ФГБОУ ВПО
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.986.7

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

**ИВАН ДМИТРИЕВИЧ РЕМИЗОВ**

# ЧЕРНОВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Специальность 01.01.01
(вещественный, комплексный и функциональный анализ)

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор
Олег Георгиевич Смолянов

Москва
2017

# Оглавление

# Введение

Тематика диссертации относится к области бесконечномерного анализа и его приложений к математической физике.

Центральным объектом изучения является задача Коши для линейного эволюционного уравнения (т.е. рассматриваются уравнение $u'_t(t,x) = Lu(t,x)$ и начальное условие $u(0,x) = u_0(x)$), где оператор $L$ линеен, а его коэффициенты зависят только от пространственной переменной $x$, но не от времени $t$. Решение задачи Коши, то есть экспонента от оператора $tL$, находится на основе предложенных автором конструкций в сочетании с теоремой Чернова о сильно непрерывных полугуппах операторов.

Формулой Фейнмана (в смысле О.Г.Смолянова [33]) называется равенство следующего вида:

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_E \dots \int_E}_{n} \dots dx_1 \dots dx_n.$$

Обычно эта формула служит для выражения функции $u$ (которая яляется решением задачи Коши $u'_t = Lu, u(0,x) = u_0(x)$ для эволюционного уравнения $u'_t = Lu$), через коэффициенты уравнения и начальное условие.

Впервые так называемые лагранжевы формуы Фейнмана появились в работе Р.Фейнмана [9] в 1948, где он постулировал их без доказательства. Построенные Фейнманом формулы доказал в 1964 году Э.Нельсон [49], его доказательство опиралось на доказанную в 1959 году теорему Троттера [6]. Гамильтоновы формулы Фейнмана в 1951 году были также без доказательства предложены Р.Фейнманом [10], а доказаны в 2002 году работе О.Г.Смолянова, А.Г.Токарева и А.Трумана [33] при помощи доказанной в 1968 году теоремы Чернова [31]. Об истории исследований в этом направлении до 2009 года см. [13].

Диссертация посвящена углублению понимания теоремы Чернова и применению этой теоремы для получения новых решений эволюционных уравнений в виде формул Фейнмана и близких к ним формул, полученных на основе операторов сдвига.

**Первая глава диссертации** начинается с обзора литературы, определений используемых в диссертации терминов, там же даются необходимые пояснения и примеры. После этого обсуждается принадлежащая автору диссертации конструкция касания по Чернову и предлагается схема построения исчисления функций Чернова. А именно, доказываается, что если даны функции, касательные по Чернову к операторам $A$ и $B$, то явно указанными в перой главе формулами можно задать функции, касательные по Чернову к операторам $A+B$ и $AB$. Обсуждается вопрос о скорости сходимости черновских аппроксимаций: вводятся подпространства сходимости и их иерархия, а также формулируется гипотеза о том, какой вид могут иметь оценки на скорость сходимости (формулируются два неравенства). Далее, во второй и третьей главах диссертации рассуждения посвящены решению задач Коши для уравнения $u'_t(t,x) = Lu(t,x)$ в двух конкретных случаях. Обе задачи полностью решены автором. Возникшие при этом теоремы снабжены подробными доказательствами и ссылками на теорию из первой главы.

**Во второй главе диссертации** предполагается, что аргумент $x$ принадлежит бесконечномерному сепарабельному гильбертову пространству $H$, а в роли $L$ выступает дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий производные второго, первого и нулевого порядков. Вторая производная входит в $L$ через аналог лапласиана, построенный по линейному оператору $A\colon H \to H$ с конечным следом так: если $f$ — числовая функция на $H$, то по определению $(\Delta_A f)(x) = \mathrm{trace}(Af'')(x)$. Решение с помощью теоремы Чернова пишется в виде предела кратных интегалов неограниченно растущей кратности, при этом интегрирование ведётся по гауссовской мере с корреляционным оператором, пропорциональном оператору $A$. Кроме того, доказана непрерывная зависимость решения задачи Коши не только от начального условия, но и от коэффициентов уравнения.

**В третьей главе диссертации** предполагается, что $x$ принадлежит $\mathbb{R}^1$, а уравнение $u'_t(t,x) = Lu(t,x)$ — это общее параболическое уравнение второго порядка, с переменными (вещественными) коэффициентами, которые зависят от $x$, но не от $t$. Уравнение решается путём применения черновской аппроксимационной процедуры со специально построенным семейством операторов сдвига. Доказана равномерная сходимость аппроксимаций к точному решению. Решение при этом представляется в виде выражения нового типа, поскольку в теореме Чернова берутся степени не интегрального оператора (приводящие к формулам Фейнмана), а степени оператора сдвига. Показано, что решение может быть записано также как формула Фейнмана с интегральным ядром, содержащим обобщённые функции. Ранее это уравнение было решено многими способами, однако здесь впервые теорема Чернова применяется к семейству операторов сдвига, а не к семейству интегральных операторов.

**Актуальность.** Диссертация посвящена развитию техники, связанной с исследованием одного из центральных объектов бесконечномерного анализа, находящего важные приложения в математической физике — функционального интеграла (интеграла Фейнмана по траекториям). Опубликовано много работ, связанных с исследованием этого объекта, но большинство из них написаны на физическом уровне строгости, так как математическое описание возникающих конструкций связано с преодолением серьёзных технических и идейных трудностей. Число чисто математических работ этого направления сравнительно невелико, но в течение последниего десятилетия оно быстро возрастает. Этот рост связан не только с важностью обсуждаемых объектов для приложений, но и с внутренней логикой развития анализа. Сказанное и определяет актуальность темы диссертации.

**Цель** работы — в рамках парадигмы школы О.Г.Смолянова продолжить изучение теоремы Чернова и открываемых ею возможностей. Ввести понятие функции, касательной по Чернову к оператору, и найти методы построения таких функций. Сформулировать гипотезы о скорости сходимости черновских аппроксимаций в общем случае. Для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами с пространственной координатой из бесконечномерного гильбертовова пространства доказать существование разрешающей полугруппы, найти дающее решение задачи Коши формула Фейнмана, доказать непрерывная зависимость решения от коэффициентов уравнения. Для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами на вещественной прямой построить основанные на операторах сдвига черновские аппроксимации к решению задачи Коши, доказать равномерную сходимость аппроксимаций к решению.

**Новизна.** Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Введено понятие функции, касательной по Чернову к оператору, и найдены методы построения таких функций.

2. Для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами с пространственной координатой из бесконечномерного гильбертовова пространства доказано существование разрешающей полугруппы, найдена дающее решение задачи Коши формула Фейнмана, доказана непрерывная зависимость решения от коэффициентов уравнения.

3. Для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами и одномерной пространственной переменной построены основанные на операторах сдвига черновские аппроксимации решения задачи Коши, доказана равномерная сходимость аппроксимаций к решению. Показано, что решение может быть также записано как формула Фейнмана с интегральным ядром, содержащим обобщённые функции.

**Методы.** В диссертации использованы методы бесконечномерного анализа, а также оригинальные конструкции, относящиеся в целом к области функционального анализа.

**Теоретическая и практическая ценность.** Диссертация имеет теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в функциональном анализе, теории операторных полугрупп, теории уравнений с частными производными, а также в вычислительной математике.

**Апробация.** Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и заседаниях научных семинаров:

- Научный семинар «Бесконечномерный анализ и математическая физка» на механико-математическом факультете МГУ, руководители О.Г.Смолянов и Е.Т.Шавгулидзе (многократно)
- Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ» (2011 и 2012, МГУ, Москва)
- Нижегородское математическое общество (21 сентября 2012 г., Нижний Новгород)
- Третья международная конференция «Математическая физика и её приложения» (27 августа–01 сентября 2012 г., г. Самара)
- Научная конференция «Бесконечномерная дикамика, диссипативные системы и аттракторы» (12–18 июля 2015 г., г. Нижний Новгород)
- Научный семинар «Топологические методы в динамике» кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ (ННФ) и лаборатории ТАПРАДЕСС (27.01.2017, 10.02.2017)

**Публикации.** По теме диссертации автор имеет три вышедшие из печати статьи, опубликованные в изданиях из списка ВАК:

- I.D. Remizov, "Solution of a Cauchy problem for a diffusion equation in a Hilbert space by a Feynman formula", Russian Journal of Mathematical Physics, 19:3 (2012), 360–372.
- Remizov I.D. Solution to a parabolic differential equation in Hilbert space via Feynman formula I. Modeling and Analysis of Information Systems, 22:3 (2015) 337-355.
- Ivan D. Remizov, "Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation", Journal of Functional Analysis, 270:12 (2016), 4540-4557

**Благодарности.** Автор выражает благодарность своему научному руководителю О.Г.Смолянову за постановки задач и внимание к работе, а также В.И.Богачеву, Е.И.Зеленову, Ю.Н.Орлову, А.С.Пляшечнику, В.Ж.Сакбаеву, Д.В.Тураеву, Е.Т.Шавгулидзе, Н.Н.Шамарову за полезные обсуждения.

# Глава 1

# Черновские аппроксимации полугрупп операторов и их приложения к эволюционным уравнениям

В первой части настоящей главы обсуждаются свойства однопараметрических сильно непрерывных (полу)групп линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве, или, короче, $C_0$-(полу)групп, необходимые для понимания их роли в теории эволюционных уравнений с частными производными. Все приводимые классические определения и утверждения снабжены ссылками и могут быть найдены, например, в учебниках [26, 24, 25, 27]. Формулируется теорема Чернова и понятие черновских аппроксимаций (построению таких аппроксимаций для уравнения теплопроводности посвящены вторая и третья главы).

Новыми в первой главе являются:

- определение касания по Чернову
- структуризация теоремы Чернова на его основе
- понятие формального решения в смысле Чернова
- две теоремы о построении функций, касательных по Чернову к сумме и произведению операторов (исчисление функций Чернова)
- понятие аппроксимационного подпространства и утверждение об иерархии таких подпространств
- две гипотезы о скорости сходимости черновских аппроксимаций.

## 1.1 Полугруппы и их генераторы

**Определение 1.1.1.** Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство. Пусть $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дано отображение

$$V\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F}).$$

То есть, если $t \geq 0$ фиксировано, то $V(t)$ — это линейный ограниченный оператор, отображающий $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$. Отображение $V$ называется $C_0$-*полугруппой*, или, что то же самое, *сильно непрерывной однопараметрической полугруппой линейных ограниченных операторов*, если оно удовлетворяет трём условиям:

1) $V(0)$ это тождественный оператор $I$, т. е. $\forall\varphi \in \mathcal{F} : V(0)\varphi = \varphi$;

2) $V$ сопоставляет сложению чисел в $[0,+\infty)$ композицию операторов в $\mathscr{L}(\mathcal{F})$, т. е. $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0 : V(t+s) = V(t) \circ V(s)$, где использовано обозначение $(A \circ B)(\varphi) = A(B(\varphi))$ для каждого $\varphi \in \mathcal{F}$;

3) $V$ непрерывно при наделении $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ сильной операторной топологией, т. е. $\forall\varphi \in \mathcal{F}$ функция $t \longmapsto V(t)\varphi$ непрерывна как отображение $[0,+\infty) \to \mathcal{F}$.

Определение $C_0$-*группы* получается заменой выше всюду $[0,+\infty)$ на $\mathbb{R}$ .

**Замечание 1.1.1.** Множество $[0,+\infty)$ относительно сложения и множество $V([0,+\infty))$ относительно композиции операторов являются не только полугруппами, на самом деле это коммутативные моноиды, но термин «полугруппа» прижился и его используют повсеместно. В приложениях к эволюционным уравнениям работают не с самим множеством $V([0,+\infty))$, к чему вроде бы подталкивает термин «$C_0$-полугруппа», а с отображением $V$. Т.е. на практике нам важен именно сам гомоморфизм $[0,\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$ полугрупп, а не только его образ. С алгебраической точки зрения $V$ — это непрерывное представление полугруппы $[0,+\infty)$ в пространстве $\mathcal{F}$.

**Замечание 1.1.2.** Сильно непрерывные полугруппы представляют интерес не только сами по себе или как часть функцинального анализа, но и благодаря своим приложениям в других областях математики (теория динамических систем, эргодическая теория, теория функциональных уравнений, теория приближений, список может быть продолжен достаточно далеко), а также в математической и теоретической физике. Литература по $C_0$-полугруппам обширна: помимо множества статей на 2016 год существует около десяти специализированных монографий разных лет и разной степени подробности (см. [28, 26, 24, 25, 27] и ссылки там, а также вновь выходящие издания); кроме того, посвящённые $C_0$-полугруппам главы имеются во всех учебниках функционального анализа продвинутого уровня и в некоторых книгах по квантовой теории. Приведём два примера приложений теории непрерывных (полу)групп.

А) Известная теорема Стоуна утверждает, что всякой $C_0$-группе унитарных операторов в гильбертовом пространстве взаимно-однозначно можно сопоставить самосопряжённый линейный оператор в этом пространстве. Тем самым она гарантирует существование и единственность решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера, основного уравнения квантовой механики, обосновывая допустимость его использования, см. оригинальную статью Стоуна [30] и любой учебник по квантовой физике.

Б) Если $M$ — топологическое пространство (топология может возникать в связи с разными задачами и в каждом случае своя), то говорят, что функция $f\colon M \to M$ вкладывается в полугруппу $V\colon [0, +\infty) \to M^M$, если $(V(0))(z) = z$ и $V(1) = f$; при этом из пункта 2) определения 1.1.1 вытекает, что $V(2) = V(1+1) = V(1) \circ V(t) = f \circ f$, поэтому естественно определить дробную итерацию (композиционную степень) функции $f$, положив $f^{3/2} = V(3/2)$, из свеженй литературы на эту тему см. например [3, 5]. Если же ограничиться рассмотрением только обратимых отображений $M \to M$, то можно строить итерации не только «вперёд», но и «назад», т.е. использовать не полугруппы, а группы. В примере Б) мы видим полугруппу, состоящую даже не из линейных операторов, а просто из непрерывных/гладких/аналитических функций $M \to M$, однако отображение $t \longmapsto V(t)$ всё равно должно быть непрерывным в соответствующей задаче топологии пространства функций в $M$.

Примеры использования непрерывных полугрупп существуют в большом количестве, поэтому остановимся на этом, чтобы не слишком уклоняться от основного содержания диссертации.

**Замечание 1.1.3.** Положим $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ в определении 1.1.1, при этом окажется, что $\mathscr{L}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}$. Тогда (предложение 1.3 в [24]) существует такое единственное число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $V(t) = e^{\alpha t}$. Этот интуитивно понятный пример обсуждался ещё Огюстеном Коши (см. [24]) и является мотивацией для всей теории $C_0$-полугрупп. Одномерная аналогия часто позволяет подобрать правильные формулы, которые представляют интерес в случае, когда пространство $\mathcal{F}$ бесконечномерно. Заметим здесь, что $\alpha = V'(0)$.

**Замечание 1.1.4.** Линейные операторы над конечномерным пространством $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$ — это матрицы $\mathscr{L}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^{n\times n}$. В этом случае каждая $C_0$-полугруппа задаётся (теорема 2.9 в [24]) уже не числом, а матрицей, и соответствие следующее: $V(t) = e^{At}$, где экспонента от матрицы определяется стандартным образом через степенной ряд. Заметим, что снова $A = V'(0)$. Оказывается, что и в случае бесконечномерного пространства $\mathcal{F}$ производная в нуле однозначно задаёт $C_0$-полугруппу, о чём мы прямо сейчас и поговорим.

**Определение 1.1.2.** Если $(V(t))_{t\geq 0}$ — $C_0$-полугруппа в банаховом пространстве $\mathcal{F}$, то линейный оператор $\mathcal{L}$, определенный равенством

$$\mathcal{L}\varphi = \lim_{t\to+0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t}$$

на линейном пространстве

$$\left\{\varphi \in \mathcal{F} : \exists \lim_{t\to+0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t}\right\} \overset{denote}{=} Dom(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}$$

называется инфинитезимальным генератором (или, короче, генератором) $C_0$-полугруппы $(V(t))_{t\geq 0}$. При этом говорят, что оператор $\mathcal{L}\colon Dom(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}$ порождает полугруппу, и используют обозначение $V(t) = e^{t\mathcal{L}}$.

**Замечание 1.1.5.** Приводимые ниже определения и факты о замыкаемых операторах являются стандартными. Их можно найти в любом подробном учебнике функционального анализа (например, [48]), или в одной из многих монографий о неограниченных операторах.

**Определение 1.1.3.** Линейный оператор $\mathcal{L}\colon \mathcal{F} \supset Dom(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}$ называется:

- *замкнутым*, если его график $\Gamma_{\mathcal{L}} := \{(x, \mathcal{L}x) \in \mathcal{F}\times\mathcal{F} : x \in Dom(\mathcal{L})\}$ это замкнутое подмножество в пространстве $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$, наделённом нормой $\|(x_1,x_2)\|_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}} := \|x_1\|_{\mathcal{F}} + \|x_2\|_{\mathcal{F}}$.

- *замыкаемым* (синоним: допускающим замыкание), если замыкание $\overline{\Gamma_{\mathcal{L}}}$ его графика $\Gamma_{\mathcal{L}}$ в пространстве $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}}$ является графиком некоторого оператора $(\mathcal{L}_1, Dom(\mathcal{L}_1))$, который в этом случае называется замыканием оператора $\mathcal{L}$ и обозначается $\overline{\mathcal{L}}$. То есть $\Gamma_{\overline{\mathcal{L}}} = \overline{\Gamma_{\mathcal{L}}}$. (Содержательным это определение делает тот факт, что $\overline{\Gamma_{\mathcal{L}}}$ может не быть графиком вообще никакого однозначного отображения при том, что $\Gamma_{\mathcal{L}}$ таковым являлся.)

**Замечание 1.1.6.** Если оператор $\overline{\mathcal{L}}$ существует, то он линеен, замкнут и является расширением оператора $\mathcal{L}$, т.е. $Dom(\mathcal{L}) \subset Dom(\overline{\mathcal{L}})$ и $\mathcal{L}\big|_{Dom(\mathcal{L})} = \overline{\mathcal{L}}\big|_{Dom(\mathcal{L})}$.

**Замечание 1.1.7.** Линейный оператор $\mathcal{L}\colon \mathcal{F} \supset Dom(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}$ допускает замыкание тогда и только тогда, когда из того, что последовательность $(x_n) \subset Dom(\mathcal{L})$ сходится к $0 \in \mathcal{F}$ и того, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}x_n$, следует, что $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}x_n = 0$. При этом могут существовать такие сходящиеся к 0 последовательности $(y_n) \subset Dom(\mathcal{L})$, что предел $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}y_n$ не существует.

**Замечание 1.1.8.** Если линейный оператор $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$ допускает замыкание, то $x \in Dom(\overline{\mathcal{L}})$ в точности тогда, когда существует такая сходящаяся к $x$ последовательность $(x_n) \subset Dom(\mathcal{L})$, что последовательность $\mathcal{L}x_n$ сходится; при этом $\overline{\mathcal{L}}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}x_n$.

**Определение 1.1.4.** *Существенной областью определения* замкнутого оператора $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$ называется такое линейное подпространство $\mathcal{D} \subset Dom(\mathcal{L})$), что замыкание оператора $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ равно $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$.

**Предложение 1.1.1.** (теорема 1.4 в [24], с. 51) Генератор $C_0$-полугруппы является замкнутым линейным оператором с плотной областью определения, и однозначно определяет полугруппу.

**Замечание 1.1.9.** Если пространство $\mathcal{F}$ бесконечномерно, и при этом генератор $C_0$-полугруппы $(V(t))_{t\geq 0}$ представляет собой ограниченный линейный оператор, то

1) отображение $V\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$ непрерывно не только в сильной операторной топологии пространства $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ (т.е. поточечно, при каждом $\varphi \in \mathcal{F}$), но и в обычной операторной топологии этого пространства, её ещё называют топологией нормы или равномерной топологией, задаётся она нормой $\|A\|_{\mathscr{L}(\mathcal{F})} = \sup_{\varphi\neq 0} \frac{\|A\varphi\|_{\mathcal{F}}}{\|\varphi\|_{\mathcal{F}}}$, при этом полугруппу называют не сильно непрерывной, а равномерно непрерывной;

2) Известно (см. [24, 48]), что сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ в пространстве $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ с операторной топологией имеет место для каждого $A \in \mathscr{L}(\mathcal{F})$. Это позволяет положить по определению $e^{t\mathcal{L}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\mathcal{L}^k}{k!}$, причём (как и в конечномерном случае) верно равенство $V(t) = e^{t\mathcal{L}}$.

**Замечание 1.1.10.** Если оператор $\mathcal{L}$ не ограниченный (например, таков лапласиан $\Delta$, являющийся генератором $C_0$-полугруппы, с помощью которой можно находить решения уравнения теплопроводности) то экспоненту от него нельзя определить сходящимся по норме в пространстве операторов рядом, т.к. не удаётся доказать сходимость этого ряда стандартным способом. А именно, в случае неограниченного оператора $A$ сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ нельзя извлечь из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$, т.к. $\|A\| = \infty$. Поэтому в этом случае сама полугруппа и является экспонентой от оператора; по-видимому, более простого вида для экспоненты указать нет возможности. Впрочем, отличные от степенного ряда способы задания экспоненты существуют, и некоторые из них работают в случае, когда в показателе стоит неограниченный оператор. Тем не менее, мы не будем их рассматривать, а сосредоточимся на следующей задаче: получить оператор $V(t)$ при каждом $t > 0$ с помощью построения вспомогательного семейства операторов и аппроксимационной процедуры Чернова, это будет подробнее обсуждаться в следующих параграфах настоящей главы.

**Определение 1.1.5.** Линейный оператор $\mathcal{L}\colon \mathcal{F} \supset Dom(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}$ в банаховом пространстве $\mathcal{F}$ называется *диссипативным*, если для каждого $\lambda > 0$ и каждого $x \in Dom(\mathcal{L})$ справедлива оценка $\|\mathcal{L}x - \lambda x\| \geq \lambda \|x\|$.

**Предложение 1.1.2.** (*О замыкаемости плотноопределённого диссипативного оператора*) (предложение 3.14 в [24]) Линейный диссипативный оператор

$$\mathcal{L} : \mathcal{F} \supset Dom(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}$$

в банаховом пространстве $\mathcal{F}$ с областью определения $Dom(\mathcal{L})$, плотной в $\mathcal{F}$, обладает замыканием. Это замыкание

$$\overline{\mathcal{L}} : \mathcal{F} \supset Dom(\overline{\mathcal{L}}) \to \mathcal{F}$$

также представляет собой диссипативный оператор.

**Определение 1.1.6.** $C_0$-полугруппа $(V(t))_{t\geq 0}$ называется сжимающей, если для каждого $t \geq 0$ справедливо неравенство $\|V(t)\| \leq 1$.

**Теорема 1.1.1.** (Lumer, Phillips, 1961; теорема 3.15 в [24]) Для диссипативного оператора $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$ на банаховом пространстве $\mathcal{F}$ следующие два условия эквивалентны:

1. Замыкание $\overline{\mathcal{L}}$ оператора $\mathcal{L}$ является генератором сжимающей полугруппы.
2. Образ оператора $\lambda I - \mathcal{L}$ плотен в $\mathcal{F}$ для некоторого (а, следовательно, и для любого) $\lambda > 0$.

