}]$ справедливо:

$$-y'' = p(x,\, y,\, y')\, y^k \leq M H_{j+1}^k.$$

Проинтегрируем полученное неравенство на $[x_j,\, x'_{j+1}]$:

$$v_j \leq M H_{j+1}^k (x'_{j+1} - x_j).$$

Аналогично, интегрируя то же неравенство на $[x'_{j+1},\, x_{j+1}]$, получим

$$v_{j+1} \le MH_{j+1}^k(x_{j+1} - x'_{j+1}).$$

Используя оценки (3.6) и (3.7), получаем следующую цепочку неравенств:

$$x_{j+1} - x_j = x_{j+1} - x'_{j+1} + x'_{j+1} - x_j \ge \frac{1}{MH_{j+1}^k}\,(v_j + v_{j+1}) \ge$$

$$\ge \frac{1}{MH_{j+1}^k}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+1\right)v_{j+1} \ge \frac{1}{M}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+1\right)\left(\frac{2m}{k+1}\right)^{\frac{k}{k+1}}(v_{j+1})^{1-\frac{2k}{k+1}},$$

таким образом,

$$x_{j+1} - x_j \ge \frac{1}{M}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+1\right)\left(\frac{2m}{k+1}\right)^{\frac{k}{k+1}}(v_{j+1})^{-\frac{k-1}{k+1}}. \tag{3.9}$$

Далее рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} z'' + (\phi(x) + p_+)|z|^k \operatorname{sgn} z = 0, \\ z(0) = 0, \\ z'(0) = q, \end{cases}$$

где $\phi(x) \in C_0\,[0, +\infty)$ (то есть $\phi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$) и $\phi(x)+p_+$ удовлетворяет условиям (3.2). По теореме Пикара решение $z(q,\phi)$ рассматриваемой задачи Коши существует и единственно, и в силу леммы 3.1 это решение является колеблющимся. Обозначим через $\xi_1(q,\phi)$ первый нуль решения справа от оси ординат, $\xi_2(q,\phi)$ — второй нуль решения справа от оси ординат. По теореме о неявной функции и теореме о непрерывной зависимости решения уравнения от начальных условий и правой части, функции $\xi_1(q,\phi)$ и $\xi_2(q,\phi)$ являются непрерывными.

Возьмем $z_j(x) = l_j\, y(x + x_j),\ l_j = \pm 1$. Тогда $z_j(x)$ являются решениями уравнений

$$z_j'' + (\phi_j(x) + p_+)|z_j|^k \operatorname{sgn} z_j = 0,$$

где

$$\phi_j(x) = p(x + x_j,\, y(x + x_j),\, y'(x + x_j)) - p_+,$$

причем $z_j(x)$ удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$z_j(0) = l_j\, y(x_j) = 0, \quad z_j'(0) = l_j\, y'(x_j) \neq 0.$$

Обозначим $z_j'(0) = q_j$. Заметим, что в силу условий теоремы и оценки (3.9) имеем $\phi_j(x) \to 0$ при $j \to +\infty$ в пространстве $C_0\,[0, +\infty)$.

Найдем положительные нули $z_j(x)$. Если $z_j(x) = 0$, то $y(x + x_j) = 0$, поэтому первый нуль справа от оси ординат $\xi_1(q_j, \phi_j)$ удовлетворяет условию $x + x_j = x_{j+1}$. Аналогично, второй нуль $\xi_2(q_j, \phi_j)$ удовлетворяет условию $x + x_j = x_{j+2}$, то есть

$$x_{j+1} = x_j + \xi_1(q_j, \phi_j), \quad x_{j+2} = x_j + \xi_2(q_j, \phi_j).$$

Выберем $l_j = \operatorname{sgn} y'(x_j) \neq 0$, тогда

$$q_j = y'(x_j) \operatorname{sgn} y'(x_j) = |y'(x_j)| \to Q \text{ при } j \to +\infty,$$

поэтому, используя непрерывность функций $\xi_1(q, \phi)$ и $\xi_2(q, \phi)$, при $j \to +\infty$ получаем

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+2} - x_{j+1}} = \frac{\xi_1(q_j, \phi_j)}{\xi_2(q_j, \phi_j) - \xi_1(q_j, \phi_j)} \to$$
$$\to \frac{\xi_1(Q, 0)}{\xi_2(Q, 0) - \xi_1(Q, 0)} = \frac{\tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j}{\tilde{x}_{j+2} - \tilde{x}_{j+1}} = 1,$$

где $\tilde{x}_j$ — нули колеблющегося периодического решения уравнения

$$y'' + p_+ |y|^k \operatorname{sgn} y = 0,$$

то есть при $\phi(x) \equiv 0$.

Аналогично исследуя случай $j \to -\infty$, мы получим, что отношение расстояний между соседними нулями решения $y(x)$ стабилизируется при $j \to \pm\infty$, и в силу оценки (3.9) справедливо $\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} (x_{j+1} - x_j) = +\infty$, следовательно, рассматриваемое решение уравнения (3.1) определено на всей числовой прямой.

Теорема 3.2 доказана.

Заметим, что из оценки (3.9) очевидным образом вытекает следующий результат:

Следствие 3.2. *Пусть функция* $p(x, u, v)$ *удовлетворяет условиям теоремы 3.2 и* $y(x)$ *— нетривиальное максимально продолженное решение уравнения* (3.1). *Если при* $0 < k < 1$ *существует бесконечный предел, а при* $k > 1$ *соответственно нулевой предел* $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y'(x_j)|$, *то* $y(x)$ *определено на всей числовой прямой, и справедливо* $\lim\limits_{j\to\pm\infty} (x_{j+1} - x_j) = +\infty$.

Таким образом, из теоремы 3.2 и следствия 3.2 следует, что для $k > 1$ при условии существования конечных пределов $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y'(x_j)|$ решение уравнения (3.1) определено на всей числовой прямой.

Отметим, что в некоторых частных случаях для продолжаемости колеблющегося решения на всю числовую прямую и $\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}} \to 1$ при $j \to \pm\infty$, условие существования конечных положительных пределов $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y'(x_j)|$ можно заменить дополнительными условиями на потенциал $p = p(x, u, v)$.

1. Пусть $k \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, функция $p = p(x)$ непрерывна, монотонна и удовлетворяет неравенствам (3.2). Покажем, что в этом случае существуют конечные положительные пределы $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y'(x_j)|$.

Достаточно рассмотреть только случай $j \to +\infty$. Пусть, например, функция $p(x)$ не возрастает. Тогда $m_j = M_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, и в силу замечания 3.1 имеем

$$|y'(x_{j+1})| \le \sqrt{\frac{M_j}{m_j}}|y'(x_j)| = \sqrt{\frac{M_j \dots M_0}{m_j \dots m_0}}|y'(x_0)| = \sqrt{\frac{M_0}{m_j}}|y'(x_0)| \le \sqrt{\frac{M_0}{m}}|y'(x_0)|,$$

$$|y'(x_{j+1})| \ge \sqrt{\frac{m_j}{M_j}}|y'(x_j)| \ge \sqrt{\frac{m}{M_0}}|y'(x_0)|.$$

Если же функция $p(x)$ не убывает, то $M_j = m_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, и

$$|y'(x_{j+1})| \le \sqrt{\frac{M_j}{m_j}}|y'(x_j)| = \sqrt{\frac{M_j \dots M_0}{m_j \dots m_0}}|y'(x_0)| = \sqrt{\frac{M_j}{m_0}}|y'(x_0)| \le \sqrt{\frac{M}{m_0}}|y'(x_0)|,$$

$$|y'(x_{j+1})| \ge \sqrt{\frac{m_j}{M_j}}|y'(x_j)| \ge \sqrt{\frac{m_0}{M}}|y'(x_0)|.$$

Таким образом, в обоих случаях существует конечный положительный $\lim\limits_{j\to\pm\infty} |y'(x_j)|$ и, повторяя рассуждения доказательства теоремы 3.2, получим, что $\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}} \to 1$ при $j \to \pm\infty$. Кроме того, в силу оценок (3.9) решение будет определено на всей числовой прямой.

2. Пусть $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, функция $p = p(y)$ липшицева, четная и удовлетворяет неравенствам (3.2).

В силу следствия 3.1 максимально продолженные решения уравнения (3.1) являются периодическими с периодом $T = x_{j+2} - x_j$. Кроме того, используя четность функции $p(y)$, получаем следующие цепочки равенств:

$$|y'(x_{j+1})| = |y'(x_j)| = \ldots = |y'(x_0)|, \quad |y(x'_{j+1})| = |y(x'_j)| = \ldots = |y(x'_0)|,$$

и тогда $\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}} \equiv 1$.

3. Пусть $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, функция $p = p(y')$ липшицева, четная и удовлетворяет неравенствам (3.2).

Без ограничения общности можно считать, что $y(x) \geq 0$ на $[x_j,\, x_{j+1}]$. Проинтегрируем уравнение (3.1), домноженное на y' на промежутках $[x_j,\, x'_{j+1}]$, $[x'_{j+1},\, x_{j+1}]$ и $[x_{j+1},\, x'_{j+2}]$, тогда, используя обозначения (3.8), соответственно получим

$$\int\limits_{v_j}^{0} \frac{y'\,dy'}{p(y')} = -\int\limits_{0}^{H_{j+1}} y^k\,dy, \quad \int\limits_{0}^{-v_{j+1}} \frac{y'\,dy'}{p(y')} = -\int\limits_{H_{j+1}}^{0} y^k\,dy, \quad \int\limits_{-v_{j+1}}^{0} \frac{y'\,dy'}{p(y')} = \int\limits_{0}^{-H_{j+2}} (-y)^k\,dy.$$

Используя четность функции $p(y')$, получаем следующие цепочки равенств

$$|y'(x_{j+1})| = |y'(x_j)| = \ldots = |y'(x_0)|, \quad |y(x'_{j+1})| = |y(x'_j)| = \ldots = |y(x'_0)|,$$

следовательно, решение $y(x)$ уравнения (3.1) является периодическим и $\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}} \equiv 1$.

4. Пусть $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, функция $p = p(y,\, y')$ липшицева по y, y', удовлетворяет неравенствам (3.2) и условиям $p(y,\, y') = p(-y,\, y') = p(y,\, -y')$.

