ФГБОУ ВО
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.214.8 + 519.218.2

**Дмитрущенков Дмитрий Валерьевич**

# Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде с иммиграцией.

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
к. ф-м. н., доцент Козлов М. В.

Москва — 2017

# Оглавление

# Введение

## Общая характеристика работы

Диссертация подготовлена на кафедре математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова".

## Актуальность темы

Одной из классических областей теории вероятностей является теория больших уклонений для сумм независимых случайных величин, которая стала активно развиваться в середине 20 века. Важным направлением в ней являются большие уклонения различных функционалов от случайных блужданий, и основополагающими трудами в этой области являются работы Бахадура и Ранга Рао [18], Петрова [2]. В них описана асимптотика вероятности $\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \theta n\right)$ для случайного блуждания, шаги которого имеют экспоненциально малые правые хвосты. Данные результаты служат основой для дальнейшего изучения поведения траекторий блуждания, позволяя получить асимптотики вероятностей больших уклонений и условные предельные теоремы для важных статистик, связанных с траекториями.

Результаты для случайных блужданий широко применяются в статистической физике и финансовой математике, а также являются отправной точкой для исследований вероятностей больших уклонений других процессов, в частности, процессов массового обслуживания, случайных рекуррентных последовательностей и ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС).

Ветвящиеся процессы в случайной среде часто используются для описания динамики популяций различных объектов с неперекрывающимися поколениями. Построенные на их основе модели могут использоваться для описания различных природных и физических закономерностей, в частности, при описании распространения вирусных инфекций, статистического анализа землетрясений, динамики развития сети интернет. Наложение различных условий на поведение среды предоставляет дополнительные возможности исследований и практического использования данной теории.

Важными направлениями исследований в области ветвящихся процессов в случайной среде является изучение асимптотики вероятности невырождения (см. напр. [12],[13], [14]), получение функциональных предельных теорем для различных подтипов ветвящихся процессов в случайной среде ([15],[16],[17]), нахождение точной асимптотики вероятностей больших уклонений для различных частных случаев ветвящихся процессов в случайной среде ([3],[4],[8]).

Настоящая диссертация выполнена в рамках развития тематики больших уклонений для ветвящихся процессов в случайной среде с иммиграцией. Полученные результаты в случае иммиграции в момент вырождения и в каждый момент времени дополняют работы([3],[4],[8]) для случая геометрического распределения числа непосредственных потомков и могут служить основой последующих исследований для распределений более общего вида.

## Цель работы

Исследование вероятностей больших уклонений для ветвящихся процессов в случайной среде со случайной иммиграцией, представляющей собой последовательность из независимых, одинаково распределенных случайных величин и происходящей в моменты вырождения, либо в каждый момент времени.

## Основные методы исследования

В работе используются общие методы теории вероятностей, функционального анализа и теории случайных процессов, а также новые достижения в области теории ветвящихся процессов в случайной среде.

## Теоретическая и практическая значимость; научная новизна

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейших исследованиях в области больших уклонений ветвящихся процессов в случайной среде, а также могут иметь приложения в различных физических и биологических задачах. Конкретные основные результаты диссертации являются полностью новыми.

## Апробация результатов

Результаты работы докладывались в 2014-2015 годах на семинаре "Случайные блуждания и ветвящиеся процессы в случайной среде"кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством доц. М.В. Козлова и с.н.с. А.В. Шкляева и на конференциях "Ломоносовские чтения"в 2014 и в 2016 году.

## Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работе [26] и работе [27] (совместно с А.В. Шкляевым).

## Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 27 наименований. Объем диссертации составляет 59 страниц.

## Краткое содержание работы

Во **введении** к диссертации описывается актуальность рассматриваемой задачи, цели работы и кратко формулируются полученные результаты.

**Первая глава** является обзорной, в ней описана история и предпосылки возникновения модели ветвящихся процессов в случайной среде. Дан обзор некоторых результатов теории больших уклонений для случайных блужданий и ВПСС. Приведена краткая классификация ВПСС, указаны основные определения и обозначения, которые будут использоваться в работе.

**Вторая глава** посвящена изучению ветвящегося процесса в случайной среде ($Z_n^*$) с условным геометрическим распределением числа непосредственных потомков и с иммиграцией, происходящей в моменты его вырождения. По определению, если в момент $n$ ВПСС попадает в состояние 0, то в следующий момент времени к нему добавляется случайное число $\zeta_{n+1}$ частиц, которые участвуют в процессе размножения наравне с другими частицами. Последовательность $(\zeta_n)$ предполагается состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависящей от случайного механизма размножения исходного ветвящегося процесса в случайной среде из независимых одинаково распределенных случайных величин, а на ее распределение налагается требование $\mathbf{E}\zeta_n^h < \infty$ для всех $h \in (0, \infty)$.

Иначе говоря, марковский процесс ($Z_n^*$) отличается от обычного ВПСС ($Z_n$) изменением переходных вероятностей в состоянии 0: вместо $P_{00} = 1$ берется невырожденное распределение

$$P_{0j} = P(\zeta_n = j), \qquad j = 0, 1, 2...$$

В теореме 2.1 в предположении, что для сл. в. $\xi$ - шага так называемого сопровождающего случайного блуждания выполнено условие $R(h) = Ee^{h\xi} < \infty,\ h \in (0, h^+),\ h^+ > 0$, ее распределение нерешетчатое, а математическое ожидание $\mu = E\xi$ конечно, выводится следующая асимптотика для больших уклонений логарифма ветвящегося процесса в случайной среде с иммиграцией $Z_n^*$ , определенного выше:

$$\mathbf{P}(\ln Z_n^* \geqslant \theta n) \sim I^*(\theta)\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,e^{-\Lambda(\theta)n}, \qquad \text{при } n \to \infty,$$

где $I^*(\theta)$ — функция, для которой приведено явное выражение, $\Lambda(\theta)$ - так называемая функция уклонений.

Полученное асимптотическое выражение выполняется равномерно в надкритическом и критическом случаях ($\mu > 0$ и $\mu = 0$) для $\theta > \mu$, а в докритическом

$(\mu < 0)$ для $\theta > m^*$.

Поскольку указанная асимптотика отличается от соответствующей асимптотики для ВПСС $Z_n$ без иммиграции на мультипликативную константу, то данное утвеждение означает, что при условиях $\ln Z_n^* \geqslant \theta n$ и $\ln Z_n \geqslant \theta n$ различия в асимптотическом поведении траекторий процессов с $(\ln Z_n^*)$ и $(\ln Z_n)$ проявляются лишь на начальных участках траекторий, а поведение процессов идентично в левой окрестности точки $n$. Этот результат сформулирован в теореме 2.2, где показано, что отрезки процессов

$$(\ln Z_n^* - \theta n, \ln Z_{n-1}^* - \theta n, \dots \ln Z_{n-m}^* - \theta n \mid \ln Z_n^* \geqslant \theta n)$$

и

$$(\ln Z_n - \theta n, \ln Z_{n-1} - \theta n, \dots \ln Z_{n-m} - \theta n \mid \ln Z_n \geqslant \theta n)$$

сходятся по распределению к отрезку некоторого случайного блуждания с заданным распределением начальной точки.

В **третьей главе** постановка задачи второй главы переносится на процесс $(Z_n^{**})$, отличающийся от $(Z_n)$ добавлением в каждую единицу времени случайного числа частиц $(\chi_n)$, где последовательность $(\chi_n)$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин как и в главе 2, не зависящей от случайного механизма размножения исходного ВПСС. Таже полагаем, что для числа иммигрирующих частиц выполнено условие $\mathbf{E}\chi_1^h < \infty$, $0 < h < \max(h^+, 1)$.

В теореме 3.1 получен аналогичный основной теореме главы 2 результат:

$$P(\ln Z_n^{**} \geq \theta n) \sim I^{**}(\theta) P(S_n \geq \theta n) \sim \frac{I^{**}(\theta) D(\theta)}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(\theta) n},\ n \to \infty,$$

при всех $\theta \in (\mu, \theta^+)$ для некоторого $\theta^+$ функционально связанного с $h^+$ , а $I^{**}(\theta)$ — функция, для которой дано явное выражение.

Асимптотика вероятностей $P(\ln Z_n^* \geq \theta n)$, как и в случае иммиграции в момент вырождения, имеет место при указанных там $\theta$ в случаях для критического и надкритического ВПСС. Для докритического процесса (вне зависимости от его типа) асимптотика имеет место при $\theta > \gamma$, где $\gamma > m^*$ — некоторая заданная константа.

Аналогично случаю, рассмотренному в главе 2, полученная асимптотика отличается от асимптотики для ВПСС $Z_n$ без иммиграции на мультипликативную константу, в силу этого, утверждение теоремы 2.2 главы 2 перенесятся на случай иммиграции в каждый момент времени и приведено в теореме 3.2.

**В заключении** в краткой форме изложены основные результаты диссертации и сформулированы возможные темы для дальнейших исследований по изучаемой проблематике.

## Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю доценту Михаилу Васильевичу Козлову за постановку задач и обсуждение результатов. Автор также благодарен научному консультанту с.н.с. Александру Викторовичу Шкляеву, принявшему деятельное участие в разработке рассматриваемой в диссертации проблематики.

# Глава 1

# Ветвящиеся процессы в случайной среде. Актуальные результаты, основные определения и обозначения

В этой главе будет кратко описана история возникновения рассматриваемой модели, приведена первоначальная классификация для ветвящихся процессов в случайной среде, сформулированы основные определения, а также приведены результаты из теории больших уклонений для случайных блужданий и ветвящихся процессов в случайной среде, которые будут использованы в диссертации.