**Замечание 1.1.11.** Таким образом, для диссипативного оператора вопрос о том, является ли он генератором какой-либо $C_0$-полугруппы, сводится к проверке плотности образа некоторого вспомогательного оператора. Причём если ответ положительный, то мы впридачу получаем информацию о том, что порождаемая полугруппа сжимающая. На этой идее будут построены рассуждения в конце второй главы. Теперь поговорим о связи $C_0$-полугрупп и эволюционных уравнений.

## 1.2 Полугруппы и эволюционные уравнения

**Предложение 1.2.1.** (лемма 1.1 и определение 1.2. в [24], с. 48-49) Если оператор $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$ является генератором $C_0$-полугруппы $(V(t))_{t\geq 0}$ в банаховом пространстве $\mathcal{F}$, то множество $Dom(\mathcal{L})$ совпадает с множеством тех $\varphi \in \mathcal{F}$, для которых отображение $t \longmapsto V(t)\varphi$ дифференцируемо по $t$ в каждой точке $t \in [0, +\infty)$.

**Определение 1.2.1.** 1. Система из двух условий

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{L}U(t); \;\; t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

для функции $U\colon [0, +\infty) \to \mathcal{F}$ называется абстрактной задачей Коши, ассоциированной с замкнутым линейным оператором $\mathcal{L}\colon \mathcal{F} \supset Dom(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}$ и вектором $U_0 \in \mathcal{F}$. При этом первое условие называется эволюционным уравнением, а второе — начальным условием.

2. Функция $U\colon [0, +\infty) \to \mathcal{F}$ называется классическим решением абстрактной задачи Коши (1.1), если функция $U$ имеет непрерывную производную

$$U'\colon [0, +\infty) \to \mathcal{F},$$

для каждого $t \geq 0$ выполняется $U(t) \in Dom(\mathcal{L})$, и имеет место (1.1).

3. Непрерывная функция $U\colon [0, +\infty) \to \mathcal{F}$ называется mild-решением абстрактной задачи Коши (1.1), если для каждого $t \geq 0$ выполняется

$$\int_0^t U(s)ds \in Dom(\mathcal{L}) \text{ и } U(t) = \mathcal{L}\int_0^t U(s)ds + U_0.$$

**Предложение 1.2.2.** (Предложение 6.2 в [24], с. 145) Если оператор $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $(V(t))_{t\geq 0}$, то:

1. Для каждого $V_0 \in Dom(\mathcal{L})$ существует единственное классическое решение абстрактной задачи Коши (1.1), даваемое формулой $U(t) = V(t)U_0$.

2. Для каждого $U_0 \in \mathcal{F}$ существует единственное mild-решение абстрактной задачи Коши (1.1), даваемое формулой $U(t) = V(t)U_0$.

**Замечание 1.2.1.** Применение абстрактной задачи Коши в теории эволюционных уравнений состоит в следующем. Если $Q$ — это множество, то функцию

$$u\colon [0,+\infty)\times Q\to\mathbb{R},\quad u\colon (t,x)\longmapsto u(t,x)$$

от двух переменных $t,x$ можно представить в виде функции

$$u\colon t\longmapsto u(t,\cdot)=[x\longmapsto u(t,x)]$$

от одной переменной $t$ со значениями в пространстве функций от переменной $x$. Если $\mathcal{F}\subset\mathbb{R}^Q$ и $u(t,\cdot)\in Dom(\mathcal{L})\subset\mathcal{F}$ при всех $t\geq 0$, то можно определить

$$\mathcal{L}u(t,x)=(\mathcal{L}u(t,\cdot))(x).$$

При этом задача Коши

$$\begin{cases} u'_t(t,x)=\mathcal{L}u(t,x) \ \text{ для } \ t>0, x\in Q\\ u(0,x)=u_0(x) \ \text{ для } \ x\in Q \end{cases}\tag{1.2}$$

становится очень похожа на задачу 1.1, если положить

$$U(t)=u(t,\cdot) \text{ и } U_0=u_0(\cdot).$$

Если существует $C_0$-полугруппа $(e^{t\mathcal{L}})_{t\geq 0}$, то задача 1.1 согласно предложению 1.2.2 имеет решение, и его можно принять за решение задачи 1.2. Эту мысль мы разовьём на примере в конце второй главы.

**Замечание 1.2.2.** Поскольку при каждом $t\geq 0$ оператор $V(t)$ непрерывен и линеен, то решение $V(t)u_0$ задачи Коши непрерывно и линейно зависит от $u_0$. Таким образом, существование $C_0$-полугруппы с генератором $\mathcal{L}$ гарантирует, что задача 1.2 поставлена корректно по Тихонову: решение существует, единственно в некотором классе функций и непрерывно зависит от начального условия. Класс, в котором решение единственно, диктуется тем пространством, в котором действует полугруппа, а также способом соответствия между задачами 1.2 и 1.1. Фактически же, как уже отмечалось, соответствие состоит в том, что решением задачи 1.2 называется решение задачи 1.1.

**Замечание 1.2.3.** Удовлетворительный со всех точек зрения перевод термина «mild solution» на русский язык автору неизвестен. В литературе иногда в качестве такого перевода встречается термин «мягкое решение», но слово «мягкий» не имеет очевидного наглядного смысла, раскрывающего суть дела, и, кроме того, вызывает (по-видимому, зря) ассоциации с т.н. мягким анализом. Термин «слабое решение» также не годится, так как он уже занят и обозначает другое понятие. Возможно, в некотором смысле промежуточным между «сильным решением» и «слабым решением» было бы «умеренное решение», и это бы отражало суть дела, поскольку требования на mild solution не сильные и не слабые, а, так сказать, умеренные. Этот термин принадлежит автору диссертации, но даже ему он не вполне нравится. Понятие это в диссертации не ключевое и встречается нечасто, поэтому мы не будем использовать вообще никакого специального русского термина, переводя «mild solution» как «mild-решение».

## 1.3 Аппроксимации полугрупп полугруппами

**Замечание 1.3.1.** Ранее мы отметили, что в случае, когда генератор $C_0$-полугруппы $(V(t))_{t\geq 0}$ является неограниченным оператором, простого способа вычислять $V(t)$ при каждом $t > 0$ нет. Однако, если пожертвовать точностью вычисления, т.е. провести процедуру аппроксимации, то $V(t)$ вычислять можно. Первым делом рассмотрим аппроксимации с помощью полугрупп, поскольку некоторые полугруппы всё же имеют простое явное описание, и их можно использовать для вычисления более сложно устроенных полугрупп.

**Теорема 1.3.1.** (*О связи аппроксимации генератора и аппроксимации полугруппы*) (теорема является частью утверждения второй аппроксимационной теоремы Троттера-Като, теорема 4.9 в [24])

Пусть $(e^{\mathcal{L}_n t})_{t\geq 0}$ — последовательность сильно непрерывных полугрупп операторов в банаховом пространстве $\mathcal{F}$ с генераторами $(\mathcal{L}_n, Dom(\mathcal{L}_n))$, удовлетворяющая при некоторых постоянных $M \geq 1, w \in \mathbb{R}$ условию $\left\|e^{\mathcal{L}_n t}\right\| \leq Me^{wt}$

при всех $t \geq 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть существует такой замыкаемый линейный оператор $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$ в $\mathcal{F}$ с плотной в $\mathcal{F}$ областью определения $Dom(\mathcal{L})$, что $\mathcal{L}_n x \to \mathcal{L}x$ для всех $x \in Dom(\mathcal{L})$. Пусть образ оператора $(\lambda_0 I - \mathcal{L})$ плотен в $\mathcal{F}$ при некотором $\lambda_0 > 0$. Тогда полугруппы $(e^{\mathcal{L}_n t})_{t\geq 0}, n \in \mathbb{N}$ сходятся сильно (и равномерно по $t \in [0, t_0]$ при любом фиксированном $t_0 > 0$) к сильно непрерывной полугруппе $(e^{\overline{\mathcal{L}}t})_{t\geq 0}$ с генератором $\overline{\mathcal{L}}$. Иными словами, при любом фиксированном $t_0 > 0$ для каждого $x \in \mathcal{F}$ равномерно по $t \in [0, t_0]$ существует предел в левой части равенства и верно равенство

$$\lim_{n\to\infty} e^{\overline{L_n}t}x = e^{\overline{L}t}x.$$

**Замечание 1.3.2.** Только что приведённая теорема может применяться в широком спектре ситуаций. Во второй главе мы её использум для обоснования непрерывной зависимости решения уравнения от его коэффициентов. Идея состоит в следующем: пусть дан оператор $\mathcal{L}$, и его коэффициенты — какие-то функции. Рассматриваем задачу Коши

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = \mathcal{L}u(t,x) \ \text{ для } \ t > 0, x \in Q, \\ u(0,x) = u_0(x) \ \text{ для } \ x \in Q. \end{cases}$$

Предположим, что мы немного возмутили коэффициенты. Вопрос: что будет происходить с решением уравнения? Ответ даёт теорема 1.3.1: если последовательность коэффициентов операторов $\mathcal{L}_j$ сходится к коэффициентам оператора $\mathcal{L}$, то сходиться будут и порождаемые полугруппы, а вместе с ними — и решения задач Коши, даваемые полугруппами. Таким образом, малым изменениям коэффициентов в задаче Коши будут соответствовать малые изменения решения.

**Теорема 1.3.2.** (Теорема Троттера, см. оригинальную статью [6] 1959 г. или следствие 10.7.22 в [48]) Пусть $(A, Dom(A))$ и $(B, Dom(B))$ — генераторы сжимающих $C_0$-полугрупп в банаховом пространстве $\mathcal{F}$, причём $Dom(A) \cap Dom(B)$ плотно в $\mathcal{F}$. Пусть замыкание $(C, Dom(C))$ оператора $(A+B, Dom(A)\cap Dom(B))$ является генератором сжимающей $C_0$-полугруппы $\mathcal{F}$. Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$

и каждого $t_0 > 0$ имеет место равномерная по $t \in [0, t_0]$ сходимость

$$e^{tC} f = \lim_{n\to\infty} \left( e^{tA/n} e^{tB/n} \right)^n f.$$

**Замечание 1.3.3.** В одномерном случае (при этом $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, а $A, B, C = A + B$ — числа) утверждение теоремы Троттера очевидно и прямо следует из свойств показательной функции. В конечномерном случае (при этом $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$, а $A$ и $B$ — матрицы $n \times n$) утверждение было установлено Софусом Ли в 1875 г.. Содержательность теоремы в случае, рассматренном Троттером, проистекает из того, что пространство $\mathcal{F}$ может быть бесконечномерным, а операторы $A$ и $B$ — неограниченными.

**Замечание 1.3.4.** Условие о том, что все три полугруппы $e^{tA}, e^{tB}, e^{t(A+B)}$ сжимающие, не может быть отброшено с сохранением верности утверждения, на что указывает сам Троттер [6]. Это заметно ограничивает область применения теоремы, но мы использовать её и не будем, вместо неё нашим инструментом будет свободная от этого недостатка теорема Чернова, о которой пойдёт речь в следующем параграфе. Существует множество модификаций и обобщений формулы Троттера, в некоторых из этих обобщений полугруппы могут не быть сжимающими, но на них накладываются другие ограничения.

**Замечание 1.3.5.** Теорема Троттера сыграла важную роль в развитии математической физики, о чём нельзя не упомянуть. В 1948-51 годах Ричард Фейнман на физическом уровне строгости предложил [9, 10] конструкцию, известную сейчас как интеграл Фейнмана по траекториям. Конструкция оказалась весьма продуктивной: позволила ответить на ряд теоретических и практических вопросов, а также поставить новые; актуальна она и до сих пор. Тем не менее, вопрос удовлетворительного математического обоснования этой конструкции оставался открытым вплоть до 1964 г., когда Эдвард Нельсон с помощью теоремы Троттера дал такое обоснование [49] для рассмотренного Фейнманом частного случая. Теория интеграла Фейнмана и в начале XXI века активно развивается и применяется, в чём легко убедиться с помощью поисковых систем (слова для поиска: Feynman integral, path integral, continual integral). Один из подходов к этой проблематике основан на т.н. формулах Фейнмана (термин О.Г.Смолянова) и использует как базовый инструмент теорему Чернова, об истории исследований в этом направлении до 2009 года см. [13]. Вторая глава настоящей диссертации носвящена представлению решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с бесконечномерным пространством координат в виде формул Фейнмана.

## 1.4 Черновские аппроксимации полугрупп

**Замечание 1.4.1.** Сперва приведём теорему Чернова в неструктурированной формулировке. Заметим, что теорема Чернова пригодна для аппроксимации не только сжимающих полугрупп, кроме того, аппроксимирующее полугруппу семейство тоже не обязано быть сжимающим.

**Теорема 1.4.1.** (Теорема Чернова, см. оригинальную статью [31] 1968 г. или теорему 10.7.21 в учебнике [48]) Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство и $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дана функция $G\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$, непрерывная на каждом векторе, причём $G(0) = I$ и $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ с некоторой постоянной $\omega \in \mathbb{R}$. Пусть есть такое плотное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim_{t\to 0} t^{-1}(G(t)f - f)$, значение которого будем обозначать символом $G'(0)f$. Предположим, что $G'(0)$ на $\mathcal{D}$ обладает замыканием $C$, и что $C$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $\left(e^{tC}\right)_{t\geq 0}$. Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$ и каждого $t_0 > 0$ имеет место равномерная по $t \in [0, t_0]$ сходимость

$$e^{tC}f = \lim_{n\to\infty} G(t/n)^n f.$$

**Замечание 1.4.2.** Обратимся снова к одномерному примеру. В этом случае

$$\mathcal{F} = \mathscr{L}(\mathcal{F}) = \mathbb{R},$$

$C$ — число, а условие дифференцируемости в нуле вырождается в то, что функция $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в окрестности нуля представима в виде

$$G(t) = 1 + tC + o(t).$$

Тогда утверждающая часть теоремы Чернова принимает вид

$$\lim_{n\to\infty} G(t/n)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n}C + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{tC}.$$

Отсюда видно, что теорема Чернова — это аналог второго замечательного предела для операторнозначных функций (это замечание автор услышал впервые от Ю.Н.Орлова).

**Замечание 1.4.3.** Если $C$ — неограниченный оператор, то вычислять $e^{tC}$ обычно трудно, поскольку, как мы видели ранее, задача вычисления $e^{tC}$ равносильна решению задачи Коши

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = \mathcal{L}u(t,x) \ \text{ для } \ t > 0, x \in Q \\ u(0,x) = u_0(x) \ \text{ для } \ x \in Q \end{cases}$$

для линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Однако, если мы располагаем подходящим семейством $(G(t))_{t\geq 0}$, то можно вычислять $e^{tC}$ приближённо с помощью теоремы Чернова. Такой подход называется *аппроксимацией по Чернову*, сами выражения $G(t/n)^n$ — *черновскими аппроксимациями*, а функция $G$ — *функцией Чернова оператора* $C$.

**Замечание 1.4.4.** Если оператор $G(t)$ — интегральный, то $G(t/2)^2 f$ — это результат применения к функции $f$ интегрального оператора два раза подряд, т.е. это двухкратный повторный интеграл, который можно трактовать как двойной. Аналогично, $G(t/3)^3 f$ представляет собой тройной интеграл, а $G(t/n)^n f$ — $n$-кратный интеграл. Таким образом, при каждом $t > 0$ оказывается, что $e^{tC} f$ равно пределу кратных интегралов при кратности, стремящейся к бесконечности. Для выражений такого вида О.Г.Смоляновым [33] был введён теормин «формула Фейнмана», поскольку стоящие под знаком предела выражения являются аппроксимациями для интеграла Фейнмана по траекториям. Однако, как мы увидим в третьей главе диссертации, не только интегральные операторы могут играть роль функций Чернова.

**Замечание 1.4.5.** В заключение этого параграфа приведём ещё одну теорему, близкую к теореме Чернова, которая примечательна тем, что гарантирует существование полугруппы и налагает на функцию $G$ более мягкие ограничения на рост нормы.

**Теорема 1.4.2.** (Теорема типа Чернова, [24], следствие 5.3 из теоремы 5.2) Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство, и $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ — пространство линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дана функция

$$G\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F}),$$

удовлетворяющая условию $G(0) = I$, где символом $I$ обозначен тождественный оператор. Пусть числа $M \geq 1$ и $\omega \in \mathbb{R}$ таковы, что $\|G(t)^k\| \leq Me^{k\omega t}$ для всех $t \geq 0$ и каждого $k \in \mathbb{N}$. Пусть предел

$$\lim_{t\to+0} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} =: \mathcal{L}\varphi$$

существует для всех $\varphi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, где $\mathcal{D}$ — это плотное подпространство в $\mathcal{F}$. Пусть также существует такое число $\lambda_0 > \omega$, что $(\lambda_0 I - \mathcal{L})(\mathcal{D})$ является плотным подпространством в $\mathcal{F}$.

Тогда замыкание $\overline{\mathcal{L}}$ оператора $\mathcal{L}$ является генератором $C_0$-полугруппы $(V(t))_{t\geq 0}$, задаваемой равенством

$$V(t)\varphi = \lim_{n\to\infty} \left( G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \varphi,$$

в котором предел для каждого $\varphi \in \mathcal{F}$ существует равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого фиксированного $t_0 > 0$. Более того, $(V(t))_{t\geq 0}$ для каждого $t \geq 0$ удовлетворяет оценке $\|V(t)\| \leq Me^{\omega t}$.

## 1.5 Формальные решения в смысле Чернова

**Замечание 1.5.1.** Теперь, следуя статьям [55, 56] автора диссертации, изложим теорему Чернова в другой форме. Содержание теоремы остаётся тем же, но условия теоремы разбивается на блоки: (E)xistence – существование полугруппы, (C)hernoff (T)angency – касание по Чернову и (N)orm growth condition – оценка сверху на рост нормы. Сперва определим касание по Чернову.

**Определение 1.5.1.** Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство, и пусть $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть дана функция $G\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$, или, что то же самое, семейство линейных ограниченных операторов $(G(t))_{t\geq 0}$ в $\mathcal{F}$. Пусть также дан замкнутый линейный оператор $\mathcal{L}\colon Dom(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}$ с областью определения $Dom(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}$. Будем говорить, что функция $G$ *касается по Чернову* (синоним: *черновски касается*) оператора $\mathcal{L}$, если выполняются следующие условия:

(CT1). Функция $G$ сильно непрерывна (=непрерывна при наделении $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ сильной операторной топологией), т. е. отображение $t \longmapsto G(t)f \in \mathcal{F}$ непрерывно на $[0,+\infty)$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(CT2). $G(0) = I$, т. е. $G(0)f = f$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(CT3). Существует такое плотное в $\mathcal{F}$ линейное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim_{t\to 0}(G(t)f - f)/t$, значение которого обозначим символом $G'(0)f$;

(CT4). Замыкание оператора $(G'(0), \mathcal{D})$ существует и равно $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$. Иными словами, $\mathcal{D}$ — существенная область определения оператора $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$.

**Замечание 1.5.2.** Часть формулировки определения касания по Чернову, предшествующая условиям (CT1)-(CT4), называется условием (CT0).

**Замечание 1.5.3.** В определении касания по Чернову семейство $(G(t))_{t\geq 0}$ не обязано быть полугруппой. Однако, каждая $C_0$-полугруппа черновски касается своего генератора. Теорема Чернова в свете данного определения принимает следующий вид.

**Теорема 1.5.1.** (Теорема Чернова в новой форме) Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство и $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$. Пусть даны функция $G : [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$ (или, что то же самое, семейство $(G(t))_{t\geq 0})$ и замкнутый линейный оператор $\mathcal{L} : Dom(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}$ с областью определния $Dom(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}$. Пусть выполнены следующие условия:

(E). Существует $C_0$-полугруппа $(e^{t\mathcal{L}})_{t\geq 0}$ с генератором $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$;

(CT). Функция $G$ касается по Чернову оператора $\mathcal{L}$;

(N). Существует такое число $\omega \in \mathbb{R}$, что $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ при всех $t \geq 0$.

**Тогда** для каждого $f \in \mathcal{F}$ справедливо, что $\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f \to e^{tL}f$ при $n \to \infty$, где предел равномерен по $t \in [0, t_0]$ при каждом фиксированном $t_0 > 0$. То есть для каждого $t_0 > 0$ и каждого $f \in \mathcal{F}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,t_0]} \left\| \left( G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f - e^{tL} f \right\| = 0.$$

**Замечание 1.5.4.** Данное выше структурирование условий удобно тем, что условия из разных групп доказываются разными методами.

Существование (E) полугруппы может быть получено: а) непосредственно из свойств оператора $\mathcal{L}$, б) на основе того, что полугруппа получена ограниченным возмущением полугруппы, существование которой доказано, в) какими-то другими методами — например, если генератор удовлетворяет условию $\mathcal{L}^* = -\mathcal{L}$, то существование полугруппы гарантирует теорема Стоуна [30]. Все эти методы не зависят от выбора функции Чернова $G$, поскольку ответ на вопрос о том, существует полугруппа с генератором $\mathcal{L}$ или нет, полностью определяется свойствами именно оператора $\mathcal{L}$, а не тем, касательна ли к нему какая-то посторонняя функция $G$ по Чернову и как быстро растет $\|G(t)\|$ с ростом $t$. Иначе говоря, существование полугруппы с генератором $\mathcal{L}$ определяется тем, существует ли единственное решение задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором $\mathcal{L}$, а не тем, как мы пытаемся решать это уравнение.

Черновское касание (CT) доказывается средствами анализа. В практике применения теоремы Чернова выбор функции $G$ и пространства $\mathcal{D}$, а иногда и пространства $\mathcal{F}$, тесно связаны между собой. Первое, о чём заботятся при попытке подобрать или построить подходящую функцию $G$, это именно черновское касание.

Условие на рост нормы (N) даже по своему виду отличается от условий (E) и

(CT), так как представляет собой неравенство. Оно доказывается обычно путём оценивания интегралов и может быть довольно обременительным. Иногда даже приходится модифицировать уже построенную функцию $G$ с тем, чтобы это условие выполнялось, но иногда этого можно добиться простой перенормировкой. В любом случае при борьбе за (N) нельзя отказываться от черновского касания, поэтому (CT) заслуживает выделения в отдельную категорию.

**Замечание 1.5.5.** Как уже было сказано, в определении касания по Чернову семейство $(G(t))_{t\geq 0}$ не обязательно является полугруппой, но каждая $C_0$-полугруппа касается по Чернову своего генератора и является его функцией Чернова. Именно отсутствие полугруппового свойства позволяет во многих случаях для данного оператора $L$ с переменными коэффициентами подобрать задаваемую простой явной формулой функцию Чернова $G$, чтобы затем с помощью теоремы Чернова выразить полугруппу в виде $e^{tL} = \lim_{n\to\infty} G(t/n)^n$ . Без обращения к технике функций Чернова задача о выражении $e^{tL}$ через $L$ сложна, т.к. эквивалентна решению задачи Коши для каждого $u_0 \in \mathcal{F}$.