Без ограничения общности можно считать, что $y(x) \geq 0$ на $[x_j,\, x_{j+1}]$. Проинтегрируем уравнение (3.1), домноженное на y' на промежутках $[x'_j,\, x_j]$, $[x_j,\, x'_{j+1}]$, $[x'_{j+1},\, x_{j+1}]$ и $[x_{j+1},\, x'_{j+2}]$, используем условия на функцию p и обозначения (3.8), тогда соответственно получим

$$-\frac{v_j^2}{2} = -\int\limits_{x'_j}^{x_j} p(y,\, y')\,(-y)^k\, y'\, dx = \int\limits_{-H_j}^{0} p(y,\, y')\,(-y)^k d(-y) = -\int\limits_{0}^{H_j} p(y,\, y')\, y^k dy,$$

$$\frac{v_j^2}{2} = \int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} p(y,\, y')\, y^k\, y'\, dx = \int\limits_{0}^{H_{j+1}} p(y,\, y')\, y^k dy,$$

$$\frac{v_{j+1}^2}{2} = -\int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} p(y,\, y')\, y^k\, y'\, dx = -\int\limits_{H_{j+1}}^{0} p(y,\, y')\, y^k dy = \int\limits_{0}^{H_{j+1}} p(y,\, y')\, y^k dy,$$

$$\frac{v_{j+1}^2}{2} = -\int\limits_{x_{j+1}}^{x'_{j+2}} p(y,\, y')\,(-y)^k\, y'\, dx = \int\limits_{0}^{-H_{j+2}} p(y,\, y')\,(-y)^k d(-y) = \int\limits_{0}^{H_{j+2}} p(y,\, y')\, y^k dy.$$

Следовательно,

$$|y'(x_{j+1})| = |y'(x_j)| = \ldots = |y'(x_0)|, \quad |y(x'_{j+1})| = |y(x'_j)| = \ldots = |y(x'_0)|,$$

то есть решение $y(x)$ уравнения (3.1) является периодическим и $\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}} \equiv 1$.

5. Пусть $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, функция $p = p(y,\, y')$ липшицева по $y,\, y'$, удовлетворяет неравенствам (3.2) и одному из условий: $p(y,\, y') = p(-y,\, y')$ или $p(y,\, y') = p(y,\, -y')$.

Аналогично предыдущему случаю получаем

$$-\int\limits_{-H_j}^{0} p(y,\, y')\,(-y)^k d(-y) = \int\limits_{0}^{H_{j+1}} p(y,\, y')\, y^k dy,$$

$$\int\limits_{0}^{H_{j+1}} p(y,\, y')\, y^k dy = \int\limits_{0}^{-H_{j+2}} p(y,\, y')\,(-y)^k d(-y).$$

Пусть, например, $p(y,\, y') = p(-y,\, y')$ (второй случай рассматривается аналогично), тогда

$$\int\limits_0^{H_{j+1}} p(y,\, y')\, y^k dy = \int\limits_0^{H_j} p(y,\, -y')\, y^k dy,$$

$$\int\limits_0^{H_{j+1}} p(y,\, y')\, y^k dy = \int\limits_0^{H_{j+2}} p(y,\, -y')\, y^k dy,$$

таким образом, $H_j = H_{j+2}$ и $v_{j+1} = v_j$, то есть существует конечный положительный $\lim\limits_{j\to+\infty} |y'(x_j)|$ и, повторяя рассуждения доказательства теоремы 3.2, получим, что $\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}} \to 1$ при $j \to \pm\infty$. Кроме того, в силу оценок (3.9) решение будет определено на всей числовой прямой.

И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией в монографии [22] установлено, что если при $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$ функция $p = p(x)$ является положительной, локально интегрируемой и функцией локально ограниченной вариации, то любое максимально продолженное вправо решение уравнения (1) является правильным, то есть определено в окрестности $+\infty$.

Приведем пример непрерывной функции $p = p(x)$, удовлетворяющей условию (3.2), для которой при $k > 1$ существует решение уравнения (3.1), имеющее резонансную асимптоту $x = x^*$ $\left(\overline{\lim\limits_{x\to x^*}}\, y(x) = +\infty\right)$, то есть не являющееся правильным.

Приведем предварительные сведения. Обозначим $f_c(u) = e^{c(u-u^2)}$, $c \geq 0$, и рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$y'' + f_c\left(\frac{|y|}{H}\right) |y|^k \operatorname{sgn} y = 0$$

с начальными условиями $|y(0)| = H > 0$, $y'(0) = 0$. Тогда в силу вида уравнения (3.1) решение $y(x)$ уравнения монотонно при $x > 0$. Значит, существует точка $X > 0$, в которой $y(X) = 0$. Обозначим $v = |y'(X)|$ и получим соотношения, связывающие c, v, H.

Домножая рассматриваемое уравнение на y' и интегрируя, находим первый интеграл

$$\frac{y'^2}{2} + \int\limits_0^y f_c\left(\frac{|\eta|}{H}\right) |\eta|^k \operatorname{sgn} \eta\, d\eta = C_1.$$

Сделаем замену $u = \frac{\eta}{H}$, тогда

$$\frac{y'^2}{2} + H^{k+1} \int\limits_0^{\frac{y}{H}} f_c(|u|)|u|^k \operatorname{sgn} u \, du = C_1.$$

Обозначим $F_c(y) = \int\limits_0^y f_c(|u|)|u|^k \operatorname{sgn} u \, du$ и, подставляя значения $x = 0$ и $x = X$, получаем следующие соотношения:

$$C_1 = H^{k+1} F_c(1), \quad C_1 = \frac{v^2}{2},$$

тогда $v^2 = 2H^{k+1} F_c(1)$ или $H = \left(\frac{v^2}{2F_c(1)}\right)^{\frac{1}{k+1}}$. Подставим найденные соотношения в первый интеграл:

$$y'^2 = v^2 - 2H^{k+1} F_c\left(\frac{y}{H}\right) = 2H^{k+1}\left(F_c(1) - F_c\left(\frac{y}{H}\right)\right),$$

$$|y'| = \sqrt{2} H^{\frac{k+1}{2}} \sqrt{F_c(1) - F_c\left(\frac{y}{H}\right)}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение на $[0, \, X]$:

$$\int\limits_0^H \frac{dy}{\sqrt{F_c(1) - F_c\left(\frac{y}{H}\right)}} = \sqrt{2} H^{\frac{k+1}{2}} X.$$

Сделаем в интеграле замену $u = \frac{y}{H}$, обозначим $\varphi_c = \int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{F_c(1) - F_c(u)}}$, отсюда

$$H\varphi_c = \sqrt{2} H^{\frac{k+1}{2}} X$$

и

$$X = \frac{\varphi_c}{\sqrt{2}} H^{-\frac{k-1}{2}} = \frac{\varphi_c}{\sqrt{2}} \left(\frac{v^2}{2F_c(1)}\right)^{-\frac{k-1}{2(k+1)}} = \varphi_c \, 2^{-\frac{1}{2} + \frac{k-1}{2(k+1)}} \left(F_c(1)\right)^{\frac{k-1}{2(k+1)}} v^{-\frac{k-1}{k+1}}.$$

Для удобства далее используем обозначение $\varkappa = \frac{k-1}{2(k+1)}$, тогда

$$X = \frac{\varphi_c}{\sqrt{2}} H^{-\frac{k-1}{2}} = \varphi_c \, 2^{-\frac{1}{2}+\varkappa} \left(F_c(1)\right)^{\varkappa} v^{-2\varkappa}. \tag{3.10}$$

Необходимо показать, что φ_c определено для любого значения $c \geq 0$, то есть доказать равномерную по c сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{F_c(1)-F_c(u)}}$.

Заметим, что при $u \in (0,\, 1)$ справедливо:

$$F_c(1) - F_c(u) = \int\limits_u^1 e^{c(t-t^2)} t^k \, dt > \int\limits_u^1 t^k \, dt = \frac{1}{k+1}(1 - u^{k+1}),$$

поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{F_c(1) - F_c(u)}} < \sqrt{k+1} \int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{k+1}}}.$$

В последнем интеграле сделаем замену $t = u^{k+1}$, тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{k+1}}} = \frac{1}{k+1} \int\limits_0^1 t^{-\frac{k}{k+1}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} \, dt = \frac{\mathrm{B}\left(-\frac{k}{k+1} + 1,\, -\frac{1}{2} + 1\right)}{k+1} = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{1}{k+1},\, \frac{1}{2}\right)}{k+1},$$

следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{F_c(1) - F_c(u)}} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} \mathrm{B}\left(\frac{1}{k+1},\, \frac{1}{2}\right),$$

значит, интеграл сходится равномерно по c для любого $c \geq 0$.

Также покажем, что существует следующее разложение функции φ_c в ряд Тейлора в окрестности $c = 0$:

$$\varphi_c = \varphi_0 + (\varphi_c)'\big|_{c=0} \, c + o(c).$$

Действительно,

$$(\varphi_c)' = \left(\int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{F_c(1) - F_c(u)}} \right)' = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{1}{\left(F_c(1) - F_c(u)\right)^{\frac{3}{2}}} \left((F_c(1))'_c - (F_c(u))'_c \right) du$$

и $(F_c(u))'_c = \int\limits_0^u e^{c(t-t^2)}\,(t-t^2)\,t^k\,dt$ для всех $u \in (0,\,1]$.

Тогда
$$(F_c(1))'_c - (F_c(u))'_c = \int\limits_u^1 e^{c(t-t^2)}\,(t-t^2)\,t^k\,dt <$$
$$< e^{\frac{c}{4}} \int\limits_u^1 (t-t^2)\,t^k\,dt = e^{\frac{c}{4}} \left(\frac{1-u^{k+2}}{k+2} - \frac{1-u^{k+3}}{k+3} \right),$$
таким образом,
$$(\varphi_c)' < \frac{e^{\frac{c}{4}}\,(k+1)^{\frac{3}{2}}}{2} \int\limits_0^1 \frac{1}{(1-u^{k+1})^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1-u^{k+2}}{k+2} - \frac{1-u^{k+3}}{k+3} \right) du <$$
$$< \frac{e^{\frac{c}{4}}\,(k+1)^{\frac{3}{2}}}{2(k+2)} \int\limits_0^1 \frac{1-u^{k+2}}{(1-u^{k+1})^{\frac{3}{2}}}\,du = \frac{e^{\frac{c}{4}}\,(k+1)^{\frac{3}{2}}}{2(k+2)} \int\limits_0^1 \frac{1-u^{k+2}+u^{k+1}-u^{k+1}}{(1-u^{k+1})^{\frac{3}{2}}}\,du =$$
$$= \frac{e^{\frac{c}{4}}\,(k+1)^{\frac{3}{2}}}{2(k+2)} \left(\int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{k+1}}} + \int\limits_0^1 \frac{u^{k+1}(1-u)}{(1-u^{k+1})^{\frac{3}{2}}}\,du \right) <$$
$$< \frac{e^{\frac{c}{4}}\,(k+1)^{\frac{3}{2}}}{2(k+2)} \left(\int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{k+1}}} + \int\limits_0^1 \frac{u^{k+1}}{\sqrt{1-u^{k+1}}}\,du \right) <$$
$$< \frac{e^{\frac{c}{4}}\,(k+1)^{\frac{3}{2}}}{k+2} \int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{k+1}}} = \frac{e^{\frac{c}{4}}\,\sqrt{k+1}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{k+1},\,\frac{1}{2}\right)}{k+2},$$
что означает сходимость несобственного интеграла равномерно по c или существование $(\varphi_c)'$ для любого $c \geq 0$.

Далее перейдем к описанию построения по шагам непрерывной функции $p = p(x)$ и колеблющегося решения $y(x)$ уравнения (3.1). На каждом шаге мы определяем отрезок, задаем на нем функцию p, строим решение уравнения (3.1) и оцениваем расстояние между последовательными нулями $x_{j+1} - x_j$. При этом необходимо следить, чтобы функция p на заданном отрезке была непрерывной, а построенное решение было непрерывно дифференцируемым, тогда в силу уравнения (3.1) оно является дважды непрерывно дифференцируемым. При построении функции p и решения есть два типа действий: на отрезке с четным номером и на отрезке с нечетным номером.