## 1.1 Описание модели и первоначальная классификация.

В теории ветвящихся процессов, описанная в монографиях таких известных авторов, как Т.Е. Харрис [19], Б.А. Севастьянов [20], К. Атрея и П. Ней [21], чаще всего, рассматриваются процессы, для которых закон размножения частиц не изменяется во времени. Стремление изучать более сложные модели, в которых законы размножения изменяются от поколения к поколению, привело в конце шестидесятых, начале семидесятых годов двадцатого века к появлению ряда новых направлений в теории ветвящихся процессов.

Одним из них является теория ветвящихся процессов в изменяющейся среде (или неоднородных ветвящихся процессов). Среда в этом случае определяет для каждого поколения процесса закон размножения частиц. Основной задачей данной тематики является нахождение условий, налагаемых на среду, при которых неоднородный ветвящийся процесс удовлетворяет определенным свойствам. Среди авторов, развивавших данное направление, отметим П. Ягерса, Ж. Д'Суза, М. Ирвина, Т. Линдвалла, А. Агрести и других.

Более интересным направлением стала теория ветвящихся процессов в случайной среде. В рамках данной модели предполагается, что размножение частиц зависит от изменяющейся с течением времени среды, которая является реализацией некоторой последовательности случайных величин. Наиболее изученной и активно используемой является обощение модели Смита-Вилкинсона [22], когда законы размножения частиц различных поколений полагаются формирующимися независимо друг от друга. Существует другая известная модель, предложенная Атрея и Карлининым [23], в которой механизм образования случайной среды стационарный и эргодический. В диссертации рассматривается модель Смита-Вилкинсона. Опишем ее подробнее.

Пусть $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) невырожденных случайных величин (сл.в.) и $\{f_y(s)\}$, $y \in \mathbb{R}$, — семейство вероятностных производящих функций (п.ф.).

Ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС) $Z_n$ определяется, как однородная марковская цепь с условной относительно среды $\eta$ п.ф. переходных вероятностей вида $\mathbf{E}\left(s^{Z_{n+1}} \mid Z_n, \eta\right) = f_{\eta_{n+1}}(s)^{Z_n}$ п.н.

Как видно из определения, если случайную среду зафиксировать, то частицы $n$-ого поколения размножаются независимо друг от друга и от предшествующего процесса в соответствии с законом размножения, задаваемым случайной производящей функцией $f_{\eta_{n+1}}(s)$.

В работах В. Смита и В. Вилкинсона, С. Карлина и К. Атрея выведена первоначальная классификация ветвящихся процессов в случайной среде.

Ветвящийся процесс в случайной среде $Z_n$ называется

надкритическим, если

$$\mathbf{E} \ln f'_{\eta_0}(1) > 0;$$

критическим, если

$$\mathbf{E} \ln f'_{\eta_0}(1) = 0;$$

докритическим, если

$$\mathbf{E} \ln f'_{\eta_0}(1) < 0.$$

Как оказалось, процесс $(Z_n)$ вырождается п.н. при $\mathbf{E}\ln f'_{\eta_0}(1) \leqslant 0$, а вероятность невырождения процесса $\mathbf{P}\left(Z_n > 0\right)$ при $n \to \infty$ имеет положительный предел при $\mathbf{E}\ln f'_{\eta_0}(1) > 0$.

В последующем [24] было установлено, что требуется дополнительная детализация в докритическом случае. Вид асимптотики вероятности невырождения докритического ветвящегося процесса в случайной среде зависит от знака величины $\mathbf{E}(f'_{\eta_0}(1)\ln f'_{\eta_0}(1))$. Докритический ветвящийся процесс в случайной среде, удовлетворящий условию $\mathbf{E}(f'_{\eta_0}(1)\ln^+ f'_{\eta_0}(1)) < +\infty$ называются

умеренно докритическим, если

$$\mathbf{E}(f'_{\eta_0}(1)\ln f'_{\eta_0}(1)) > 0;$$

промежуточно докритическим, если

$$\mathbf{E}(f'_{\eta_0}(1)\ln f'_{\eta_0}(1)) = 0;$$

строго докритическим, если

$$\mathbf{E}(f'_{\eta_0}(1)\ln f'_{\eta_0}(1)) < 0.$$

Следующим важным шагом в развитии теории ветвящихся процессов в случайной среде стало обнаружение связи между ветвящимися процессами в случайной среде и случайными блужданиями, что позволило использовать новые методы исследований и опираться на важные результаты, полученные для случайных блужданий. Этот раздел теории вероятностей начал активно развиваться в семидесятые годы двадацатого века, а позднее его развитие, особенно, в части условных предельных теорем, было вызвано в том числе связью случайных блужданий с ветвящимися процессами в случайной среде. Примеры использования этой связи будут приведены в следующем разделе.

## 1.2 Основные определения, актуальные результаты.

Положим

$$Z_0 = 1,\ \xi_i = \ln f'_{\eta_i}(1),\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ S_0 = 0,\ U_n = e^{-S_n},$$

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i},\ M_n = \max\left(S_i,\, i \leqslant n\right),$$

Случайное блуждание $S_n$ называется сопровождающим для ВПСС. Блуждание $S_n$ может иметь положительный, нулевой и отрицательный снос, соответствующий ветвящийся процесс в случайной среде является надкритическим, критическим и докритическим. Следовательно, многие задачи теории ветвящихся процессов в случайной среде оказываются непосредственно связаны с предельным теоремами для случайных блужданий.

Далее будем предполагать, что распределение $\xi_i$ нерешетчато, математическое ожидание $E\xi_i = \mu$ конечно и выполнено правостороннее условие Крамера

$$R(h) = Ee^{h\xi} < \infty,\ h \in (0, h^+),\ h^+ > 0. \tag{1.1}$$

Объектом изучения данной работы является частный случай ВПСС, когда условное распределение числа непосредственных потомков частицы при условии среды является геометрическим, так что

$$\mathbf{E}\left(s^{Z_1} \mid Z_0 = 1,\, \eta_1\right) = 1 - \left(1 + e^{-\xi_1}(1-s)^{-1}\right)^{-1} \quad \text{п.н..} \tag{1.2}$$

В этом случае (см. [1]):

$$\mathbf{E}\left(s^{Z_n} \mid \eta\right) = 1 - \left(V_n + U_n(1-s)^{-1}\right)^{-1} \ \text{п.н.},$$

откуда следует, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n > k \mid \eta\right) = \left((V_n + U_n)^{-1}(1 + V_n^{-1}U_n)^{-k}\right) \ \text{п.н.},\ k \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Таким образом, для геометрического условного распределения числа непосредственных потомков частицы при условии среды значение вероятности больших уклонений $P(Z_n > k)$ определяется величинами $U_n$, $V_n$, так что большие уклонения ВПСС $Z_n$ полностью определяются сопровождающим блужданием $S_n$.

Положим

$$m(h) = (\ln R(h))', \, \sigma^2(h) = m'(h) > 0, \, m^+ = \lim_{h \to h^+} m(h), \mu_0 = \max(\mu, 0).$$

Функция $m(h)$ непрерывна и монотонно возрастает при $h \in (0, h^+)$, $m(0) = \mu$, откуда следует, что при любом $\theta \in (\mu, m^+)$ найдется $h_\theta \in (0, h^+)$, такое что $m(h_\theta) = \theta$. Введем функцию уклонений $\Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R\,(h_\theta)$, которая является преобразованием Лежандра над функцией $\ln R\,(h)$. Ее вероятностный смысл определяется соотношением

$$\Lambda(\theta) = -\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \frac{S_n}{n} \geqslant \theta \right).$$

Сопряженным к $S_n$ блужданием назовем блуждание $S_n^{(h)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(h)}$, $S_0^{(h)} = 0$, где $\xi_i^{(h)}$ — последовательность н.о.р. сл.в. с функцией распределения

$$F^{(h)}(x) = R(h)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{hy} dF(y).$$

Теорию больших уклонений для случайных блужданий можно вести от работ Бахадура и Ранга Рао [18] и Петрова [2], в которых для $\xi_1, \xi_2 \ldots$ — последовательности н.о.р. сл.в., удовлетворяющих правостороннему условию Крамера (1.1), была получена, соответственно, "грубая"асимптотика

$$\frac{\ln \mathbf{P}\,(S_n \geqslant \theta n)}{n} \to -\Lambda(\theta)$$

и "точная"асимптотика

$$\mathbf{P}\,(S_n \geqslant \theta n) \sim \frac{D(\theta)}{\sqrt{n}}\, e^{-\Lambda(\theta) n}, \quad \text{при}\, n \to \infty, \tag{1.4}$$

выполняющиеся равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$ в нерешетчатом случае, при этом функции $\Lambda(\theta)$ и $D(\theta)$ были указаны в явном виде. В решетчатом случае в правой части соотношения (1.4) добавляется постоянный множитель , включающий величину шага решетки. В работе [18] в дополнение к вышеуказанному результату также были описаны распределения функционалов от случайного блуждания при условии совершения им большого уклонения.

Изучение траектории процесса в целом продолжилось в дальнейшем, в частности, в работе [25] была получена функциональная предельная теорема о слабой сходимости процесса

$$X^{(n)}(t) = (S_n t + X_{[nt+1]}(nt - [nt]) - \theta nt)/(\sqrt{n}\sigma(h_\theta)), \quad t \in [0,1],$$

при условии совершения случайным блужданием большого уклонения к процессу броуновского моста в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$.

