

## ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации

**Дулиной Ксении Михайловны**

«Асимптотическая классификация решений

дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка»

на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,

динамические системы и оптимальное управление

Диссертационная работа К. М. Дулиной «Асимптотическая классификация решений дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка» выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико–математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, под моим научным руководством.

Работа относится к качественной теории дифференциальных уравнений и посвящена исследованию качественных и асимптотических свойств решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка, являющегося хорошо известным обобщением уравнения Эмдена–Фаулера. Уравнение Эмдена–Фаулера впервые появилось в работе Р. Эмдена в виде уравнения, описывающего распределение плотности в политропной модели звезды по мере удаления от ее центра массы. Значительный вклад в изучение уравнения Эмдена и его обобщения внес Р. Фаулер. В атомной физике уравнение Эмдена–Фаулера появилось в виде уравнения Томаса–Ферми, описывающего распределение электронов в тяжелом атоме.

Уравнению Эмдена–Фаулера и его обобщениям посвящено огромное количество работ, основной целью которых является изучение качественных свойств решений и исследование их асимптотического поведения. Так, вопросы продолжаемости или непродолжаемости, колеблемость, асимптотическое поведение решений уравнения типа Эмдена–Фаулера подробно описаны в монографиях Р. Беллмана, Дж. Сансоне, Ф. Хартмана. Существенный вклад в развитие асимптотической теории нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка внесли И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, Я. А. Беклемишева, А. В. Костин, В. М. Евтухов, В. А. Кондратьев, Н. А. Изобов. Важным вопросом качественной теории дифференциальных уравнений является вопрос колеблемости решений. Основополагающими исследованиями в теории колеблемости являются исследования А. Кнезера, Ф. Аткинсона. Свойства колеблемости решений уравнения Эмдена–Фаулера и нелинейных уравнений более общего вида изучали S. Belohorec, И. Т. Кигурадзе, M. Jasný, J. Kurzweil, Z. Nehari, J. W. Masci, J. S. B. Wang, P. Waltman и другие. Среди современных специалистов, занимающихся изучением качественных свойств решений уравнений типа Эмдена–Фаулера, можно также выделить M. Bartušek, M. Cecchi, Z. Došlá, J. Jaroš, A. A. Конькова, T. Kusano, A. Г. Ломтатидзе, L. Malaguti, C. Marcelli, M. Marini, M. Naito, N. Partsvania, I. Rachůnková, F. Sadyrbaev.

Представленная работа является исследованием в области качественной теории дифференциальных уравнений. Ее цель — получение полной асимптотической классификации максимально продолженных решений дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка в случаях регулярной и сингулярной нелинейности с ограниченным и отделенным от нуля потенциалом, и исследование асимптотического поведения решений уравнений с неограниченным потенциалом. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Во введении представлен исторический обзор работ по теме диссертации; объясняется актуальность темы исследований автора и научная новизна поставленной задачи; излагаются основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена изучению качественных свойств и асимптотического поведения решений уравнения типа Эмдена–Фаулера с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным

потенциалом в случае регулярной нелинейности. Автором получена полная асимптотическая классификация максимально продолженных решений, которая в частном случае  $p = p(x)$  совпадает с классификацией, полученной И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией (Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990). В частности, показано, что все максимально продолженные решения уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка являются blow-up решениями со степенной асимптотикой, получены оценки расстояния до вертикальной асимптоты, установлена непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных условий.

Во второй главе рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом в случае сингулярной нелинейности. В случае сингулярной нелинейности решения уравнения могут иметь особое поведение не только вблизи границ, но и во внутренней точке области определения, поэтому рассматриваются  $\mu$ -решения (Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to fourth-order differential equations with singular power nonlinearity // Mathematical Modelling and Analysis. 2016. V. 21. No 4. P. 502–521.) Использование понятия  $\mu$ -решения позволяет К. М. Дулиной привести полную асимптотическую классификацию решений уравнения типа Эмдена–Фаулера в рассматриваемом случае, которая, как и выше, обобщает результаты И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурии, полученные для  $p = p(x)$ . Важным достижением первых двух глав является то, задача асимптотической классификации, в которой потенциал может зависеть от независимой и всех фазовых переменных, для уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка ставится впервые.

Третья глава посвящена изучению качественных и асимптотических свойств максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера с положительным ограниченным и отделенным от нуля потенциалом. Автором установлено, что в случаях регулярной и сингулярной нелинейности все нетривиальные максимально продолженные решения и их первые производные являются колеблющимися, нули  $x_j$  и экстремумы  $x'_j$  решений чередуются и получены оценки отношения значений первых производных в последовательных нулях и оценки отношения значений решений в последовательных экстремумах. И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией установлено, что если функция  $p = p(x)$  является положительной, локально интегрируемой и функцией локально ограниченной вариации, то в случаях регулярной и сингулярной нелинейности любое максимально продолженное вправо решение уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка является правильным, то есть определено в окрестности  $+\infty$ . В работе диссертантом построен пример непрерывной положительной функции  $p = p(x)$ , для которой в случае регулярной нелинейности существует решение, имеющее резонансную асимптоту  $x = x^* \left( \overline{\lim}_{x \rightarrow x^*} y(x) = +\infty \right)$ , то есть не являющееся правильным. Кроме того, в случае регулярной нелинейности для  $p = p(x)$  получены достаточные условия, при которых решения определены на всей числовой прямой и существуют конечные положительные пределы  $\lim_{j \rightarrow \pm\infty} |y'(x_j)|$ ,  $\lim_{j \rightarrow \pm\infty} |y(x'_j)|$  и  $\lim_{j \rightarrow \pm\infty} (x_{j+1} - x_j)$ . При этом построены примеры непрерывного положительного потенциала  $p = p(x)$ , для которого существует неограниченное решение, определенное на всей числовой прямой, и потенциала, для которого существует нетривиальное правильное колеблющееся решение, стремящееся к нулю вместе со своей первой производной на бесконечности.