Рассмотрим $p(x) = 1$ и решение уравнения (3.1) с начальными условиями $y(x_j) = 0$, $y'(x_j) = v_j \neq 0$. Тогда существует значение $x'_{j+1} > x_j$, в котором $y'(x'_{j+1}) = 0$, а на отрезке $[x_j, x'_{j+1}]$ решение монотонно. Обозначим $H_{j+1} = |y(x'_{j+1})|$, $a_j = x'_{j+1} - x_j$. Далее построим решение уравнения:

$$y'' + q(y)|y|^k \operatorname{sgn} y = 0,$$

где $q(y) = f_{c_j}\left(\frac{|y|}{H_{j+1}}\right)$ (значения $c_j \geq 0$ определим в примере) с начальными условиями $|y(x'_{j+1})| = H_{j+1}$, $y'(x'_{j+1}) = 0$. Найдем значение $x_{j+1} > x'_{j+1}$, для которого $y(x_{j+1}) = 0$, и на промежутке $[x'_{j+1}, x_{j+1})$ положим $p(x) = q(y(x))$. Тогда построенное решение $y(x)$ является решением уравнения (3.1) с заданной функцией $p(x)$. Обозначим $v_{j+1} = y'(x_{j+1})$, $b_j = x_{j+1} - x'_{j+1}$. Далее построение осуществляем аналогичным образом. Определяем отрезок $[x_{j+1}, x'_{j+2}]$, полагаем, что $p(x) = 1$ на промежутке $[x_{j+1}, x'_{j+2})$, находим решение уравнения (3.1) с начальными условиями, полученными на предыдущем шаге и так далее.

Таким образом, построено решение $y(x)$ уравнения (3.1) для следующей функции p при всех $j \in \mathbb{N}$:

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_j, x'_{j+1}), \\ e^{c_j\left(\frac{|y(x)|}{H_{j+1}} - \left(\frac{y(x)}{H_{j+1}}\right)^2\right)}, & x \in [x'_{j+1}, x_{j+1}). \end{cases}$$

Кроме того, в силу (3.10) для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\frac{b_j}{a_j} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{c_j}\, H_{j+1}^{-\frac{k-1}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_0\, H_{j+1}^{-\frac{k-1}{2}}} = \frac{\varphi_{c_j}}{\varphi_0},$$

$$\frac{a_{j+1}}{b_j} = \frac{\varphi_0\, 2^{-\frac{1}{2}+\varkappa}\, v_{j+1}^{-2\varkappa}(F_0(1))^{\varkappa}}{\varphi_{c_j}\, 2^{-\frac{1}{2}+\varkappa}\, v_{j+1}^{-2\varkappa}(F_{c_j}(1))^{\varkappa}} = \frac{\varphi_0}{\varphi_{c_j}}\left(\frac{F_0(1)}{F_{c_j}(1)}\right)^{\varkappa},$$

и

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{a_{j+1}}{b_j}\,\frac{b_j}{a_j} = \frac{\varphi_0}{\varphi_{c_j}}\left(\frac{F_0(1)}{F_{c_j}(1)}\right)^{\varkappa}\frac{\varphi_{c_j}}{\varphi_0} = \left(\frac{F_0(1)}{F_{c_j}(1)}\right)^{\varkappa}.$$

Далее получим соотношения, связывающие c_j, v_j, H_j. Для удобства обозначим $\tilde{F}(c) = F_c(1)$ и проинтегрируем уравнение (3.1), домноженное на y' на промежутках $[x_j,\, x'_{j+1}]$ и $[x'_{j+1},\, x_{j+1}]$, без ограничения общности полагая, что $y(x) \geq 0$ на $[x_j,\, x_{j+1}]$:

$$\frac{v_j^2}{2} = \int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} y^k\, y' dx = \int\limits_0^{H_{j+1}} y^k dy = \frac{H_{j+1}^{k+1}}{k+1}, \tag{3.11}$$

$$\frac{v_{j+1}^2}{2} = -\int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} e^{c_j\left(\frac{y}{H_{j+1}} - \left(\frac{y}{H_{j+1}}\right)^2\right)} y^k\, y' dx = \int\limits_0^{H_{j+1}} e^{c_j\left(\frac{y}{H_{j+1}} - \left(\frac{y}{H_{j+1}}\right)^2\right)} y^k dy.$$

Во втором интеграле сделаем замену $u = \frac{y}{H_{j+1}}$, тогда получим

$$\frac{v_{j+1}^2}{2} = H_{j+1}^{k+1} \int\limits_0^1 e^{c_j(u-u^2)}\, u^k du = H_{j+1}^{k+1}\, \tilde{F}(c_j). \tag{3.12}$$

Пример 3.1. Пусть $k > 1$, зададим $c_j = \frac{C}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, где $C > \frac{2(k+2)(k+3)}{k-1}$. Используя предварительные сведения, строим по шагам функцию $p(x)$ и колеблющееся решение $y(x)$ уравнения (3.1).

Построенная функция $p(x)$ является непрерывной. Действительно, достаточно проверить непрерывность в точках экстремума x'_{j+1} и нулях x_{j+1} :

$$p(x'_{j+1}) = \lim_{x \to x'_{j+1}+0} f_{c_j}\left(\frac{|y(x)|}{H_{j+1}}\right) = e^{c_j(1-1)} = 1 = \lim_{x \to x'_{j+1}-0} 1,$$

$$p(x_{j+1}) = \lim_{x \to x_{j+1}+0} 1 = 1 = e^{c_j(0-0)} = \lim_{x \to x_{j+1}-0} f_{c_j}\left(\frac{|y(x)|}{H_{j+1}}\right).$$

Покажем, что построенное решение имеет резонансную асимптоту. Для этого исследуем на сходимость ряды $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} a_j$, $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} b_j$. Заметим, что

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{F_{c_j}(1)}{F_0(1)} = \lim_{j \to +\infty} \frac{\int\limits_0^1 e^{\frac{C}{j}(u-u^2)}\, u^k\, du}{\int\limits_0^1 u^k\, du} = 1,$$

поэтому признак Даламбера не работает, но при этом

$$\frac{a_j}{a_{j+1}} - 1 \sim \ln\left(\frac{a_j}{a_{j+1}}\right) = \ln\left(\frac{F_{c_j}(1)}{F_0(1)}\right)^{\varkappa} = \varkappa \ln\left(\frac{F_{c_j}(1)}{F_0(1)}\right) = \varkappa \ln\big((k+1)F_{c_j}(1)\big)$$

и
$$\lim_{j\to+\infty} j\left(\frac{a_j}{a_{j+1}}-1\right)=\varkappa\lim_{j\to+\infty} j\ln\big((k+1)F_{c_j}(1)\big).$$
Вычислим последний предел, используя правило Лопиталя, под производной будем понимать частную производную по j:

$$\frac{\big(\ln\big((k+1)F_{c_j}(1)\big)\big)'}{\left(\frac{1}{j}\right)'}=-\frac{j^2(F_{c_j}(1))'}{F_{c_j}(1)}=-\frac{j^2}{F_{c_j}(1)}\int\limits_0^1 e^{\frac{C}{j}(u-u^2)}\,(u-u^2)\left(-\frac{C}{j^2}\right)u^k\,du=$$

$$=\frac{C}{F_{c_j}(1)}\int\limits_0^1 e^{\frac{C}{j}(u-u^2)}\,(u-u^2)\,u^k\,du\to\frac{C\int\limits_0^1(u-u^2)\,u^k\,du}{\int\limits_0^1 u^k\,du}=\frac{C(k+1)}{(k+2)(k+3)}$$

при $j\to+\infty$.

Таким образом,
$$\lim_{j\to+\infty} j\left(\frac{a_j}{a_{j+1}}-1\right)=\frac{\varkappa C(k+1)}{(k+2)(k+3)}=\frac{C(k-1)}{2(k+2)(k+3)},$$

а по условию $C>\frac{2(k+2)(k+3)}{k-1}$, следовательно, мы получаем сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{+\infty}a_j$ по признаку Раабе.

Далее
$$\frac{b_{j+1}}{b_j}=\frac{b_{j+1}}{a_{j+1}}\frac{a_{j+1}}{b_j}=\frac{\varphi_{c_{j+1}}}{\varphi_0}\frac{\varphi_0}{\varphi_{c_j}}\left(\frac{F_0(1)}{F_{c_j}(1)}\right)^{\varkappa}=\frac{\varphi_{c_{j+1}}}{\varphi_{c_j}}\left(\frac{F_0(1)}{F_{c_j}(1)}\right)^{\varkappa}.$$

Заметим, что $\lim\limits_{j\to+\infty}F_{c_j}(u)=F_0(u)=\frac{u^{k+1}}{k+1}$ для всех $u\in(0,\,1]$, и φ_c непрерывна по c. Тогда
$$\lim_{j\to+\infty}\varphi_{c_j}=\varphi_0=\sqrt{k+1}\int\limits_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^{k+1}}},\quad \lim_{j\to+\infty}\frac{\varphi_{c_{j+1}}}{\varphi_{c_j}}=1,$$

следовательно, $\lim\limits_{j\to+\infty}\frac{b_{j+1}}{b_j}=1$, поэтому признак Даламбера не работает, но как и выше

$$\frac{b_j}{b_{j+1}}-1\sim\ln\left(\frac{b_j}{b_{j+1}}\right)=\ln\frac{\varphi_{c_j}}{\varphi_{c_{j+1}}}+\varkappa\ln\left(\frac{F_{c_j}(1)}{F_0(1)}\right)=\ln\frac{\varphi_{c_j}}{\varphi_{c_{j+1}}}+\varkappa\ln\big((k+1)F_{c_j}(1)\big)$$

и

$$\lim_{j\to+\infty} j\left(\frac{b_j}{b_{j+1}}-1\right)=\lim_{j\to+\infty} j\,\ln\frac{\varphi_{c_j}}{\varphi_{c_{j+1}}}+\frac{C(k-1)}{2(k+2)(k+3)}.$$

Осталось вычислить $\lim\limits_{j\to+\infty} j\,\ln\frac{\varphi_{c_j}}{\varphi_{c_{j+1}}}$. Для удобства обозначим $\Phi_0=(\varphi_c)'\big|_{c=0}$, тогда $\varphi_{c_j}=\varphi_{c_0}+\Phi_0\,c_j+o(c_j)$ и

$$\lim_{j\to+\infty} j\,\ln\frac{\varphi_{c_j}}{\varphi_{c_{j+1}}}=\lim_{j\to+\infty}\frac{\ln\frac{\varphi_0+\Phi_0\,c_j+o(c_j)}{\varphi_0+\Phi_0\,c_{j+1}+o(c_{j+1})}}{\frac{1}{j}}.$$

