

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе
Федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Санкт-Петербургский
государственный университет»


С.В. Аплонов

«» 2017 г.



ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу
Дулиной Ксении Михайловны

«Асимптотическая классификация решений дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

Диссертационная работа К.М. Дулиной «Асимптотическая классификация решений дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка» посвящена изучению асимптотических и качественных свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка.

Актуальность темы. Уравнение Эмдена–Фаулера впервые появилось в 1907 году в работе Р. Эмдена в связи с изучением политропной модели газа, описывающей равновесные конфигурации звезд. В атомной физике оно впервые появилось в виде уравнения Томаса–Ферми, описывающего распределение электронов в тяжелом атоме. Асимптотическое поведение решений уравнения Эмдена-Фаулера подробно изучено в монографиях Р. Беллмана, Дж. Сансоне,

Ф. Хартмана. Важным вопросом качественной теории дифференциальных уравнений является вопрос колеблемости решений. Основополагающими исследованиями в теории колеблемости являются исследования А. Кнезера, Ф. Аткинсона. Современные результаты о качественных и асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена-Фаулера получены в работах И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурии, В.А. Кондратьева, Н.А. Изобова, Г.Г. Квиникадзе, А.В. Костина, В.М. Евтухова, И.В. Асташовой, А.А. Конькова, В.А. Козлова и многих других. Диссертация К.М. Дулиной является продолжением вышеперечисленных работ, и актуальность темы диссертации не вызывает сомнений.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 116 страниц, список литературы включает 110 наименований.

В диссертационной работе изучается задача асимптотической классификации решений дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена-Фаулера, причем предполагается, что потенциал уравнения зависит от независимой и всех фазовых переменных. Такая задача ставится впервые.

Во введении приводится обзор литературы по теме диссертационной работы, обосновывается актуальность темы исследований, научная новизна поставленной задачи, формулируются цели, предъявляются основные научные результаты, выносимые на защиту, кратко изложено содержание диссертации.

В первой главе в случае регулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом, которая обобщает полученную ранее классификацию И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурии для потенциала, зависящего только от *фазовой переменной*. При этом К.М. Дулиной доказано, что все нетривиальные решения определены на полупрямой или на конечном интервале. В обоих случаях показано, что решения имеют степенную асимптотику вблизи границ об-

ласти определения, вместе со своей производной являются исчезающими на бесконечности, а прямая, проходящая через конечную границу области определения, является вертикальной асимптотой решения. Автором также получены оценки расстояния до вертикальной асимптоты и показана непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных условий.

Вторая глава посвящена изучению поведения решений уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом *в случае сингулярной нелинейности*. Здесь рассматриваются μ -решения, введенные И.В. Асташовой (*максимально единственные решения*), так как в случае сингулярной нелинейности решения могут иметь особое поведение во внутренней точке области определения. Рассмотрение μ -решений позволяет автору получить полную асимптотическую классификацию решений, которая, в свою очередь, обобщает полученную ранее классификацию И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурии для потенциала, зависящего только от фазовой переменной. В частности, показано, что все μ -решения имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения, определены или на всей числовой прямой, или на полупрямой, имеют либо ровно один нуль, либо ровно один экстремум, либо вместе со своей производной стремятся к нулю в конечной граничной точке области определения. Автором также получены оценки расстояния до нуля, точки экстремума и граничной точки области определения, показана непрерывная зависимость положения нуля, точки экстремума и граничной точки области определения от начальных условий.

В третьей главе в случаях регулярной и сингулярной нелинейности рассматривается уравнение типа Эмдена-Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля положительным потенциалом. Автором показано, что все максимально продолженные решения вместе со своими производными являются колеблющимися, нули решений и их первых производных чередуются. Кроме того, получены достаточные условия продолжаемости решений на всю числовую прямую и, в случае выполнения или невыполнения условий, исследо-

вано асимптотическое поведение решений. Так, построены три примера непрерывных положительных потенциалов, для которых соответственно существует решение, имеющее резонансную асимптоту, существует неограниченное решение, продолжаемое на всю числовую прямую, и существует нетривиальное колеблющееся решение, продолжаемое на всю числовую прямую и исчезающее вместе со своей первой производной на бесконечности.

Четвертая глава посвящена изучению асимптотического поведения решений уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка при различных условиях на неограниченный отрицательный потенциал в случаях регулярной и сингулярной нелинейности. При условии, что производная решения стремится к бесконечности в конечной граничной точке области определения, разграничены возможности поведения решений: решения уравнения могут иметь вертикальную асимптоту или являться *black hole* решениями (производная решения стремится к бесконечности на границе области определения, а решение в этой точке имеет конечный предел). Автором получены условия на потенциал, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения имеют вертикальную асимптоту, установлены достаточные условия на потенциал, при которых решения являются *black hole* решениями, и условия, при которых решения могут быть продолжены на всю числовую ось.

