

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Дулиной Ксении Михайловны
**«Асимптотическая классификация решений
дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка»**,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

Диссертационная работа К.М. Дулиной относится к теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе изучаются асимптотические свойства решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с потенциалом, зависящим от независимой и всех фазовых переменных, и дается их классификация. Уравнение такого типа впервые привел Р. Эмден в 1907 году при описании распределения плотности в политропной модели звезды по мере удаления от ее центра масс. Одним из первых подобные уравнения исследовал в 1931 году Р. Фаулер. После этого уравнению Эмдена–Фаулера и его обобщениям было посвящено огромное количество работ. Обзор этих работ приводится в диссертации. Отметим книги Дж. Сансоне и Ф. Хартмана, И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурия, а также работы В.А. Кондратьева, Н.А. Изобова, Г.Г. Квиникадзе, А.В. Костин, а В.М. Евтухова, И.В. Асташовой. Диссертация является продолжением исследований качественных и асимптотических свойств решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка при различных условиях на потенциал. При этом задача классификации асимптотического поведения решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка, у которых потенциал может зависеть от независимой и всех фазовых переменных, рассмотрена впервые. Поэтому, безусловно, тема диссертационной работы является актуальной.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Структурно диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Во **введении** автор описывает историю вопроса, актуальность темы работы, приводит необходимые определения, постановку задачи, основные результаты диссертационной работы. Заслуживает уважения обзор по исследованиям уравнений типа Эмдена–Фаулера.

В **первой главе** рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным снизу, отделенным от нуля сверху отрицательным потенциалом в случае регулярной нелинейности ($k > 1$). Автором получена полная асимптотическая классификация максимально продолженных решений рассматриваемого уравнения. Для этого автор доказывает ряд вспомогательных утверждений, описывающих качественные свойства и асимптотическое поведение решений. Так, среди них выделю следующие: доказано, что все нетривиальные решения определены или на полупрямой, или на конечном интервале, в обоих случаях решения имеют степенную асимптотику вблизи границ области определения, и прямая, проходящая через конечную граничную точку, является вертикальной асимптотой решения. Кроме того, установлены оценки расстояния до вертикальной асимптоты решения, доказана непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных данных.

Во **второй главе** автор применяет технику первой главы к уравнению типа Эмдена–Фаулера второго порядка того же вида, что в первой главе (с ограниченным снизу, отделенным от нуля сверху отрицательным потенциалом), но уже в случае сингулярной нелинейности

($0 < k < 1$). Как известно, в случае сингулярной нелинейности решения уравнения могут иметь особое поведение как вблизи границ, так и во внутренней точке области определения, в связи с чем во второй главе рассматриваются так называемые μ -решения, введенные И.В. Асташовой. В терминах μ -решений во второй главе получена полная асимптотическая классификация решений рассматриваемого уравнения. Установлено, что все μ -решения определены или на всей числовой прямой, или на полупрямой. В первом случае они имеют либо ровно один нуль, либо ровно один экстремум. Во втором случае μ -решения вместе со своей первой производной стремятся к нулю в конечной граничной точке. При этом автором показано, что во всех описанных случаях вблизи границ все μ -решения имеют степенную асимптотику. Кроме того, установлены оценки расстояния до нуля, точки экстремума и граничной точки, доказана непрерывная зависимость положения нуля, точки экстремума и граничной точки от начальных данных.

Хотелось бы отметить, что полученная в первых двух главах асимптотическая классификация обобщает известные результаты И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурии для потенциала, зависящего только от фазовой переменной. Особо выделю то, что многие математики изучают свойства решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с потенциалами различного вида, но случай потенциала такого общего вида ранее не был рассмотрен. При доказательстве основных результатов главы автор применяет и развивает методы, разработанные И.В. Асташовой, используемые при получении асимптотической классификации решений уравнения типа Эмдена–Фаулера третьего порядка с потенциалом, зависящим от фазовой переменной, и классификации решений уравнения четвертого порядка с постоянным потенциалом.

В **третьей главе** одновременно в случаях регулярной и сингулярной нелинейности рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным сверху, отделенным от нуля снизу положительным потенциалом. Установлено, что все нетривиальные максимально продолженные решения вместе со своими первой и второй производными являются колеблющимися, более того, нули и точки экстремума чередуются. Огромный интерес в этой главе вызывает вопрос продолжаемости или непродолжаемости решений рассматриваемого уравнения. Автором проведено исследование этого вопроса при различных условиях на потенциал. Так, получены различные достаточные условия продолжаемости решений на всю числовую прямую. Отмечу, что автором пошагово сконструированы оригинальные примеры потенциалов, показывающие существенность полученных достаточных условий.