**Определение 1.5.2.** Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ такие же, как и выше. Две определённые обе на $[0,+\infty)$ (или обе на $\mathbb{R}$ соответственно) функции $G_1$ и $G_2$ со значениями в $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ называются *эквивалентными по Чернову* (см. [34]), если $G_1(0) = G_2(0) = I$, и при всех $f \in \mathcal{F}$ и всех $T > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{t\,\in\,[0,T] \\ (\text{соотв. } t\,\in\,[-T,T])}} \left\| \left( G_1\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f - \left( G_2\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f \right\| = 0.$$

**Замечание 1.5.6.** Существует несколько близких определений эквивалентности по Чернову [11, 34, 32] все они были предложены О.Г.Смоляновым в разные годы. Не углубляясь в их сравнение, мы следуем [34]. Единственное, что нам нужно от этого определения, состоит в следующем: если $G_1$ и $\mathcal{L}$ удовлетворяют всем условиям теоремы Чернова, то по теореме Чернова функция $G_1$ эквивалентна по Чернову функции $G_2(t) = e^{tL}$. Другими словами, предел выражения $(G_1(t/n))^n$ при стремлении $n$ к бесконечности даёт сильно непрерывную полугруппу $(e^{tL})_{t\geq 0}$ (или группу $(e^{tL})_{t\in\mathbb{R}}$ соответственно).

**Замечание 1.5.7.** Следует отметить, что предложенный выше способ структурировать теорему Чернова, т.е. способ разбиения её условий на части, не единственный в своём роде. Другой подход предложила В.А.Дубравина [43], несколько вариантов были предложены О.Г.Смоляновым и его соавторами.

**Замечание 1.5.8.** Заметим, что приведённые выше определение касания по Чернову и теорема Чернова допускают два варианта формулировки: с неограниченным временем и с произвольно малым временем. Первая была приведена выше. Вторая принадлежит О.Г. Смолянову и состоит в том, что в качестве временно́го промежутка используется не $[0, +\infty)$, а $[0, \delta)$ при фиксированном (но произвольно малом) $\delta > 0$. В этой формулировке функцию Чернова определяют не для всех $t \geq 0$, а только для достаточно малых, а неравенство $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ может быть заменено на $\|G(t)\| \leq 1 + \alpha t$. Мотивацией для использования второй формулировки служит то, что при построении черновских аппроксимаций величина $t/n$ всё равно становится сколь угодно малой при $n \to \infty$. Формулировки эквивалентны между собой. В самом деле, из первой вытекает вторая, если учесть, что $1 + \alpha t \leq e^{\alpha t}$ при положительных $\alpha$ и $t$. В обратную же сторону требуется положить $\omega = \alpha/2$ и продолжить функцию Чернова с $[0, \delta)$ на $[0, +\infty)$ как угодно с сохранением нормы и непрерывности по $t$ для выполнения условия (CT1).

**Определение 1.5.3.** *Формальным решением в смысле Чернова* задачи Коши

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = \mathcal{L}u(t,x) \ \text{ для } \ t > 0, x \in Q, \\ u(0,x) = u_0(x) \ \text{ для } \ x \in Q. \end{cases}$$

называется выражение

$$\lim_{n\to\infty} \left(G(t/n)^n u_0\right)(x)$$

в случае, если функция $G$ касается по Чернову оператора $\mathcal{L}$.

**Замечание 1.5.9.** Если функция $G$ касается по Чернову оператора $\mathcal{L}$, но не эквивалентна по Чернову $C_0$-полугруппе с генератором $\mathcal{L}$ или такой полугруппы вообще не существует (то есть, если в теореме Чернова выполнено условие (CT), но хотя бы одно из двух условий (E) или (N) не имеет места), то формальное решение не является решением в смысле определения 1.2.1.

## 1.6 Исчисление функций Чернова

**Предложение 1.6.1.** Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство, и функции $G_1$ и $G_2$ со значениями в $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ черновски касаются действующих в $\mathcal{F}$ операторов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно (при этом в условии (CT3) фигурируют плотные подпространства $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ соответсnвенно). Пусть $I$ — тождественный оператор в $\mathcal{F}$. Тогда функция

$$G(t) = G_1(t) + G_2(t) - I \tag{1.3}$$

черновски касается оператора $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, если он замкнут и имеет плотную в $\mathcal{F}$ существенную область определения $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

**Доказательство.** Проверим условия черновского касания. Для $G$ условие (CT1) следует из (CT1) для $G_1$ и $G_2$, а также того, что сумма непрерывных функций непрерывна. Условие (CT2) проверяется непосредственно на основе (CT2) для $G_1$ и $G_2$: $G(0) = G_1(0)+G_2(0)-I = I+I-I = I$. Условие (CT3) также проверяется непосредственно на основе (CT3) для $G_1$ и $G_2$ и потребованной нами плотности $\mathcal{D}$ в $\mathcal{F}$: если $f \in \mathcal{D}$, то

$$\lim_{t\to 0} \frac{G(t)-I}{t} f = \lim_{t\to 0} \frac{G_1(t)+G_2(t)-2I}{t} f = \lim_{t\to 0} \frac{G_1(t)-I}{t} f + \frac{G_2(t)-I}{t} f = \mathcal{L} f.$$

Условие (CT4) следует из того, что $\mathcal{D}$ — существенная область определения оператора $\mathcal{L}$, что верно по условию предложения.

$\square$

**Предложение 1.6.2.** Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство, и функции $G_1$ и $G_2$ со значениями в $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ черновски касаются действующих в $\mathcal{F}$ операторов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно (при этом в условии (CT3) фигурируют плотные подпространства $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ соответственно). Пусть оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ замкнут и имеет плотную в $\mathcal{F}$ существенную область определения $\mathcal{D} \subset \{f \colon f \in \mathcal{D}_2, \mathcal{L}_2 f \in \mathcal{D}_1\}$.

Пусть $G_2$ имеет на $\mathcal{D}$ вторую производную в нуле, т.е. существует такой линейный оператор $G_2''(0)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, что для каждого $f \in \mathcal{D}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ верно равенство

$$G_2(\varepsilon)f = f + \varepsilon\mathcal{L}_2 f + \frac{1}{2}\varepsilon^2 G_2''(0)f + \varepsilon^2 a(\varepsilon, f), \tag{1.4}$$

где $a(\varepsilon, f) = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$. Обозначим символом $I$ тождественный оператор в $\mathcal{F}$. Тогда функция

$$G(t) = (G_1(\sqrt{t}) - I)(G_2(\sqrt{t}) - I) + I \tag{1.5}$$

черновски касается оператора $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$.

**Доказательство.** Проверим условия черновского касания. Для $G$ условия (CT0) и (CT1) следуют из условий предложения, (CT1) для $G_1$ и $G_2$, непрерывности функции $t \longmapsto \sqrt{t}$, а также того, что сумма и композиция непрерывных функций непрерывна. Условие (CT2) проверяется непосредственно на основе (CT2) для $G_1$ и $G_2$:

$$G(0) = (G_1(\sqrt{0}) - I)(G_2(\sqrt{0}) - I) + I = I.$$

Условие (CT3) проверим в четыре шага i)-iv), зафиксировав произвольный вектор $f \in \mathcal{D}$.

i) Если $f \in \mathcal{D}$, то $f \in \mathcal{D}_2$. Согласно (CT3) для $G_2$ и (1.4) при $t \to 0$ справедливо представление

$$(G_2(\sqrt{t}) - I)f = G_2(\sqrt{t})f - f = \sqrt{t}\mathcal{L}_2 f + \frac{1}{2}tG_2''(0)f + a(t, f)t, \tag{1.6}$$

причём $a(t, f) = o(1)$.

ii) Если $\varphi \in \mathcal{D}_1$, то в силу (CT3) для $G_2$ имеем

$$(G_1(\sqrt{t}) - I)\varphi = G_1(\sqrt{t})\varphi - \varphi = \sqrt{t}\mathcal{L}_1\varphi + b(t, \varphi)\sqrt{t}, \tag{1.7}$$

где $b(t, f) = o(1)$.

iii) Согласно условию (CT1) для $G_1$ для каждого $\varphi \in \mathcal{F}$ имеем

$$\lim_{t\to 0}\Big(G_1(\sqrt{t}) - I\Big)\varphi = 0.$$

Значит $\sup_{t\in(0,1]}\|(G_1(\sqrt{t})-I)\varphi\| = C_\varphi < +\infty$ для каждого $\varphi\in\mathcal{F}$. Поэтому по теореме Банаха-Штейнгауза (пространство $\mathcal{F}$ банахово по условию предложения) существует такая константа $C>0$, что

$$\sup_{t\in(0,1]}\left\|G_1(\sqrt{t})-I\right\| < C. \tag{1.8}$$

iv) На основе определения (1.5) функции $G$ и равенства (1.6) имеем

$$G(t)f = (G_1(\sqrt{t})-I)(G_2(\sqrt{t})f-f)+f$$

$$= (G_1(\sqrt{t})-I)\left[\sqrt{t}\mathcal{L}_2 f + t\frac{1}{2}G_2''(0)f + t\sqrt{t}a(t,f)\right]+f$$

$$= f+\left(G_1(\sqrt{t})-I\right)\sqrt{t}\mathcal{L}_2 f+\underbrace{t\frac{1}{2}\left(G_1(\sqrt{t})-I\right)G_2''(0)f}_{=tA}+\underbrace{t\sqrt{t}\left(G_1(\sqrt{t})-I\right)a(t,f)}_{=tB}$$

(в (1.7) положим $\varphi=\sqrt{t}\mathcal{L}_2 f$)

$$= f+\sqrt{t}\mathcal{L}_1\sqrt{t}\mathcal{L}_2 f + b(t,\sqrt{t}\mathcal{L}_2 f)\sqrt{t}+tA+tB$$

(вынесем $\sqrt{t}$ за знаки операторов, все они однородны)

$$= f+t\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 f + tb(t,\mathcal{L}_2 f)+tA+tB = f+t\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 f + t\Big[b(t,\mathcal{L}_2 f)+A+B\Big].$$

Теперь покажем, что выражение в квадратных скобках стремится к нулю при $t\to 0$. Первое слагаемое стремится к 0 в силу (CT3) для $G_1$ и (1.7), а второе — в силу (CT1) для $G_1$. В третьем слагаемом

$$B=\sqrt{t}\left(G_1(\sqrt{t})-I\right)a(t,f)$$

в силу (1.8) при $t\in(0,1]$ справедлива оценка $\left\|G_1(\sqrt{t})-I\right\|\le C$, и $a(t,f)=o(1)$ в силу (CT3) для $G_2$ и (1.6). Таким образом, для каждого $f\in\mathcal{D}$ при $t\to 0$ справедливо представление

$$G(t)f = f+t\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 f + t[o(1)+o(1)+o(1)],$$

завершающее доказательство (CT3) для $G$.

Условие (CT4) для $G$ следует из того, что $\mathcal{D}$ — существенная область определения оператора $\mathcal{L}$, что верно по условию предложения.

□

## 1.7 Скорость сходимости черновских аппроксимаций

**Замечание 1.7.1.** Пусть мы добились сходимости $G(t/n)^n\varphi \to e^{t\mathcal{L}}\varphi$ для каждого $\varphi \in \mathcal{F}$. Но с какой скоростью происходит эта сходимость, как быстро убывает невязка с ростом $n$? Более того, какие правильные вопросы о скорости сходимости можно ставить, чем её измерять, чего ожидать и чего не ожидать? Несмотря на разбор некоторых частных случаев [7], в целом эта теория, насколько известно автору, на начало 2017 года не построена. Выскажем некоторые соображения предварительного характера в качестве первого шага на этом пути.

**Замечание 1.7.2.** С одной стороны, можно при каждом $t > 0$, для каждой функции Чернова $G$ определить функцию $C_G(t)$, отображающую пространство $\mathcal{F}$ в пространство $c_0$ убывающих к нулю последовательстей по правилу

$$(C_G(t)f)(n) = \|G(t/n)^n f - e^{t\mathcal{L}}f\|,$$

и изучать её свойства, которые дадут полную информацию по интересующему нас вопросу. С другой стороны, функция эта нелинейна и имеет слишком много параметров/аргументов ($G$, $t$, $f$) для того, чтобы её было легко исследовать. Однако, всё, что мы будем узнавать о скорости сходимости черновских аппроксимаций, так или иначе будет являться утверждением об этой функции.

**Замечание 1.7.3.** Выше мы отметили, что в случае, когда полугруппа сильно непрерывна, но не равномерно непрерывна (т.е. её генератор — оператор замкнутый, но не ограниченный), что-то может зависеть от того, из какого пространства взят вектор $\varphi$. Это не кажется противоестественным, потому что и решение задачи Коши может быть классическим или mild-решением в зависимости от того, взяли мы начальное условие из $Dom(\mathcal{L})$ или просто из $\mathcal{F}$, см. предложение 1.2.2. Проливает свет следующее наблюдение:

**Предложение 1.7.1.** Пусть $w\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = 0$. Тогда множество

$$A_w = \left\{ f \in \mathcal{F} : \|G(t/n)^n f - e^{t\mathcal{L}} f\| = o(w(n)) \text{ при } n \to \infty \right\}$$

представляет собой линейное подпространство в $\mathcal{F}$. Более того, из

$$w_2(x) = o(1), w_1(x) = o(w_2(x)) \text{ при } x \to +\infty$$

следует

$$A_{w_1} \subset A_{w_2}. \tag{1.9}$$

**Определение 1.7.1.** Будем называть $A_w$ аппроксимационным подпространством, а включение $A_{w_1} \subset A_{w_2}$ будем называть иерархией аппроксимационных подпространств.

**Доказательство предложения 1.7.1.** Пусть числа $\alpha$ и $\beta$ произвольны, а векторы $f$ и $g$ лежат в $A_w$. Докажем, что $h = \alpha f + \beta g$ тоже принадлежит множеству $A_w$. В самом деле:

$$\|G(t/n)^n h - e^{t\mathcal{L}} h\| = \|G(t/n)^n (\alpha f + \beta g) - e^{t\mathcal{L}} (\alpha f + \beta g)\| \leq$$

$$|\alpha| \cdot \|G(t/n)^n f - e^{t\mathcal{L}} f\| + |\beta| \cdot \|G(t/n)^n g - e^{t\mathcal{L}} g\| = o(w(n)) + o(w(n)) = o(w(n)).$$

Включение (1.9) прямо следует из определения пространства $A_w$.

□

**Замечание 1.7.4.** Поскольку между двумя функциями, убывающими к нулю (даже монотонно, но с разной скоростью), всегда можно «вставить» некоторую промежуточную, а для двух вложенных подпространств это не так (большее может быть линейной оболочкой меньшего и одного вектора), то включение $A_{w_1} \subset A_{w_2}$ может обращаться в равенство в случае выполнения условия $w_1(x) = o(w_2(x)), x \to +\infty$.

**Замечание 1.7.5.** Предложение 1.7.1 рисует следующую картину: пространство $\mathcal{F}$ представляется в виде объединения своих подпространств, некоторые из которых вложены в другие, причём более глубокому уровню вложения соответствует более высокая скорость сходимости. Будут ли эти подпространства упорядочены по включению (убывающая последовательность подпространств) или образовывать сложную иерархию — интересный вопрос. Как разумно выбрать для каждого подпространства описывающую его функцию $w$ — ещё один интересный вопрос, связанный с первым. Наконец, будет ли конечно число этих подпространств, представляет собой третий вопрос. По-видимому, среди пространств $A_{w_k}$, где $w_k(n) = (1/n)^k, k = 1, 2, 3, \ldots$ в общем случае (т.е. в ситуации, устойчивой к малым возмущениям функции Чернова) имеется лишь конечное число различных, но если можно построить пример, когда это не так, то это интересный пример.

**Замечание 1.7.6.** В заключение этой главы сформулируем две гипотезы.

**Гипотеза 1**. Пусть $\left(e^{t\mathcal{L}}\right)_{t\geq 0}$ — $C_0$-полугруппа в банаховом пространстве $\mathcal{F}$, и $G$ — её функция Чернова (среди прочего это значит, что $G'(0) = \mathcal{L}$), а число $t_0 > 0$ фиксировано. Пусть вектор $f$ принадлежит при всех $t \in [0, t_0]$ пересечению областей определения операторов $G'(t)$ и $G''(t)$, причём функции $t \longmapsto G'(t)f$ и $t \longmapsto G''(t)f$ непрерывны при $t \in [0, t_0]$. Тогда существует такое число $C > 0$, что неравенство

$$\left\|G(t/n)^n f - e^{t\mathcal{L}} f\right\| \leq \frac{C}{n}$$

верно для всех $t \in [0, t_0)$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

**Гипотеза 2**. Пусть $\left(e^{t\mathcal{L}}\right)_{t\geq 0}$ — $C_0$-полугруппа в банаховом пространстве $\mathcal{F}$, и $G$ — её функция Чернова (среди прочего это значит, что $G'(0) = \mathcal{L}$), а число $t_0 > 0$ фиксировано. Пусть вектор $f$ принадлежит при всех $t \in [0, t_0]$ пересечению областей определения операторов $G'(t)$, $G''(t)$, $G'''(t)$, $G''''(t)$, $G'(t)G''(t)$, $G'(t)^2 G''(t)$, $G''(t)^2$, причём если $Z(t)$ — любой из этих операторов, то функция $t \longmapsto Z(t)f$ непрерывна при $t \in [0, t_0]$. Тогда существует такое число $C > 0$, что для всех $t \in [0, t_0)$ и всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\left\|G(t/n)^n f - e^{t\mathcal{L}} f + \frac{t^2}{2n} e^{t\mathcal{L}}(\mathcal{L}^2 - G''(0))f\right\| \leq \frac{C}{n^2}.$$

**Замечание 1.7.7.** Таким образом, представляется реалистичной следующая ситуация: если выполнены условия гипотезы 2 и нам удалось подобрать такую функцию Чернова $G$, что $G''(0) = \mathcal{L}^2$, то черновские аппроксимации дают ошибку не хуже, чем $\mathrm{const}/n^2$; если же $G''(0) \neq \mathcal{L}^2$, то ошибка будет не больше, чем $\mathrm{const}/n$. Кроме того, даже в случае $G''(0) = \mathcal{L}^2$ ошибка может убывать медленнее, чем $\mathrm{const}/n^2$ и $\mathrm{const}/n$, если вектор $f$ не принадлежит пространствам из условий гипотезы 2, связанные с этим вопросы обсуждались в замечании 1.7.5. Если о положении вектора $f$ в пространстве $\mathcal{F}$ не известно вообще ничего, то предположение состоит в том, что ошибка будет не выше, чем $\mathrm{const}/\sqrt{n}$.

# Глава 2

# Формулы для решения бесконечномерного уравнения теплопроводности, построенные с помощью интегрального оператора

## 2.1 Предварительные замечания

Дифференциальные уравнения относительно функций бесконечномерного аргумента связаны с теорией поля и теорией струн, теорией случайных процессов, а также некоторыми задачами финансовой математики [21, 50, 51]. Эволюционные уравнения (типа теплопроводности и типа Шрёдингера) в бесконечномерных пространствах привлекают внимание исследователей примерно с 60-х годов XX века (в частности, см. работы О.Г. Смолянова, Е.Т. Шавгулидзе, А.Ю. Хренникова, С. Альбеверио, точные ссылки даны ниже).

Существует множество статей, посвящённых этой тематике. Так, в частности, в [21] изучается уравнение Шрёдингера в гильбертовом пространстве. Уравнение содержит члены второго, первого и нулевого порядков, коэффициент при члене второго порядка постоянный. Решение задачи Коши даётся в виде формулы Фейнмана-Каца-Ито. В учебнике [54] разбирается решение уравнения теплопроводности в гильбертовом пространстве, без членов первого и нулевого порядка, коэффициент перед старшей производной постоянный. Решение даётся в виде свёртки с гауссовой мерой (полностью аналогично конечномерному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами), доказано существование разрешающей полугруппы операторов. В работе [35] решение этого же уравнения даётся в виде формулы Фейнмана-Каца, см. также статьи [36, 37, 38, 39] того же автора. В [4] рассмотрено параболическое уравнение с переменными коэффициентами (уравнение диффузии — его частный случай) в конечномерном пространстве. В предположении, что для задачи Коши существует сильно непрерывная разрешающая полугруппа, авторы доказывают формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца, дающие это решение. В пространствах над полем p-адических чисел формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца для решений задачи Коши для эволюционных уравнений рассматривались в [42, 40, 41]. Дальнейшие ссылки см. в процитированных работах. Следует отметить, что методы получения формул Фейнмана для возмущений полугрупп, разработанные в работах [45] и [46], могут, по-видимому, быть применимы к частному случаю (когда не равен нулю только член при старшей производной) рассмотренной в настоящей главе ситуации (в частности, существование и вид разрешающей полугруппы для уравнения с переменным коэффициентом при старшей производной можно попробовать извлечь из аналогичного факта для случая постоянного коэффициента), а также к поиску решений в классах функций, отличных от вводимых далее классов $D_1$ и $F$.

Излагаемые во второй главе диссертации результаты продолжают и усиливают доказанное в [4]: рассмотрен бесконечномерный случай, и существование разрешающей полугруппы доказано.

## 2.2 Обозначения и определения

Символом $H$ обозначим вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Основной рассматриваемый в диссертации случай — бесконечномерное пространство $H$, например, $\ell_2$, $L^2(\mathbb{R})$ или

$L^2[0,1]$. Тем не менее, получаемые формулы будут справедливы и в случае $H = \mathbb{R}^n$; этот случай был ранее рассмотрен [4] для уравнения несколько более общего вида. Мы же рассматриваем чуть более простое уравнение, зато позволяем пространству координат $H$ быть бесконечномерным. Конкретная реализация пространства $H$ (то есть явный вид множества $H$ и способ вычисления $\langle \cdot, \cdot \rangle$) для нас будет неважна.

Линейный, ограниченный, самосопряжённый, положительный, невырожденный (и, следовательно, инъективный) оператор $A\colon H \to H$ определён всюду на $H$ и имеет конечный след. Требование конечности следа оператора $A$ означает следующее: для каждого ортонормированного базиса $(e_k)$ в $H$ конечна сумма $\sum_{k=1}^{\infty} \langle Ae_k, e_k \rangle = \mathrm{tr} A$; эта сумма не зависит от выбора базиса $(e_k)$ и называется следом оператора $A$.

Символ $C(M, N)$ обозначает множество всех непрерывных функций из $M$ в $N$, где $M$ и $N$ это топологические пространства.

Функция $f\colon H \to \mathbb{R}$ называется цилиндрической [15, 18], если найдутся такие векторы $e_1, \ldots, e_n$ из $H$ и такая функция $f^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что для каждого $x \in H$ справедливо равенство $f(x) = f^n(\langle x, e_1 \rangle, \ldots, \langle x, e_n \rangle)$. Иными словами, функция $f\colon H \to \mathbb{R}$ цилиндрическая в точности тогда, когда в $H$ существует такое линейное подпространство $H_n \subset H$ размерности $n$, что если $P\colon H \to H_n$ — это ортогональный проектор, то равенство $f(x) = f(Px)$ справедливо для каждого $x \in H$. Цилиндрическую функцию $f$ можно мыслить себе как функцию, первоначально заданную только на $H_n$, а затем продолженную на всё $H$ так, что $f(x) = f(x_0)$ для всех $x_0 \in H_n$ и всех $x \in (x_0 + \ker P)$.