Также стоит отметить результат, полученный Бартфаи [9], справедливый в тех же условиях, что и соотношение (1.4), и показывающий, что для любого множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, такого что $\mathbf{P}((X_1, ..., X_k) \in \partial B) = 0$ верна следующая сходимость

$$\mathbf{P}(S_k \in B | S_n \geq \theta n) \to \mathbf{P}\left(S_k^{(h_\theta)} \in B\right), \; n \to \infty, \tag{1.5}$$

равномерная по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in[\theta_1,\theta_2]} \left| \frac{\mathbf{P}(S_k \in B | S_n \geq \theta n)}{\mathbf{P}\left(S_k^{(h_\theta)} \in B\right)} - 1 \right| = 0.$$

Для вероятностей больших уклонений максимума $M_n = (S_k, k \leqslant n)$ асимптотика $\mathbf{P}\left(M_n \geqslant \theta n\right)$ получается такой же как и в случае случайных блужданий, но с другой мультипликативной константой. В работе [5] получено явное выражение для этой константы в более общем случае, когда вместо случайного блуждания рассматривается асимптотически $N$ - однородная марковская цепь. Мы будем опираться на результат работы [7], в котором утверждается, что при выполнении условии Крамера (1.1) соотношение

$$\mathbf{P}(M_n \geqslant \theta n) \sim C(\theta)\, n^{-1/2} e^{-\Lambda(\theta) n},\ n \to \infty, \tag{1.6}$$

выполняется равномерно по $\theta \in [\alpha, \beta] \subset (\mu,\, m^+)$ при $\mu \geq 0$ и равномерно по $\theta \in [\alpha, \beta] \subset (\gamma,\, m^+)$ при $\mu < 0$, где $\gamma = m(\varkappa)$, а величина $\varkappa > 0$ определятся соотношением $R(\varkappa) = 1$ в предположении, что $\sup\left(R(h),\, h > 0\right) > 1$.

Это утверждение близко к результатам работы [5], оно базируется на прямых вероятностных описаниях траекторий. Этот же подход применяется в диссертации для доказательства теорем 2.1 и 3.1.

Сформулированные утверждения относительно случайных блужданий служат основой для исследований больших уклонений ВПСС. Одним из основных результатов по данной тематике является асимптотика, полученная в работе [3]:

$$\mathbf{P}\left(\ln Z_n \geqslant \theta n\right) \sim I(\theta)\, \mathbf{P}\left(S_n \geqslant \theta n\right), \quad n \to \infty. \tag{1.7}$$

Это соотношении установлено для ВПСС $Z_n$ с п.ф. вида (1.2), при выполненном правостороннем условии Крамера (1.1). Для константы также найден явный вид

$$I(\theta) = h_\theta \Gamma(h_\theta) \int\limits_1^\infty v^{h_\theta - 1} dG_\theta(v),$$

$G_\theta(v) = \mathbf{P}\left(V^{(h)} \leqslant v\right),\ V^{(h)} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} e^{-S_i^{(h)}},\ \Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

При $\mu \geqslant 0$ указанная асимптотика равномерна по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu,\, m^+)$. При $\mu < 0$ дополнительно требуется предположение, чтобы $m^+ > 0$. Тогда при $h_0 \leqslant 1$ соотношение (1.7) имеет место равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0,\, m^+)$. При $h_0 > 1$ в предположении, что существует такое (единственное) $h^* \in (1,\, h^+)$, что $R(h^*) = R(1)$, соотношение (1.7) так же выполняется равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\theta^*,\, m^+)$, где $\theta^* = m(h^*)$.

Для случая, когда $\mu < 0$, а $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0,\, \theta^*)$ асимптотика имеет качественно другой характер, подробное описание можно найти в работе [8], в диссертации данный интервал изменения $\theta$ не рассматривается.

В работе [4] эта асимптотика перенесена на случай ВПСС с произвольным начальным числом частиц. Для тех же ограничений, при которых выполняется соотношение (1.7), для любого натурального $l$ равномерно по указанным выше $\theta$ выполняется следующая асимптотика:

$$\mathbf{P}\left(\ln Z_n \geqslant \theta n + \ln l \mid Z_0 = l\right) \sim I_l(\theta)\mathbf{P}(S_n \geqslant \theta n), \text{ при } n \to \infty. \tag{1.8}$$

Для константы так же было найдено явное выражение

$$I_l(\theta) = h_\theta l^{-h_\theta} \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k \mathbf{E}\left(\left(V^{(h)}\right)^{h_\theta - l + k}(1 - \left(V^{(h)}\right)^{-1})^k \sum_{i=0}^{l-k-1} \frac{\Gamma(h_\theta + i + 1)}{i!}\right), \tag{1.9}$$

при этом $I_1(\theta) = I(\theta)$.

**Замечание 1.1.** В диссертации будет использован тот факт, что выражение для $I_l(\theta)$ можно записать также в виде

$$I_l(\theta) = l^{-h_\theta} \sum_{k=0}^{l-1} C_l^k \frac{\Gamma(h_\theta + l - k)}{\Gamma(l-k)} \mathbf{E}\left(\left(V_\infty^{(h_\theta)}\right)^{h_\theta - l + k}(1 - \left(V_\infty^{(h_\theta)}\right)^{-1})^k\right).$$

**Замечание 1.2.** Из Теорем 1, 2 работы [4] вытекает, что $I_l(\theta) \to 1$, $l \to \infty$, равномерно по той же области значений $\theta$, для которой выполнено соотношение (1.7). Этот факт можно получить и непосредственно, пользуясь тем, что $\Gamma(h+x)/\Gamma(x) \sim x^h$, $x \to \infty$. Данное утверждение будет использовано в процессе доказательства теоремы 3.1.

# Глава 2

# Процессы с иммиграцией в моменты вырождения.

В этой главе изучаются ветвящиеся процессы в случайной среде с иммиграцией, происходящей только в случае вырождения процесса. Показано, что асимптотика вероятностей больших уклонений для такого процесса при некоторых ограничениях, наложенных на процесс и случайную последовательность, отвечающую за иммиграцию, отличается от асимптотики процесса без иммиграции на мультипликативную константу.

## 2.1 Определения, обозначения и результаты

Введем последовательность н.о.р. сл. в. $\zeta = (\zeta_0, \ldots, \zeta_n, \ldots)$, элементы которой принимают натуральные значения и не зависят ни от случайной среды $\eta$, ни от процесса размножения частиц в каждом поколении процесса.

ВПСС $(Z_n^*)$ с иммиграцией в моменты вырождения определим как однородную марковскую цепь со следующими п.ф. переходных вероятностей:

$$\mathbf{E}\left(s^{Z_{n+1}^*} \mid Z_n^* = k,\, \eta\right) = f_{\eta_{n+1}}(s)^k \ \text{ п.н. при } k > 0,$$

$$\mathbf{E}\left(s^{Z_{n+1}^*} \mid Z_n^* = 0,\, \eta\right) = \mathbf{E}s^{\zeta_{n+1}} \text{ п.н.}$$

Таким образом, $\zeta_n$ из вышеопределенной случайной последовательности представляет собой число иммигрантов в момент n при условии, что в этот момент процесс вырождается. Частицы n-ого поколения, также как в случае обычного ВПСС, размножаются условно независимо друг от друга и от предшествующего процесса в соответствии с законом размножения, задаваемым случайной производящей функцией $f_{\eta_{n+1}}(s)$. Далее полагаем, что $\zeta_0 = 1$, $Z^*_{-1} = 0$ п.н., откуда следует, что и $Z^*_0 = 1$ п.н.

Для определенного таким образом ВПСС докажем следующий результат, который показывает, что при определенных ограничениях на иммиграцию асиптотика больших уклонений для ВПСС с иммиграцией в случае вырождения отличается от аналогичных результатов для ВПСС и случайного блуждания на мультипликативную константу.

**Теорема 2.1** Пусть ВПСС $(Z^*_n)$ удовлетворяет условиям (1.1), (1.2), при всех $h > 0$ выполнено условие $\mathbf{E}\zeta_1^h < \infty$, и $\sup\left(R(h), h > 0\right) > 1$. Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Z^*_n \geqslant \theta n) \sim I^*(\theta)\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,e^{-\Lambda(\theta)n} \qquad \text{при } n \to \infty \tag{2.1}$$

выполнено равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$ при $\mu \geqslant 0$ и равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (m^*, m^+)$ при $\mu < 0$, где $m^* = m(h^*), R(h^*) = R(1)$,

$$I^*(\theta) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z^*_{k-1} = 0)\,R(h_\theta)^{-k}\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} l^{h_\theta}\,\mathbf{P}(\zeta_k = l)\,I_l(\theta)\right), \tag{2.2}$$

а величины $I_l(\theta)$ определены в соотношении (1.9).

**Замечание 2.1.** В процессе доказательства указания на интервалы равномерности использованных асимптотических соотношений упоминаться не будут, так как интервал измененения $\theta$, для которого доказана теорема 2.1, вложен в каждый из этих интервалов.

**Замечание 2.2.** Функции $I(\theta), I_l(\theta)$ - положительные, непрерывные и ограниченные на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$, для них имеется аналитические представления.

Полученное выражение для асимптотики больших уклонений позволяет получить результат, описывающий поведение траекторий в левой окрестности точки $n$ при условии совершения процессом большого уклонения.

**Теорема 2.2** Для стандартного ВПСС без иммиграции, для которого выполнены условия (1.1), (1.2) и для ВПСС с иммиграцией в случае вырождения в условиях теоремы 2.1 имеют место сходимость по распределению случайных векторов

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n-m} - \theta n,\ \ldots, \ln Z_n - \theta n | \ln Z_n \geqslant \theta n) \to \mathbf{P}\left(Y_0, \ldots, Y_m\right),\ n \to \infty, \tag{2.3}$$

где вектор $(Y_1, ..., Y_m|Y_0)$ представляет собой отрезок случайного блуждания, а $Y_0$ имеет распределение вероятностей начальной точки, задаваемое формулой (2.31).