В **четвертой главе** одновременно в случаях регулярной и сингулярной нелинейности рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка с неограниченным отрицательным потенциалом. В связи с неограниченностью снизу отрицательного потенциала оказалась возможной ситуация, в которой при условии, что производная решения стремится к бесконечности на границе области определения, решение в этой точке может иметь конечный предел. Такие решения были названы ими *black hole* решениями. Автором диссертационной работы получены как необходимые, так и достаточные условия на потенциал, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения имеют вертикальную асимптоту и достаточные условия, при которых решения являются *black hole* решениями. Полученные результаты объясняют, почему в приведенной И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурии классификации решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с потенциалом, зависящим только от независимой переменной, *black hole* решений быть не может. Такой тип решений может возникнуть только при зависимости потенциала от первой производной решения. Если же потенциал зависит только от независимой переменной, то *black hole* решения не возникают. В четвертой главе также получены условия на потенциал, при которых решения продолжаемы на всю числовую прямую. Представленная глава вызывает огромный интерес, так как устанавливает ряд классов потен-

циалов, для которых можно заведомо сказать, будет ли решение иметь вертикальную асимптоту, являться black hole решением или будет продолжаемым на всю числовую прямую.

В заключении автор перечисляет основные результаты работы и описывает возможные направления дальнейшего исследования.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. В случае регулярной нелинейности получена полная асимптотическая классификация максимально продолженных решений уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка с ограниченным и отделенным от нуля отрицательным потенциалом.
2. В случае сингулярной нелинейности рассматриваемые уравнения могут иметь особое поведение не только вблизи границ, но и во внутренней точке области определения. В терминах μ -решений получена полная асимптотическая классификация.
3. В случаях регулярной и сингулярной нелинейности и ограниченным отделенным от нуля положительным потенциалом решения и их первые производные являются колеблющимися, причем нули решений и их первых производных чередуются.
4. В случаях регулярной и сингулярной нелинейности исследовано асимптотическое поведение решений уравнений типа Эмдена-Фаулера при различных условиях на неограниченный отрицательный потенциал. В частности, получены условия на потенциал, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения имеют вертикальную асимптоту, а также найдены достаточные условия на потенциал, при которых решения являются black-hole решениями.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. На стр. 25 во втором абзаце имеется неточность: написано «...прямая, проходящая через конечную границу области определения...», должно быть «...прямая, проходящая через конечную граничную точку области определения...».
 2. В теореме 1.1 слово «соответственно» встречается дважды в одном предложении.
 3. На стр. 37 нет пояснения существования обратной функции $t(x)$.
 4. Кроме того, имеются отдельные опечатки. Например, на стр. 104 в 4-ой строке пропущено слово «производные».
- Перечисленные замечания являются несущественными и не влияют на общую положительную оценку работы.

ВЫВОДЫ

Достоверность научных результатов, представленных в работе, не вызывает сомнений, все результаты снабжены подробными математическими доказательствами. Результаты работы новы и интересны, автором продемонстрированы высокие навыки владения методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений и математического анализа. Полученные автором результаты вносят существенный вклад в теорию нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы, применяемые в работе, могут быть использованы для изучения качественных свойств и исследования асимптотического поведения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты, полученные в диссертации, могут также использоваться при чтении специальных курсов по теории дифференциальных уравнений для студентов математических и естественно-научных специальностей.

Основные результаты диссертационной работы полностью отражены в 3 работах автора, опубликованных в ведущих рецензируемых научных журналах и рекомендованных ВАК, а также отражены в других работах, опубликованных в журнале «Дифференциальные уравнения»

(Хроника «О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете»). Основные результаты были представлены на 15 общероссийских и международных конференциях и 3 научных семинарах, на которых автор выступал с докладами.

Автореферат правильно и полно отражает структуру, содержание и основные положения диссертационной работы, дает представление о рассматриваемой задаче, методах исследования и полученных результатах, а также отделяет результаты автора от результатов соавтора.

Диссертация К.М. Дулиной представляет собой самостоятельную законченную научно-квалификационную работу на актуальную тему, содержащую решение нескольких важных задач теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема диссертации соответствует специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, по которой она представлена к защите.

Считаю, что диссертационная работа К.М. Дулиной «Асимптотическая классификация решений дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка» удовлетворяет требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Дулина Ксения Михайловна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Морозов Альберт Дмитриевич,
профессор, д.ф.-м.-н, профессор

31 мая 2017 года.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 6, ком. 409 Институт информационных технологий, математики и механики.
Email: unn@unn.ru, т. 8(831)462-33-20