Символом $D = C^{\infty}_{b,c}(H, \mathbb{R})$ обозначим пространство всех таких непрерывных, ограниченных, цилиндрических функций $H \to \mathbb{R}$, что их производные Фреше натурального порядка существуют в каждой точке пространства $H$, ограниченны и непрерывны. При этом ограничивающая норму производной константа может зависеть от порядка производной.

Если $f\colon H \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема по Фреше [20], то символом

$f'(x)$ будем обозначать первую производную Фреше функции $f$, вычисленную в точке $x$, а символом $f''(x)$ будем обозначать вторую производную Фреше в точке $x$. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве позволяет для каждого $x \in H$ считать, что $f'(x) \in H$ — вектор из $H$, и $f''(x) \in \mathscr{L}(H)$ — линейный ограниченный оператор в $H$, подробнее об этом см. [20].

Символ $C_b(H, \mathbb{R})$ обозначает вещественное банахово пространство всех ограниченных непрерывных функций $H \to \mathbb{R}$, наделённое равномерной нормой $\|f\| = \sup_{x \in H} |f(x)|$.

Пусть $F = \overline{C^\infty_{b,c}(H, \mathbb{R})}$ это замыкание пространства $D$ в $C_b(H, \mathbb{R})$. Ясно, что $F$ с нормой $\|f\| = \sup_{x \in H} |f(x)|$ является банаховым пространством, поскольку оно является замкнутым линейным подпространством банахова пространства $C_b(H, \mathbb{R})$. Функция $f$ принадлежит классу $F$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность функций $(f_j) \subset D$, $\lim_{j\to\infty} f_j = f$, т.е. $\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in H} |f(x) - f_j(x)| = 0$.

Символ $C_b(H, H)$ обозначает банахово пространство всех ограниченных непрерывных функций $B\colon H \to H$, наделённое нормой $\|B\| = \sup_{x\in H} \|B(x)\|$.

Мы будем использовать следующее обозначение:

$D_H = \{B\colon H \to H \big| \exists N \in \mathbb{N}, b_k \in H, B_k \in D : B(x) = B_1(x)b_1 + \cdots + B_N(x)b_N\}$.

Пусть $F_H$ это замыкание $D_H$ в $C_b(H, H)$.

Если $x \in H$, и линейный оператор $R\colon H \to H$ невырожденный, ядерный и положительный, то символ $\mu^x_R$ обозначает гауссовскую вероятностную меру [14, 15, 29] на $H$ с математическим ожиданием $x$ и корреляционным оператором $R$, т.е. такую единственную сигма-аддитивную меру на борелевской сигма-алгебре в $H$, что равенство $\int_H e^{i\langle z,y\rangle} \mu^x_R(dy) = \exp\left(i\langle z, x\rangle - \frac{1}{2}\langle Rz, z\rangle\right)$ выполняется при каждом $z \in H$. Для краткости будем писать $\mu_R$ вместо $\mu^0_R$.

Если даны векторное поле $B\colon H \to H$ и скалярные вещественные функции $g\colon H \to \mathbb{R}$ и $C\colon H \to \mathbb{R}$, то символ $L$ обозначает следующий дифференциальный оператор в пространстве функций $\varphi\colon H\to\mathbb{R}$

$$(L\varphi)(x) := g(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + \langle\varphi'(x), AB(x)\rangle + C(x)\varphi(x), \quad x\in H.$$

Упорядоченная пара $(\mathcal{L}, M)$ обозначает оператор $\mathcal{L}$ с областью определения $M$. В дальнейшем мы докажем теорему 2.4.2, в которой утверждается, что $L(D)\subset F$ при выполнении некоторых условий на $A$, $B$, $g$ и $C$. Тогда окажется, что $(L, D)$ это линейный оператор $L\colon F\supset D\to F$ с плотной в $F$ областью определения $D$. Здесь и далее пространства $D$ и $F$ наделяются равномерной нормой, индуцированной из $C_b(H,\mathbb{R})$. Пусть $(\overline{L}, D_1)$ это замыкание $(L, D)$ в $F$. Это значит, что

$$D_1 = \{f\in F\big|\exists (f_j)\subset D : \lim_{j\to\infty} f_j = f, \exists \lim_{j\to\infty} Lf_j\},$$

и для каждой функции $f\in D_1$ по определению $\overline{L}f = \lim_{j\to\infty} Lf_j$.

Если функция $u\colon [0,+\infty)\times H\to\mathbb{R}$ такова, что при каждом значении $t>0$ имеет место включение $[x\longmapsto u(t,x)]\in D_1$, тогда выражение $\overline{L}u(t,x)$ обозначает результат применения оператора $\overline{L}$ к функции $x\longmapsto u(t,x)$ при фиксированном $t>0$.

Выражение $(S_t)_{t\geq 0}$ обозначает однопараметрическое семейство линейных операторов, действующих в пространстве функций $\varphi\colon H\to\mathbb{R}$ по правилу

$$(S_t\varphi)(x) := e^{tC(x)}\int_H \varphi(x+y)e^{\left\langle\frac{1}{g(x)}B(x),y\right\rangle}\mu_{2tg(x)A}(dy) \text{ for } t>0, \text{ and } S_0\varphi := \varphi.$$

**Замечание 2.2.1.** Далее, в теореме 2.4.1, мы покажем, что при каждом $t\geq 0$ и удовлетворяющих некоторым условиям $A$, $B$, $g$ и $C$ верно следующее:

i) $S_t(F)\subset F$,

ii) оператор $S_t$ ограниченный,

iii) $\frac{d}{dt}S_t\varphi\big|_{t=0} = L\varphi$ для каждой $\varphi\in D$.

Это позволит нам использовать черновские аппроксимации (теоремы 1.4.1, 1.4.2) и доказать основной результат настоящей главы — теорему 2.4.4.

## 2.3 Вспомогательные конструкции

### 2.3.1 Мера и интеграл в гильбертовом пространстве

**Лемма 2.3.1.** ([15], Глава II, §2, 3°) Если функция $\varphi\colon H \to \mathbb{R}$ цилиндрическая и измеримая, т.е. $\varphi(x) = \varphi^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)$ для некоторого числа $n \in \mathbb{N}$, некоторой измеримой функции $\varphi^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, некоторого конечного ортонормированного набора векторов $e_1, \dots, e_n$ пространства $H$, тогда

$$\int_H \varphi(y)\mu_A(dy) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\det M_Q}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^n(z) \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle M_Q^{-1} z, z\right\rangle_{\mathbb{R}^n}\right) dz, \tag{2.1}$$

где $H_n = \operatorname{span}(e_1, \dots, e_n)$, и $P\colon H \ni h \longmapsto \langle h, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle h, e_n\rangle e_n \in H_n$, $Q = PA$, $Q\colon H_n \to H_n$, а $M_Q$ — это матрица оператора $Q$ в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства $H_n$. Если $e_1, \dots, e_n$ представляет собой полный набор собственных векторов оператора $Q$, и $q_1, \dots, q_n$ — это соответствующие собственные числа, то

$$\int_H \varphi(y)\mu_A(dy) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n q_i}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^n(z_1, \dots, z_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{2q_i}\right) dz_1 \dots dz_n. \tag{2.2}$$

**Лемма 2.3.2.** (*Явный вид некоторых интегралов по гауссовской мере*)

Пусть сепарабельное вещественное гильбертово пространство $H$ имеет конечную или бесконечную (наиболее интересующий нас случай) размерность. Пусть линейный оператор $\widetilde{A}\colon H \to H$ самосопряжён, положителен, невырожден и имеет конечный след. Тогда символом $\mu_{\widetilde{A}}$ обозначим центрированную гауссовскую меру на $H$, имеющую корреляционный оператор $\widetilde{A}$. Пусть линейный оператор $G\colon H \to H$ ограничен, а $w$ и $z$ — ненулевые векторы пространства $H$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\int_H \langle Gy, y\rangle \mu_{\widetilde{A}}(dy) = \operatorname{tr}(\widetilde{A}G), \tag{2.3}$$

$$\int_H e^{\langle z, y\rangle} \mu_{\widetilde{A}}(dy) = e^{\frac{1}{2}\langle \widetilde{A}z, z\rangle}, \tag{2.4}$$

$$\int_H \langle w, y\rangle e^{\langle z,y\rangle} \mu_{\widetilde{A}}(dy) = \langle \widetilde{A}w, z\rangle e^{\frac{1}{2}\langle \widetilde{A}z,z\rangle}, \tag{2.5}$$

$$\int_H \langle Gy, y\rangle e^{\langle z,y\rangle} \mu_{\widetilde{A}}(dy) = (\mathrm{tr}\widetilde{A}G + \langle G\widetilde{A}z, \widetilde{A}z\rangle) e^{\frac{1}{2}\langle \widetilde{A}z,z\rangle}. \tag{2.6}$$

**Доказательство.** Формулы (2.3) и (2.4) приводятся в [15], глава II, §2, 1°. Формула (2.5) может быть выведена на основе того, что стоящая под знаком интеграла функция цилиндрическая, поэтому можно применять лемму 2.3.1. Чтобы доказать (2.6), достаточно сделать в интеграле замену переменной $h = y - \widetilde{A}w$, тогда ([15], глава II, §4, 2°, теорема 4.2) получаем $\mu_{\widetilde{A}}(dy) = e^{-\frac{1}{2}\left\langle \widetilde{A}w,w\right\rangle - \langle h,w\rangle} \mu_{\widetilde{A}}(dh)$, и интеграл свёлся к (2.3).

**Лемма 2.3.3.** (*О линейной замене переменной в интеграле по гауссовской мере*) Пусть $H$ — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть линейный оператор $A\colon H \to H$ положительный, ядерный, невырожденный и самосопряжённый. Обозначим символом $\mu_A$ центрированную гауссовскую меру на $H$ с корреляционным оператором $A$. Для каждого $t > 0$ символ $tA$ обозначает оператор, который на векторе $x \in H$ принимает значение $tAx \in H$. Пусть функция $f\colon H \to \mathbb{R}$ непрерывна и интегрируема. Тогда

$$\int_H f(x)\mu_{tA}(dx) = \int_H f(\sqrt{t}x)\mu_A(dx). \tag{2.7}$$

**Доказательство** использует единственность гауссовской меры с заданным преобразованием Фурье и стандартную теорему о замене переменной в интеграле Лебега.

**Лемма 2.3.4.** (*Об интегрируемости многочлена, умноженного на экспоненту*) Пусть $H, A, \mu_A$ такие же, как и выше, и даны полином $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и число $\beta \in \mathbb{R}$.

Тогда функция $H \ni x \longmapsto P(\|x\|)e^{\beta\|x\|} \in \mathbb{R}$ интегрируема по мере $\mu_A$.

**Доказательство** легко построить на основе теоремы Ферника [52], которая (применённая к данному случаю) утверждает, что существут такое число $\alpha > 0$, что $\int_H e^{\alpha\|y\|^2}\mu_A(dy) < +\infty$.

### 2.3.2 Дифференцирование в гильбертовом пространстве

**Предложение 2.3.1.** Пусть функция $f$ цилиндрическая, принимает вещественные значения и опеределена на $H$. То есть существуют такое число $n \in \mathbb{N}$ и функция $f^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что для каждого $x \in H$ справедливо равенство $f(x) = f^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)$. Набор векторов $e_1, \dots, e_n$ можно считать ортонормированным без ограничения общности. Дополним его до ортонормированного базиса $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $H$.

Тогда:

1. функция $f$ дифференцируема по направлению $h \in H$ тогда и только тогда, когда функция $f^n$ дифференцируема по направлению $(\langle h, e_1\rangle, \dots, \langle h, e_n\rangle) \in \mathbb{R}^n$, и

$$f'(x)h =$$
$$= \Big\langle h, \Big(\partial_1 f^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle),\ \dots,\ \partial_n f^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle),\ 0,\ 0,\ 0, \dots\Big)\Big\rangle,$$

где символом $\partial_j f^n$ обозначена частная производная по $j$-му аргументу функции $f^n$, и $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, 0, 0, \dots) = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. Если функция $f$ дифференцируема по Фреше в точке $x$, тогда $f'(x)$ — вектор, у которого первые $n$ координат представляют градиент функции $f^n$, а остальные координаты — нули:

$$f'(x) =$$
$$= \Big(\partial_1 f^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle),\ \dots,\ \partial_n f^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle),\ 0,\ 0,\ 0, \dots\Big). \quad (2.8)$$

2. функция $f$ дифференцируема по Фреше всюду в $H$ тогда и только тогда, когда функция $f^n$ дифференцируема всюду в $\mathbb{R}^n$.

3. Пусть оператор $A\colon H \to H$ ядерный (т.е. пусть $\mathrm{tr}A < \infty$). Тогда

$$\mathrm{tr}Af''(x) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle Ae_s, e_k\rangle \Big(\partial_k \partial_s f^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)\Big) = \quad (2.9)$$
$$= \mathrm{tr}\Big(A_n (f^n)''(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)\Big),$$

где $A_n$ — это матрица оператора $PA$ в базисе $e_1, \dots, e_n$, где $P$ — это проектор на линейную оболочку векторов $e_1, \dots, e_n$.

**Доказательство** состоит в непосредственном применении определения производной.

**Предложение 2.3.2.** Для $(n+1)$ раз дифференцируемой по Фреше функции $f\colon H \to \mathbb{R}$ справедливо [17] разложение по формуле Тейлора

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)(h,h) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(h,\dots,h) + R_n(x,h), \tag{2.10}$$

причём

$$|R_n(x,h)| \le \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{z\in[x,x+h]} \left\| f^{(n+1)}(z) \right\|. \tag{2.11}$$

### 2.3.3 Дифференциальный оператор в конечномерном пространстве

**Лемма 2.3.5.** ([16], теоремы 4.3.1, 4.3.2 и следствие 4.3.4) Пусть для каждого $i = 1,\dots,n$ и каждого $j = 1,\dots,n$ даны функции $a^{ij}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b^i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ из пространства $C_b^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, где $C_b^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ — это класс всех ограниченных вещественнозначных функций на $\mathbb{R}^n$, имеющих ограниченные частные производные всех порядков. Пусть также $c(x) \le 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Для $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ определим дифференциальный оператор $T$ формулой

$$(Tu)(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(x) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x) + c(x)u(x).$$

Пусть существует такое число $\varkappa > 0$, что для всех $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие эллиптичности: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \varkappa\|\xi\|^2$. Фиксируем произвольные число $\lambda > 0$ и функцию $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Тогда:

1. Сущетвует единственна функция $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, вляющаяся решением уравнения

$$(Tu)(x) - \lambda u(x) = f(x). \tag{2.12}$$

2. Для каждой функции $v \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ справдлива оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(Tv)(x) - \lambda v(x)| \ge \lambda \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |v(x)|. \tag{2.13}$$

Заметим, что лемма не утверждает, что уравнение (2.12) имеет только ограниченные решения.

### 2.3.4 Свойства пространств $D$, $F$, $D_1$

**Замечание 2.3.1.** Из определений этих пространств непосредственно следует, что

i) $D \subset D_1 \subset F \subset C_b(H, \mathbb{R})$;

ii) $D$ и $D_1$ плотны в $F$;

iii) Пространство $F$ банахово.

**Предложение 2.3.3.** Если $f \in D$, тогда $f$ равномерно непрерывна.

**Доказательство.** Из определения пространства $D$ следует, что функция $D \ni f\colon H \to \mathbb{R}$ ограничена, имеет производные Фреше всех порядков и эти производные также ограничены. В частности, существует

$$\sup_{x \in H} \|f'(x)\| = M < \infty. \tag{2.14}$$

Если подставить $n = 0$ в формулу Тейлора (2.10), то можно заметить, что для каждого $x \in H$ и каждого $y \in H$ существует такое вещественное число $R_1(x, y)$, что

$$f(x) - f(y) = R_1(x, y), \tag{2.15}$$

и при этом

$$|R_1(x, y)| \overset{(2.11)}{\leq} \frac{\|y - x\|^1}{1!} \sup_{z \in [x,y]} \|f'(z)\| \overset{(2.14)}{\leq} M\|x - y\|. \tag{2.16}$$

Следовательно, для каждого $x \in H$ и каждого $y \in H$ справедливы соотношения

$$|f(x) - f(y)| \overset{(2.15)}{=} \|R_1(x, y)\| \overset{(2.16)}{\leq} M\|x - y\|, \tag{2.17}$$

из которых следует равномерная непрерывность функции $f$.

□

**Предложение 2.3.4.** Если $\varphi \in F$, то функция $\varphi$ равномерно непрерывна.

**Доказательство.** Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Попробуем найти такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|x - y\| < \delta$ будет следовать неравенство $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$. Поскольку $\varphi \in F$, сущестует последовательность функций $(f_j) \subset D$, сходящаяся к $\varphi$ равномерно. Следовательно, существует такое число $j_0$, что (вводя обозначение $f_{j_0} = f$) мы обнаруживаем, что

$$\|\varphi - f_{j_0}\| = \|\varphi - f\| = \sup_{x \in H} |\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.18}$$

Более того, так как $f \in D$, то из предложения 2.3.3 вытекает оценка (2.17) с некоторым $M > 0$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{3M}$ и заметим, что $\|x - y\| < \delta$. Тогда

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le |\varphi(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - \varphi(y)| \overset{(2.17),(2.18)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

**Предложение 2.3.5.** Пусть последовательность функций $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset F$ сходится равномерно к функции $f_0 \in F$. Тогда семейство функций $(f_j)_{j=0}^{\infty}$ равностепенно непрерывно.

**Доказательство.** Пусть число $\varepsilon > 0$ задано. Постараемся найти такое $\delta > 0$, что как только $\|x - y\| < \delta$, так сразу $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

Согласно предложению 2.3.4, функция $f_j$ равномерно непрерывна для каждого $j = 0, 1, 2, \ldots$. Значит, для каждого $j = 0, 1, 2, \ldots$ существует такое $\delta_j > 0$ что из $\|x - y\| < \delta_j$ следует

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.19}$$

Так как сходимость $f_j \to f_0$ равномерна , то существует такое $j_0$ что при всех $j > j_0$ имеем

$$\sup_{x \in H} |f_0(x) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.20}$$

Положим $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{j_0})$. Тогда при $j > j_0$ из $\|x - y\| < \delta$ вытекает

$$|f_j(x) - f_j(y)| \le |f_j(x) - f_0(x)| + |f_0(x) - f_0(y)| + |f_0(y) - f_j(y)| \overset{(2.19),(2.20)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Если же $0 \le j \le j_0$, то из неравенства $\|x - y\| < \delta$ вытекает оценка (2.19), которая даже сильнее, чем та, что требуется.

□

**Предложение 2.3.6.** Функция из $F$, отличная от константы, не может иметь предел на бесконечности. В частности, функция $x \longmapsto \exp(-\|x\|^2)$ принадлежит $C_b(H,\mathbb{R})$, но не принадлежит $F$.

**Доказательство.** Число $a$ называется пределом функции $f\colon H \to \mathbb{R}$ на бесконечности, если

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{\|x\|\geq R} |f(x)-a| = 0. \tag{2.21}$$

Пусть сперва $f \in D$. Тогда найдутся такие $n-$мерное подпространство $H_n \subset H$ и ортогональный проектор $P\colon H \to H_n$, что $f(x) = f(Px)$ для каждого $x \in H$. Функцию $f$ можно себе мыслить как функцию, заданную на $H_n$, а затем продолженную на всё пространство $H$ так, что $f(x) = f(x_0)$ для $x_0 \in H_n$ и $x \in (x_0 + \ker P)$.

Так как $f \neq \text{const}$, то найдутся такое число $\varepsilon_0 > 0$ и такие точки $x_1 \in H_n$ и $x_2 \in H_n$, что $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon_0$. Но тогда $|f(x_1+y) - f(x_2+y)| > \varepsilon_0$ для каждого $y \in \ker P$, в частности и при $\|x_1+y\| \geq R$, $\|x_2+y\| \geq R$, что противоречит существованию предела (2.21).

Пусть теперь $f \in F$. Тогда существует последовательность функций $(f_j) \subset D$, сходящаяся к $f$ равномерно. Найдётся такой номер $j$, что $\|f - f_j\| < \frac{\varepsilon_0}{8}$. В силу этого $|f_j(x_1) - f_j(x_2)| > \frac{3\varepsilon_0}{4}$ и $|f_j(x_1+y) - f_j(x_2+y)| > \frac{3\varepsilon_0}{4}$ для каждого $y \in \ker P$ и двух точек $x_1, x_2$ пространства $H_n$, построенного по функции $f_j$. Но поскольку $\|f - f_j\| < \frac{\varepsilon_0}{8}$, справедлива оценка $|f(x_1+y) - f(x_2+y)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$, противоречащая существованию предела (2.21). Формулировка этого утверждения и идея доказательства принадлежат Н.Н.Шамарову.

□

**Предложение 2.3.7.** Рассмотрим последовательность $\alpha_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ бесконечно-гладких функций, равномерно ограниченных вместе со своими первой и второй производными:

$$\sup_{p\in\{0,1,2\}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{d^p \alpha_k(t)}{dt^p} \right| \leq M \equiv \text{const}.$$

Например, $\alpha_k(t) = \sin(d_k(t - t_k))$, где числа $d_k$ и $t_k$ зависят только от $k$, и выполняется неравенство $0 < d_k \leq 1$. Пусть числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится абсолютно. Пусть набор векторов $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $H$.

Тогда функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \alpha_k(\langle x, e_k \rangle)$$

находится в классе $D_1$.

Это утверждение может быть легко распространено на случай $\alpha_k\colon \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}$.

**Доказательство.** То, что частичные суммы задающего функцию $f$ ряда — гладкие цилиндрические функции на $H$, следует из построения и определения цилиндрической функции. Ряд сходится равномерно по $x \in H$, поэтому $f \in F$. Осталось проверить, что к функции $f$ можно применять оператор $L$. Несложно видеть, что функция $Lf$ задаётся рядом, сходимость которого следует из равномерной ограниченности производных функций $\alpha_k$.

$\square$

**Замечание 2.3.2.** Пространство $D$ не сепарабельно (не имеет счётного всюду плотного подмножества). В случае одномерного $H$ это может быть доказано так же, как в учебниках обычно доказывается несепарабельность пространства $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Если же $\dim H > 1$, то $\mathbb{R}^1$ можно вложить в $H$ как линейную оболочку некоторого ненулевого вектора $e \in H$. На основе этого вложения можно вложить в пространство $D$ множество цилиндрических функций, отвечающее за несепарабельность $D$ в случае одномерного $H$.

**Замечание 2.3.3.** Из замечания 2.3.2 и вложения $D \subset D_1 \subset F$ следует, что пространства $D_1$ и $F$ тоже не сепарабельны.

## 2.4 Основные результаты

### 2.4.1 Семейство $S_t$ является функцией Чернова для полугруппы с генератором $\overline{L}$

**Теорема 2.4.1.** (*О свойствах семейства* $(S_t)_{t\geq 0}$ *и его связи с оператором* $L$)

Пусть $g \in F$, и для каждого $x \in H$ справедлива оценка снизу $g(x) \geq g_0 \equiv \mathrm{const} > 0$. Пусть $B \in F_H$ и $C \in F$. Пусть для каждого $t > 0$ символ $\mu_{2tg(x)A}$ обозначает центрированную гауссовскую меру на $H$ с корреляционным оператором $2tg(x)A$.