## 2.2 Доказательство теоремы 2.1

Введем случайную величину $\tau$, полагая, что $\tau - 1$ есть момент последнего перед $n$ попадания в нуль процесса $Z_k^*$. Зафиксируем $\delta > 0$ и представим вероятность большого уклонения процесса $Z_n^*$ в виде суммы в зависимости от числа частиц $\zeta_\tau$, иммигрировавших в момент времени $\tau$:

$$\mathbf{P}\left(\ln Z_n^* \geqslant \theta n\right) = \mathbf{P}\left(\ln Z_n^* \geqslant \theta n,\, \zeta_\tau \leqslant e^{\delta n}\right) + \mathbf{P}\left(\ln Z_n^* \geqslant \theta n,\, \zeta_\tau > e^{\delta n}\right). \tag{2.4}$$

В силу неравенства Маркова для второго слагаемого суммы (2.4) получаем оценку сверху

$$\mathbf{P}\left(\ln Z_n^* \geqslant \theta n,\, \zeta_\tau > e^{\delta n}\right) \leqslant \mathbf{P}(\max_{0\leqslant i\leqslant n} \zeta_i > e^{\delta n}) \leqslant n\,\mathbf{P}(\zeta_1 > e^{\delta n}) \leqslant n\,\mathbf{E}\zeta_1^h\, e^{-\delta n h},$$

справедливую при любом $h > 0$.

Для любого $\delta$ найдется достаточно большое $h$, при котором последнее выражение является величиной $o(\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \theta n\right))$ при всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Таким образом получаем, что второе слагаемое суммы (2.4), отвечающее случаю большого числа иммигрировавших в момент последнего попадания ВПСС в ноль частиц дает малый вклад в исследуемую асимптотику.

Перейдем к оценке первого слагаемого в правой части (2.4). Разбивая событие под знаком вероятности в (2.4) по значениям момента последнего попадания процесса в нуль и числу иммигрантов в этот момент, представим эту вероятность в виде:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(Z_{k-1}^* = 0\right) \sum_{l=1}^{[e^{\delta n}]} \mathbf{P}(\zeta_k = l)\,\mathbf{P}\left(\ln Z_{n-k} \geqslant \theta n \mid Z_0 = l\right). \tag{2.5}$$

Область внешнего суммирования в (2.5) разобьем на две части: (I) $k \leqslant \varepsilon n$ и (II)

$k > \varepsilon n$, $\varepsilon{>}0$. При оценивании внутренней суммы будем использовать неравенство

$$\mathbf{P}\left(Z_{n-k} \geqslant e^{\theta n} \mid Z_0 = l\right) \leqslant l\, \mathbf{P}\left(Z_{n-k} \geqslant \frac{e^{\theta n}}{l} \mid Z_0 = 1\right), \tag{2.6}$$

для больших значений $l$, но таких, что $l \leqslant e^{\delta_1 n}$ для достаточно малом $\delta_1 > 0$.

Согласно формуле (1.3) запишем:

$$\mathbf{P}\left(Z_{n-k} > j \mid \eta, Z_0 = 1\right) = \left((V_{n-k} + U_{n-k})^{-1}(1 + V_{n-k}^{-1}U_{n-k})^{-j}\right) \text{ п.н.} \tag{2.7}$$

Выражение $\frac{V_{n-k}}{U_{n-k}}$ представим в виде $\sum\limits_{i=0}^{n-k-1} e^{S_{n-k}-S_i}$. Перенумеруем величины $X_i$ в обратном порядке и заменим величину $\frac{V_{n-k}}{U_{n-k}}$ на $\sum\limits_{i=1}^{n-k} e^{S_i}$ в силу тождественности распределений.

Для получения оценки сверху вероятности, стоящей справа в неравенстве (2.6), произведем разбиение среды $\eta$. При $0 < \delta_1 < \theta$ введем событие

$$\Gamma_k := \left\{\sum_{i=1}^{n-k} e^{S_i} \geqslant e^{(\theta-\delta_1)\, n}\right\}$$

и обозначим через $\bar{\Gamma_k}$ дополнение к нему.

Пользуясь тем фактом, что

$$\mathbf{P}(\Gamma_k) \leqslant \mathbf{P}\left(\frac{n\, e^{M_{n-k}}}{l} \geqslant e^{\theta\, n}\right),$$

получим при $l \leqslant e^{\delta_1 n}$ оценку сверху

$$\mathbf{P}(\Gamma_k) \leqslant \mathbf{P}\left(n\, e^{M_{n-k}} \geqslant e^{(\theta-\delta_1)\, n}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(M_{n\,(1-\varepsilon)} \geqslant \frac{\theta-\delta_1}{1-\varepsilon}\,(1-\varepsilon)\, n - \ln n\right).$$

Используя непрерывность функции уклонений и соотношение (1.6) для максимума случайного блуждания, получаем, что при достаточно малом $\delta_1$ последнее выражение эквивалентно при $n \to \infty$ следующему:

$$C\left(\frac{\theta-\delta_1-\frac{\ln n}{n}}{1-\varepsilon}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\,e^{-\Lambda\left(\frac{\theta-\delta_1-\frac{\ln n}{n}}{1-\varepsilon}\right)(1-\varepsilon)\,n}. \tag{2.8}$$

В силу выпуклости функции уклонений справедливо неравенство

$$\Lambda\left(\frac{\theta-\delta_1-\frac{\ln n}{n}}{1-\varepsilon}\right)(1-\varepsilon)>\Lambda(\theta)+h_\theta\left(\frac{\theta\varepsilon-\delta_1}{1-\varepsilon}-\frac{\ln n}{n(1-\varepsilon)}\right)(1-\varepsilon).$$

Поскольку функция $h_\theta$ при $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$ отделена от нуля, то показатель экспоненты в (2.8) не больше, чем $-n(\Lambda(\theta)+\varepsilon_0)$ для некоторого $\varepsilon_0>0$ и всех достаточно малых $\delta_1$.

Ввиду ограниченности $C\,(\theta)$ на отрезке $[\alpha-\delta_1,\beta-\delta_1]$ и с учетом равенства

$$\mathbf{P}\left(Z_{n-k}\geqslant\frac{e^{\theta n}}{l},\,\Gamma_k\mid Z_0=1\right)=\mathbf{E}\left((V_{n-k}+U_{n-k})^{-1}(1+V_{n-k}^{-1}U_{n-k})^{-[\frac{e^{\theta n}}{l}]};\Gamma_k\right)$$

имеем при $l\leqslant e^{\delta_1 n}$ и $\epsilon n<k\leqslant n-1$

$$\mathbf{P}\left(Z_{n-k}\geqslant\frac{e^{\theta n}}{l},\,\Gamma_k\mid Z_0=1\right)\leqslant\mathbf{P}(\Gamma_k)\leqslant C_1\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,e^{-\Lambda(\theta)n}\,e^{-\varepsilon_0 n}. \tag{2.9}$$

Теперь перейдем к рассмотрению вероятности $\mathbf{P}\left(Z_{n-k}\geqslant\frac{e^{\theta n}}{l},\,\bar{\Gamma_k}\mid Z_0=1\right)$. Представим ее в следующем виде

$$\mathbf{EP}\left(\ln Z_{n-k}\geqslant\theta n-\ln l,\bar{\Gamma_k}\mid\eta\right)= \tag{2.10}$$
$$=\mathbf{E}\left((U_{n-k}+V_{n-k})^{-1}\left(1+\frac{U_{n-k}}{V_{n-k}}\right)^{-\left[e^{\theta n}/l\right]};\,\bar{\Gamma_k}\right).$$

Так как $(U_{n-k}+V_{n-k})^{-1}\leqslant 1$, то этот сомножитель под знаком $E$ при оценивании сверху можно отбросить. Второй сомножитель под знаком математического ожидания перепишем в виде

$$\left(1+\left(\sum_{i=1}^{n-k}e^{S_i}\right)^{-1}\right)^{[-e^{\theta n}/l]}. \tag{2.11}$$

В силу определения события $\bar{\Gamma_k}$ имеем для логарифма исследуемой вероятности оценку

$$\ln \mathbf{EP}\left(\ln Z_{n-k} \geqslant \theta n - \ln l, \bar{\Gamma_k} \mid \eta\right) \leqslant \ln \left(1 + e^{-(\theta-\delta_1)\,n}\right)^{-e^{\theta n}/l}.$$

Для правой части получившегося неравенства получаем оценку сверху

$$c_1(n)\left(-\frac{e^{\delta_1 n}}{l}\right) \leqslant -c_1(n)\, e^{(\delta_1-\delta)\,n}, \tag{2.12}$$

где $\delta > 0,\ c_1(n) = 1 + \bar{o}(1)$ при $n \to \infty$.

Часть (II) суммы (2.5) в силу неравенства (2.6) оценивается сверху величиной

$$\sum_{k=\varepsilon n}^{n} \mathbf{P}\left(Z^*_{k-1} = 0\right) \sum_{l=1}^{e^{\delta_1 n}} l\mathbf{P}(\zeta_k = l)\, \mathbf{P}\left(Z_{n-k} \geqslant \frac{\theta n}{l} \mid Z_0 = l\right).$$

Используя полученные оценки (2.12) и (2.9), получаем для нее оценку сверху

$$(1-\epsilon)n \sum_{l=1}^{e^{\delta_1 n}} l\mathbf{P}(\zeta_k = l)\, \left(e^{-e^{(\delta_1-\delta)\,n}} + C_1\,\frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{-\Lambda(\theta)n}\, e^{-\varepsilon_0 n}\right).$$

Из условия $\mathbf{E}\zeta_1^h < \infty$, наложенного на иммиграцию при всех $h > 0$, имеем

$$\sum_{l=1}^{e^{\delta_1 n}} \mathbf{P}(\zeta_k = l)l \leqslant \mathbf{E}\zeta_1 < \infty,$$

а значит для любого $\delta < \delta_1$ полученное выражение является величиной $o(\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \theta n\right))$ при всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Таким образом получаем, что часть (II) суммы (2.5), отвечающая случаю, когда последнее момент попадания ВПСС в нуль произошло достаточно поздно, дает малый вклад в исследуемую асимптотику.