Вычислим последний предел, используя правило Лопиталя, под производной будем понимать производную по j:

$$\frac{\left(\ln\frac{\varphi_0+\Phi_0\,c_j+o(c_j)}{\varphi_0+\Phi_0\,c_{j+1}+o(c_{j+1})}\right)'}{\left(\frac{1}{j}\right)'}=-\frac{j^2}{\varphi_0+\Phi_0\,\frac{C}{j}+o\left(\frac{1}{j}\right)}\left(-\frac{\Phi_0\,C}{j^2}+o\left(\frac{1}{j^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{j^2}{\varphi_0+\Phi_0\,\frac{C}{j+1}+o\left(\frac{1}{j+1}\right)}\left(-\frac{\Phi_0\,C}{(j+1)^2}+o\left(\frac{1}{(j+1)^2}\right)\right)=\frac{\Phi_0\,C-o(1)}{\varphi_0+\Phi_0\,\frac{C}{j}+o\left(\frac{1}{j}\right)}+$$

$$+\frac{-\Phi_0\,C\frac{j^2}{(j+1)^2}+o\left(\frac{j^2}{(j+1)^2}\right)}{\varphi_0+\Phi_0\,\frac{C}{j+1}+o\left(\frac{1}{j+1}\right)}\to\frac{\Phi_0\,C}{\varphi_0}-\frac{\Phi_0\,C}{\varphi_0}=0\text{ при } j\to+\infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{j\to+\infty} j\,\ln\frac{\varphi_{c_j}}{\varphi_{c_{j+1}}}=0$ и $\lim\limits_{j\to+\infty} j\left(\frac{b_j}{b_{j+1}}-1\right)=\frac{\varkappa\,C(k+1)}{(k+2)(k+3)}=\frac{C(k-1)}{2(k+2)(k+3)}$, и так как $C>\frac{2(k+2)(k+3)}{k-1}$, то мы получаем сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{+\infty}b_j$ по признаку Раабе. Значит, $\sum\limits_{j=1}^{+\infty}(a_j+b_j)=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}(x_{j+1}-x_j)<+\infty$. Так как $a_j,\,b_j\to 0$ при $j\to+\infty$, то в силу (3.10) получаем, что $H_j=|y(x_j)|\to+\infty$ при $j\to+\infty$, то есть построено решение, имеющее резонансную асимптоту $x=x^*$. Далее, покажем, что построенная функция $p(x)\to 1$ при $x\to x^*-0$. Действительно, в силу построения $c_j\to 0$ при $j\to+\infty$, Кроме того, $e^{c_j(u-u^2)}\to 1$ для любого $u\in(0,\,1)$, поэтому $p(x)\to 1$ при $x\to x^*-0$. Доопределим $p(x)\equiv 1$ для всех $x \geq x^*$. Таким образом, построенная функция $p(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

Теорема 3.3. *Пусть $k > 1$, функция $p = p(x)$ непрерывна, является функцией глобально ограниченной вариации, удовлетворяет неравенствам* (3.2). *Тогда для любого максимально продолженного решения $y(x)$ уравнения* (3.1) *существуют конечные положительные пределы $\lim\limits_{j\to\pm\infty}|y'(x_j)|$, $\lim\limits_{j\to\pm\infty}|y(x'_j)|$ и $\lim\limits_{j\to\pm\infty}(x_{j+1}-x_j)$.*

Доказательство теоремы 3.3.

Пусть $y(x)$ — нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (3.1). Проведем доказательство при $j \to +\infty$, случай $j \to -\infty$ рассматривается аналогично.

Наряду с обозначениями

$$m_j = \min_{x\in[x_j,\,x_{j+1}]} p(x), \quad M_j = \max_{x\in[x_j,\,x_{j+1}]} p(x), \quad j \in \mathbb{Z},$$

обозначим

$$m'_j = \min_{x\in[x'_j,\,x'_{j+1}]} p(x), \quad M'_j = \max_{x\in[x'_j,\,x'_{j+1}]} p(x), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Тогда, повторяя рассуждения доказательства теоремы 3.1, получим для любого $j \in \mathbb{N}$ аналогичные (3.7) оценки:

$$\frac{k+1}{2M'_j}\left(y'(x_j)\right)^2 \leq |y(x'_j)|^{k+1} \leq \frac{k+1}{2m'_j}\left(y'(x_j)\right)^2,$$

$$\frac{k+1}{2M'_j}\left(y'(x_j)\right)^2 \leq |y(x'_{j+1})|^{k+1} \leq \frac{k+1}{2m'_j}\left(y'(x_j)\right)^2,$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{m'_j}{M'_j}\right)^{\frac{1}{k+1}} \leq \left|\frac{y(x'_j)}{y(x'_{j+1})}\right| \leq \left(\frac{M'_j}{m'_j}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Более того, в силу полученной оценки и оценки (3.6) для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\Big|\ln|y'(x_{j+1})| - \ln|y'(x_j)|\Big| \leq \frac{1}{2}(\ln M_j - \ln m_j) \leq \frac{1}{2}V_{[x_j,\,x_{j+1}]}\ln p(x),$$

$$\Big|\ln|y(x'_{j+1})|-\ln|y(x'_j)|\Big|\le\frac{1}{k+1}(\ln M'_j-\ln m'_j)\le\frac{1}{k+1}V_{[x'_j,\,x'_{j+1}]}\ln p(x),$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty}V_{[x_j,\,x_{j+1}]}\ln p(x)=V_{[x_1,\,+\infty)}\ln p(x)<+\infty,$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty}V_{[x'_j,\,x'_{j+1}]}\ln p(x)=V_{[x'_1,\,+\infty)}\ln p(x)<+\infty,$$

где $V_{[a,\,b]}\ln p(x)$, $V_{[c,\,+\infty)}\ln p(x)$ — вариации функции $\ln p(x)$ на промежутках $[a,\,b]$ и $[c,\,+\infty)$ соответственно. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{j=1}^{+\infty}(\ln|y'(x_{j+1})|-\ln|y'(x_j)|)$ сходится, поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{j\to+\infty}\ln|y'(x_j)|$, а, значит, и конечный положительный предел $\lim\limits_{j\to+\infty}|y'(x_j)|$. Аналогично получаем существование конечного положительного предела $\lim\limits_{j\to+\infty}|y(x'_j)|$.

Далее покажем, что расстояние между последовательными нулями $x_{j+1}-x_j$ имеет предел при $j\to+\infty$. Домножая уравнение (3.1) на y', интегрируя на $[x'_{j+1},\,x]$, $x\le x_{j+1}$, и считая без ограничения общности, что $y(x)\ge 0$ на $[x'_{j+1},\,x_{j+1}]$, получаем

$$(y'(x))^2=-2\int\limits_{x'_{j+1}}^{x}p(s)\,y'(s)\,y^k(s)\,ds=2\int\limits_{x'_{j+1}}^{x}p(s)\,|y'(s)|\,y^k(s)\,ds\le$$

$$\le\frac{2M'_{j+1}}{k+1}\left(H_{j+1}^{k+1}-y^{k+1}(x)\right).$$

Аналогично оцениваем снизу:

$$(y'(x))^2\ge\frac{2m'_{j+1}}{k+1}\left(H_{j+1}^{k+1}-y^{k+1}(x)\right),$$

и поэтому

$$\sqrt{\frac{2m'_{j+1}}{k+1}}\sqrt{H_{j+1}^{k+1}-y^{k+1}(x)}\le|y'(x)|\le\sqrt{\frac{2M'_{j+1}}{k+1}}\sqrt{H_{j+1}^{k+1}-y^{k+1}(x)}.$$

Заметим, что

$$x_{j+1}-x'_{j+1}=\int\limits_{x_{j+1}}^{x'_{j+1}}\frac{y'(x)\,dx}{|y'(x)|}=\int\limits_{0}^{H_{j+1}}\frac{dy}{|y'|}\le\sqrt{\frac{k+1}{2m'_{j+1}}}\int\limits_{0}^{H_{j+1}}\frac{dy}{\sqrt{H_{j+1}^{k+1}-y^{k+1}}}$$

и, осуществляя замену $y=uH_{j+1}$ в последнем интеграле, получаем

$$x_{j+1}-x'_{j+1}\le\sqrt{\frac{k+1}{2m'_{j+1}}}\,H_{j+1}^{-\frac{k-1}{2}}\int\limits_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^{k+1}}}.$$

Аналогично справедливо неравенство

$$x_{j+1}-x'_{j+1}\ge\sqrt{\frac{k+1}{2M'_{j+1}}}\,H_{j+1}^{-\frac{k-1}{2}}\int\limits_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^{k+1}}}.$$

Так как в силу условий теоремы у функции $p(x)$ существует конечный положительный предел p_+ при $x\to+\infty$ и мы доказали, что существует конечный положительный $\lim\limits_{j\to+\infty}H_j$, то, осуществляя предельный переход в последних неравенствах, заключаем, что расстояние от точки экстремума до нуля $x_{j+1}-x'_{j+1}$ имеет конечный положительный предел при $j\to+\infty$. Аналогично показывается, что расстояние $x'_{j+1}-x_j$, а, значит, и их сумма $x_{j+1}-x_j$ имеют конечный положительный предел при $j\to+\infty$,

Теорема 3.3 доказана.

Далее приведем пример такой непрерывной функции $p(x)$, для которой существует неограниченное правильное решение: $\lim\limits_{j\to+\infty}|y'(x_j)|=\lim\limits_{j\to+\infty}|y(x'_j)|=+\infty$, и пример непрерывной функции $p(x)$, для которой существует нетривиальное правильное колеблющееся решение, стремящееся к нулю вместе со своей первой производной на $+\infty$.

Пример 3.2. Пусть $k>1$, введем функцию $f_c(u)=c^{u-u^2}$, и выберем значение c таким образом, чтобы $c\in[1,\,16]$. Для удобства обозначим

$$\tilde F(c)=F_c(1)=\int\limits_{0}^{1}c^{u-u^2}u^k du.$$

Заметим, что $\inf\limits_{c\in[1,\,16]} \tilde{F}(c) = \frac{1}{k+1}$, $\sup\limits_{c\in[1,\,16]} \tilde{F}(c) = \frac{2}{k+1}$, тогда $\frac{1}{k+1} \le \tilde{F}(c) \le \frac{2}{k+1}$ и

$$\tilde{F}'(c) = \int\limits_0^1 c^{u-u^2-1}\,(1-u)\,u^{k+1}du > 0,\ c\in[1,\,16],$$

поэтому существует обратная функция $\tilde{F}^{-1}(t),\ t\in\left[\frac{1}{k+1},\,\frac{2}{k+1}\right]$, которая непрерывна и монотонна. Определим последовательность $c_j = \tilde{F}^{-1}\left(\frac{1+\frac{1}{j}}{k+1}\right)$, $j\in\mathbb{N}$.