Для $\varphi \in C_b(H,\mathbb{R})$ обозначим $S_0\varphi := \varphi$, а для $t > 0$ положим

$$(S_t\varphi)(x) := e^{tC(x)-t\frac{\langle AB(x),B(x)\rangle}{g(x)}} \int_H \varphi(x+y)e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x),y\right\rangle}\mu_{2tg(x)A}(dy). \qquad (2.22)$$

Тогда:

1. Если $t \geq 0$ и $\varphi \in C_b(H,\mathbb{R})$, то $S_t\varphi \in C_b(H,\mathbb{R})$. Для каждого $t \geq 0$ оператор $S_t\colon C_b(H,\mathbb{R}) \to C_b(H,\mathbb{R})$ линеен и ограничен; его норма не превышает $e^{\left(\frac{2\|A\|\|B\|^2}{g_0}+\|C\|\right)t}$.

2. Если $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$, то пространство $D$ для каждого $t \geq 0$ инвариантно по отношению к оператору $S_t$.

3. Если $g \in F$, $C \in F$, $B \in F_H$, то пространство $F$ для каждого $t \geq 0$ инвариантно по отношению к оператору $S_t$.

4. Для каждой функции $\varphi \in D$ при $g \in F$, $C \in F$, $B \in F_H$ равномерно по $x \in H$ существует предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{(S_t\varphi)(x)-\varphi(x)}{t} = g(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + \langle\varphi'(x), AB(x)\rangle + C(x)\varphi(x) = (L\varphi)(x).$$

5. Если $\varphi \in F$, $g \in F$, $C \in F$, $B \in F_H$, то функция $[0,+\infty) \ni t \longmapsto S_t\varphi \in F$ непрерывна, т.е. выполнение условий $t_0 \geq 0, t_n \geq 0$ и $t_n \to t_0$ влечёт за собой $\sup_{x\in H}|(S_{t_n}\varphi)(x) - (S_{t_0}\varphi)(x)| \to 0$.

**Доказательство.**

1. Функция $\varphi$ ограничена, поэтому интеграл (2.22) существует по лемме 2.3.4. Фиксируем число $t > 0$ и функцию $\varphi \in C_b(H,\mathbb{R})$. Делая в интеграле замену

переменной в соответствии с леммой 2.3.3, получаем

$$\int_H \varphi(x+y)e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x),y\right\rangle}\mu_{2tg(x)A}(dy) = \int_H \varphi\left(x+\sqrt{2tg(x)}y\right)e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x),\sqrt{2tg(x)}y\right\rangle}\mu_A(dy).$$

Вводя обозначение $\|B\| = \sup_{x\in H}\|B(x)\|$, приходим к оценке

$$\|S_t\varphi\| = \sup_{x\in H}\left|e^{tC(x)-\frac{\langle AB(x),B(x)\rangle}{g(x)}t}\int_H \varphi\left(x+\sqrt{2tg(x)}y\right)e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x),\sqrt{2tg(x)}y\right\rangle}\mu_A(dy)\right| \leq$$

$$\sup_{x\in H}\left|e^{tC(x)-\frac{\langle AB(x),B(x)\rangle}{g(x)}t}\right| \ \sup_{x\in H}|\varphi(x)| \ \sup_{x\in H}\int_H e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}}B(x),y\right\rangle}\mu_A(dy) \overset{(2.4)}{=}$$

$$e^{t\left(\|C\|+\left\|\frac{\langle AB(x),B(x)\rangle}{g(x)}\right\|\right)}\|\varphi\|\sup_{x\in H}e^{\frac{1}{2}\frac{2t}{g(x)}\langle AB(x),B(x)\rangle} \overset{\langle x_1,x_2\rangle\leq\|x_1\|\cdot\|x_2\|}{\leq} e^{\left(\frac{2\|A\|\|B\|^2}{g_0}+\|C\|\right)t}\|\varphi\|, \tag{2.23}$$

из которой следует, что функция $x\longmapsto(S_t\varphi)(x)$ ограничена. Докажем, что она также и непрерывна. В самом деле, если $x_j\to x$, то для каждого $y\in H$ верно

$$\varphi\left(x_j+\sqrt{2tg(x_j)}y\right)e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x_j)}}B(x_j),y\right\rangle}\to\varphi\left(x+\sqrt{2tg(x)}y\right)e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}}B(x),y\right\rangle}.$$

Более того, $\left|\varphi\left(x_j+\sqrt{2tg(x_j)}y\right)e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x_j)}}B(x_j),y\right\rangle}\right| \leq \|\varphi\|e^{\sqrt{\frac{2t}{g_0}}\|B\|\|y\|}$, и аналогично

$$\left|\varphi\left(x_j+\sqrt{2tg(x)}y\right)e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}}B(x),y\right\rangle}\right| \leq \|\varphi\|e^{\sqrt{\frac{2t}{g_0}}\|B\|\|y\|}.$$

Из леммы 2.3.4 вытекает, что функция $y\longmapsto e^{\sqrt{\frac{2t}{g_0}}\|B\|\|y\|}$ интегрируема по мере $\mu_A$. Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{j\to\infty}\int_H\varphi\left(x_j+\sqrt{2tg(x_j)}y\right)e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x_j)}}B(x_j),y\right\rangle}\mu_A$$
$$=\int_H\varphi\left(x+\sqrt{2tg(x)}y\right)e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t}{g(x)}}B(x),y\right\rangle}\mu_A.$$

В силу непрерывности функций $C, B, g$ и неравенства $g(x)\geq g_0>0$ имеем $e^{tC(x_j)-\frac{\langle AB(x_j),B(x_j)\rangle}{g(x_j)}t}\to e^{tC(x)-\frac{\langle AB(x),B(x)\rangle}{g(x)}t}$. Значит, $(S_t\varphi)(x_j)\to(S_t\varphi)(x)$. Итак, мы доказали, что $S_t\varphi\in C_b(H,\mathbb{R})$. Оценка (2.23) показывает, что

$$\|S_t\|\leq\exp^{\left(\frac{2\|A\|\|B\|^2}{g_0}+\|C\|\right)t}.$$

2. Зафиксируем $t > 0$ и покажем, что $S_t\varphi \in D$.

i) Сперва заметим, что при $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$ оператор $S_t$ сопоставляет цилиндрической функции $\varphi$ цилиндрическую функцию $S_t\varphi$. Это непосредственно следует из того, что (2.22) представляет собой цилиндрическую функцию от цилиндрическиих функций, зависящих от конечного числа линейных функционалов, аргументом которых является $x$.

Следовательно, число $(S_t\varphi)(x)$ зависит от $x$ лишь через посредство конечного числа линейных функционалов. Это и означает, что функция $x \longmapsto (S_t\varphi)(x)$ цилиндрическая; вный вид указанной зависимости от $x$ мы приведём ниже в (2.25).

ii) Введём несколько обозначений. Поскольку функция $\varphi$ цилиндрическая, существуют такие число $n \in \mathbb{N}$, функция $\varphi^n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и набор лежащих в пространстве $H$ векторов $e_1, \dots, e_n$, что равенство $\varphi(x) = \varphi^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)$ справедливо для каждого $x \in H$. Функции $g$, $C$, $B$ также цилиндрические, поэтому без потери общности мы можем принять, что набор векторов $e_1, \dots, e_n$ ортонормирован и столь велик, что справедливо следующее:

$g(x) = g^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)$,

$C(x) = C^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)$,

$B(x) = B_1(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)e_1 + \dots + B_n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)e_n$.

На данном этапе векторы $e_1, \dots, e_n$ могут быть произвольно расположены по отношению к собственным векторам оператора $A$.

Введём следующие обозначения:

$\Psi_n \colon H \ni h \longmapsto (\langle h, e_1\rangle, \dots, \langle h, e_n\rangle) \in \mathbb{R}^n$ — проектор,

$H_n = \mathrm{span}(e_1, \dots, e_n)$ — подпространство в $H$,

$I_n \colon H_n \ni h \longmapsto (\langle h, e_1\rangle, \dots, \langle h, e_n\rangle) \in \mathbb{R}^n$ — изоморфизм,

$P_n \colon H \ni h \longmapsto \langle h, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle h, e_n\rangle e_n \in H_n$ — проектор.

Далее, обозначим $\overset{\to n}{x_1} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

и $\overset{\to n}{B_1}(\overset{\to n}{x_1}) = (B_1(x_1, \dots, x_n), \dots, B_n(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^n$.

В этих обозначениях имеем $\Psi_n = I_n P_n$ и $\varphi(x) = \varphi^n(\Psi_n x)$, $g(x) = g^n(\Psi_n x)$,

$C(x) = C^n(\Psi_n x)$, $B(x) = \overset{\to n}{B_1}(\Psi_n x)$.

Определим функцию $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\Phi\left(\overset{\to n}{x_1}\right) = \int_H \varphi^n\left(\overset{\to n}{x_1} + \sqrt{2tg^n\left(\overset{\to n}{x_1}\right)}\Psi_n(y)\right) e^{\sqrt{\frac{2t}{g^n\left(\overset{\to n}{x_1}\right)}}\left\langle \overset{\to n}{B_1}\left(\overset{\to n}{x_1}\right), \Psi_n(y)\right\rangle} \mu_A(dy). \quad (2.24)$$

Тогда для каждого $x \in H$ имеем

$$(S_t\varphi)(x) = \Phi(\Psi_n x)\exp\left(tC^n(\Psi_n x) - \frac{\left\langle A\overset{\to n}{B_1}(\Psi_n x), \overset{\to n}{B_1}(\Psi_n x)\right\rangle}{g^n(\Psi_n x)}t\right). \quad (2.25)$$

В пунктах iii)-v) мы с использованием леммы 2.3.1 докажем, что $S_t\varphi$ имеет ограниченную производную Фреше порядка $k$ для каждого натурального $k$. Для этого надо доказать, что введённые выше функции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеют ограниченные производные Фреше порядка $k$ для каждого натурального $k$.

iii) Стоящее в показателе экспоненты в равенстве (2.25) выражение обладает этим свойством, поскольу оно выражается через функции с этим свойством с помощью конечного числа арифметических действий и композиции. Экспонента — гладкая функция, переводящая ограниченные множества в оганиченные, поэтому и вся экспонента, т.е. второй сомножитель в (2.25), обладает желаемым свойством.

iv) Теперь покажем, что и первый сомножитель в (2.25), т.е. фунция $\Phi$, имеет ограниченные производные Фреше всех порядков. Сперва убедимся в существовании этих производных, и начнём с производной первого порядка.

Произведение дифференцируемых функций под знаком интеграла в (2.24) дифференцируемо, поэтому задача свелась к доказательству того, что можно дифференцировать под знаком интеграла, т.е. что вся правая часть (2.25) представлет собой дифференцируемую функцию. Чтобы в этом убедиться, мы применим лемму 2.3.1, которая позволит нам перейти в выражении для $\Phi$ от интеграла по $H$ к интегралу по $\mathbb{R}^n$ (это возможно, поскольку подынтегральная функция цилиндрическая).

Оператор $A$ невырожден и симметричен на $H$, поэтому оператор $P_nA$ невырожден и симметричен на $H_n$, и, следовательно, диагонализуется в некотором ортонормированном базисе $b_1, \dots, b_n$. Без ограничения общности мы можем считать, что векторы $e_1, \dots, e_n$ уже образуют такой базис. В самом деле, замена векторов в базисе пространства $H_n$ даст линейную невырожденную замену переменных в функциях $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, использованных для определения цилиндрических функций $H \to \mathbb{R}$. Это даст нам новые функции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, но все важные для нас свойства этих функций будут сохранены.

Матрица опeратра $P_n A$ в $H_n$ совпадает с матрицей оператора $Q_n = I_n P_n A I_n^{-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Далее, пусть набор чисел $q_1, \dots, q_n$ — это полный набор собственных чисел оператора $Q_n$, отвечающих собственным векторам $\Psi_n e_1, \dots, \Psi_n e_n$. Заметим. что $q_i > 0$ и $g^n\left(\overrightarrow{x}_1^n\right) \geq g_0 \equiv \mathrm{const} > 0$ для всех $\overrightarrow{x}_1^n \in \mathbb{R}^n$. Поэтому в силу (2.2) имеем

$$\Phi\left(\overrightarrow{x}_1^n\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n q_i}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^n\left(\overrightarrow{x}_1^n + \sqrt{2tg^n\left(\overrightarrow{x}_1^n\right)}\, z\right) \times$$

$$e^{\sqrt{\frac{2t}{g^n\left(\overrightarrow{x}_1^n\right)}}\left\langle \overrightarrow{B}_1^n(\overrightarrow{x}_1^n), z\right\rangle} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{2q_i}\right) dz.$$

Теперь введём меру $\nu$ на $\mathbb{R}^n$, заданную свой плотностью относительно меры Лебега. Для каждого измеримого множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$\nu(\mathcal{A}) := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n q_i}} \int_{\mathcal{A}} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{2q_i}\right) dz.$$

Из предыдущих обозначений вытекает, что

$$\Phi\left(\overrightarrow{x}_1^n\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^n\left(\overrightarrow{x}_1^n + \sqrt{2tg^n\left(\overrightarrow{x}_1^n\right)}\, z\right) e^{\sqrt{\frac{2t}{g^n\left(\overrightarrow{x}_1^n\right)}}\left\langle \overrightarrow{B}_1^n(\overrightarrow{x}_1^n), z\right\rangle} \nu(dz). \qquad (2.26)$$

Подынтегральное выражение в (2.26) является композицией отображений с непрерывной производной Фреше, поэтому и само оно обладает непрерывной производной Фреше. Производная Фреше подынтегральной функции равномерно ограниченна, оценка получается из т.н. «цепного правила», т.е. теоремы о производной сложной функции. Линейное нормированное пространство $(\mathbb{R}^n, \nu)$ локально компактно, счётно в бесконечности и снабжено неотрицательной мерой Радона $\nu$. Поэтому применима теорема о дифференцировании по Фреше под знаком интеграла Лебега (теорема 115 в [19]). Итак, функция $\Phi$ имеет непрерывную ограниченную производную Фреше.

v) Повторяя проведённое в iv) рассуждение $k$ раз, получаем, что раз подынтегральное выражение имеет всюду на $\mathbb{R}^n$ непрерывные ограниченные производные Фреше порядка $k$, то и функция $\Phi$ имеет всюду на $\mathbb{R}^n$ непрерывные ограниченные производные Фреше порядка $k$. Поэтому все функции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в правой части (2.25) имеют непрерывные ограниченные производные Фреше порядка $k$.

Следовательно, в силу пункта 2 предложения 2.3.1, функция $x \longmapsto (S_t\varphi)(x)$ всюду на $H$ имеет для каждого $k \in \mathbb{N}$ непрерывные ограниченные производные Фреше порядка $k$. Поэтому $S_t\varphi \in D$.

3. i) На данном этапе считаем, что $\varphi \in F$, то есть $\varphi \in C_b(H, \mathbb{R})$ и существует такая последовательность $(\varphi_j) \subset D$, что $\varphi_j(x) \to \varphi(x)$ равномерно по $x \in H$. Также предполагаем, что $g \in F$, то есть $g \in C_b(H, \mathbb{R})$ и существует такая последовательность $(g_j) \subset D$, что $g_j \to g$ равномерно. Поскольку $g(x) \geq g_0 \equiv \mathrm{const} > 0$ для всех $x \in H$, то существует такой номер $j_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $j > j_0$ и при всех $x \in H$ справедливо неравенство $g_j(x) \geq \frac{g_0}{2}$. Поэтому мы не ограничим общность, если будем считать, что последовательность $(g_j)$ уже такова, что неравенство $g_j(x) \geq \frac{g_0}{2}$ справделиво для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$.

Также считаем, что $C \in F$, то есть $C \in C_b(H, \mathbb{R})$, и существует такая последовательность $(C_j) \subset D$, что $C_j \to C$ равномерно. Наконец, мы считаем, что $B \in F_H$, т.е. $B \in C_b(H, H)$ и существует такая последовательность $(B_j) \subset D_H$, что $B_j \to B$ равномено. Пусть число $t > 0$, как и ранее, фиксировано.

Обозначим символом $(S_j)_t$ оператор $S_t$, построенный по функциям $g_j$, $B_j, C_j$. В соответствии с (только что доказанным выше) пунктом 2 настоящей теоремы включение $(S_j)_t\varphi_j \in D$ справедливо для всех $j \in \mathbb{N}$.

Далее, в ii) и iii) мы докажем, что $((S_j)_t\varphi_j)(x) \to (S_t\varphi)(x)$ равномено по $x \in H$; по определению пространства $F$ это и будет означать, что $S_t\varphi \in F$.

ii) Первым делом докажем, что при каждом фиксированном $y \in H$ последовательность функций $x \longmapsto \varphi_j(x + \sqrt{2tg_j(x)}y)$ сходится к функции $x \longmapsto \varphi(x + \sqrt{2tg(x)}y)$ равномено по $x \in H$. В самом деле, пусть дано $\varepsilon > 0$. Найдём такое $j^* \in \mathbb{N}$, что при всех $j > j^*$ справделива следующа оценка:

$$\sup_{x \in H} \left| \varphi_j \left( x + \sqrt{2tg_j(x)}y \right) - \varphi \left( x + \sqrt{2tg(x)}y \right) \right| \leq \varepsilon. \tag{2.27}$$

Заметим, что функции $\varphi, \varphi_j, g, g_j$ лежат в $F$ по сделанному выше предположению, а все функции в $F$ равномерно непрерывны по предложению 2.3.4. По предположению 2.3.5 семейство функций $\{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$ равностепенно непрерывно. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для всех $j \in \mathbb{N}$ из $\|x_1 - x_2\| < \delta$ следует

$$|\varphi_j(x_1) - \varphi_j(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.28}$$

функция $[0, +\infty) \ni a \longmapsto \sqrt{2ta} \in \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, поэтому из равномерной (по $x \in H$) сходимости $g_j(x) \to g(x)$ следует равномерная (по $x \in H$) сходимость $[H \ni x \longmapsto \sqrt{2tg_j(x)} \in \mathbb{R}] \to [H \ni x \longmapsto \sqrt{2tg(x)} \in \mathbb{R}]$. А из этого уже вытекает, что для каждого фиксированного $y \in H$ существует такой номер $j_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $j > j_1$ и всех $x \in H$ имеет место неравенство

$$\left\| \left( x + \sqrt{2tg_j(x)}y \right) - \left( x + \sqrt{2tg(x)}y \right) \right\| < \delta. \tag{2.29}$$

Следовательно, поскольку $\varphi_j(z) \to \varphi(z)$ равномерно по $z \in H$, существует такой номер $j_2$, что при всех $j > j_2$ и всех $z \in H$ справедлива оценка

$$|\varphi_j(z) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.30}$$

Для каждого фиксированного $y \in H$, для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$ имеем

$$\left| \varphi_j \left( x + \sqrt{2tg_j(x)}y \right) - \varphi \left( x + \sqrt{2tg(x)}y \right) \right| \leq \left| \varphi_j \left( x + \sqrt{2tg_j(x)}y \right) - \varphi_j \left( x + \sqrt{2tg \right.\right.$$

Наконец, положим $j^* = \max(j_1, j_2)$. Для всех $j > j^*$ первое слагаемое меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу (2.28) и (2.29); проще всего это увидеть, положив $x_1 = x + \sqrt{2tg_j(x)}y$ и $x_2 = x + \sqrt{2tg(x)}y$. Что касается второго слагаемого, то оно меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу (2.30); проще всего это увидеть, положив $z = x + \sqrt{2tg(x)}y$.

Таким образом, для каждого фиксированного $y \in H$ мы нашли такой номер $j^* \in \mathbb{N}$, что при всех $j > j^*$ и всех $x \in H$ справедливо следующее неравенство:

$$\left|\varphi_j\left(x+\sqrt{2tg_j(x)}y\right)-\varphi\left(x+\sqrt{2tg(x)}y\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Беря $\sup_{x\in H}$, получаем желаемую оценку (2.27), поскольку правая часть неравенства не зависит от $x$.

iii) Рассуждения (опустим их), аналогичные ii), показывают, что для фиксированного $y$ имеет место равномерная по $x \in H$ сходимость $e^{\left\langle\sqrt{\frac{2t}{g_j(x)}}B_j(x),y\right\rangle} \to e^{\left\langle\sqrt{\frac{2t}{g(x)}}B(x),y\right\rangle}$. Объединяя это с результатами пункта ii) и имея в виду, что при фиксированном $y$ все последовательности функций ограничены в совокупности, получаем, что при каждом фиксированном $y$ имеет место

$$\varphi_j\left(x+\sqrt{2tg_j(x)}y\right)e^{\left\langle\sqrt{\frac{2t}{g_j(x)}}B_j(x),y\right\rangle}\to\varphi\left(x+\sqrt{2tg(x)}y\right)e^{\left\langle\sqrt{\frac{2t}{g(x)}}B(x),y\right\rangle} \tag{2.31}$$

равномерно по $x \in H$.

iv) При фиксированном $y$ функции из (2.31) ограниченны, поэтому равенство

$$\begin{aligned}Y_j=\Bigg[y\longmapsto\sup_{x\in H}\Bigg|\varphi_j\left(x+\sqrt{2tg_j(x)}y\right)e^{\left\langle\sqrt{\frac{2t}{g_j(x)}}B_j(x),y\right\rangle}\\-\varphi\left(x+\sqrt{2tg(x)}y\right)e^{\left\langle\sqrt{\frac{2t}{g(x)}}B(x),y\right\rangle}\Bigg|\Bigg]\end{aligned}$$

корректно определяет последовательность функций $Y_j\colon H\to\mathbb{R}$.

Из iii) следует, что $Y_j(y)$ сходится к нулю поточечно, т.е. для каждого $y$. Функции $Y_j$ неотрицательны, ограничены в совокупнности интегрируемой (по лемме 2.3.4) функцией $y\longmapsto\alpha e^{\beta\|y\|}+\gamma$ при подходящем выборе констант $\alpha,\beta$ и $\gamma$. Применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, заключаем, что $\int_H Y_j(y)\mu_A(dy)\to 0$. Так как числовая последовательность $\int_H Y_j(y)\mu_A(dy)$ сходится, то она ограниченна. Обозначим для краткости

$$\Psi(x,y)=\varphi\left(x+\sqrt{2tg(x)}y\right)e^{\left\langle\sqrt{\frac{2t}{g(x)}}B(x),y\right\rangle},$$

$$\Psi_j(x,y)=\varphi_j\left(x+\sqrt{2tg_j(x)}y\right)e^{\left\langle\sqrt{\frac{2t}{g_j(x)}}B_j(x),y\right\rangle},$$

$$E(x) = \exp\left(tC(x) - t\frac{\langle AB(x), B(x)\rangle}{g(x)}\right),$$

$$E_j(x) = \exp\left(tC_j(x) - t\frac{\langle AB_j(x), B_j(x)\rangle}{g_j(x)}\right).$$

Рассуждения (опустим их), аналогичные ii), показывают, что $E_j(x) \to E(x)$ равномерно по $x \in H$. Таким образом, приходим к оценкам

$$\|(S_j)_t\varphi_j - S_t\varphi\| = \sup_{x\in H}\left|E_j(x)\int_H \Psi_j(x,y)\mu_A(dy) - E(x)\int_H \Psi(x,y)\mu_A(dy)\right| \leq$$

$$\sup_{x\in H}\left|E_j(x)\int_H \Psi_j(x,y)\mu_A(dy) - E_j(x)\int_H \Psi(x,y)\mu_A(dy)\right| +$$

$$\sup_{x\in H}\left|E_j(x)\int_H \Psi(x,y)\mu_A(dy) - E(x)\int_H \Psi(x,y)\mu_A(dy)\right| \leq$$

$$\sup_{x\in H}|E_j(x)|\int_H Y_j(y)\mu_A(dy) + \sup_{x\in H}|E_j(x) - E(x)|\int_H \Psi(x,y)\mu_A(dy).$$

Наконец, заметим, что $\sup_{x\in H}|E_j(x) - E(x)| \to 0$ и $\int_H Y_j(y)\mu_A(dy) \to 0$, а сомножители этих членов ограниченны, откуда вытекает желаемое утверждение о том, что $\|(S_j)_t\varphi_j - S_t\varphi\| \to 0$.