В части (I) суммы (2.5) произведем дополнительное разбиение по числу частиц, имигрировавших после последнего попадания процесса в нуль :

$$\sum_{k=0}^{\varepsilon n} \mathbf{P}(Z^*_{k-1} = 0)\left(\left(\sum_{l=0}^{t} + \sum_{t<l<e^{\delta n}}\right) \mathbf{P}(\zeta_k = l)\, \mathbf{P}\left(\ln Z_{n-k} \geqslant \theta n \mid Z_0 = l\right)\right). \tag{2.13}$$

При $t < l < e^{\delta n}$ снова используем неравенство (2.6), соотношения (1.7), (1.8), выпуклость функции уклонений, и получим следующую оценку

$$\mathbf{P}\left(Z_{n-k} \geqslant \frac{e^{\theta n}}{l}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n-k}}\, D(\theta)\, I(\theta)\, e^{-\Lambda(\theta + \frac{\theta k - \ln l}{n-k})(n-k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+\varepsilon_1}{\sqrt{n}}\, D(\theta)\, I(\theta)\, e^{-\Lambda(\theta)(n-k)}\, e^{h_\theta(\ln l - \theta k)}$$

при $n \to \infty$, достаточно малых $\delta$, $\varepsilon, \varepsilon_1$, и всех $k$ и $l$.

Таким образом, для слагаемого в выражении (2.13) с областью внутреннего суммирования $t < l < e^{\delta n}$ получаем оценку сверху

$$(1+\varepsilon_1)\,\frac{1}{\sqrt{n}}\, D(\theta)\, I(\theta)\, e^{-\Lambda(\theta)\, n} \sum_{k=0}^{\varepsilon n} \mathbf{P}(Z^*_{k-1} = 0)\, e^{\Lambda(\theta)\, k}\, e^{-h_\theta \theta k} \sum_{t<l<e^{\delta n}} \mathbf{P}(\zeta_k = l)\, l^{h_\theta + 1}. \tag{2.14}$$

Заметим, что $e^{\Lambda(\theta)\, k}\, e^{-h_\theta \theta k} = R(h_\theta)^{-k}$, и $R(h_\theta) > 1$, так что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z^*_{k-1} = 0)\, R(h_\theta)^{-k}$ сходится. Сумма $\sum\limits_{t<l<e^{\delta n}} \mathbf{P}(\zeta_k = l)\, l^{h_\theta+1}$ мажорируется суммой $\sum\limits_{t<l} \mathbf{P}(\zeta_k = l)\, l^{h_\theta+1}$, которая представляет собой остаток сходящегося ряда, а потому выражение (2.14) при достаточно больших $t$ является величиной $o(\mathbf{P}\,(S_n \geqslant \theta n))$. Таким образом получаем, что и эта часть суммы (2.5) дает малый вклад в исследуемую асимптотику.

При $l \leqslant t$ воспользуемся соотношениями (1.7), (1.8) и, полагая для краткости $\theta_k = \frac{\theta n}{n-k}$, получим равномерную по $k \leqslant \varepsilon n$ асимптотику

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n-k} \geqslant \theta n \mid Z_0 = l) \sim I_l(\theta_k)\, e^{h_{\theta_k} \ln l}\, \frac{1}{\sqrt{n-k}}\, D\left(\theta_k\right)\, e^{-\Lambda(\theta_k)(n-k)}, n \to \infty.$$

Учитывая непрерывность по $\theta$ выражений $I(\theta)$, $D(\theta)$, $\Lambda(\theta)$ и $h_\theta$, заметим, что величина

$$I_l(\theta_k)\, e^{h_{\theta_k} \ln l}\, e^{-\Lambda(\theta_k)(n-k)}\, D\left(\theta_k\right)$$

при замене $\theta_k$ на $\theta$ сохранится с точностью до множителя $C_\varepsilon \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

В результате, подставив получившуюся оценку, получаем, что часть выражении (2.13) с областью внутреннего суммирования $l \leqslant t$ оказывается эквивалентной при $n \to \infty$ следующему выражению:

$$C_\varepsilon\, D(\theta)\, \frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{-\Lambda(\theta)n} \left( \sum_{l=0}^{t} l^{h_\theta}\, \mathbf{P}(\zeta_k = l)\, I_l(\theta) \right) \times \\ \times \left( \sum_{k=0}^{\varepsilon n} \mathbf{P}\left(Z^*_{k-1} = 0\right) \left( e^{\Lambda(\theta)n}\, e^{-\Lambda(\theta_k)(n-k)} \right) \right). \tag{2.15}$$

Ввиду выпуклости функции уклонений справедливо неравенство $\Lambda\left(\theta_k\right) > \Lambda\left(\theta\right) + h_\theta \frac{\theta k}{n-k}$, откуда получаем цепочку неравенств

$$e^{\Lambda(\theta)n}\, e^{-\Lambda(\theta_k)(n-k)} \leqslant e^{\Lambda(\theta)n}\, e^{-\Lambda(\theta)(k-n)} e^{-h_\theta \theta k} e^{\Lambda(\theta)n} = e^{-h_\theta \theta k} e^{\Lambda(\theta)k} = R(h_\theta)^{-k}. \tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) в (2.15), заметим, что сумма $\sum\limits_{k>t_1} \mathbf{P}\left(Z^*_{k-1} = 0\right) R(h_\theta)^{-k}$ при произвольном $t_1 > 0$ представляет собой остаток сходящегося ряда и, следовательно, выражение

$$C_\varepsilon\, D(\theta)\, \frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{-\Lambda(\theta)n} \left( \sum_{l=0}^{t} l^{h_\theta}\, \mathbf{P}(\xi_k = l)\, I_l(\theta) \right) \left( \sum_{t_1<k} \mathbf{P}\left(Z^*_{k-1} = 0\right) R(h_\theta)^{-k} \right) \tag{2.17}$$

является величиной $o(\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \theta n\right))$.

Таким образом, часть суммы (2.13) с областью внутреннего суммирования $l < t$ представима в виде:

$$\left( C_\varepsilon\, D(\theta)\, \frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{-\Lambda(\theta)n} \sum_{k=0}^{t_1} \mathbf{P}(Z^*_{k-1} = 0)\, R(h_\theta)^{-k} \right) \times \\ \times \left( \sum_{l=0}^{t} l^{h_\theta}\, \mathbf{P}(\zeta_k = l)\, I_l(\theta) \right) (1 + o(1)), \tag{2.18}$$

где член $o(1)$ равномерно мал по $t$ и $t_1$.

Устремляя в (2.18) $n$, $t$, $t_1$ к бесконечности, $\varepsilon$ к нулю и учитывая полученные выше оценки для остальных слагаемых исходной суммы (2.4), приходим к заключению теоремы 2.1.

## 2.3 Доказательство теоремы 2.2

Запишем интересующую нас вероятность для ВПСС без иммиграции

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n-m}-\theta n\in[x_0,x_0+\Delta_0],\ ...,\ln Z_n-\theta n\in[x_m,x_m+\Delta_m]|\ln Z_n\geqslant\theta n) \quad (2.19)$$

Преобразуем ее по формуле условной вероятности:

$$\frac{\mathbf{P}(\ln Z_{n-m}-\theta n\in[x_0,x_0+\Delta_0],\ ...,\ln Z_n-\theta n\in[x_m,x_m+\Delta_m],\ \ln Z_n\geqslant\theta n)}{\mathbf{P}(\ln Z_n\geqslant\theta n)}. \quad (2.20)$$

В силу того, что ВПСС является марковской цепью, мы можем разложить эту вероятность в произведение переходных вероятностей и свести ее изучение к рассмотрению вероятностей следующего вида

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n-k}-\theta n\in[x_{m-k},x_{m-k}+\Delta_{m-k}]\quad|\quad\ln Z_{n-k-1}-\theta n=x_{m-k-1})\qquad k=0,...,m, \quad (2.21)$$

при этом исходная вероятность (2.19) будет представлять собой произведение таких вероятностей на распределение начальной точки.