Используя предварительные сведения на страницах 79–84, строим по шагам функцию $p(x)$ и колеблющееся решение $y(x)$ уравнения (3.1). Построенная функция $p(x)$ является непрерывной. Действительно, достаточно проверить непрерывность в точках экстремума x'_{j+1} и нулях x_{j+1} :

$$p(x'_{j+1}) = \lim_{x\to x'_{j+1}+0} p(x) = c_j^{1-1} = 1 = \lim_{x\to x'_{j+1}-0} p(x),$$

$$p(x_{j+1}) = \lim_{x\to x_{j+1}+0} 1 = 1 = c_j^0 = \lim_{x\to x_{j+1}-0} p(x).$$

Далее докажем, что построенное решение $y(x)$ неограничено и является правильным. В силу (3.12) имеем

$$\frac{v_{j+1}^2}{2} = H_{j+1}^{k+1}\,\tilde{F}(c_j) = H_{j+1}^{k+1}\,\tilde{F}\left(\tilde{F}^{-1}\left(\frac{1+\frac{1}{j}}{k+1}\right)\right) = H_{j+1}^{k+1}\left(\frac{1+\frac{1}{j}}{k+1}\right) = \frac{v_j^2}{2}\left(1+\frac{1}{j}\right).$$

Таким образом,

$$v_{j+1}^2 = \frac{j+1}{j}v_j^2 = v_1^2\,(j+1) \to +\infty \text{ при } j\to+\infty,$$

а, значит, в силу соотношения (3.11) имеем $H_{j+1} \to +\infty$ при $j \to +\infty$, то есть построенное решение $y(x)$ является неограниченным. Обозначим $C = C(m,\,M,\,k) = \frac{1}{M}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+1\right)\left(\frac{2m}{k+1}\right)^{\frac{k}{k+1}}$. В силу оценки (3.9) справедливо:

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(x_{j+1}-x_j) \ge C\sum_{j=1}^{+\infty}(v_{j+1})^{-\frac{k-1}{k+1}} = Cv_1^{-\frac{k-1}{k+1}}\,\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{j+1}\right)^{\frac{k-1}{2(k+1)}},$$

и так как $0 < \frac{k-1}{2(k+1)} < 1$, то получаем

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(x_{j+1} - x_j) \geq C v_1^{-\frac{k-1}{k+1}} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j+1} = +\infty,$$

и решение $y(x)$ определено на $[x_1, +\infty)$.

Также можно показать, что $p(x) \to 1$ при $x \to +\infty$. Действительно, $\frac{1+\frac{1}{j}}{k+1} \to \frac{1}{k+1}$ при $j \to +\infty$, поэтому в силу непрерывности функции $\tilde{F}^{-1}(t)$ получаем, что $c_j \to \tilde{F}^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) = 1$ при $j \to +\infty$. Таким обзраом, $c_j \to 1$ при $j \to +\infty$, и, следовательно, $p(x) \to 1$ при $x \to +\infty$.

Пример 3.3. Пусть $k > 1$, введем функцию $f_c(u) = c^{u-u^2}$, и выберем значение c таким образом, чтобы $c \in (0, 1]$. Заметим, что $\inf\limits_{c\in(0,\,1]} \tilde{F}(c) = 0$, $\sup\limits_{c\in[0,\,1]} \tilde{F}(c) = \frac{1}{k+1}$, тогда $0 < \tilde{F}(c) \leq \frac{1}{k+1}$ и снова $\tilde{F}'(c) > 0$ для любого $c \in (0, 1]$, поэтому существует обратная функция $\tilde{F}^{-1}(t),\ t \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{2}{k+1}\right]$, которая непрерывна и монотонна. Определим последовательность $c_j = \tilde{F}^{-1}\left(\frac{e^{-j}}{k+1}\right)$, $j \in \mathbb{N}$.

Используя предварительные сведения на страницах 79–84, строим по шагам функцию $p(x)$ и колеблющееся решение $y(x)$ уравнения (3.1). Аналогично примеру 3.2 доказывается, что построенная функция $p(x)$ является непрерывной.

Далее установим, что $\lim\limits_{j\to+\infty} |y(x'_j)| = \lim\limits_{j\to+\infty} |y'(x_j)| = 0$. Действительно, в силу (3.12) справедливо:

$$\frac{v_{j+1}^2}{2} = H_{j+1}^{k+1}\,\tilde{F}(c_j) = H_{j+1}^{k+1}\,\tilde{F}\left(\tilde{F}^{-1}\left(\frac{e^{-j}}{k+1}\right)\right) = H_{j+1}^{k+1}\frac{e^{-j}}{k+1} = \frac{v_j^2}{2}e^{-j}.$$

Таким образом,

$$v_{j+1}^2 = e^{-j}v_j^2 = v_1^2 \prod_{l=1}^{j} e^{-l} = v_1^2\, e^{-\sum\limits_{l=1}^{j} l} \to 0 \text{ при } j \to +\infty,$$

а, значит, в силу соотношения (3.11) имеем $H_{j+1} \to 0$ при $j \to +\infty$. При этом в силу оценки (3.9) мы получаем, что $x_{j+1} - x_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$, поэтому решение $y(x)$ определено на полупрямой $[x_1, +\infty)$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = 0$. Также аналогично примеру (3.2) показывается, что $p(x) \to 1$ при $x \to +\infty$.

Глава 4. Асимптотическое поведение решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с неограниченным отрицательным потенциалом в случаях регулярной и сингулярной нелинейности

В настоящей главе рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка

$$y'' = p(x,\, y,\, y')\; |y|^k \operatorname{sgn} y, \tag{4.1}$$

где $k > 0$, $k \neq 1$, функция $p(x,\, u,\, v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v.

Исследуем асимптотическое поведение максимально продолженных решений уравнения (4.1) в случае неограниченной сверху и неотделенной снизу от нуля положительной функции $p(x,\, u,\, v)$. В работе [20] получены условия существования решений, у которых $\lim\limits_{x\to a-0} |y'(x)| = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$. Оставался открытым вопрос, будет ли при этом решение также стремиться к бесконечности или может стремиться к конечному пределу при $x \to a-0$, то есть вопрос различения двух случаев:

$$\lim_{x\to a-0} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x\to a-0} |y(x)| = +\infty, \tag{4.2}$$

$$\lim_{x\to a-0} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x\to a-0} |y(x)| < +\infty. \tag{4.3}$$

С использованием методов, изложенных в работах [2, 37], получим условия на функцию $p(x,\, u,\, v)$, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (4.1) обладают свойством (4.2), то есть имеют вертикальную асимптоту. Также получим достаточные условия на функцию $p(x,\, u,\, v)$, при которых все рассматриваемые решения обладают свойством (4.3), то есть являются black hole решениями, и условия, при которых решения уравнения (4.1) могут быть продолжены на всю числовую прямую.

Очевидным образом из доказательства леммы 1.1 из первой главы вытекает следующий результат:

Лемма 4.1. *Пусть $k > 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и отделена снизу от нуля, а нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения (4.1) в некоторой точке x_0 удовлетворяет условию $y(x_0)\,y'(x_0) \geq 0$ или $y(x_0)\,y'(x_0) \leq 0$. Тогда для некоторого $x^* \in (x_0, +\infty)$ или, соответственно, $x_* \in (-\infty, x_0)$ выполнено равенство*

$$\lim_{x\to x^*-0} |y'(x)| = +\infty \quad \text{\textit{или, соответственно,}} \quad \lim_{x\to x_*+0} |y'(x)| = +\infty. \qquad (4.4)$$

Лемма 4.2. *Пусть $0 < k < 1$, функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, кроме того, $p(x,u,v)/|v|$ при $v \neq 0$ отделена снизу от нуля, а нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения (4.1) в некоторой точке x_0 удовлетворяет условию $y(x_0)\,y'(x_0) \geq 0$ или $y(x_0)\,y'(x_0) \leq 0$, но не $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Тогда для некоторого $x^* \in (x_0, +\infty)$ или, соответственно, $x_* \in (-\infty, x_0)$ выполнено равенство (4.4).*

Доказательство леммы 4.2.

В силу замечания 1.1 из первой главы достаточно рассмотреть нетривиальное максимально продолженное вправо решение $y(x)$ уравнения (4.1), определенное на $[x_0, \tilde{x})$, где $\tilde{x} \leq +\infty$, с начальными условиями $y(x_0) \geq 0$, $y'(x_0) \geq 0$, но не $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

При доказательстве леммы 1.1 из первой главы было показано, что на интервале $(x_0, \tilde{x})$ у рассматриваемого решения нет нулей и точек экстремума и $y'(x) \to +\infty$ при $x \to \tilde{x} - 0$. То есть существует точка $x_0' > x_0$, в которой $y(x_0') > 0$, $y'(x_0') > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $x_0' = 0$. Рассмотрим точку $x_1' > 0$, в которой $y'(x_1') = 2y'(0)$. Такая точка существует в силу отмеченного выше. Для всех $x \in [0, x_1']$ справедливо двойное неравенство

$$y'(0) \leq y'(x) \leq 2y'(0).$$

Проинтегрируем неравенство $y'(x) \geq y'(0)$ на $[0, x]$, $x \leq x_1'$:

$$y(x) \geq y(x) - y(0) \geq y'(0)\,x,$$

в силу условия леммы и вида уравнения (4.1) имеем

$$y''(x) \geq my'(x)\,(y'(0))^k\,x^k \geq m(y'(0))^{k+1}\,x^k.$$

Проинтегрируем полученное неравенство на $[0,\, x_1']$:

$$y'(0) = y'(x_1') - y'(0) \geq \frac{m(y'(0))^{k+1}}{k+1}(x_1')^{k+1},$$

тогда

$$(x_1')^{k+1} \leq \frac{k+1}{m}(y'(0))^{-k},$$

или

$$x_1' \leq \left(\frac{k+1}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}} (y'(0))^{-\frac{k}{k+1}}.$$

Таким образом, существует положительная константа $\tilde{\mu}$, зависящая только от m и k, такая, что точке x_1' удовлетворяет неравенству

$$x_1' \leq (\tilde{\mu}\; y'(0))^{-\frac{k}{k+1}}\,.$$

Построим последовательность точек $\{x_i'\}$, $i = 0, 1, \ldots$, выбирая $y'(x_i') = 2^i\, y'(0)$. Тогда, повторяя рассуждения доказательства леммы 1.1 из первой главы, получаем, что последовательность $\{x_i'\}$ имеет конечный предел $x^* = \lim\limits_{i\to+\infty} x_i'$, причем

$$x^* = \sum_{i=0}^{+\infty}(x_{i+1}' - x_i') \leq (\mu\, y'(0))^{-\frac{k}{k+1}}$$

для некоторой положительной константы μ, зависящей только от m и k.

Константа выписывается в явном виде:

$$\mu(m,\, k) = \left(\frac{m\left(1 - 2^{-\frac{k}{k+1}}\right)^{k+1}}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Лемма 4.2 доказана.

В силу замечания 1.1 из первой главы в дальнейшем достаточно исследовать поведение максимально продолженных вправо положительных решений уравнения (4.1) вблизи правой границы области определения.

Теорема 4.1. *Пусть* $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, *для некоторых* $u_0,\, v_0 > 0$ *функция* $p(x,\, u,\, v)$ *при* $u > u_0,\ v > v_0$ *представима в виде* $h(u)g(v)$, *где функции* $h(u)$, $g(v)$ *непрерывны и отделены снизу от нуля, а в случае* $0 < k < 1$

функция $p(x,\, u,\, v)$ еще и удовлетворяет условиям леммы 4.2. Тогда для любого максимально продолженного вправо решения $y(x)$ уравнения (4.1) *с начальными условиями $y(x_0) \geq u_0,\ y'(x_0) \geq v_0$ и первым из условий* (4.4) *прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{v\, dv}{g(v)} = +\infty. \tag{4.5}$$

Доказательство теоремы 4.1.