4. Прдположим, что фиксированы $\varphi \in D$, $t > 0$ и $x \in H$. Рассмотрим интеграл

$$\int_H \varphi(x+y)e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), y\right\rangle}\mu_{2tg(x)A}(dy).$$

Будем работать с аппроксимацией функции $\varphi$ её многочленом Тейлора (2.10) второго порядка с центром в точке $x$, т.е. будем раскладывать $\varphi(x+y)$ по степеням $y$. Прежде чем начать рассуждение, сделаем следующее замечание: остаточный член $R(x,y)$ в формуле Тейлора не будет малым, поскольку вектор $y$ пробегает всё пространство $H$, а вектор $x$ фиксирован, однако интеграл от остаточного члена будет мал, что и является центральным местом в доказательстве.

Поскольку функция $\varphi$ три раза дифференцируема по Фреше всюду на $H$, то для каждого $x \in H$ и каждого $y \in H$ существует такое вещественное число

$R(x,y)$, что

$$\int_H \varphi(x+y) e^{\left\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y\right\rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy)$$

$$= \int_H \left\{ \varphi(x) + \langle \varphi'(x), y\rangle + \frac{1}{2!} \langle \varphi''(x) y, y\rangle + R(x,y) \right\} e^{\left\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y\right\rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy),$$

и, в соответствии с (2.11), справедлива оценка

$$|R(x,y)| \le \frac{\|y\|^3}{(3)!} \sup_{z\in[x,x-y]} \left\| \varphi^{(3)}(z) \right\| \le \frac{1}{3!} \|\varphi'''\| \cdot \|y\|^3, \tag{2.32}$$

где обозначено $\|\varphi'''\| = \sup_{z\in H} \|\varphi^{(3)}(z)\|$. Также введём обозначение $\|g\| = \sup_{z\in H} |g(z)|$.

Сумму можно интегрировать почленно, поскольку каждый член ограничен полиномом от $\|y\|$, умноженным на экспоненту от $\|y\|$, а такие функции интегрируемы в силу леммы 2.3.4. Вычислим интегралы при фиксированных $\varphi$, $x \in H$, $t > 0$. После этого исследуем их поведение при $t \to 0$, выделяя интересующие нас члены и находя равномерные по $x \in H$ порядки малости остатков.

$$\int_H \varphi(x) e^{\left\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y\right\rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) = \varphi(x) \int_H e^{\left\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y\right\rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) =$$

(положим $z = \frac{B(x)}{g(x)}$ и $\widetilde{A} = 2tg(x)A$ в (2.4))

$$\varphi(x) \exp\left( \frac{1}{2} \left\langle 2tg(x) A \frac{B(x)}{g(x)}, \frac{B(x)}{g(x)} \right\rangle \right) = \varphi(x) \exp\left( \frac{\langle AB(x), B(x)\rangle}{g(x)} t \right) =$$

$$\varphi(x) \left( 1 + \frac{\langle AB(x), B(x)\rangle}{g(x)} t + o(t) \right) = \varphi(x) + \varphi(x) \frac{\langle AB(x), B(x)\rangle}{g(x)} t + o(t).$$

Считая, что $z$ и $\widetilde{A}$ прежние, положим $w = \varphi'(x)$ в (2.5).

$$\int_H \langle \varphi'(x), y\rangle e^{\left\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y\right\rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) \overset{(2.5)}{=}$$

$$\left\langle 2tg(x) A \varphi'(x), \frac{1}{g(x)} B(x) \right\rangle \exp\left( \frac{1}{2} \left\langle 2tg(x) A \frac{1}{g(x)} B(x), \frac{1}{g(x)} B(x) \right\rangle \right) =$$

$$2t \langle A\varphi'(x), B(x)\rangle \exp\left( \frac{t}{g(x)} \left\| \sqrt{A} B(x) \right\|^2 \right) = 2t \langle A\varphi'(x), B(x)\rangle + o(t).$$

Для члена с $\varphi''$ имеем

$$\int_H \langle \varphi''(x) y, y\rangle \, e^{\left\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y\right\rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) \overset{(2.6)}{=}$$

$$= \Big(2tg(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + 4t^2\langle\varphi''(x)AB(x), AB(x)\rangle\Big)\exp\left(\frac{\langle AB(x), B(x)\rangle}{g(x)}t\right)$$
$$= 2tg(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + o(t).$$

Наконец,

$$\left|\int_H R(x,y)e^{\left\langle\frac{1}{g(x)}B(x),y\right\rangle}\mu_{2tg(x)A}(dy)\right|$$
$$\overset{(2.7)}{\le} \int_H \left|R(x,\sqrt{2tg(x)}y)\right| e^{\left\langle\frac{1}{g(x)}B(x),\sqrt{2tg(x)}y\right\rangle}\mu_A(dy)$$
$$\overset{(2.32)}{\le} \int_H \frac{1}{3!}\|\varphi'''\|\left(\sqrt{2tg(x)}\right)^3\|y\|^3 e^{\left\langle\sqrt{\frac{2t}{g(x)}}B(x),y\right\rangle}\mu_A(dy)$$
$$\le t^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\|\varphi'''\|\|g\|^{\frac{3}{2}}\int_H \|y\|^3 e^{\left\langle\sqrt{\frac{2t}{g(x)}}B(x),y\right\rangle}\mu_A(dy)\right) \le$$

(в силу неравенства $\langle z,y\rangle \le \|z\|\|y\|$ и монотонности экспоненты)

$$\le t^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\|\varphi'''\|\|g\|^{\frac{3}{2}}\int_H \|y\|^3 e^{\left\|\sqrt{\frac{2t}{g(x)}}B(x)\right\|\|y\|}\mu_A(dy)\right) \le$$

(в силу неравенств $\|B(x)\| \le B_0$, $g_0 \le g(x)$ и монотонности экспоненты)

$$\le t^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\|\varphi'''\|\|g\|^{\frac{3}{2}}\int_H \|y\|^3 e^{\sqrt{\frac{2t}{g_0}}B_0\|y\|}\mu_A(dy)\right) = o(t) \text{ равномерно по } x \in H.$$

Складывая всё, получаем, что

$$\int_H \varphi(x+y)e^{\left\langle\frac{1}{g(x)}B(x),y\right\rangle}\mu_{2tg(x)A}(dy)$$
$$= \varphi(x) + t\langle\varphi'(x), AB(x)\rangle + tg(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) - t\varphi(x)\frac{\langle AB(x), B(x)\rangle}{g(x)} + o(t),$$

равномерно по $x \in H$.

Рассмотрим член $\exp\left(tC(x) - \frac{\langle AB(x),B(x)\rangle}{g(x)}t\right)$. Так как $\|C\|, \|A\|, \|B\|$ отделены от бесконечности, а $g$ отделена от нуля, имеем $e^{tC(x)-\frac{\langle AB(x),B(x)\rangle}{g(x)}t} = 1 + tC(x) - \frac{\langle AB(x),B(x)\rangle}{g(x)}t + o(t)$ равномерно по $x \in H$. Следовательно, равномерно по $x \in H$ при $t \to 0$ верно

$$(S_t\varphi)(x) = e^{tC(x)-\frac{\langle AB(x),B(x)\rangle}{g(x)}t}\int_H \varphi(x+y)e^{\left\langle\frac{1}{g(x)}B(x),y\right\rangle}\mu_{2tg(x)A}(dy) =$$
$$\varphi(x) + t\langle\varphi'(x), AB(x)\rangle + tg(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + tC(x)\varphi(x) + o(t).$$

Отсюда следует, что равномерно по $x \in H$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(S_t\varphi)(x)-\varphi(x)}{t} = g(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + \langle\varphi'(x), AB(x)\rangle + C(x)\varphi(x) = (L\varphi)(x).$$

5. i) Сперва рассмотрим случай $t_0 \neq 0$. Если $t_n \to t_0$, то $2t_n g(x) \to 2t_0 g(x)$ равномерно по $x \in H$. Так как функция $z \longmapsto \sqrt{z}$ равномерно непрерывна, то $\sqrt{2t_n g(x)} \to \sqrt{2t_0 g(x)}$ равномерно по $x \in H$.

Функция $\varphi$ равномерно непрерывна по предложению 2.3.4, поэтому для каждого фиксированного $y \in H$ верно, что $\varphi(x+\sqrt{2t_n g(x)}y) \to \varphi(x+\sqrt{2t_0 g(x)}y)$ равномерно по $x \in H$.

Далее, для каждого $y \in H$ последовательность $\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_n g(x)}y\right\rangle$ сходится к $\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_0 g(x)}y\right\rangle$ равномерно по $x \in H$ в силу линейности скалярного произведения. Так как числовая последовательность $t_n$ сходится, то она ограниченна; кроме того, $g(x) \geq g_0 \equiv \mathrm{const} > 0$, а функции $x \longmapsto g(x)$ и $x \longmapsto \|B(x)\|$ ограниченны. Следовательно, существует такая константа $K > 0$, что для фиксированного $y \in H$ для всех $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и всех $x \in H$ справедливо неравенство $\left|\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_k g(x)}y\right\rangle\right| \leq K$. Функция $z \longmapsto e^z$ равномерно непрерывна по $z \in [-K, K]$, поэтому для каждого $y \in H$ имеет место равномерная по $x \in H$ сходимость $e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_n g(x)}y\right\rangle} \to e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_0 g(x)}y\right\rangle}$.

Почленное произведение двух ограниченных в совокупности, равномерно сходящихся последовательностей является последовательностью, равномерно сходящейся к произведению пределов двух исходных последовательностей. Следовательно, из двух предыдущих абзацев вытекает, что для каждого $y \in H$

$$\varphi(x+\sqrt{2t_n g(x)}y)e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_n g(x)}y\right\rangle} \to \varphi(x+\sqrt{2t_0 g(x)}y)e^{\left\langle \frac{1}{g(x)}B(x), \sqrt{2t_0 g(x)}y\right\rangle} \tag{2.33}$$

равномерно по $x \in H$.

Поскольку для фиксированного $y$ функции из (2.33) ограничены, корректно определена последовательность числовых функций

$$Y_n(y) = \sup_{x \in H} \left| \varphi\left(x + \sqrt{2t_n g(x)}y\right) e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t_n}{g(x)}} B(x), y \right\rangle} - \varphi\left(x + \sqrt{2t_0 g(x)}y\right) e^{\left\langle \sqrt{\frac{2t_0}{g(x)}} B(x), y \right\rangle} \right|.$$

Из доказанного выше следует, что $Y_n(y)$ сходится к нулю поточечно, т.е. для каждого $y$. Функции $Y_n$ ограничены интегрируемой функцией (см. лемму 2.3.4), и теорема Лебега о мажорируемой сходимости позволяет утверждать, что $\int_H Y_n(y)\mu_A$ 0.

Наконец, $C \in F, B \in F_H$, поэтому $\sup_{x \in H} |C(x)| < \infty$, $\sup_{x \in H} \|B(x)\| < \infty$. Объединяя это с $g(x) \geq g_0$, приходим к тому, что $e^{t_n C(x) - \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t_n} \to e^{t_0 C(x) - \frac{\langle AB(x), B(x) \rangle}{g(x)} t_0}$ равномерно по $x \in H$.

Итак, $S_{t_n}\varphi(x)$ — это произведение двух ограниченных в совокупности, равномерно сходящихся последовательностей, и, значит, сходится к $S_{t_0}\varphi(x)$.

ii) Теперь рассмотрим случай $t_0 = 0$. Вспомним, что по определению $S_0 = I$, поэтому нам нужно для каждой фиксированной $\varphi$ доказать, что из $t_n \to 0$ следует $S_{t_n}\varphi \to \varphi$, т.е. $\|S_{t_n}\varphi - \varphi\| \to 0$. Мы не ограничим общность, полагая для удобства рассуждения, что $0 < t_n \leq 1$.

iia) Рассмотрим сперва случай $\varphi \in D$. Тогда по пункту 4 настоящей теоремы $S_t\varphi = \varphi + tL\varphi + o(t)$, поэтому из $t_n \to 0$ следует $S_{t_n}\varphi \to \varphi$.

iib) Пусть теперь $\varphi \in F$, и поэтому существует такая последовательность $(\varphi_k) \subset D$, что $\|\varphi_k - \varphi\| \to 0$. Пункт 1 настоящей теоремы позволяет верить в то, что существут такая константа $\omega \geq 1$, что для всех $t \in [0,1]$ справедливо неравенство $\|S_t\| \leq \omega$. Теперь для каждого $\varepsilon > 0$ применим «$\varepsilon/3$-приём», основанный на оценке

$$\|S_{t_n}\varphi - \varphi\| \leq \|S_{t_n}\varphi - S_{t_n}\varphi_k\| + \|S_{t_n}\varphi_k - \varphi_k\| + \|\varphi_k - \varphi\|.$$

Мы можем выбрать $k$ так, что $\|\varphi_k - \varphi\| < \varepsilon/(3\omega)$. При фиксированном $k$ мы благодаря iia) выберем такое $n_0$, что при всех $n > n_0$ будет $\|S_{t_n}\varphi_k - \varphi_k\| < \varepsilon/3$. Поэтому при $n > n_0$ справедлива оценка

$$\|S_{t_n}\varphi - \varphi\| \leq \|S_{t_n}\| \cdot \|\varphi - \varphi_k\| + \|S_{t_n}\varphi_k - \varphi_k\| + \|\varphi_k - \varphi\| < \omega\frac{\varepsilon}{3\omega} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3\omega} \leq \varepsilon,$$

завершающая доказательство.

$\square$

**Теорема 2.4.2.** (*о свойствах оператора* $L$) Предположим, что для каждого $x \in H$ справедливы неравенства $g(x) \geq g_o \equiv \text{const} > 0$ и $C(x) \leq 0$. Поскольку $C \in F$, то существует последовательность $(C_j) \subset D$, сходящаяся к $C$ равномерно; потребуем дополнительно, что эта последовательность может быть выбрана так, что $C_j(x) \leq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$. Оператор $L\colon D \to F$ определим равенством

$$(L\varphi)(x) = g(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + \langle \varphi'(x), AB(x)\rangle + C(x)\varphi(x).$$

Символом $I$ обозначим тождественный оператор.

Тогда:

1. Если $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$ и $\varphi \in D$, то $L\varphi \in D$. Если $g \in F$, $C \in F$, $B \in F_H$ и $\varphi \in D$, то $L\varphi \in F$.

2. Если $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$, то для каждого $\lambda > 0$ оператор $\lambda I - L$ сюрьективен на $D$, и, следовательно, линейное пространство $(\lambda I - L)(D) = D$ плотно в $F$.

3. Если $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$, то оператор $(L, D)$ диссипативен и допускает замыкание.

4. Если $g \in F$, $C \in F$, $B = 0$, то для каждого $\lambda > 0$ линейное пространство $(\lambda I - L)(D)$ плотно в $F$.

5. Если $g \in F$, $C \in F$, $B \in F_H$, то оператор $(L, D)$ диссипативен и имеет замыкание $(\overline{L}, D_1)$, которое также является диссипативным оператором.

**Доказательство.**

1. i) Первая часть утверждения следует из того, что результат применения дифференциального оператора с гладкими цилиндрическими коэффициентами к гладкой цилиндрической функции это гладкая цилиндрическая функция. Как следует из цепного правила, все производные ограничены.

ii) Пусть коэффициенты оператора $L$ — это равномерные пределы $g, B, C$ цилиндрических функций $g_j, B_j, C_j$. Обозначим символом $L_j$ оператор $L$, построенный по функциям $g_j, B_j, C_j$. При $j \to \infty$ последовательность $L_j\varphi$ сходится равномерно к $L\varphi$, поэтому $L\varphi \in F$, так как $L_j\varphi \in D$ согласно i).

2. Пусть $g \in D$, $B \in D_H$, $C \in D$. Напомним, что эти три функции цилиндрические, поэтому они тесно связаны с функциями на $\mathbb{R}^n$; это и есть центральная идея доказательства.

Фиксируем $\lambda > 0$, возьмём произвольную функцию $\varphi \in D$ и покажем, что существует функция $f \in D$, удовлетворяющая уравнению

$$\lambda f(x) - g(x)\mathrm{tr}Af''(x) - \langle f'(x), AB(x)\rangle - C(x)f(x) = \varphi(x). \tag{2.34}$$

Пусть векторы $e_1, \ldots, e_n$ таковы, что для каждого $x \in H$ имеют место равенства

$$C(x) = C^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle), B(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)e_k, \tag{2.35}$$

$$\varphi(x) = \varphi^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle) \text{ and } g(x) = g^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle), \tag{2.36}$$

где функции $\varphi^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $C^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $B_k^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывны, дифференцируемы и ограничены вместе со своими производными всех порядков. Попробуем поискать решение уравнения (2.34) в виде

$$f(x) = f^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle), \tag{2.37}$$

где функция $f^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна, дифференцируема и ограничена вместе со своими производными всех порядков.

Согласно пункту 1 предложения 2.3.1

$$f'(x) = \sum_{s=1}^{n} \partial_s f^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)e_s.$$

Используя (2.35), получаем

$$\langle f'(x), AB(x)\rangle = \left\langle \sum_{s=1}^{n} \partial_s f^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)e_s, A\sum_{k=1}^{n} B_k^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)e_k \right\rangle =$$

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} B_k^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)\langle Ae_s, e_k\rangle\right)\partial_s f^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle). \tag{2.38}$$

На основе (2.9), (2.36), (2.35), (2.37) и (2.38) приходим к тому, что уравнение (2.34) относительно неизвестной функции $f$ вида (2.37) эквивалентно следующему уравнению относительно неизвестной функции $f^n$:

$$\begin{aligned} g^n(x_1,\ldots,x_n)\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle Ae_s,e_k\rangle\partial_k\partial_s f^n(x_1,\ldots,x_n) \\ +\left(\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}B_k^n(x_1,\ldots,x_n)\,\langle Ae_s,e_k\rangle\right)\partial_s f^n(x_1,\ldots,x_n)\right) \\ +C^n(x_1,\ldots,x_n)f^n(x_1,\ldots,x_n)-\lambda f^n(x_1,\ldots,x_n)=-\varphi^n(x_1,\ldots,x_n), \end{aligned} \tag{2.39}$$

где обозначено $x_j=\langle x,e_j\rangle$.

Уравнение (2.39) представляет собой конечномерное дифференциальное уравнение с частными производными. Заметим, что $g_n(x_1,\ldots,x_n)\geq g_0\equiv\mathrm{const}>0$. Квадратичная форма, заданная $n\times n$-матрицей $(\langle Ae_s,e_k\rangle)$ положительно определена, поскольку оператор $A$ положительный и невырожденный. Поэтому дифференциальный оператор в уравнении (2.39) эллиптический, и (2.39) имеет вид (2.12), то есть

$$L^n f^n(x_1,\ldots,x_n)-\lambda f^n(x_1,\ldots,x_n)=-\varphi(x_1,\ldots,x_n).$$

Функция $\varphi^n$, а также функции $g^n$, $C^n$ и $B_k^n$, использованные для построения коэффициентов оператора $L^n$, ограничены вместе со всеми своими производными. (Напомним, что $L^n$ это не $n$-я степень оператора $L$.) Следовательно, мы можем применить пункт 1 леммы 2.3.5 к уравнению (2.39), получая, что (2.39) имеет решение $f^n$, непрерывное и ограниченное, как и все его производные. Функция $f$, определённая равенством (2.37) принадлежит $D$ по пункту 2 предложения 2.3.1.

Значит, для каждого $\lambda>0$ оператор $\lambda I-L$ сюрьективен на $D$, потому что прообраз функции $\varphi\in D$ содержит, по крайней мере, функцию $f(x)=f^n(\langle x,e_1\rangle,\ldots,\langle x,e_n\rangle)$, где функция $f^n\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является решением (существование мы только что доказали) уравнения (2.39).

3. Пусть снова $g \in D, C \in D, B \in D_H$. Докажем, что оператор $L$ диссипативен. Пусть функция $f \in D$ и число $\lambda > 0$ фиксированы.

Как и в доказательстве пункта 2 настоящей теоремы, мы будем пользоваться тем, что значение функции $Lf$ в точке $x \in H$ равно значению функции $L^n f^n$ в точке $(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle) \in \mathbb{R}^n$. Снова оператор $A$ положителен и невырожден, а функция $g$ удовлетворяет неравенству $g(x) \geq g_0 \equiv \mathrm{const} > 0$, поэтому мы можем применить пункт 2 леммы 2.3.5 к конечномерному оператору. Так мы убеждаемся, что конечномерный оператор диссипативен, а вместе с ним диссипативен и оператор $L$. Эту идею можно выразить более формально следующим образом:

$$\|Lf - \lambda f\| = \sup_{x \in H} |g(x)\mathrm{tr}(Af''(x)) + \langle f'(x), AB(x)\rangle + C(x)f(x) - \lambda f(x)| =$$

$$\sup_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \Bigg| g^n(x_1,\dots,x_n) \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle Ae_s, e_k\rangle \partial_k\partial_s f^n(x_1,\dots,x_n) +$$

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} B_k^n(x_1,\dots,x_n)\,\langle Ae_s, e_k\rangle\right)\partial_s f^n(x_1,\dots,x_n) +$$

$$C^n(x_1,\dots,x_n) f^n(x_1,\dots,x_n) - \lambda f_n(x_1,\dots,x_n)\Bigg| \overset{(2.13)}{\geq}$$

$$\lambda \sup_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n} |f^n(x_1,\dots,x_n)| = \lambda \sup_{x\in H}|f(x)| = \lambda\|f\|,$$

где $x_j = \langle x, e_j\rangle$. Неравенство

$$\|Lf - \lambda f\| \geq \lambda\|f\| \tag{2.40}$$

означает, что оператор $L$ диссипативен.

Наконец, в соответствии с предложением 1.1.2, замыкаемость оператора $L$ следует из того, что $L$ диссипативен и имеет плотную область определения.