В четвертой главе изучается асимптотическое поведение решений уравнения типа Эмдена–Фаулера с неограниченным снизу и неотделенным от нуля сверху отрицательным потенциалом. И. Т. Кигурадзе (Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во Тбилисского университета, 1975) получены условия существования решений, у которых  $\lim_{x \rightarrow a-0} |y'(x)| = +\infty$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Оставался открытым вопрос, будет ли при этом решение также стремиться к бесконечности или может стремиться к конечному пределу при

$x \rightarrow a - 0$ , то есть вопрос различения двух случаев:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} |y(x)| = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} |y(x)| < +\infty,$$

в которых решение имеет вертикальную асимптоту или соответственно является black hole решением (Jaroš J., Kusano T. On black hole solutions of second order differential equations with a singular nonlinearity in the differential operator // Funkcialaj Ekvacioj. 2000. V. 43. No 5. P. 491–509).

В. М. Евтуховым (Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. 1984. Т. 115. С. 215–236) при рассмотрении потенциала  $p = \bar{p}(x)|y'|^\lambda$  получен ответ на этот вопрос. К. М. Дулиной исследовано асимптотическое поведение максимально продолженных решений при различных условиях на потенциал более общего вида  $p = p(x, y, y')$ .

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные результаты состоят в следующем.

1. В случае регулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом. В частности, доказано, что все нетривиальные решения определены или на полупрямой, или на конечном интервале и имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения. При этом прямая, проходящая через конечную границу области определения является вертикальной асимптотой решения, а на бесконечности все решения стремятся к нулю вместе с производной. Получены оценки расстояния до вертикальной асимптоты; показана непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных условий.

2. В случае сингулярной нелинейности получена асимптотическая классификация всех  $\mu$ -решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом: в частности, доказано, что все  $\mu$ -решения или определены на всей числовой прямой, или на полупрямой и имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения. Кроме того, показано, что все  $\mu$ -решения имеют либо ровно один нуль, либо ровно один экстремум, либо вместе со своей производной стремятся к нулю в конечной граничной точке области определения со степенной асимптотикой; получены оценки расстояния до нуля, экстремума и граничной точки области определения соответственно; показана непрерывная зависимость положения нуля, экстремума, граничной точки области определения от начальных условий.

3. В случаях регулярной и сингулярной нелинейности установлено, что все максимально продолженные решения уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка и их первые производные с ограниченным и отделенным от нуля положительным потенциалом являются колеблющимися, причем нули решений и их первых производных чередуются, и получены достаточные условия, при которых решения определены на всей числовой прямой, исследовано их асимптотическое поведение в случае выполнения или невыполнения этих достаточных условий.

4. В случаях регулярной и сингулярной нелинейности исследовано асимптотическое поведение решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка при различных условиях на неограниченный отрицательный потенциал: получены условия на потенциал, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка имеют вертикальную асимптоту, установлены достаточные условия на потенциал,

при которых решения являются black hole решениями, и условия, при которых решения могут быть продолжены на всю числовую ось.

Основные результаты, изложенные в диссертации К. М. Дулиной, опубликованы в 20 работах автора, в том числе 11 статей, 3 из которых опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК, 3 работы опубликованы в журнале «Дифференциальные уравнения» (Хроника «О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете»), и 9 тезисов докладов. Соавтором ряда работ К. М. Дулиной, одна из которых входит в список ВАК, является моя ученица, студентка 6-го курса механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, Корчемкина Татьяна Александровна. Сотрудничество своих учениц К. М. Дулиной и Т. А. Корчемкиной считаю плодотворным. Результаты диссертации докладывались на 15 конференциях и 3 семинарах как общероссийского, так и международного уровня. Автореферат точно отражает содержание диссертации.

Работа носит теоретический характер. Результаты, изложенные в работе, могут быть использованы специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском, Тбилисском, Санкт-Петербургском, Новосибирском, Нижегородском, Воронежском, Саратовском, Самарском государственных университетах, Владимирском государственном педагогическом университете, МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Диссертация К. М. Дулиной является завершенным научным исследованием, в котором содержатся новые результаты по актуальной задаче. Автором проделана серьезная самостоятельная аналитическая работа и диссертация выполнена на должном научном уровне. Подробная библиография достаточно полно отражает исследуемую проблематику.

Диссертация К. М. Дулиной «Асимптотическая классификация решений дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка» удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации, а ее автор, Дулина Ксения Михайловна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Научный руководитель,  
доктор физико-математических наук  
по специальности 01.01.02,  
профессор кафедры дифференциальных уравнений  
механико-математического факультета  
ФГБОУ ВО «Московский государственный  
университет имени М.В. Ломоносова»

Асташова Ирина Викторовна

9 декабря 2016 г.

119234, Москва, Ленинские горы, д. 1,  
МГУ, механико-математический факультет,  
кафедра дифференциальных уравнений,  
e-mail: iastashova@mesu.ru; тел. +7 (495) 939-16-31

Подпись профессора И. В. Асташовой заверяю:  
И.о. декана  
механико-математического факультета МГУ,  
доктор физико-математических наук,  
профессор



Чубариков Владимир Николаевич