Пусть $y(x)$ — максимально продолженное вправо решение уравнения (4.1) с начальными условиями $y(x_0) = y_0 \geq u_0 > 0$ и $y'(x_0) = y_1 \geq v_0 > 0$. В силу условий теоремы уравнение (4.1) имеет вид $y'' = h(y)\, g(y')\, y^k$, и существует конечное значение $x^* > 0$, для которого $\lim\limits_{x \to x^*-0} |y'(x)| = +\infty$. Домножая уравнение на y' и разделяя переменные, проинтегрируем полученное выражение на $[x_0,\, x]$, $x < x^*$:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'y''}{g(y')}\, dx = \int\limits_{x_0}^{x} h(y)\, y^k\, y'\, dx,$$

$$\int\limits_{y_1}^{y'(x)} \frac{y'}{g(y')}\, dy' = \int\limits_{y_0}^{y(x)} h(y)\, y^k\, dy.$$

Устремив $x \to x^* - 0$, получим

$$\int\limits_{y_1}^{+\infty} \frac{v\, dv}{g(v)} = \int\limits_{y_0}^{\lim\limits_{x \to x^*-0} y(x)} h(y)\, y^k\, dy.$$

Покажем достаточность. Пусть выполнено условие (4.5), тогда

$$\int\limits_{y_0}^{\lim\limits_{x \to x^*-0} y(x)} h(y)\, y^k\, dy = +\infty.$$

Предположим, что $\lim\limits_{x \to x^*-0} y(x) < +\infty$. Тогда в силу непрерывности функции $h(y)$ подынтегральное выражение ограничено сверху, и, следовательно, интеграл по конечному промежутку от ограниченной функции сходится, получаем противоречие. Таким образом, $y(x) \to +\infty$ при $x \to x^* - 0$, то есть прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой.

Покажем необходимость. Если условие (4.5) не выполнено, то

$$\int\limits_{y_0}^{\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x)} h(y)\, y^k\, dy < +\infty.$$

По условию теоремы $h(y) \geq m$ для некоторой константы $m > 0$, и тогда

$$\int\limits_{y_0}^{\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x)} h(y)\, y^k\, dy \geq m \int\limits_{y_0}^{\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x)} y^k\, dy = \frac{m}{k+1}\left(\lim_{x\to x^*-0} y^{k+1}(x) - y_0^{k+1}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{m}{k+1}\left(\lim_{x\to x^*-0} y^{k+1}(x) - y_0^{k+1}\right) < +\infty,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x) < +\infty$.

Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. *Пусть в случае $k > 1$ или $0 < k < 1$ функция $p(x,\, u,\, v)$ удовлетворяет условиям леммы 4.1 или 4.2 соответственно, причем для некоторых $u_0, v_0 > 0$ при $u > u_0$, $v > v_0$ справедливо неравенство $p(x, u, v) \leq f(x,\, u) g(v)$, где функция $f(x,\, u)$ непрерывна по совокупности переменных, а функция $g(v)$ непрерывна, отделена снизу от нуля и удовлетворяет условию* (4.5). *Тогда для любого максимально продолженного вправо решения $y(x)$ уравнения* (4.1) *с начальными условиями $y(x_0) \geq u_0$, $y'(x_0) \geq v_0$ и первым из условий* (4.4) *прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой.*

Доказательство теоремы 4.2.

Пусть $y(x)$ — максимально продолженное вправо решение уравнения (4.1) с начальными условиями $y(x_0) = y_0 \geq u_0 > 0$ и $y'(x_0) = y_1 \geq v_0 > 0$. В силу условий теоремы существует конечное значение $x^* > 0$, для которого $\lim\limits_{x\to x^*-0} |y'(x)| = +\infty$, и справедливо неравенство: $y'' \leq f(x,\, y)\, g(y')\, y^k$.

Докажем требуемое от противного, предположим, что $\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x) < +\infty$. Тогда выполнены условия леммы Нагумо–Бернштейна:

Лемма 4.3. [48, 73] *Рассмотрим дифференциальное неравенство*

$$|u''(t)| \le \varphi(|u'(t)|), \quad t \in (a,\, b), \tag{4.6}$$

где $\varphi(s)$ — непрерывная положительная функция при $s \ge 0$. Если интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\varphi(x)}$ расходится, то для любого $r > 0$ существует такое $\rho > 0$, что произвольное решение дифференциального неравенства (4.6), удовлетворяющего условию $|u(t)| \le r$ при $t \in (a,\, b)$, удовлетворяет и условию $|u'(t)| \le \rho$ при $t \in (a,\, b)$,

Следовательно, $\lim\limits_{x \to x^*-0} y'(x) < +\infty$. Получаем противоречие.

Теорема 4.2 доказана.

Замечание 4.1. *Пусть в случае $k > 1$ или $0 < k < 1$ функция $p(x,\, u,\, v)$ удовлетворяет условиям леммы 4.1 или 4.2 соответственно, причем для некоторых u_0, v_0 при $u > u_0,\ v > v_0$ справедливо неравенство $p(x, u, v) \le g(v)$, где функция $g(v)$ непрерывна и удовлетворяет условию (4.5). Тогда для любого максимально продолженного вправо решения $y(x)$ уравнения (4.1) с начальными условиями $y(x_0) \ge u_0,\ y'(x_0) \ge v_0$ и первым из условий (4.4) прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой.*

Доказательство замечания 4.1.

Достаточно в доказательстве теоремы 4.2 положить $f(x,\, u) = p(x,\, u)$, $g(v) \equiv 1$. Тогда $\int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{v\,dv}{g(v)} = \int\limits_{v_0}^{+\infty} v\,dv = +\infty$, и функция $p(x,\, u)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.2, таким образом, мы получаем требуемое.

Замечание 4.1 доказано.

Теорема 4.3. *Пусть в случае $k > 1$ или $0 < k < 1$ функция $p(x,\, u,\, v)$ удовлетворяет условиям леммы 4.1 или 4.2 соответственно, причем для некоторых $u_0, v_0 > 0$ при $u > u_0,\ v > v_0$ справедливо неравенство $p(x, u, v) \ge g(v)$, где функция $g(v)$ непрерывна, отделена снизу от нуля, и условие (4.5) не выполнено. Тогда для любого максимально продолженного вправо решения $y(x)$ уравнения (4.1) с начальными условиями $y(x_0) \ge u_0,\ y'(x_0) \ge v_0$*

и первым из условий (4.4) выполнены соотношения:

$$0 < \lim_{x \to x^* - 0} y(x) < +\infty, \quad x^* - x_0 < \frac{1}{y^k(x_0)} \int\limits_{y'(x_0)}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)}.$$

Доказательство теоремы 4.3.

Пусть $y(x)$ — максимально продолженное вправо решение уравнения (4.1) с начальными условиями $y(x_0) = y_0 \ge u_0 > 0$ и $y'(x_0) = y_1 \ge v_0 > 0$. В силу условий теоремы существует конечное значение $x^* > 0$, для которого $\lim\limits_{x \to x^* - 0} |y'(x)| = +\infty$, и справедливо неравенство: $y'' \ge g(y')\, y^k$.

Аналогично доказательству теоремы 4.1 получим

$$\int\limits_{y_1}^{+\infty} \frac{v\, dv}{g(v)} \ge \int\limits_{x_0}^{x^*} y^k\, y'\, dx = \frac{1}{k+1} \left(\lim_{x \to x^* - 0} y^{k+1}(x) - y_0^{k+1} \right).$$

По условию теоремы интеграл в левой части неравенства сходится, следовательно,

$$\frac{1}{k+1} \left(\lim_{x \to x^* - 0} y^{k+1}(x) - y_0^{k+1} \right) < +\infty$$

и $\lim\limits_{x \to x^* - 0} y(x) < +\infty$. Заметим, что

$$\int\limits_{y_1}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)} \ge \int\limits_{x_0}^{x^*} y^k(x)\, dx \ge y_0^k\, (x^* - x_0).$$

таким образом, можно оценить расстояние до x^* :

$$x^* - x_0 < \frac{1}{y_0^k} \int\limits_{y_1}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)}.$$

Теорема 4.3 доказана.

Теорема 4.4. *Пусть $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, функция $p(x,\, u,\, v)$ положительна, непрерывна по x и липшицева по u, v, и для некоторых u_0, v_0, $C > 0$, $\alpha > k - 1$ при $u > u_0$, $v > v_0$ справедливо неравенство $p(x, u, v) \le C|v|^{-\alpha}$. Тогда любое решение $y(x)$ уравнения (4.1) с начальными условиями $y(x_0) \ge u_0$*

и $y'(x_0) \geq v_0$ неограниченно продолжается вправо и

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} y'(x) = +\infty.$$

Доказательство теоремы 4.4.

Пусть $y(x)$ — максимально продолженное вправо решение уравнения (4.1) с начальными условиями $y(x_0) = y_0 \geq u_0 > 0$ и $y'(x_0) = y_1 \geq v_0 > 0$, определенное на $[x_0, \tilde{x})$, где $\tilde{x} \leq +\infty$. Очевидно, что существуют такие положительные значения u_0, v_0, C, для которых будет выполняться неравенство

$$\frac{C(\alpha+2)}{k+1} y_0^{k+1} > y_1^{\alpha+2}.$$

одновременно с неравенством $y'' \leq \frac{Cy^k}{y'^\alpha}$. Домножая на y' и разделяя переменные, проинтегрируем полученное выражение на $[x_0, x]$, $x < \tilde{x}$:

$$\frac{1}{\alpha+2}\left((y'(x))^{\alpha+2} - y_1^{\alpha+2}\right) \leq \frac{C}{k+1}(y^{k+1}(x) - y_0^{k+1}),$$

и в силу выбора начальных условий и значения C получаем

$$y'(x) \leq \left(\frac{C(\alpha+2)}{k+1}\left(y^{k+1}(x) - y_0^{k+1}\right) + y_1^{\alpha+2}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}} < \left(\frac{C(\alpha+2)}{k+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}} y^{\frac{k+1}{\alpha+2}}(x).$$

Снова разделяем переменные и интегрируем на $[x_0, x]$, $x < \tilde{x}$:

$$\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{y^{\frac{k+1}{\alpha+2}}} < \left(\frac{C(\alpha+2)}{k+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}} (x - x_0).$$

Для удобства обозначим $C_1 = \left(\frac{C(\alpha+2)}{k+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}}$, тогда

$$y^{\frac{\alpha+1-k}{\alpha+2}}(x) < \frac{C_1(\alpha+1-k)}{\alpha+2}(x - x_0) + y_0^{\frac{\alpha+1-k}{\alpha+2}}.$$

Заметим, что $\frac{\alpha+1-k}{\alpha+2} > 0$, поэтому

$$y(x) < \left(\frac{C_1(\alpha+1-k)}{\alpha+2}(x - x_0) + y_0^{\frac{\alpha+1-k}{\alpha+2}}\right)^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1-k}},$$

при этом $y'(x) < C_1\, y^{\frac{k+1}{\alpha+2}}(x)$. Таким образом, ни для какого конечного значения $x^* > x_0$ решение $y(x)$ не обладает ни свойством (4.2), ни (4.3), оно неограниченно продолжаемо вправо и $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = +\infty$.