4. i) Пусть $g \in F$ и $C \in F$, т.е. существуют такие последовательности $(g_j) \subset D$ и $(C_j) \subset D$, что $\|g - g_j\| \to 0$ и $\|C - C_j\| \to 0$. Пусть $B(x) = 0$ при всех $x \in H$. Образы операторов $(\lambda I - L)$ и $(L - \lambda I)$ совпадают. Так как $D$ плотно в

$F$, то достаточно показать, что образ оператора $(L - \lambda I)$ плотен в $D$, тогда он будет плотен и в $F$. Пусть число $\lambda > 0$ и функция $\psi \in D$ фиксированы. Будем аппроксимировать $f$ значениями оператора $(L - \lambda I)$.

Так как $g_j \to g$ и, для каждого $x \in H$, справедлива оценка $g(x) \geq g_0$, то существует такой номер $j'_0$, что при всех $x \in H$ и всех $j > j'_0$ верно

$$g_j(x) \geq \frac{g_0}{2}. \tag{2.41}$$

Обозначим символом $L_j$ оператор $L$, построенный по функциям $g_j$ и $C_j$. Заметим, что $C_j(x) \leq 0$ и $g_j(x) \geq \frac{g_0}{2}$, поэтому мы можем применить пункт 2 настоящей теоремы к оператору $L_j$. Согласно пункту 2, образ оператора $(L_j - \lambda I)$ равен $D$, то есть для каждого $j > j'_0$ существует такая функция $f_j \in D$, что

$$L_j f_j - \lambda f_j = \psi. \tag{2.42}$$

Цель дальнейших рассуждений — показать, что $Lf_j - \lambda f_j \to \psi$ при $j \to \infty$. Из этого будет следовать, что образ оператора $(\lambda I - L)$ плотен в $D$.

ii) Подготовим несколько оценок. Во-первых, поскольку $C_j \to C$, существует такой номер $j_0$, что при всех $j > j_0$ верно

$$\|C_j\| \leq 2\|C\|. \tag{2.43}$$

Во-вторых, из (2.42) и (2.40) вытекает, что при всех $j > j'_0$ верно

$$\lambda \|f_j\| \overset{(2.40)}{\leq} \|L_j f_j - \lambda f_j\| \overset{(2.42)}{=} \|\psi\|,$$

т.е. при всех $j > j'_0$

$$\|f_j\| \leq \frac{\|\psi\|}{\lambda}. \tag{2.44}$$

Наконец, выражая член $\mathrm{tr}(Af''_j)$ из равенства

$$\psi = L_j f_j - \lambda f_j = g_j \mathrm{tr}(Af''_j) + (C_j - \lambda) f_j,$$

приходим к тому, что при всех $j > \max(j_0, j'_0)$ имеет место

$$\|\mathrm{tr}(Af''_j\| = \left\| \frac{\psi + (\lambda - C_j) f_j}{g_j} \right\| \overset{(2.44),(2.43),(2.41)}{\leq} \frac{\|\psi\| + (\lambda + 2\|C\|)\|\psi\|/\lambda}{g_0/2}. \tag{2.45}$$

iii) Теперь докажем, что из $j \to \infty$ вытекает $Lf_j - \lambda f_j \to \psi$. В самом деле, при всех $j > \max(j_0, j_0')$ справедливо

$$\|Lf_j - \lambda f_j - \psi\| \overset{(2.42)}{=} \|Lf_j - \lambda f_j - (L_j f_j - \lambda f_j)\| = \|(g - g_j)\mathrm{tr}(Af_j'') + (C - C_j) f_j\|$$

$$\overset{(2.45),(2.44)}{\leq} \|(g - g_j)\| \frac{\|\psi\| + (\lambda + 2\|C\|)\|\psi\|/\lambda}{g_0/2} + \|(C - C_j)\| \frac{\|\psi\|}{\lambda} \to 0,$$

поскольку $\|(g - g_j)\| \to 0$ и $\|(C - C_j)\| \to 0$. Пункт 4 доказан.

5. Пусть коэффициенты оператора $L$ это функции $g, B, C$, являющиеся равномерными пределами гладкий ограниченных цилиндрических функций $g_j, B_j, C_j$. Так как $g_j \to g$, и при всех $x \in H$ верно $g(x) \geq g_0$, то существует такой номер $j_0$, что при всех $x \in H$ и всех $j > j_0$ справедливо неравенство $g_j(x) \geq \frac{g_0}{2}$. Также припомним, что $C_j(x) \leq 0$. Всё это позволяет использовать пункт 3 настоящей теоремы.

Согласно (2.40), для каждой функции $\varphi \in D$ и каждого $\lambda > 0$ верно

$$\|g_j \mathrm{tr}(A\varphi'') + \langle \varphi', AB_j \rangle + C_j \varphi - \lambda\varphi\| \geq \lambda \|\varphi\|.$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$, получаем оценку $\|L\varphi - \lambda\varphi\| \geq \lambda\|\varphi\|$, которая и означает, что оператор $L$ диссипативен. Согласно предложению 1.1.2, диссипативный оператор $(L, D)$ с областью определения $D$, плотной в $F$, обладает замыканием. Обозначим это замыкание символом $(\overline{L}, D_1)$. Заметим, что по предложению 1.1.2 оператор $(\overline{L}, D_1)$ также диссипативен.

□

Из последних двух теорем вытекает следующий результат:

**Теорема 2.4.3.** (о связи между семейством $(S_t)_{t \geq 0}$ и полугруппой с генератором $\overline{L}$)

Пусть $g \in F$, $B \in F_H$, $C \in F$, и для каждого $x \in H$ выполнено $g(x) \geq g_0 \equiv \mathrm{const} > 0$ и $C(x) \leq 0$. Так как $C \in F$, то существует последовательность $(C_j) \subset D$, сходящаяся к $C$ равномерно; потребуем дополнительно, что её можно выбрать так, что $C_j(x) \leq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$. Тогда справедливо следующее:

1. Если замыкание $(\overline{L}, D_1)$ оператора $(L, D)$ является генератором $C_0$-полугруппы $\left(e^{t\overline{L}}\right)_{t\geq 0}$ в $F$, то

$$e^{t\overline{L}}\varphi = \lim_{n\to\infty} \left(S_{\frac{t}{n}}\right)^n \varphi, \tag{2.46}$$

где предел существует для каждой $\varphi \in F$ равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

2. Если $B = 0$, то оператор $(\overline{L}, D_1)$ в самом деле является генератором $C_0$-полугруппы $\left(e^{t\overline{L}}\right)_{t\geq 0}$ в $F$. Более того, для каждого $t \geq 0$ справедливо неравенство $\left\|e^{\overline{L}t}\right\| \leq 1$, т.е. полугруппа $\left(e^{\overline{L}t}\right)_{t\geq 0}$ сжимающая.

3. Пусть $B = 0$, и для каждого $j \in \mathbb{N}$ даны функции $g_j \in F$, $B_j \in F_H$, $C_j \in F$, причём $B_j = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, и каждая из функций $C_j$ является равномерным пределом неотрицательных функций, лежащих в $D$. Пусть существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$ верно $g_j(x) \geq \varepsilon_0$ и $C_j(x) \leq 0$. Символом $L_j$ обозначим оператор $L$, построенный по функциям $g_j$, $B_j$ и $C_j$; оператор $L$, построенный по функциям $g$, $B$ и $C$ обозначим символом $L_0$. Пусть также имеют место равномерные по $x \in H$ сходимости $g_j(x) \to g(x)$ и $C_j(x) \to C(x)$.

Тогда (существующие по пункту 2) $C_0$-полугруппы $\left(e^{\overline{L_j}t}\right)_{t\geq 0}$ сходятся сильно (и равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$) к (существующей по пункту 2) $C_0$-полугруппе $\left(e^{\overline{L_0}t}\right)_{t\geq 0}$ с генератором $\overline{L_0}$. Иными словами, для каждого $t_0 > 0$ и каждой $\varphi \in F$ существует предел

$$\lim_{j\to\infty} \left(e^{\overline{L_j}t}\varphi\right)(x) = \left(e^{\overline{L_0}t}\varphi\right)(x), \tag{2.47}$$

равномерный по $x \in H$ и $t \in [0, t_0]$.

**Доказательство.**

1. В теореме 1.4.1 положим $G(t) = S_t$, $\omega = \frac{2\|A\|\|B\|^2}{g_0} + \|C\|$, $\mathcal{F} = F$, $\mathcal{D} = D$, $G'(0) = L$, $C = \overline{L}$. Из пунктов 1, 4 и 5 теоремы 2.4.1 и пункта 5 теоремы 2.4.2 следует, что все условия теоремы 1.4.1 выполнены.

2. Заметим, что $C(x) \leq 0$, поэтому $\sup_{x\in H} e^{C(x)} \leq 1$, и для $B = 0$ верно $\|S_t\| \leq 1$. Условия теоремы 1.4.2 будут выполнены, если положить $\mathcal{F} = F$, $\mathcal{D} =$

$D$, $\mathcal{L} = L$, $V_t = S_t$, $M = 1$, $\omega = 0$. В самом деле, по пункту 1 теоремы 2.4.1 для всех $t \geq 0$ справедлива оценка $\|S_t\| \leq e^{\omega t} = 1$, поэтому $\| \left(S_t\right)^k \| \leq 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 1$. Остальные условия теоремы 1.4.2 вытекают из пункта 4 теоремы 2.4.1 и пунктов 4 и 5 теоремы 2.4.2. Заметим, что, так как диссипативность оператора $\overline{L}$ уже доказана, то можно было бы вместо теоремы 1.4.2 применить теорему 1.1.1.

3. В теореме 1.3.1 положим $\mathcal{F} = F$, $\mathcal{D} = D$, $\mathcal{L} = L_0$, $\mathcal{L}_n = L_j$. Видно, что пункт 2 настоящей теоремы и пункты 4 и 5 теоремы 2.4.2 влекут за собой все условия теоремы 1.3.1, кроме одного следующего: если $\varphi \in D$, то $\lim\limits_{j\to\infty} L_j\varphi = L_0\varphi$. Однако, простая непосредственная проверка показывает, что и оно верно.

$\square$

### 2.4.2 Решение задачи Коши для параболического уравнения представляется в виде формулы Фейнмана

Ставится задача о нахождении функции $u\colon [0, +\infty) \times H \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей следующим условиям (будем называть их задачей Коши для параболического дифференциального уравнения с частными производными):

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = Lu(x,t); & t \geq 0, x \in H, \\ u(0,x) = u_0(x); & x \in H. \end{cases} \tag{2.48}$$

Этой задаче Коши сопоставим следующую так называемую абстрактную задачу Коши (см. определение 1.2.1), которая состоит из следующих условий на функцию $U\colon [0, +\infty) \to F$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \overline{L}U(t); \;\; t \geq 0, \\ U(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.49}$$

**Замечание 2.4.1.** Задача (2.48) может быть рассмотрена как задача (2.49) в следующем смысле. Функцию $u\colon (t,x) \longmapsto u(t,x)$ двух переменных $t$ и $x$ можно рассматривать как функцию $u\colon t \longmapsto [x \longmapsto u(t,x)]$ одного переменного $t$, принимающую значения в множестве функций переменного $x$. Тогда

$$u(t,x) = (U(t))(x), \quad t \geq 0, x \in H.$$

Используя это соответствие, определим решение задачи (2.48), отправляясь от определения 1.2.1.

**Определение 2.4.1.** Будем называть функцию $u\colon [0,+\infty)\times H\to\mathbb{R}$ *сильным решением (strong solution)* задачи (2.48), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} u(t,\cdot)\in D_1; & t\geq 0,\\ \text{функция } t\longmapsto u(t,\cdot) \text{ непрерывна;} & t\geq 0,\\ \text{Равномерно по } x\in H\ \exists \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{u(t+\varepsilon,x)-u(t,x)}{\varepsilon}=u'_t(t,x); & t\geq 0,\\ u'_t(t,\cdot)\in F; & t\geq 0,\\ \text{Функция } t\longmapsto u'_t(t,\cdot) \text{ непрерывна;} & t\geq 0,\\ u'_t(t,x)=Lu(x,t); & t\geq 0, x\in H,\\ u(0,x)=u_0(x); & x\in H. \end{cases} \tag{2.50}$$

**Определение 2.4.2.** Будем называть функцию $u\colon [0,+\infty)\times H\to\mathbb{R}$ *mild-решением* задачи (2.48) если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} u(t,\cdot)\in F; & t\geq 0,\\ \text{Function } t\longmapsto u(t,\cdot) \text{ is continuous;} & t\geq 0,\\ \int_0^t u(s,\cdot)ds\in D_1; & t\geq 0,\\ u(t,x)=L\int_0^t u(s,x)ds+u_0(x); & t\geq 0, x\in H,\\ u_0\in F. \end{cases} \tag{2.51}$$

**Определение 2.4.3.** Будем использовать символ $C([0,+\infty),F)$ для обозначения класса всех тех функций $u\colon [0,+\infty)\times H\to\mathbb{R}$, что для каждого $t\geq 0$ функция $x\longmapsto u(t,x)$ принадлежит классу $F$, а отображение $t\longmapsto u(t,\cdot)\in F$ непрерывно для каждого $t\geq 0$.

Наконец, сформулируем и докажем основной резельтат настоящей главы. Мы следуем обозначениям и определениям раздела 2.2.

**Теорема 2.4.4.** (о решении задачи Коши для параболического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве)

Пусть $g \in F, C \in F, B \in F_H$. Пусть существует такое число $g_0 > 0$, что для всех $x \in H$ выполнено $g(x) \geq g_0$ и $C(x) \leq 0$. Поскольку $C \in F$, существует последовательность $(C_j) \subset D$, сходящаяся к $C$ равномерно; потребуем дополнительно, что она может быть выбрана так, что $C_j(x) \leq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$.

Тогда справедливо следующее:

1. Если существует $C_0$-полугруппа с генератором $\overline{L}$, то для каждой функции $u_0 \in D_1$ существует решение $u$ задачи (2.50), единственное в классе $C([0,+\infty), F)$. Это решение непрерывно зависит от $u_0$ и задаётся формулой

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \left( \left( S_{\frac{t}{n}} \right)^n u_0 \right)(x),$$

где предел существует равномерно по $x \in H$ и равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

2. Если существует $C_0$-полугруппа с генератором $\overline{L}$, то для каждой функции $u_0 \in F$ существует решение $u$ задачи (2.51), единственное в классе $C([0,+\infty), F)$. Это решение непрерывно зависит от $u_0$ и задаётся формулой

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \left( \left( S_{\frac{t}{n}} \right)^n u_0 \right)(x),$$

где предел существует равномерно по $x \in H$ и равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

3. Если $B = 0$, то $C_0$-полугруппа с генератором $\overline{L}$ существует. Формула $u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \left( \left( S_{\frac{t}{n}} \right)^n u_0 \right)(x)$ в случае $B = 0$ приобретает следующий вид:

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_H \int_H \dots \int_H \int_H}_{n} e^{\frac{t}{n}\left(C(x) + \sum_{k=1}^{n-1} C(y_k)\right)} u_0(y_1) \mu^{y_2}_{\frac{2t}{n} g(y_2) A}(dy_1) \mu^{y_3}_{\frac{2t}{n} g(y_3) A}(dy_2) \dots$$

$$\dots \mu^{y_n}_{\frac{2t}{n} g(y_n) A}(dy_{n-1}) \mu^{x}_{\frac{2t}{n} g(x) A}(dy_n). \quad (2.52)$$

В этом случае функция $u$ при всех $t > 0$ удовлетворяет оценке $\sup_{x\in H} |u(t,x)| \leq \sup_{x\in H} |u_0(x)|$.

4. Пусть $B = 0$, а $g_j \in F$, $B_j \in F_H$ и $C_j \in F$ заданы для всех $j \in \mathbb{N}$. Пусть $B_j = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Пусть существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что $g_j(x) \geq \varepsilon_0$ и $C_j(x) \leq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in H$, причём каждая из функций $C_j$ является равномерным пределом неотрицательных функций, лежащих в $D$. Используем символ $L_j$ для обозначения оператора $L$, построенного по функциям $g_j$, $B_j$ и $C_j$. Символ $L_0$ используем для обозначения оператора $L$, построенного по функциям $g$, $B$ и $C$.

Предположим, что имеют место равномерные по $x \in H$ сходимости $g_j(x) \to g(x)$ и $C_j(x) \to C(x)$. Обозначим символом $u_j$ решение задач (2.50) и (2.51) для оператора $L_j$. Для решений задач (2.50) и (2.51) с оператором $L_0$ используем символ $u$.

Тогда $u_j(t,x)$ сходится к $u(t,x)$ при $j \to \infty$ равномерно по $x \in H$ и равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

**Замечание 2.4.2.** Подчеркнём, что в случае $B = 0$ решение непрерывно зависит от всех данных задачи Коши: от коэффициентов уравнения (пункт 4) и начального условия (пункты 1 и 2).

**Замечание 2.4.3.** Аналогичные теоремы для $\mathbb{C}$- и $\mathbb{R}^n$-значных функций $u$ формулируются mutatis mutandis и будут верны в силу только что сформулированной теоремы 2.4.4 и линейности $L$ и $S_t$. Единственным дополнительным условием будет то, что коэффициенты уравнения должны остаться вещественнозначными.

**Замечание 2.4.4.** Замечание 2.4.3 применимо ко всем ключевым теоремам настоящей главы.

**Доказательство теоремы 2.4.4.**

1. Пусть существует $C_0$-полугруппа с генератором $\overline{L}$. Тогда по пункту 1 предложения 1.2.2 получаем существование сильного решения (определение 1.2.1) абстрактной задачи Коши (2.49), единственное в классе $C([0, +\infty), F)$. По пункту 1 теоремы 2.4.3 полугруппа может быть представлена в том виде, который

утверждает настоящая теорема. Используя описанное в замечании 2.4.1 соответствие между задачами (2.48) и (2.49), получаем решение задачи (2.50). Решение единственно в классе $C([0,+\infty),F)$, как следует из замечания 2.4.1.

2. Доказательство аналогично доказательству пункта 1. Единственное отличие состоит в том, что в теореме 1.2.2 нужно ссылаться на пункт 2, а не на пункт 1.

3. Существование рассматриваемой полугруппы следует из пункта 2 теоремы 2.4.3. Оценка на супремум модуля решения следует из того, что полугруппа сжимающая; кроме того, она легко получается и сразу из доказанной интегральной формулы для решения, поскольку интегрирование производится по вероятностной мере.

Поясним, как из равенства $u(t,x)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(S_{\frac{t}{n}}\right)^n u_0\right)(x)$ возникает формула (2.52). Для непрерывной ограниченной функции $\psi\colon H\to\mathbb{R}$ и точки $x\in H$ справедливо следующее правило замены переменной интегрирования:

$$\int_H \psi(y)\mu_A(dy)=\int_H \psi(y-x)\mu_A^x(dy).$$

Следуя ему и заменяя $A$ на $2tg(x)A$, приходим к равенству

$$(S_t\varphi)(x)=e^{tC(x)}\int_H \varphi(x+y)\mu_{2tg(x)A}(dy)$$

$$=e^{tC(x)}\int_H \varphi(x+(y-x))\mu^x_{2tg(x)A}(dy)=e^{tC(x)}\int_H \varphi(y)\mu^x_{2tg(x)A}(dy).$$

Для $n=2$ в формуле (2.52) под знаком предела получаем выражение

$$\left(\left(S_{\frac{t}{2}}\right)^2\varphi\right)(x)=\left(S_{\frac{t}{2}}\left(S_{\frac{t}{2}}\varphi\right)\right)(x)$$

$$=\int_H\left(\int_H e^{\frac{t}{2}(C(x)+C(y_1))}\varphi(y_1)\mu^{y_2}_{\frac{2t}{2}g(y_2)A}(dy_1)\right)\mu^x_{\frac{2t}{2}g(x)A}(dy_2).$$

По той же схеме получаются и выражения в случае $n>2$. Таким образом, формула (2.52) доказана.

4. Желаемое прямо следует из пункта 3 теоремы 2.4.3.

$\square$

# Глава 3

# Построение решения одномерного уравнения теплопроводности при помощи оператора сдвига

Предлагается метод решения задачи Коши для линейного параболического уравнения эволюционного типа с частными производными и переменными коэффициентами. Метод применяется к уравнению второго порядка (уравнению теплопроводности) с одномерной пространственной координатой и состоит в применении черновской аппроксимационной процедуры к специально построенному семейству операторов сдвига. Доказана равномерная сходимость аппроксимаций к точному решению. Выражение для решения истолковано как формула Фейнмана с сингулярным интегральным ядром.

## 3.1 Постановка задачи и предлагаемый подход

Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$ и поставим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = (a(x))^2 u''_{xx}(t,x) + b(x)u'_x(t,x) + c(x)u(t,x) = Hu(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

Коэффициенты $a$, $b$, $c$, $u_0$ выше это ограниченные, равномерно непрерывные функции $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. Глава посвящена выводу явной формулы, выражающей решение задачи (3.1) через $a$, $b$, $c$, $u_0$ в предположении того, что оператор $H$ является генератором $C_0$-полугруппы $\left(e^{tH}\right)_{t\geq 0}$. Это предположение стандартно при изучении эволюционных уравнений, к которым относится уравнение теплопроводности. В соответствии с общей теорией $C_0$-полугрупп [24] это предположение влечёт за собой, что решение задачи Коши (3.1) существует, ограниченно и равномерно непрерывно по $x$ при каждом $t$, непрерывно зависит от $u_0$ и может быть представлено в виде $u(t,x) = \left(e^{tH}u_0\right)(x)$. Мы применим теорему Чернова [31] к специально построенному для этой задачи семейству операторов $(S(t))_{t\geq 0}$ и выразим $e^{tH}$ через $a$, $b$, $c$, достигая тем самым поставленную цель. Мы не обсуждаем задачу поиска класса функций, в котором решение единственно при некоторых предположениях о функциях $a$, $b$, $c$, $u_0$, но имеем в виду, что для уравнение теплопроводности известны неограниченные решения.

Формула, дающая решение, приводится в теореме 3.3.2, см. также трактовку в терминах обобщённых функций в замечаниях 3.4.2 и 3.4.3.

## 3.2 Используемая техника

Теорема Чернова (см. главу 1 диссертации или [24, 31]) позволяет свести проблему нахождения $e^{tH}$ к проблеме нахождения подходящей операторнозначной функции $S$, называемой функцией Чернова, и затем использовать формулу Чернова $e^{tH} = \lim_{n\to\infty} S(t/n)^n$. Одно из преимуществ этого шага в том, что часто удаётся задать $S(t)$ явной формулой, зависящей от коэффициентов оператора $H$. Члены группы О.Г. Смолянова применяли эту технику, используя в качестве функций Чернова интегральные операторы, и нашли решения для параболических уравнений во многих ситуациях за последние 15 лет, см. пионерские работы [11, 33], обзор [13], введение в [55] и два неожиданных примера [43, 44]. Полученные авторами решения были представлены в виде формул Фейнмана, т.е. в виде предела кратного интеграла при стремлении кратности к бесконечности.

Отличительная черта результатов настоящей главы состоит в том, что при построении функции Чернова $S$ вместо интегральных операторов мы используем операторы сдвига. Поэтому решение задачи Коши (3.1) представляется в виде выражения нового типа, не содержащего интегралы. Наш модельный пример (3.1) может быть модифицирован в различных направлениях. Он выбран достаточно простым (свободным от каких-либо специфических деталей или сложных особенностей) специально, чтобы позволить читателю сфокусироваться на основном содержании главы, т.е. на предлагаемом методе.