Преобразуем переходную вероятность (2.21) следующим образом

$$\mathbf{P}\left(\ln\frac{Z_{n-k}}{e^{\theta n}}\in[x_{m-k},x_{m-k}+\Delta_{m-k}]\quad|\quad Z_{n-k-1}=e^{\theta n+x_{m-k-1}}\right). \quad (2.22)$$

В силу определения ВПСС $Z_{n-k}=\sum\limits_{j=1}^{Z_{n-k-1}}\zeta_{n-k,j}$, где $\zeta_{n-k,j}$ обозначает потомков частиц соответствующего поколения, поэтому последнюю вероятность перепишем в виде

$$\mathbf{P}\left(\ln\frac{\sum\limits_{j=1}^{e^{\theta n+x_{m-k-1}}}\zeta_{n-k,j}}{e^{\theta n}}\in[x_{m-k},x_{m-k}+\Delta_{m-k}]\right). \quad (2.23)$$

В силу того, что для ВПСС имеет место сходимость

$$\left( \frac{\sum_{j=1}^{N} \zeta_k, j}{N} | \eta = y \right) \to f_y'(1) \quad \text{п.н.}, \tag{2.24}$$

то, домножив и разделив выражение под знаком логарифма на $e^{x_{m-k-1}}$ получаем следующий вид для вероятности (2.23)

$$\mathbf{P}\left(\ln\left(f_{n-k}'(1)e^{x_{m-k-1}}\right) \in [x_{m-k}, x_{m-k} + \Delta_{m-k}]\right). \tag{2.25}$$

В итоге, перенеся экспоненту из-под знака логарифма вправо, получаем окончательный вид вероятности (2.19)

$$\mathbf{P}\left(\xi_{n-k} \in [x_{m-k} - x_{m-k-1}, x_{m-k} - x_{m-k-1} + \Delta_{m-k}]\right) \tag{2.26}$$

для $k = 0, ..., m$. Таким образом для доказательства теоремы 2.2 нам осталось выписать распределение начальной точки. Исходя из вида выражения (2.19) нам нужно найти вероятность

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n-m} - \theta n \in [x_0, x_0 + \Delta_0]) \tag{2.27}$$

и разделить его на вероятность большого уклонения $\mathbf{P}(\ln Z_n \geqslant \theta n)$. Будем искать эту вероятность в виде разности

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n-m} \geqslant \theta n + x_0) - \mathbf{P}(\ln Z_{n-m} \geqslant \theta n + x_0 + \Delta_0). \tag{2.28}$$

Первая вероятность в силу асимптотики (1.7) эквивалентна

$$I(\theta)\, \frac{1}{\sqrt{n-m}} e^{-\Lambda(\theta)(n-m)} e^{-h_\theta(\theta m + x_0)}. \tag{2.29}$$

Вторая вероятность выписывается аналогично и отличается только на множитель $e^{h_\theta \Delta_0}$. Произведя вычитание и использовав то, что функция уклонений равна $\theta h_\theta -$

$\ln R\left(h_\theta\right)$ получаем выражение для вероятности (2.27):

$$I(\theta)\,\frac{1}{\sqrt{n-m}}e^{-\Lambda(\theta)n}R(h_\theta)^{-m}e^{-h_\theta x_0}(1-e^{-h_\theta \Delta_0}). \tag{2.30}$$

Поделив полученное выражение на вероятность большого уклоения и использовав тот факт, что $1-e^{-h_\theta\Delta_0}\to h_\theta\Delta_0$ при $\Delta_0\to 0$, получаем, что распределение начальной точки при $n\to\infty$ эквивалентно

$$R(h_\theta)^{-m}e^{-h_\theta x_0}h_\theta\Delta_0. \tag{2.31}$$

То есть, как было показано в (2.26) отрезок ВПСС при условии большого уклонения сходится по распределению к отрезку случайного блуждания, а распределение начальной точки задается (2.31).

Для случая ВПСС с иммиграцией в случае вырождения доказательство остается справедливым в силу того, что сходимость (2.24) выполняется в силу отсутствия влияния иммиграции в левой окрестности точки $n$, тем самым позволяя аналогичным образом выписать переходные вероятности. Распределение начальной точки остается неизменным потому что, как показано в теореме 2.1, асимптотика вероятностей больших уклонений в случае иммиграции при вырождении отличается от случая без иммиграции на мультипликативную константу, которая не оказывает влияние на вычисления в пункте (2.28) и далее. Тем самым приходим к заключению теоремы 2.2.

# Глава 3

# Процессы с иммиграцией в каждый момент времени

В этой главе изучаются ветвящиеся процессы в случайной среде с иммиграцией, происходящей в каждый момент времени. Показано, что выводы относительно асимптотики больших уклонений, сделанные во второй главе, остаются справедливыми и в этом случае. Результаты для поведения траекторий процесса также доказаны для рассматриваемого случая. В ходе доказательства используются вспомогательные результаты, вынесенные в отдельный подраздел.

## 3.1 Определения, обозначения и результаты

Введем последовательность н.о.р. сл.в. $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n, \ldots)$ с натуральными значениями. ВПСС $Z_n^{**}$ с иммиграцией в каждый момент времени определим, как однородную марковскую цепь с условной п.ф. переходных вероятностей:

$$\mathbf{E}\left(s^{Z_{n+1}^{**}} \mid Z_n^{**}, \eta, \chi\right) = g_{\eta_{n+1}}(s)^{Z_n^{**}} \tilde{g}_{\eta_{n+1}}(s) \quad \text{п.н.}, Z_0^{**} = 1 \tag{3.1}$$

где $\{\tilde{g}_y(s)\}$ — семейство производящих функций, описывающих иммиграцию. Зададим $Z_n^{**}$ в явной форме. Введем бесконечную матрицу $(\zeta_{i,j})$ случайных величин, строки которой независимы, а в пределах $i$-й строки элементы н.о.р. при условии $\eta$ с условной п.ф. $g_{\eta_i}(s)$. Реккурентное соотношение

$$Z_{n+1}^{**} = \sum_{j=1}^{Z_n^{**}} \zeta_{n+1,j} + \chi_{n+1}$$

определяет ту же марковскую цепь, что и задаваемую соотношением (3.1). Здесь сл.в. $\zeta_{i,j}$ обозначает число непосредственных потомков $j$-й частицы $i$-го поколения, а сл.в. $\chi_n$ обозначает число иммигрантов в момент $n$. При условии среды $\eta$ сл.в. $\chi_n$ имеют производящую функцию $\tilde{g}_{\eta_n}(s)$ и независимы между собой. Для удобства положим $\chi_0 = 1$ п.н.

В основе дальнейшего анализа лежит представление

$$Z_n^{**} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,n}^{(j)}, \tag{3.2}$$

где $Z_{i,n}^{(j)}$ обозначает число частиц $n$-го поколения, являющихся потомками $j$-го из мигрантов $i$-го поколения, $Z_{0,n}^{(1)}$ — число потомков исходной частицы в $n$-м поколении. Фактически, процесс $(Z_n^{**})$ разлагается в сумму связанных через среду процессов без иммиграции разной длительности. Или, иначе говоря, все сводится к ВПСС без иммиграции, начинающимся со случайного числа частиц и случайной длительности.

Полагаем, что иммиграция $\chi_i$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{E}\chi_1^h < \infty, 0 < h < \max(h^+, 1). \tag{3.3}$$

Как и в разделе 1.2, величины $\xi_i$ являются шагами сопровождающего к ВПСС случайного блуждания $(S_n)$, а $\xi_i^{(h)}$, соответственно, шагом сопряженного к нему блуждания $S_n^{(h)}$.

Определим оператор $\mathbf{E}^{(h)}$ для случайной величины $X$, измеримой относительно сигма-алгебры $\sigma(\xi_1, ...)$, $X = f(\xi_1, \xi_2, ..)$, равенством

$$\mathbf{E}^{(h)} X = \mathbf{E} f(\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, ...).$$

Для произвольной случайной величины $Y$ с $\mathbf{E}|Y| < \infty$ положим

$$\mathbf{E}^{(h)} Y = \mathbf{E}^{(h)} \left( \mathbf{E}(Y | \xi_1, \xi_2, ....) \right).$$

**Теорема 3.1.** Пусть ВПСС с иммиграцией $Z_n^{**}$ и сопровождающим блужданием $S_n$ удовлетворяет условиям (1.1), (1.2), (3.3) и $\sup(R(h),\ h > 0) > 1$. Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Z_n^{**} \geq \theta n) \sim I^{**}(\theta)\, \frac{D(\theta)}{\sqrt{n}}\, e^{-\Lambda(\theta)n} \qquad \text{при } n \to \infty \tag{3.4}$$

выполнено равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$ в случае $\mu \geq 0$ и равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\gamma, m^+)$ в случае $\mu < 0$ , где $\gamma$ определено в главе 1 (см. (1.6) и далее),

$$I^{**}(\theta) = \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} E^{(h_\theta)} \left( \sum_{i=0}^{m} e^{-S_i} \sum_{j=1}^{\chi_i} \frac{Z_{i,k}^{(j)}}{\exp(S_{i,k})} \right)^{h_\theta} . \tag{3.5}$$

$S_{i,k} = S_k - S_i$, $Z_{i,k}^{(j)}$ — число частиц $k$-го поколения, являющихся потомками $j$-й частицы, иммигрировавшей в $i$-м поколении.

**Замечание 3.1.** Предел в (3.5) существует и положителен, сходимость равномерна по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, указанным в Теореме 3.1. Это утверждение приведено в лемме 3.6 в следующем разделе.

Доказательстве теоремы 3.1 будет опираться на вспомогательные утверждения, которые для удобства изложения приведены в следующем разделе.

По аналогии с главой 2 сформулируем результат, описывающий поведение траекторий ВПСС с иммиграцией в каждый момент времени в левой окрестности точки $n$.

**Теорема 3.2** Для ВПСС с иммиграцией в каждый момент времени в условиях теоремы 3.1 остается справедливым заключение теоремы 2.2.

## 3.2 Вспомогательные утверждения

**Лемма 3.1**.

1) Пусть $\theta$, $\theta + \delta$ лежат в $(\mu, m^+)$. Тогда $\Lambda(\theta + \delta) \geq \Lambda(\theta) + h_\theta \delta$.