Теорема 4.4 доказана.

Далее проиллюстрируем применение полученных результатов на ряде примеров.

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение

$$y'' - |\ln|y||(y')^2|y|^3 \operatorname{sgn} y = 0.$$

Заметим, что показатель нелинейности $k = 3$ и функция $p = p(u,\, v) = |\ln|u||\, v^2$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Действительно, пусть $u_0 > 1$, $v_0 > 0$, тогда функции $h(u) = |\ln|u||$ и $g(v) = v^2$ непрерывны и отделены снизу от нуля при $u > u_0$ и $v > v_0$ соответственно, причем

$$\int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{v\, dv}{g(v)} = \int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{v\, dv}{v^2} = \int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{dv}{v} = +\infty.$$

Таким образом, любое максимально продолженное решение рассматриваемого уравнения с начальными условиями $y(x_0) > 1$, $y'(x_0) > 0$, имеет вертикальную асимптоту справа.

Пример 4.2. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \frac{(2 + \sin(xy))(y')^4}{|\ln|y'||}|y|^3 \operatorname{sgn} y = 0.$$

Заметим, что показатель нелинейности $k = 3$ и функция $p(x,\, u,\, v) = \frac{(2+\sin(xu))\, v^4}{|\ln|v||}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.3. Действительно, пусть $u_0 > 0$, $v_0 > 1$, тогда справедливо $p(x,\, u,\, v) \geq g(v)$, где функция $g(v) = \frac{v^3}{|\ln|v||}$ непрерывна и отделена снизу от нуля при $v > v_0$, причем

$$\int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{v\, dv}{g(v)} = \int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{|\ln|v||dv}{v^3} < \int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{dv}{v^2} < +\infty.$$

Таким образом, для любого максимально продолженного решения рассматриваемого уравнения с начальными условиями $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 1$, существует конечное значение $x^* > x_0$, для которого справедливо:

$$\lim_{x \to x^*-0} y'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x^*-0} y(x) < +\infty,$$

то есть рассматриваемое решение является black hole решением.

Пример 4.3. Рассмотрим уравнение

$$y'' - p\,(x,\, y,\, y')\,(1 + |y'|)^{2+\varepsilon}\,|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad k > 0,\, k \neq 1,\; \varepsilon > 0,$$

где функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, и для некоторой константы $m > 0$ удовлетворяет неравенству $p(x,\, u,\, v) \geq m$.

Заметим, что условия теоремы 4.3 выполнены. Действительно, $p(x,\, u,\, v) \;\geq\; m\,g(v)$, где функция $g(v) \;=\; (1 + |v|)^{2+\varepsilon}$ непрерывна и отделена снизу от нуля, причем

$$\int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{v\,dv}{g(v)} = \int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{v\,dv}{(1+|v|)^{2+\varepsilon}} < +\infty.$$

Таким образом, для любого максимально продолженного решения рассматриваемого уравнения с положительными начальными условиями существует конечное значение $x^* > x_0$, для которого справедливо:

$$\lim_{x \to x^*-0} y'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x^*-0} y(x) < +\infty,$$

то есть рассматриваемое решение является black hole решением.

Заключение

В настоящей диссертационной работе проведено подробное исследование качественных и асимптотических свойств решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка при различных условиях на потенциал, зависящий от независимой и всех фазовых переменных.

В случае регулярной нелинейности получена полная асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом. В частности, доказано, что все нетривиальные решения определены или на полупрямой, или на конечном интервале и имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения. При этом прямая, проходящая через конечную границу области определения является вертикальной асимптотой решения, а на бесконечности все решения вместе с производной стремятся к нулю. Получены оценки расстояния до вертикальной асимптоты; показана непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных условий.

В случае сингулярной нелинейности решения уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка могут иметь особое поведение не только вблизи границ, но и во внутренней точке области определения, поэтому рассматриваются μ–решения. В терминах μ–решений получена полная асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом: в частности, доказано, что все μ–решения или определены на всей числовой прямой, или на полупрямой и имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения. При этом установлено, что все μ–решения имеют либо ровно один нуль, либо ровно один экстремум, либо вместе со своей производной стремятся к нулю в конечной граничной точке области определения со степенной асимптотикой; получены оценки расстояния до нуля, точки экстремума и граничной точки области определения соответственно; показана непрерывная зависимость положения нуля, точки экстремума, граничной точки области определения от начальных условий.

В случаях регулярной и сингулярной нелинейности для решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля положительным потенциалом установлено, что все максимально продолженные решения уравнения и их первые являются колеблющимися, причем нули решений и их первых производных чередуются. Получены достаточные условия, при которых решения определены на всей числовой прямой, исследовано их асимптотическое поведение в случае выполнения или невыполнения этих достаточных условий. Построены примеры непрерывных положительных потенциалов, для которых соответственно существует решение, имеющее резонансную асимптоту, существует неограниченное решение, определенное на всей числовой прямой, и существует нетривиальное колеблющееся решение, определенное на всей числовой прямой, стремящееся вместе со своей первой производной к нулю на бесконечности.

Кроме того, в случаях регулярной и сингулярной нелинейности исследовано асимптотическое поведение решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка при различных условиях на неограниченный отрицательный потенциал. Разграничены случаи поведения решений уравнения при условии, что производная решений стремится к бесконечности в конечной граничной точке области определения: получены условия на потенциал, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения имеют вертикальную асимптоту, установлены достаточные условия на потенциал, при которых решения являются black-hole решениями (производная решения стремится к бесконечности на границе области определения, а решение в этой точке имеет конечный предел). Получены достаточные условия продолжаемости решений на всю числовую прямую.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с изучением асимптотического поведения максимально продолженных решений уравнений типа Эмдена–Фаулера в случае неограниченного и не отделенного от нуля потенциала. Большой интерес также представляет исследование поведения решений при отрицательном показателе нелинейности.

Список литературы

[1] Асташова И. В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 8, С. 3–33.

[2] Асташова И. В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Известия РАН. 2008. Т. 72. № 6. С. 103–124.

[3] Асташова И. В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание по ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.

[4] Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 11. С. 1551–1552.

[5] Асташова И. В. Об асимптотической классификации решений нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. 2015. № 2(59). С. 3–25.

[6] Беклемишева Я. А. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка // Математический сборник. 1962. Т. 56. № 2. С. 207–236.

[7] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954.

[8] Евтухов В. М., Костин А. В. Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 5. С. 1059–1062.

[9] Евтухов В. М. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщения АН ГССР. 1982. Т. 106. № 3. С. 474–476.

[10] Евтухов В. М. Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. 1984. Т. 115. С. 215–236.

[11] Евтухов В. М. Асимптотика решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 5. С. 776–787.

[12] Евтухов В. М. Об асимптотике монотонных решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1076–1078.

[13] Евтухов В. М. Об условиях неколеблемости решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Математические заметки. 2000. Т. 67. № 2. С. 201–210.

[14] Изобов Н. А. Об уравнениях Эмдена–Фаулера с неограниченными бесконечно продолжимыми решениями // Математические заметки. 1984. Т. 35. № 2. С. 189–198.

[15] Квиникадзе Г. Г. О монотонных правильных и сингулярных решениях обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 360–361.

[16] Кигурадзе И. Т. Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$ // Časopis pěst. mat. 1962. V. 87. № 4. 492–495.

[17] Кигурадзе И. Т. Об асимптотических свойствах решений уравнения $u'' + a(t)u^n = 0$ // Сообщения АН ГССР. 1963. Т. 30. № 2. С. 129–136.

[18] Кигурадзе И. Т. О неколеблющихся решениях уравнения $u'' + a(t)u^n \operatorname{sgn} u = 0$ // Сообщения АН ГССР. 1964. Т. 35. № 1. С. 15–22.

[19] Кигурадзе И. Т. Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера // Известия АН СССР, мат. 1965. Т. 29. № 5. С. 965–986.

[20] Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во Тбилисского университета, 1975.

[21] Кигурадзе И. Т., Шехтер Б. Л. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. 1987. Т. 30. С. 105–201.

[22] Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.

[23] Кондратьев В. А., Никишкин В. А. О положительных решениях уравнения $y'' = p(x)\, y^k$ // В сб.: Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением. Саранск. 1980. С. 131–141.

[24] Кондратьев В. А., Самовол В. С. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 4. С. 749–750.

[25] Кондратьев В. А., Никишкин В. А. Об изолированных особенностях решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 6. С. 1025–1038.

[26] Коньков А. А. О решениях неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия РАН, сер. Математика. 2001. Т. 65. № 2. С. 81–126.

[27] Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988.

[28] Корчемкина Т. А. О непродолжаемых решениях уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2016. Т. 26. № 2. С. 231–238.

[29] Костин А. В. Об асимптотике непродолжаемых решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // ДАН СССР. 1971. Т. 200. № 1. С. 28–31.

[30] Ломтатидзе А. Г. Об одной краевой задаче для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярностями // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 3. С. 416–426.

[31] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

[32] Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1954. Т. 1, 2.

[33] Садырбаев Ф. Ж. О решениях уравнения типа Эмдена–Фаулера // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 5. С. 799–805.

[34] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[35] Чантурия Т. А. Об асимптотическом представлении решений уравнения $u'' = a(t)u^n \operatorname{sgn} u$ // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. № 7. С. 1195–1206.

[36] Чантурия Т. А. Об асимптотическом представлении колеблющихся решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 6. С. 1035–1040.

[37] Astashova I. V. Uniform estimates for positive solutions of quasilinear differential equations // Доклады Академии наук. 2006. Vol. 74. № 1. P. 555–559.

[38] Astashova I. V. On asymptotic behavior of solutions to a quasilinear second-order differential equation // Functional differential equations. 2009. V. 16. № 1. P. 93–115.

[39] Astashova I. V. On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden–Fowler type higher-order equations // Advances in Difference Equations. SpringerOpen Journal. 2013. № 2013:220. P. 1–15.

[40] Astashova I. V. On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden–Fowler type differential equation // Boundary Value Problems. 2014. V. 174. P. 1–8.

[41] Astashova I. V. On asymptotic behavior of solutions to Emden-Fowler type higher-order differential equations // Mathematica Bohemica. 2015. V. 140. № 4. P. 479–488.

[42] Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to fourth-order differential equations with singular power nonlinearity // Mathematical Modelling and Analysis. 2016. V. 21. № 4. P. 502–521.

[43] Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. United States: New York. 2016. P. 185–197.

[44] Atkinson F. V. On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math. 1955. V. 5. № 1. P. 643–647.

[45] Bartušek M. On proper oscillatory solutions of the nonlinear differential equations of the n-th order // Archivum Mathematicum. 1988. V. 24. № 2. P. 89–98.

[46] Bartušek M. On the existence of unbounded noncontinuable solutions // Annali di Matematica. 2006. V. 185. P. 93–107.

[47] Belohorec S. A criterion for oscillation and nonoscillation // Acta F. R. N. Univ. Comen. Math. 1969. V. 20. P. 75–79.

[48] Bernstein S. R. Sur les equations du calcul des variations // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1912. V. 29. P. 431–485.