## 3.3 Основной результат

**Замечание 3.3.1.** Главным результатом третьей главы является формула (3.4), доказанная в теореме 3.3.2. Она содержит $\lim_{n\to\infty}$. После того, как предел вычислен, мы получаем решение задачи Коши (3.1). Для каждого фиксированного $n$ выражение под знаком предела представляет собой приближение к решению, аппроксимацию. С ростом $n$ эти приближения сходятся к точному решению равномерно по $x \in \mathbb{R}^1$ и по $t \in [0, t_0]$ для каждого фиксированного $t_0 > 0$.

**Замечание 3.3.2.** Обозначим множество всех (определённых на вещественной прямой и принимающих вещественные значения) ограниченных непрерывных функций символом $C_b(\mathbb{R})$. Множество тех из них, что равномерно непрерывны, обозначим символом $UC_b(\mathbb{R})$, а тех, что имеют ограниченных производные всех порядков, символом $C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Тогда $C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset UC_b(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$, и по отношению к равномерной (чебышёвской) норме $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ первое вложение плотно, а два последних пространства банаховы.

**Теорема 3.3.1.** Для каждых $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $f \in C_b(\mathbb{R})$ и $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ положим

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{4} f\left(x + 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{4} f\left(x - 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{2} f(x + 2b(x)t) + tc(x)f(x), \tag{3.2}$$

$$(H\varphi)(x) = (a(x))^2 \varphi''(x) + b(x)\varphi'(x) + c(x)\varphi(x). \tag{3.3}$$

Тогда по норме $\|g\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$ имеет место следующее:

I) для каждого $t \geq 0$ и каждого $f \in C_b(\mathbb{R})$ верно $\|S(t)f\| \leq \big(1 + \|c\|t\big)\|f\|$.

II) для каждого $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ верно $\lim_{t\to+0} \|S(t)f - f - tHf\|/t = 0$.

III) если $t_n \to t_0$, $t_n \geq 0$ и $f \in UC_b(\mathbb{R})$, то $\lim\limits_{t\to t_0} \|S(t_n)f - S(t_0)f\| = 0$ для всех $t_0 \geq 0$.

IV) если $a, b, c, f \in UC_b(\mathbb{R})$ то $S(t)f \in UC_b(\mathbb{R})$ для всех $t \geq 0$.

**Доказательство.** Будем для краткости писать sup вместо $\sup_{x\in\mathbb{R}}$.

I) $\|S(t)f\| = \sup|\frac{1}{4}f(x + 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{4}f(x + 2a(x)\sqrt{t}) + \frac{1}{2}f(x + 2b(x)t) + tc(x)f(x)| \leq \frac{1}{4}\sup|f(x+2a(x)\sqrt{t})| + \frac{1}{4}\sup|f(x+2a(x)\sqrt{t})| + \frac{1}{2}\sup|f(x+2b(x)t)| + t\sup|c(x)|\sup|f(x)| \leq \frac{1}{4}\|f\| + \frac{1}{4}\|f\| + \frac{1}{2}\|f\| + t\sup|c(x)|\|f\| = \big(1 + \|c\|t\big)\|f\|$.

II) Фиксируем произвольный $x \in \mathbb{R}$ в (3.2). По формуле Тейлора разложим первые два слагаемых в (3.2) по степеням $\sqrt{t}$, а третье слагаемое по степеням $t$; остаточные слены представим в форме Лагранжа:

$\varphi(x+2a(x)\sqrt{t}) = \varphi(x)+2a(x)\sqrt{t}\varphi'(x)+\frac{1}{2}\varphi''(x)(2a(x)\sqrt{t})^2+\frac{1}{6}\varphi'''(\xi_1)(2a(x)\sqrt{t})^3$,
$\varphi(x - 2a(x)\sqrt{t}) = \varphi(x) - 2a(x)\sqrt{t}\varphi'(x) + \frac{1}{2}\varphi''(x)(2a(x)\sqrt{t})^2 - \frac{1}{6}\varphi'''(\xi_2)(2a(x)\sqrt{t})^3$,
$\varphi(x + 2b(x)t) = \varphi(x) + 2b(x)t\varphi'(x) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi_3)(2b(x)t)^2$.

Используя это и (3.2) запишем выражение для $(S(t)f)(x)$ и затем преобразуем его с помощью (3.3). Далее оценим $\sup|(S(t)f)(x) - f(x) - tHf(x)|$, принимая во внимание, что функции $a, b$ ограниченны, и также ограниченны производные функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. Этим путём приходим к

$(S(t)\varphi)(x) = \varphi(x) + t\big[(a(x))^2\varphi''(x) + b(x)\varphi'(x) + c(x)\varphi(x)\big] + o(t)$.

III) Функция $a$ ограниченна, поэтому $x + 2a(x)\sqrt{t_n} \to x + 2a(x)\sqrt{t_0}$ равномерно по $x$. Функция $f$ равномерно непрерывна, поэтому $f(x + 2a(x)\sqrt{t_n}) \to f(x + 2a(x)\sqrt{t_0})$ равномерно по $x$.

IV) Если $t \geq 0$ фиксировано, то $\big[z \longmapsto f(z + 2a(z)\sqrt{t})\big] \in UC_b(\mathbb{R})$ поскольку $a, f \in UC_b(\mathbb{R})$.

**Замечание 3.3.3.** Проведённое выше доказательство останется верным и для функций $N \to \mathbb{R}$ на произвольном банаховом пространстве $N$ конечной или бесконечной размерности. Надо лишь заменить $C_b^\infty(\mathbb{R})$, $UC_b(\mathbb{R})$, $C_b(\mathbb{R})$ на $C_b^\infty(N, \mathbb{R})$,

$UC_b(N,\mathbb{R})$, $C_b(N,\mathbb{R})$ и понимать производные в смысле Фреше.

**Теорема 3.3.2.** Пусть функции $a$, $b$, $c$ лежат в пространстве $UC_b(\mathbb{R})$, наделённом нормой $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Предположим, что оператор $H$ задан равенством (3.3) на своей области определения $C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset UC_b(\mathbb{R})$, и замыкание этого оператора: а) существует, б) является генератором $C_0$-полугруппы $(e^{tH})_{t\geq 0}$ в $UC_b(\mathbb{R})$.

Тогда для каждого $u_0 \in UC_b(\mathbb{R})$ существует ограниченное (и равномерное непрерывное по $x \in \mathbb{R}$ при каждом $t \geq 0$) решение $u$ задачи Коши (3.1), оно зависит от $u_0$ непрерывно и равномерно по $x \in \mathbb{R}$ для каждого $t \geq 0$. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ и каждого $t \geq 0$ это решение задаётся формулой

$$u(t,x) = \left(e^{tH}u_0\right)(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(S(t/n)\right)^n u_0\right)(x), \tag{3.4}$$

где $S(t/n)$ получается заменой $t$ на $t/n$ в равенстве (3.2), а $n$-я степень означает композицию $n$ экземпляров линейного ограниченного оператора $S(t/n)$. Предел (3.4) при каждом фиксированном $t > 0$ берётся в пространстве $UC_b(\mathbb{R})$ и существует равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$.

**Доказательство.** Проверим выполнение условий теоремы Чернова. В теореме 1.5.1 и определении 1.5.1 положим $\mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R})$, $G(t) = S(t)$, $\mathcal{L} = H$, $\mathcal{D} = C_b^\infty(\mathbb{R})$. Условие $(E)$ предполагается явно в условии доказываемой теоремы 3.3.2, условие $(N)$ имеет место в силу пункта I) теоремы 3.3.1, в самом деле, при $\omega > 0$ и $t \geq 0$ справедливо неравенство $1 + \omega t \leq e^{\omega t}$, см. по этому поводу также замечание 1.5.8. Проверим условия черновского касания: (CT1) следует из пунктов IV) и III) теоремы 3.3.1, (CT2) верно в силу формулы (3.2), (CT3) вытекает из пункта II) теоремы 3.3.1, (CT4) предполагается в условиях 3.3.2.

Поэтому утверждение теоремы 3.3.2 вытекает из утверждения теоремы Чернова и предложения 1.2.2.

**Замечание 3.3.4.** Описанный метод можно использовать для решения уравнений типа (3.1), содержащих не только $\partial/\partial x$ и $\partial^2/\partial x^2$, но также и производные более высокого порядка: $\partial^3/\partial x^3$, $\partial^4/\partial x^4$ и т.д. Для этого нужно в формуле для $S$ брать больше слагаемых и изменить коэффициенты, включив в формулу сдвиги, пропорциональные $t, t^{1/2}, t^{1/3}, t^{1/4}, \dots$

## 3.4 Формулы Фейнмана с обобщенными функциями

**Замечание 3.4.1.** Формулу (3.2) можно переписать в терминах обобщённых функций на основе того, что для $\delta$-функции при каждом $w \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $f(w) = \int_{\mathbb{R}} \delta(y-w)f(y)dy$. Получаем следующее равенство:

$$(S(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{4}\delta\left(y - x - 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(y - x + 2a(x)\sqrt{t}\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\delta\big(y - x - 2b(x)t\big) + tc(x)\delta(y-x)\right] f(y)dy. \quad (3.5)$$

**Замечание 3.4.2.** Используя равенство (3.5), перепишем (3.4) в терминах обобщённых функций. Для удобства записи в формуле ниже обозначено $y_0 = x$.

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} (S(t/n)^n f)(x) = \\ \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}}}_{n} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{4}\delta\left(y_k - y_{k-1} - 2a(y_{k-1})\sqrt{\frac{t}{n}}\right) \right.\right. \\ + \frac{1}{4}\delta\left(y_k - y_{k-1} + 2a(y_{k-1})\sqrt{\frac{t}{n}}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(y_k - y_{k-1} - 2b(y_{k-1})\frac{t}{n}\right) \\ \left.\left. + \frac{t}{n}c(y_{k-1})\delta(y_k - y_{k-1})\right]\right\} f(y_n)dy_n \dots dy_1. \quad (3.6)$$

Правая часть равенства (3.6) является формулой Фейнмана (т.е. пределом кратного интеграла, кратность которого стремится к бесконечности), однако под знаком интеграла стоят не гауссовские экспоненты, а дельта-функции. Это — строго обоснованный математически пример формулы Фейнмана с обобщёнными функциями в качестве интегрального ядра. Тем не менее, остаются вопросы о том, можно ли здесь переходить от повторного интеграла к кратному, а также некоторые другие. Мы понимаем равенство (3.6) так, что левая часть (корректно определённая через сдвиги) является определением для правой (содержащей дельта-функции); каким бы ни был спектр ответов на вопрос о том, как понимать такие кратные интегралы в общем случае, среди них точно должен быть вариант, указываемый нами, потому что наша конструкция является содержательным примером в связи с задачей Коши.

**Замечание 3.4.3.** Можно в интеграле

$$(S(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{4}\delta\left(y - x - 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(y - x + 2a(x)\sqrt{t}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\delta\big(y - x - 2b(x)t\big) + tc(x)\delta(y - x)\right] f(y)dy$$

сделать замену переменной $y = x + z$, тогда получим

$$(S(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{4}\delta\left(z - 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(z + 2a(x)\sqrt{t}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\delta\big(z - 2b(x)t\big) + tc(x)\delta(z)\right] f(x+z)dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \Phi(z, x, t) f(x+z)dz,$$

где обозначено

$$\Phi(z, x, t) = \frac{1}{4}\delta\left(z - 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(z + 2a(x)\sqrt{t}\right) + \frac{1}{2}\delta\big(z - 2b(x)t\big) + tc(x)\delta(z).$$

Тогда получаем обычную для формул Фейнмана конструкцию, запишем её на этот раз в виде повторного интеграла, а не кратного:

$$u(t, x) = \lim_{n\to\infty} (S(t/n)^n f)(x) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \Phi(z_1, x, t/n) \int_{\mathbb{R}} \Phi(z_2, x + z_1, t/n) \int_{\mathbb{R}} \Phi(z_3, x + z_1 + z_2, t/n) \ldots$$
$$\ldots \int_{\mathbb{R}} \Phi(z_n, x + z_1 + \cdots + z_{n-1}, t/n) f(x + z_1 + \cdots + z_n) dz_n \ldots dz_1. \quad (3.7)$$

# Заключение

**Обзор проведенного исследования.** В диссертации рассмотрены задачи теории операторных полугрупп и теории параболических дифференциальных уравнений. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Введено понятие функции, касательной по Чернову к оператору, и найдены методы построения таких функций.

2. Для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами с пространственной координатой из бесконечномерного гильбертовова пространства доказано существование разрешающей полугруппы, найдена дающее решение задачи Коши формула Фейнмана, доказана непрерывная зависимость решения от коэффициентов уравнения.

3. Для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами и одномерной пространственной переменной построены основанные на операторах сдвига черновские аппроксимации решения задачи Коши, доказана равномерная сходимость аппроксимаций к решению. Показано, что решение может быть также записано как формула Фейнмана с интегральным ядром, содержащим обобщённые функции.

**Рекомендации и персепективы по дальнейшей разработке темы.**

*По главе 1.* Для каждого дифференциального оператора конечного порядка с переменными коэффициентами построить семейство операторов, касательное к нему по Чернову. Рассмотртеть разные конструкции таких семейств для различных областей определения и классов гладксти коэффициентов оператора. Доказать сформулированные в диссертации гипотезы о скорости сходимости черновских аппроксимаций. Исследовать иерархию вложенных подпространств сходимости численно и теоретически.

*По главе 2.* Развить изложенные в главе 2 методы таким образом, чтобы они были применимы к уравнениям с бесконечномерным пространством координат и дифференциальным оператором порядка выше второго.

*По главе 3.* Исследовать возникающие конструкции кратных интегралов с дельта-функциями под знаком интеграла; в частности, рассмотреть возможность перехода от повтороного интеграла к кратному, а также вопрос о сходимости аппроксимационной формулы в пространстве обобщённых функций.

# Литература


[1] M. S. Buzinov. Feynman and Quasi-Feynman formulae for evolution equations with a polyharmonic Hamiltonian. — Int. Conf. "Infinite-dimensional dynamics, dissipative systems, and attractors Nizhny Novgorod (Russia), July 13-17, 2015.

[2] V. A. Dubravina. Feynman formulas for solutions of evolution equations on ramified surfaces. — Russian Journal of Mathematical Physics Apr. 2014, Vol. 21 (2) pp. 285-288.

[3] В. В. Горяйнов, "Полугруппы аналитических функций в анализе и приложениях", УМН, 67:6(408) (2012), 5–52

[4] Ya.A. Butko, M. Grothaus, O.G. Smolyanov. Lagrangian Feynman formulas for second-order parabolic equations in bounded and unbounded domains. — Infinite Dimansional Analyasis, Quantum Probability and Related Topics, vol. 13, No. 3 (2010), 377-392.

[5] M.C. Zdun. On a limit formula for embeddings of diffeomorphisms in regular iteration semigroups. — Journal of Difference Equations and Applications, Volume 19, Issue 6, 2013

[6] H.F. Trotter. On the product of semi-groups of operators. — Proceedings of the American Mathematical Society 10 (4), pp. 545–551, 1959.

[7] Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. Скорость сходимости фейнмановских аппроксимаций полугрупп, порождаемых гамильтонианом осциллятора. — ТМФ, 172:1 (2012), 122–137

[8] N. Jacob, Pseudo Differential Operators and Markov Processes, Fourier Analysis and Semigroups, v. 1. — Imperial College Press, London, 2001.

[9] R.P. Feynman. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. — Rev. Mod. Phys., 20 (1948), 367-387.

[10] R.P. Feynman. An operation calculus having applications in quantum electrodynamics. — Phys. Rev. 84 (1951), 108-128.

[11] O.G. Smolyanov, H. v. Weizsäcker, O. Wittich. Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds//Potential Analysis, February 2007, Volume 26, Issue 1, pp 1-29.

[12] O.G. Smolyanov, A.G. Tokarev, A. Truman. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula. — J. Math. Phys. 43, 10 (2002) 5161-5171.

[13] O.G. Smolyanov. Feynman formulae for evolutionary equations. — Trends in Stochastic Analyasis, London Mathematical Society Lecture Notes Series 353, 2009.

[14] В.И. Богачев. Гауссовские меры. — М.: Наука. Физматлит, 1997.

[15] Yu.L. Daletsky, S.V. Fomin. Measures and differential equations in infinite-dimensional space. — Kluwer, 1991.

[16] N.V. Krylov. Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Holder Spaces. — AMS, Graduate Texts in Mathematics vol. 12, 1996.

[17] O.G. Smolyanov. Analysis on the topological linear spaces and its applications (in Russian). — M.: MSU, 1979.

[18] O.G. Smolyanov, E.T. Shavgulidze. Continual integrals (in Russian). — M.: URSS, 2015.

[19] L. Schwartz. Analyse mathematique, I. Hermann, 1967.

[20] H. Cartan. Differential Calculus. — Kershaw Publishing Company, 1971.

[21] Я.А. Бутко. Формула Фейнмана-Каца-Ито для бесконечномерного уравнения Шрёдингера со скалярным и векторным потенциалами. — Нелинейная динамика, 2006, т. 2, №1, с. 75-87.

[22] A.S. Plyashechnik. Feynman formula for Schredinger-Type equations with time- and space-dependent coefficients, Russian Journal of Mathematical Physics, 2012, vol. 19, No.3, pp. 340-359.

[23] A.S. Plyashechnik. Feynman formulas for second-order parabolic equations with variable coefficients, Russian Journal of Mathematical Physics, 2013, vol. 20, No.3, pp. 377-379.

[24] K.-J. Engel, R. Nagel. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — Springer, 2000.

[25] Engel K.-J., Nagel R. A Short Course on Operator Semigroups. — N.Y. Springer Science + Business Media, 2006.

[26] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — Springer-Verlag, 1983.

[27] E Hille, R S Phillips: Functional Analysis and Semi-Groups. — American Mathematical Society, 1975.

[28] Ф.Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер, Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992.

[29] H.-S. Kuo. Gaussian measures in Banach space. — Lecture notes in mathematics, 463. Springer-Verlag, 1975.

[30] M.H.Stone. On one-parameter unitary groups in Hilbert Space. — Annals of Mathematics 33 (3): 643–648, 1932.

Verlag, 1970

[31] Paul R. Chernoff, Note on product formulas for operator semigroups, J. Functional Analysis 2 (1968), 238-242.

[32] Ya.A. Butko. Feynman formulae for evolution semigroups (in Russian). Electronic scientific and technical periodical "Science and education DOI: 10.7463/0314.0701581 , N 3 (2014), 95-132.

[33] O.G. Smolyanov, A.G. Tokarev, A. Truman. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula. — J. Math. Phys. 43, 10 (2002) 5161-5171.

[34] Yu.N. Orlov, V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov. Feynman formulas as a method of averaging random Hamiltonians.//Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, August 2014, Volume 285, Issue 1, pp 222-232.

[35] Luiz C.L. Botelho. Non-linear diffusion in $R^D$ and Hilbert Spases, a Cylindrical/Functional Integral Study. — arXiv:1003.0048v1 [physics.gen-ph] 27 Feb 2010.

[36] L.C.L. Botelho. Non linear Diffusion and Wave Dumped Propagation: Weak Solutions and Statistical Turbulence Behavior.// Journal of Advanced Mathematics and Applications, vol. 3, 1-11, 2014.

[37] L.C.L. Botelho. Semi-linear Diffusion in $R^D$ and Hilbert Spaces, a Feynman-Wiener path integral study. — Random Oper. Stoch. Equ., doi 10.1515/ROSE.2011.020 (2011)

[38] L.C.L. Botelho. A method of integration for wave equation and some applications to wave physics. — Random Oper. Stoch. Equ., 18 (2010), pp. 301-325, doi 10.1515/ROSE.2010.017.

[39] L.C.L. Botelho. A note on Feynman-Kac path integral representations for scalar wave motions. — Random Oper. Stoch. Equ., doi 10.1515/rose-2013-0012 (2013)

[40] О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров, М. Кпекпасси. Формулы Фейнмана-Каца и Фейнмана для бесконечномерных уравнений с оператором Владимирова. — ДАН, 2011, т. 438, №5, с. 609-614.

[41] О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров. Гамильтоновы формулы Фейнмана для уравнений, содержащих оператор Владимирова с переменными коэффициентами. — ДАН, 2011, т. 440, №5, с. 597-602.

[42] Н.Н. Шамаров. Представления эволюционных полугрупп интегралами по траекториям в вещественных и p-адических пространствах. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. — М., 2010.

[43] V. A. Dubravina. Feynman formulas for solutions of evolution equations on ramified surfaces. — Russian Journal of Mathematical Physics Apr. 2014, Vol. 21 (2) pp. 285-288.

[44] O.G. Smolyanov, N. N. Shamarov. Feynman Formulas and Path Integrals for Evolution Equations with the Vladimirov Operator. — Proc. of the Steklov Math. Inst. 265 (1) 2009, 217-228.

[45] Я.А. Бутко. Формула Фейнмана для полугрупп с мультипликативно возмущёнными генераторами. — Наука и образование: электронное научно-техническое издание (ISSN 1994-0408), #10, октябрь 2011. Номер статьи 77-305691/239563.

[46] Yana A. Butko, René L. Schilling, Oleg G. Smolyanov. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations. — arXiv:1203.1199v1 [math.PR] 6 Mar 2012.

[47] Ya.A. Butko, M. Grothaus, O.G. Smolyanov. Feynman formulae and phase space Feynman path integrals for tau-quantization of some Levy-Khintchine type Hamilton functions. // Journal of Mathematical Physics 57, 023508 (2016); doi: 10.1063/1.4940697

[48] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. — РХД, 2011.

[49] E. Nelson, *Feynman Integrals and the Schredinger Equation*, J. Math. Phys., 1964, **5**, № 3, pp. 332-343.

[50] Смолянов О. Г., (J Gough) Д. Г., Ратью (T Ratiu) S. T. Теоремы Нетер и квантовые аномалии // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 472, № 3. — С. 1–5.

[51] В.А.Лапшин. Математические модели динамики срочной структуры процентных ставок, учитывающие качественные свойства рынка. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, факультет ВМК мГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 2010.

[52] X. Fernique. Intégrabilité des vecteurs gaussiens. — C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 270: A1698–A1699. See also MR266263 (42 #1170) 60.08 (1970).

[53] I.D. Remizov. Solution of a Cauchy problem for a diffusion equation in a Hilbert space by a Feynman formula. — Russian Journal of Mathematical Physics, 2012, v.19, No.3, 360-372.

[54] G. Da Prato, J. Zabczyk. Second Order Partial Differential Equations in Hilbert Spaces. — London Mathematical Society Lecture Notes Series 293, 2004.

[55] Remizov I.D. Solution to a parabolic differential equation in Hilbert space via Feynman formula I. Modeling and Analysis of Information Systems, 22:3 (2015) 337-355.

[56] Ivan D. Remizov, “Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation”, Journal of Functional Analysis, 270:12 (2016), 4540-4557

[57] В.Ж.Сакбаев. Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов/// ТМФ, 2017 (принята к печати)