2) Пусть $[\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$ при $\mu \geq 0$, $[\theta_1, \theta_2] \subset (\gamma, m^+)$ при $\mu < 0$. Тогда для каждого $\delta_1 < 1 - \theta_2/m^+$ и всех достаточно малых $\delta$ неравенство

$$\Lambda\left(\frac{\theta - \delta}{1 - \delta_1}\right)(1 - \delta_1) \geq \Lambda(\theta)$$

выполняется при всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.
3) Пусть $[\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$, $a_n, b_n = o(\sqrt{n})$. Тогда справедливо соотношение

$$\Lambda\left(\frac{\theta n - a_n}{n - b_n}\right) = \Lambda(\theta) + \frac{\theta b_n - a_n}{n} h_\theta + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $o(\cdot)$ равномерно мало по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.
Как следствие получаем эквивалентность

$$\mathbf{P}(S_{n-b_n} \geq \theta n - a_n) \sim D(\theta) n^{-1/2} e^{h_\theta a_n} R(h_\theta)^{-b_n} e^{-\Lambda(\theta)n} \sim e^{h_\theta a_n} R(h_\theta)^{-b_n} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n).$$

В случае $a_n, b_n > 0$, $a_n = O(n)$, $n - b_n \to \infty$ и всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, таких что $\theta_1 \leq (\theta - a_n)/(n - b_n) \leq \theta_2$, справедливо неравенство

$$\Lambda\left(\frac{\theta n - a_n}{n - b_n}\right) \geq \Lambda(\theta) + \frac{(\theta b_n - a_n)}{n} h_\theta.$$

Как следствие получаем:

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} \frac{\mathbf{P}(S_{n-b_n} \geq \theta n - a_n)}{(n - b_n)^{-1/2} e^{h_\theta a_n} R(h_\theta)^{-b_n} e^{-\Lambda(\theta)n}} \leq \sup_{[\theta_1, \theta_2]} D(\theta).$$

4) Пусть $(\xi_i, \chi_i)$ — н.о.р. сл. векторы, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, причем выполнено условие (1.1) для величин $\xi_i$ и условие (3.3) для величин $\chi_i$, а $[\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$. Тогда при любых $m$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n, (\chi_1, ..., \chi_m) \in A) = (1 + o(1)) \mathbf{P}\left(\left(\chi_1^{(h_\theta)}, ..., \chi_m^{(h_\theta)}\right) \in A\right) \mathbf{P}(S_n \geq \theta n),$$

причем $o(1)$ равномерно мало по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

**Лемма 3.2**.
1) Пусть н.о.р. сл.в. $\chi_i$ удовлетворяют условию (3.3), н.о.р. сл.в. $\xi_i$ удовлетворяют условию (1.1), $[\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$ при $\mu \geq 0$, $[\theta_1, \theta_2] \subset (\gamma, m^+)$ при $\mu < 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при достаточно больших $n$ и всех

$\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(\max_{i \le n} \chi_i \ge \exp((\theta - \delta - \mu_0)n)) \le \varepsilon \mathbf{P}(S_n \ge \theta n).$$

2) Пусть $Z_n$ - ВПСС без иммиграции. Тогда при любых $0 \le k < n$, $\delta > 0$, $\alpha > 1$, $x \in \mathbb{R}$, $m < \exp((\theta - \delta - \mu_0)n - x)$ для $Z_n$, удовлетворяющего условиям (1.1), (1.2), условию (3.3) выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(\ln Z_k \ge \theta n - x | Z_0 = l) \le 2 \exp(-l(n^\alpha/2 - \alpha \ln n - 1)) + \\ \exp(h_\theta x) \exp(-\Lambda(\theta)n) \frac{R(h_\theta)^{1-n+k}}{1 - R(h_\theta)^{-1}} (2ln^{1+\alpha})^{h_\theta} + l2^{-\exp(\delta n)}.$$

При $\mu \geqslant 0$ указанное неравенство верно при $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$. При $\mu < 0$ дополнительно предполагается, что $m^+ > 0$. Тогда при $h_0 \leqslant 1$ неравенство имеет место при $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$. При $h_0 > 1$ и в предположении, что существует такое (единственное) $h^* \in (1, h^+)$, что $R(h^*) = R(1)$, неравенство выполняется при $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\theta^*, m^+)$, где $\theta^* = m(h^*)$.

3) При любых $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, указанных в пункте 2), любом $\delta > 0$ и всех достаточно больших $n$ и таких $l$, что $\exp((\theta - \mu_0 - \delta)n) > l$, выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \ge \theta n | Z_0 = l) \le c_1 l^{h_\theta} \mathbf{P}(S_n \ge \theta n),$$

при всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ и некоторых $c_1$.

Также для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_1$, что при всех достаточно больших $n$ выполнено неравенство

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{P}(\ln Z_n \ge \theta n | Z_0 = l, \eta); \eta : S_n < \theta n - \ln l - t_1\right) \le \varepsilon l^{h_\theta} \mathbf{P}(S_n \ge \theta n).$$

4) Для любых $k < n$ и $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, указанных в пункте 2), найдется такое $\delta > 0$, что

$$\mathbf{P}(Z_k \ge \exp((\theta - \delta - \mu_0)n)) = o(1)\mathbf{P}(S_n \ge \theta n),\ n \to \infty,$$

где множители $o(1)$ равномерно малы по $k$ и $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

5) При любых $k < n$, $\varepsilon_1 > 0$ найдутся такие $t_1, N$, что при всех $n > N$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset$

$(\mu, m^+)$ при $\mu \geq 0$ и $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\gamma, m^+)$ при $\mu < 0$ выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n, Z_k > t_1) < \varepsilon_1 \mathbf{P}(S_n \geq \theta n).$$

**Лемма 3.3**.
Пусть $Z_n^*$ — ВПСС с иммиграцией, удовлетворяющий условиям (1.1), (1.2),(3.3), $Z_{i,n}^{(j)}$ — число потомков в $n$-ом поколении у $j$-й частицы процесса $Z_n^*$, иммигрировавшей в поколении $i < j$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$, $N$, $t$, что при всех $n > N$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$ при $\mu \geq 0$ и $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\gamma, m^+)$ при $\mu < 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(A_{n,\delta,t}) = \mathbf{P}\left(\exists i \leq n : \ln\left(\sum\nolimits_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,n}^{(j)}\right) \geq \theta n - \delta i + t\right) < \varepsilon \mathbf{P}(S_n \geq \theta n).$$

**Лемма 3.4**.
Пусть $X_n \geq 0$ — мартингал, $\mathbf{E} X_n \ln X_n < \infty$ и $\mathbf{E} X_n^h \ln X_n < \infty$ для некоторого $h > 0$. Тогда справедливы неравенства:

$$\mathbf{E} \max_{i \leq n} X_i^h \leq \left(\frac{h}{h-1}\right)^h \mathbf{E} X_n^h, \text{ если } h \geq 2, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{E} \max_{i \leq n} X_i^h \leq \frac{2e}{e-2} \mathbf{E} X_n^h \ln^+ X_n + \frac{e}{e-2}, \text{ если } 1 \leq h < 2, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{E} \max_{i \leq n} X_i^h \leq \frac{2e}{e-1} \mathbf{E} X_n \ln^+ X_n + \frac{e}{e-2}, \text{ если } 0 < h \leq 1. \tag{3.8}$$

**Лемма 3.5**.
Пусть $Z_n$ — ВПСС, удовлетворяющий условиям (1.1), (1.2). Тогда
1) при любых $\varepsilon > 0$, $M$ найдутся $0 < c_1 < c_2 < \infty$, что при всех $h \in (0, h^+)$, таких что $1 + \varepsilon < R(h) < M$, и всех $n$ выполнены неравенства

$$c_1 < \mathbf{E}^{(h)}\left(\frac{Z_n^h}{e^{hS_n}} \ln^+ \frac{Z_n}{e^{S_n}}\right) < c_2, \; c_1 < \mathbf{E}\left(\frac{Z_n}{e^{S_n}} \ln^+ \frac{Z_n}{e^{S_n}}\right) < c_2.$$

2) Пусть $[\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$ при $\mu \geq 0$ и $[\theta_1, \theta_2] \subset (\gamma, m^+)$ при $\mu < 0$. Тогда

$$\sup_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} \mathbf{E}^{(h_\theta)} \left( \max_k \frac{Z_k}{\exp(S_k)} \right)^{h_\theta} < \infty.$$

**Замечание 3.2.** Леммы 3.3-3.5 принадлежат А.В. Шкляеву.

**Замечание 3.3.** Из леммы 3.5 следует, что при выполнении условий (1.1), (1.2) и всех $h \in (0, h^+)$ $EZ_n^h < \infty$.

**Лемма 3.6**. В условиях теоремы 3.1 предел

$$I^{**}(\theta) = \lim_{m \to \infty} \lim_{k \to \infty} E^{(h_\theta)} \left( \sum_{i=0}^{m} e^{-S_i} \sum_{j=1}^{\chi_i} \frac{Z_{i,k}^{(j)}}{\exp(S_{i,k})} \right)^{h_\theta}. \quad (3.9)$$

существует и положителен, сходимость равномерна по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, рассматриваемым в Теореме 3.1.

## 3.3 Доказательство теоремы 3.1

1) *Оценка сверху вероятности* $\mathbf{P}(Z_n^{**} \geq \exp(\theta n))$.

Фиксируем $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\delta > 0$, $t$ и введем событие

$$A_{n,\delta,t} := \left\{ \exists i \leq n : \ln \left( \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,n}^{(j)} \right) \geq \theta n - \delta i + t \right\}.$$

Разложим вероятность большого уклонения процесса $Z_n^{**}$ в сумму двух слагаемых:

$$\mathbf{P}(Z_n^{**} \geq \exp(\theta n)) = \mathbf{P}\left(Z_n^{**} \geq \exp(\theta n), A_{n,\delta,t}\right) + \mathbf{P}\left(Z_n^{**} \geq \exp(\theta n),\ \bar{A}_{n,\delta,t}\right), \quad (3.10)$$

где $\bar{A}_{n,\delta,t}$ обозначает дополнение к $A_{n,\delta,t}$.