[49] Burkotová J., Hubner M., Rachůnková I., Weinmüller E. B. Asymptotic properties of Kneser solutions to nonlinear second order ODEs with regularly varying coefficients // Applied Mathematics and Computation. 2016. V. 274. P. 65–82.

[50] Došlá Z., Cecchi M., Marini M. On the dynamics of the generalized Emden–Fowler equation // Georgian Mathematical Journal. 2000. V. 7. № 2. P. 269–282.

[51] Došlá Z., Marini M. On super-linear Emden–Fowler type differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 416. P. 497–510.

[52] Došlá Z., Marini M. A coexistence problem for nonoscillatory solutions to Emden–Fowler type differential equations // EPAM. 2016. V. 2. № 1. P. 87–104.

[53] Došlá Z., Marini M. Monotonicity conditions in oscillation to superlinear differential equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2016. № 54. P. 1–13.

[54] Emden R. Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Warmtheorie auf Kosmologie und meteorologische Probleme. Leipzig–Berlin: Teubner, 1907.

[55] Jasny M. On the existence of an oscillatory solution of the nonlinear differential equation of the second order $y'' + f(x)y^{2n-1} = 0, f(x) > 0$ // Casopis Pest. Mat. 1960. V. 85. 78–83.

[56] Jaroš J., Kusano T. On black hole solutions of second order differential equations with a singular nonlinearity in the differential operator // Funkcialaj Ekvacioj. 2000. V. 43. № 5. P. 491–509.

[57] Jaroš J., Kusano T. On white hole solutions of a class of nonlinear ordinary differential equations of the second order // Funkcialaj Ekvacioj. 2002. V. 45. № 3. P. 319–339.

[58] Jaroš J., Kusano T., Manojlović J. Asymptotic analysis of positive solutions of generalized Emden–Fowler differential equations in the framework of regular variation // Cent. Eur. J. Math. 2013. № 11(12). P. 2215–2233.

[59] Karamata J. Sur un mode de croissance reguliere des functions // Mathematica. 1930 V. 4. P. 38–53.

[60] Kitano M., Kusano T. On a class of second order quasilinear ordinary differential equations // Hiroshima Math. J. 1995. V. 25. P. 321–355.

[61] Kiguradze I. T. On the oscilattory and monotone solutions of ordinary differential equations // Arch. Math. 1978. V. 14. № 1. P. 21–44.

[62] Kneser A. J. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen beigrosser reden // Wethen der Arguments, I. J. Reine und angew. Math. 1898. V. 116. P. 173–212.

[63] Kozlov V. A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // Ark. Mat. 1999. V. 37. № 2. P. 305–322.

[64] Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations // Czechosl. Math. Journ. 1958. V. 8. № 3. P. 360–588.

[65] Kusano T., Naito M. Unbounded nonoscillatory solutions of nonlinear ordinary differential equations of arbitrary order // Hiroshima Math. J. 1988. V. 18. P. 361–372.

[66] Kusano T., Tanigawa T. Positive solutions to a class of second order differential equations with singular nonlinearities // Applicable Analysis. 1998. V. 69. № 3–4. P. 315–331.

[67] Kusano T., Naito M. Singular solutions of a singular differential equation // Journal of Inequalities and Applications. 2000. V. 5. № 5. P. 487–496.

[68] Kusano T., Manojlović J. Asymptotic behavior of positive solutions of sublinear differential equations of Emden–Fowler type // Computers and Mathematics with Applications. 2011. V. 62. P. 551–565.

[69] Kusano T., Naito M., Manojlović J. Asymptotic analysis of Emden–Fowler differential equations in the framework of regular variation // Annali di Matematica. 2011. V. 190. P. 619–644.

[70] Lomtatidze A., Malaguti L. On a two-point boundary value problem for the second order ordinary differential equations with singularities // Nonlinear Analysis. 2003. V. 52. P. 1553–1567.

[71] Malaguti L., Marcelli C., Partsvania N. On transitional solutions of second order nonlinear differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 303. P. 258–273.

[72] Masci J. W., Wong J. S. W. Oscillation of solutions to second-order nonlinear differential equations // Pacif. J. Math. 1968. V. 24. № 1. P. 111–117.

[73] Nagumo M. Uber die differential gleichung $y'' = f(x, y, y')$ // Proc. Phys.-Math. Soc. Japan. 1937. V. 19. P. 861–866.

[74] Naito M. On the asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second order quasilinear ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 381. P. 315–327.

[75] Naito M. Integral averages and the asymptotic behavior of solutions of second order ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1992. V. 164(2). P. 370–380.

[76] Naito M., Naito Y. Solutions with prescribed numbers of zeroes for nonlinear second-order differential equations // Funkcialaj Ekvacioj. 1994. V. 37. P. 505–520.

[77] Naito M. On the number of bounded nonoscillatory solutions to higher-order nonlinear ordinary differential equations // Archivum Mathematicum. 2007. V. 43. P. 39–53.

[78] Nehari Z. On a class of nonlinear second-order differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. № 1. P. 101–123.

[79] Partsvania N. On one problem with the condition at infinity for second order singular ordinary differential equations // Georgian Mathematical Journal. 2008. V. 15. № 4. P 753–758.

[80] Partsvania N. On extremal solutions of two-point boundary value problems for second order nonlinear singular differential equations // Bull. Georg. Natl. Acad. Sci. 2011. V. 5. № 2. P 31–36.

[81] Rachůnková I. Boundary value problems with nonlinear conditions // Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis. 1994. V. 2. P. 71–77.

[82] Rachůnková I., Rachůnek L., Tomeček J. Existence of oscillatory solutions of singular nonlinear differential equations // Abstract and Applied Analysis. 2011. Article ID 408525. 20 pages.

[83] Taliaferro S. On the positive solutions of $y''+\phi(t)y^{-\lambda} = 0$ // Nonlinear Analysis. 1978. V. 2. P. 437–446.

[84] Thomas L. H. The calculation of atomic fields // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1927. V. 23. P. 542–548.

[85] Fermi E. Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprieta dell'atomo // Rend. R. Ace. Naz. dei Lincei. 1927. V. 6. P. 602–607.

[86] Fowler R. H. Further studies of Emden's and similar differential equations // Quart. Journ. Math. 1931. V. 2. № 2. P. 259–288.

[87] Waltman P. Some properties of solutions of $u'' + a(t)f(u) = 0$ // Monatsh. Math. 1963. V. 67. P. 50–54.

[88] Wong J. S. W. On second-order nonlinear oscillation // Funkcialaj Ekvacioj 1968. V. 11. P. 207–234.

[89] Wong J. S. W. On the Generalized Emden–Fowler Equation // SIAM Review. 1975. V. 17. P. 339–360.

[90] Yermachenko I., Sadyrbaev F. Quasilinearization and multiple solutions of the Emden–Fowler type equation // Mathematical Modelling and Analysis. 2005. V. 10. № 1. P. 41–50.

Публикации автора по теме диссертации

Издания из списка ВАК.

[91] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2015. Т. 128. № 6. С. 50–56.

[92] Дулина К. М. Об асимптотическом поведении решений с бесконечной производной регулярных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2016. Т. 26. № 2. С. 207–214.

[93] Dulina K. M. On asymptotic behavior of solutions to the second-order Emden–Fowler type differential equations with unbounded negative potential // Functional differential equations. 2016. № 23(1–2). P. 3–8. (Входит в Перечень

ВАК согласно приказу Минобрнауки России № 793 от 25 июля 2014 г., как статья журнала, входящего в международную реферативную базу данных и систем цитирования zbMATH, Zbl 066766676)

Статьи в хронике "О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете" журнала "Дифференциальные уравнения".

[94] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О классификации решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 6. С. 830–832.

[95] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с положительным потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1547–1548.

[96] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с неограниченным потенциалом в случаях регулярной и сингулярной нелинейности // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1574–1576.

Статьи.

[97] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Об асимптотической классификации решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Сборник материалов международной научной конференции "Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования". Архангельск, САФУ. 16–21 ноября 2014. С. 467–471. (ISBN 978-5-261-00990-0)

[98] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О существования решений с заданной областью определения уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Сборник трудов Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" (22 июня и 19 декабря 2013 г., 24 мая 2014 г.). М.: МЭСИ. 2014. С. 19–28. (ISBN 978-5-7764-0983-7)

[99] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Сборник

трудов международной конференции и молодежной школы ”Информационные технологии и нанотехнологии” (ИТНТ-2015). СГАУ, Самара: Самарский научный центр РАН. 2015. С. 45–46. (ISBN 978-5-93424-739-4)

[100] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О колеблемости решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с положительным потенциалом // Современные проблемы математики и механики. Математика. К 80-летию механико-математического факультета. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 9. Вып. 3. С. 88–97.

[101] Dulina K. and Korchemkina T. On asymptotic behavior of solutions to second-order regular and singular Emden–Fowler type differential equations with negative potential // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations ”QUALITDE – 2016”. Tbilisi, Georgia. December 24–26, 2016. P. 71–76. (E ISSN 1512-3391)

Тезисы докладов.

[102] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Существование решения с заданной областью определения уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка // Материалы Всероссийской научной конференции ”Понтрягинские чтения – XXV” в рамках XXV Воронежской весенней математической школы ”Современные методы теории краевых задач”. Воронеж. 3–8 мая 2014 г. С. 4–5 (доп. выпуск).

[103] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Классификация решений уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка // Материалы международной математической конференции ”Краевые задачи, теория функций и их применение”. Украина, Славянск. 21–24 мая 2014 г. С. 30–31.

[104] Dulina K., Korchemkina T. On classification of solutions to Emden-Fowler type second-order differential equations // Abstracts of International Conference on Differential and Difference Equations and Applications. Jasná, Slovak Republic. June 23–27, 2014. P. 21–22.

[105] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О колеблемости решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с положительным потенциалом // Материалы Международного молодежного научного форума ”ЛОМОНОСОВ-

2015” [Электронный ресурс]. М.: МАКС Пресс. 2015. С. 1–2. (ISBN 978-5-317-04946-1)

[106] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Материалы Всероссийской научной конференции ”Понтрягинские чтения – XXVI” в рамках XXVI Воронежской весенней математической школы ”Современные методы теории краевых задач”. Воронеж. 3–9 мая 2015 г. С. 86.

[107] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений с бесконечной производной уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Материалы Международного молодежного научного форума ”ЛОМОНОСОВ-2016” [Электронный ресурс]. М.: МАКС Пресс. 2016. С. 1–2. (ISBN 978-5-317-05237-9)

[108] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с неограниченным отрицательным потенциалом // Материалы Всероссийской научной конференции ”Понтрягинские чтения – XXVII” в рамках XXVII Воронежской весенней математической школы ”Современные методы теории краевых задач”. Воронеж. 3–9 мая 2016 г. С. 89–91.

[109] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Тезисы V Международной школы-семинара ”Нелинейный анализ и экстремальные задачи”. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 20–25 июня 2016 г. С. 19–20.

[110] Dulina K., Korchemkina T. On oscillation of solutions to second-order Emden–Fowler type differential equations with positive potential // Abstracts of Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems. Brno, Czech Republic. January 10–13, 2017. P. 1–2.