В заключении перечислены основные результаты диссертационной работы и возможные направления дальнейших исследований.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. В случае регулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом. Доказано, что все нетривиальные решения определены или на полупрямой, или на конечном интервале и имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения, при этом прямая, проходящая через конечную границу области определения, является вертикальной асимптотой

решения, а на бесконечности все решения стремятся к нулю вместе с производной. Получены оценки расстояния до вертикальной асимптоты и показана непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных условий.

2. В случае сингулярной нелинейности получена полная асимптотическая классификация μ -решений уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом: в частности, доказано, что все μ -решения определены или на всей числовой прямой, или на полупрямой и имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения. При этом установлено, что все μ -решения имеют либо ровно один нуль, либо ровно один экстремум, либо вместе со своей производной стремятся к нулю в конечной граничной точке области определения со степенной асимптотикой; получены оценки расстояния до нуля, точки экстремума и граничной точки области определения, показана непрерывная зависимость положения нуля, точки экстремума и граничной точки области определения от начальных условий.

3. В случаях регулярной и сингулярной нелинейности показано, что все максимально продолженные решения уравнение типа Эмдена-Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля положительным потенциалом и их первые производные являются колеблющимися, причем нули решений и их первых производных чередуются. Получены достаточные условия продолжаемости решений на всю числовую прямую, и в случае выполнения или невыполнения условий исследовано асимптотическое поведение решений.

4. В случаях регулярной и сингулярной нелинейности исследовано асимптотическое поведение решений уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка при различных условиях на неограниченный отрицательный потенциал. Получены условия на потенциал, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения имеют вертикальную асимптоту, установлены достаточные условия на потенциал, при которых решения являются black hole реше-

ниями, и условия, при которых решения могут быть продолжены на всю числовую ось.

Достоверность основных выводов диссертации сомнений не вызывает. Автор продемонстрировал хороший уровень владения методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и функционального анализа. Результаты, представленные в работе, являются новыми и полностью обоснованными, ясно изложены и подтверждаются подробными строгими математическими доказательствами. Результаты диссертации опубликованы в 20 работах автора, в том числе 11 статей, 3 из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 работы опубликованы в журнале «Дифференциальные уравнения» (Хроника «О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете»), и 9 тезисов докладов. Основные результаты прошли апробацию на 15 конференциях и 3 семинарах как общероссийского, так и международного уровня.

Научная новизна представленных результатов заключается в том, что задача асимптотической классификации решений уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка, у которых потенциал зависит от независимой и всех фазовых переменных, ставится впервые. В диссертационной работе получена полная асимптотическая классификация максимально продолженных решений в случае регулярной нелинейности и μ -решений в случае сингулярной нелинейности уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка для ограниченного и отделенного от нуля потенциала, исследовано асимптотическое поведение решений при различных условиях на неограниченный отрицательный потенциал.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты, изложенные в работе, могут быть использованы специалистами по качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений в Московском, Санкт-Петербургском, Новосибирском, Нижегородском, Воронежском, Саратовском,

Самарском государственных университетах, а также в других российских и зарубежных научных и педагогических центрах.

К тексту диссертации имеются следующие **замечания**:

1. Известно, что уравнение Эмдена-Фаулера появилось в связи с изучением конкретных физических задач. В диссертационной работе изучается поведение решений уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка при различных условиях на потенциал, зависящий от независимой и всех фазовых переменных. Хотелось бы в тексте диссертации видеть примеры применения таких дифференциальных уравнений в физических задачах.

2. Имеются недостатки в изложении, например, леммы 1.8 и 1.9 формулируются и доказываются в процессе доказательства леммы 1.7, это несколько затрудняет чтение диссертации.

3. При построении примеров в главе 3 используется бета-функция. Следовало бы осветить этот факт более подробно.

Кроме того, имеются отдельные опечатки.

Указанные замечания не влияют на правильность полученных диссертантом результатов и на общую положительную оценку работы.

Диссертация К.М. Дулиной выполнена на высоком научном уровне. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Заключение

Диссертационная работа К.М. Дулиной «Асимптотическая классификация решений дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка» является завершенной научно-квалификационной работой на актуальную тему и удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации (в редакции постановления Правительства

РФ от 24 сентября 2013 г. № 842), а ее автор, Дулина Ксения Михайловна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв составлен доктором физико-математических наук Васильевой Екатериной Викторовной (специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), доцентом Кафедры дифференциальных уравнений Санкт-Петербургского государственного университета, доцентом.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании Кафедры дифференциальных уравнений Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет» 10 мая 2017 года, протокол № 6.

Заведующий Кафедрой дифференциальных уравнений,
доктор физико-математических наук (01.01.02),
член-корреспондент РАН, профессор

ВТ Плисс

Плисс Виктор Александрович

Доцент Кафедры дифференциальных уравнений,
доктор физико-математических наук (01.01.02),
доцент

Е Васильева

Васильева Екатерина Викторовна

г. Санкт-Петербург

11.05.2017

Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский
государственный университет»
Почтовый адрес: 199034,
г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9
Телефон: +7 (812) 328-20-00
Факс: +7 (812) 428 69 44
Эл. почта: spbu@spbu.ru Сайт: <http://spbu.ru/>



Документ подготовлен
в порядке исполнения
трудовых обязанностей