Первое слагаемое суммы (3.10) оценивается сверху в лемме 3.3 при всех достаточно больших $n$, $t$ и достаточно малых $\delta$ величиной $\varepsilon_1 \mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$. Для оценки второго слагаемого заметим, что сл.в. $Z_n^{**}$ при любом натуральном $m < n$ в силу представления (3.2) можно записать в виде

$$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,n}^{(j)} + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,n}^{(j)}. \tag{3.11}$$

В силу того, что для $\forall i \leqslant n$ сумма $\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,n}^{(j)}$ не превосходит величины $\exp(\theta n - \delta i + t)$ при выполнении события $\bar{A}_{n,\delta,t}$, первая сумма в (3.11) оценивается сверху при каждом $t$, достаточно больших $m$ величиной

$$\exp(\theta n + t)\sum_{i=m}^{n}\exp(-\delta i) < \exp(\theta n + t)\frac{e^{-\delta m}}{1-e^{-\delta}} < \varepsilon \exp(\theta n).$$

Таким образом, с учетом этого неравенства, получаем следующую оценку сверху для второго слагаемого в (3.10)

$$\mathbf{P}\left(Z_n^{**} \geq \exp(\theta n), \overline{A_{n,\delta,t}}\right) \leq \mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,n}^{(j)} \geq (1-\varepsilon)\exp(\theta n)\right). \tag{3.12}$$

Для краткости, обозначим через

$$\tilde{Z}_k = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)}$$

число частиц в $k$-ом поколении ветвящегося процесса $Z_n^{**}$, являющихся потомками либо исходной частицы, либо одного из иммигрантов, поступивших в первые $m-1$ моментов времени. Соотношение (3.12) сводит оценивание вероятностей б.у. $Z_n^{**}$ к оцениванию вероятностей б.у. $\tilde{Z}_n$. В силу пункта 1) леммы 3.2 при любом $\varepsilon_1 > 0$ и достаточно малом $\delta_1 > 0$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_n \geq (1-\varepsilon)\exp(\theta n),\ \max_{i\leq n}\chi_i \geq \exp(\tilde{\theta} n)\right) \leq$$
$$\mathbf{P}\left(\max_{i\leq n}\chi_i \geq \exp(\tilde{\theta} n)\right) \leq \varepsilon_1 \mathbf{P}(S_n \geq \theta n),$$

где мы положили $\tilde{\theta} = \theta - \delta_1 - \mu_0$. С учетом этого неравенства выражение (3.12) оценим сверху суммой

$$\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_n \geq (1-\varepsilon)e^{\theta n}, \max_{i\leq m}\chi_i \geq c_1, \max_{i\leq n}\chi_i < e^{\tilde{\theta}n}\right) + \tag{3.13}$$
$$\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_n \geq (1-\varepsilon)e^{\theta n}, \max_{i\leq m}\chi_i < c_1\right) + \varepsilon_1 \mathbf{P}(S_n \geq \theta n),$$

параметр $c_1 > 0$. Мы покажем, что первым слагаемым в (3.13) можно будет пренебречь. Заметим, что

$$\left\{\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,n}^{(j)} \geq \exp(\theta n + \ln(1-\varepsilon))\right\} \bigcap \bigcup_{i_1=1}^{m}\{\chi_{i_1} > c_1\} \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup_{i=0}^{m-1}\left\{\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,n}^{(j)} \geq \exp(\theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon))\right\} \bigcap \bigcup_{i_1=1}^{m}\{\chi_{i_1} > c_1\} \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup_{i=0}^{m-1}\left\{\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,n}^{(j)} \geq \exp(\theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon)), \bigcup_{i_1=1}^{m}\{\chi_{i_1} > c_1\}\right\} =$$
$$= \bigcup_{i=0}^{m-1}\bigcup_{i_1=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,n}^{(j)} \geq \exp(\theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon)), \chi_{i_1} > c_1\right\}.$$

Отсюда следует, что первое слагаемое в (3.13) не превосходит следующей суммы:

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=c_1+1}^{[e^{\tilde{\theta}n}]} \mathbf{P}(\chi_i = l)\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{l} Z_{i,n}^{(j)} > \exp(\theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon))\right) + \tag{3.14}$$
$$\sum_{0\leq i\leq m-1}\sum_{i<i_1}\sum_{l=1}^{[e^{\tilde{\theta}n}]} \mathbf{P}\left(\chi_{i_1} > c_1, \chi_i = l, \sum_{j=1}^{l} Z_{i,n}^{(j)} > \exp(\theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon))\right) +$$
$$\sum_{0\leq i\leq m-1}\sum_{i>i_1}\sum_{l=1}^{[e^{\tilde{\theta}n}]} \mathbf{P}\left(\chi_{i_1} > c_1, \chi_i = l, \sum_{j=1}^{l} Z_{i,n}^{(j)} > \exp(\theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon))\right),$$

где, как и ранее, квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Обозначим первую сумму в правой части (3.14) через $A_1$, вторую сумму, соответствующую $i < i_1$, через $A_2$, ее слагаемые через $a_{2,i,i_1,l}$, третью сумму, соответствующую $i > i_1$, через $A_3$, а ее слагаемые через $a_{3,i,i_1,l}$.

В силу утверждения пункта 3) леммы 3.2 при некотором $c_2$, всех достаточно больших $n$ и всех рассматриваемых $i$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{l} Z_{i,n}^{(j)} > \exp(\theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon))\right) \le c_2 l^{h_\theta} \mathbf{P}(S_{n-i} \ge \theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon)),$$

откуда $A_1$ оценивается сверху величиной

$$c_2 \mathbf{E}\left(\chi_1^{h_\theta}; \chi_1 > c_1\right) \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{P}(S_{n-i} \ge \theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon)).$$

В силу пункта 3) леммы 3.1 справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(S_{n-b_n} \ge \theta n - a_n) \sim e^{h_\theta a_n} R(h_\theta)^{-b_n} \mathbf{P}(S_n \ge \theta n).$$

Следовательно, вероятность $\mathbf{P}(S_{n-i} \ge \theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon))$ эквивалентна при $n \to \infty$ выражению

$$m^{h_\theta}(1-\varepsilon)^{-h_\theta} R(h_\theta)^i \mathbf{P}(S_n \ge \theta n),$$

откуда при достаточно больших $n$ получаем

$$A_1 \le 2c_2 m^{h_\theta}(1-\varepsilon)^{-h_\theta} \mathbf{E}\left(\chi_1^{h_\theta}; \chi_1 > c_1\right) \frac{D(\theta)}{\sqrt{n}} \exp(-\Lambda(\theta)n) \sum_{i=0}^{\infty} R(h_\theta)^{-i}.$$

При $i_1 > i$ величина $\chi_{i_1}$ не зависит от $\chi_i$, $Z_{i,n}^{(j)}$, так что слагаемые $a_{2,i,i_1,l}$ оцениваются сверху величинами

$$\mathbf{P}(\chi_1 > c_1) c_2 l^{h_\theta} \mathbf{P}(\chi_1 = l) \mathbf{P}(S_{n-i} \ge \theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon)),$$

а их сумма $A_2$ - величиной

$$c_2 m \mathbf{P}(\chi_1 > c_1) \mathbf{E}\chi_1^{h_\theta} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{P}(S_{n-i} \ge \theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon)).$$

Аналогичные предыдущим рассуждения дают при достаточно больших $n$ оценку

$$A_2 \le 2c_2 m^{h_\theta+1}(1-\varepsilon)^{-h_\theta}\mathbf{E}\chi_1^{h_\theta}\mathbf{P}(\chi_1 > c_1)\frac{D(\theta)}{\sqrt{n}}\exp(-\Lambda(\theta)n)\sum_{i=0}^{\infty} R(h_\theta)^{-i}.$$

При $i_1 < i$ при любом $\varepsilon_2$ согласно утверждению 3) леммы 3.2 выполняется соотношение:

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \ge \theta n | Z_0 = l) \le c_1 l^{h_\theta}\mathbf{P}(S_n \ge \theta n),$$

а также найдется такое $t_1$, что $a_{3,i,i_1,l}$ оцениваются сверху величиной

$$\mathbf{P}(\chi_1 = l)(\varepsilon_2 l^{h_\theta}\mathbf{P}(S_{n-i} \ge \theta n - \ln m + \ln(1-\varepsilon)) +$$
$$\mathbf{P}(S_{n-i-1} \ge \theta n - \ln m - \ln l + \ln(1-\varepsilon) - t_1, \chi_{i_1-i} \ge c_1)),$$

откуда при всех достаточно больших $n$ справедлива оценка

$$A_3 \le 2m^{h_\theta+1}(1-\varepsilon)^{-h_\theta}\mathbf{E}\chi_1^{h_\theta}\frac{D(\theta)}{\sqrt{n}}\exp(-\Lambda(\theta)n)\left(\varepsilon_2 + e^{h_\theta t_1}\mathbf{P}^{(h_\theta)}(\chi_1 \ge c_1)\right)\sum_{i=0}^{\infty} R(h_\theta)^{-i}.$$

Суммируя полученные оценки, имеем для выражения (3.14) оценку сверху

$$\frac{2D(\theta)}{\sqrt{n}}(1-\varepsilon)^{-h_\theta}m^{h_\theta}\exp(-\Lambda(\theta)n)\left(\varepsilon_2 m\mathbf{E}\chi_1^{h_\theta} + \frac{c_2}{1-R(h_\theta)^{-1}}\left(\mathbf{E}(\chi_1^{h_\theta}; \chi_1 > c_1) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + m\mathbf{P}(\chi_1 > c_1)\left(\mathbf{E}\chi_1^{h_\theta} + e^{h_\theta t_1}\mathbf{P}^{(h_\theta)}(\chi_1 \ge c_1)\right)\right)\right)$$

при некоторых $c_1$, $\varepsilon_2$ и достаточно больших $n$. С учетом условия (3.3), полученная сумма, а вместе с ней и (3.14) оценивается сверху величиной $\varepsilon_1\mathbf{P}(S_n \ge \theta n)$. Таким образом, показана малость первого слагаемого в (3.13).

Перейдем к оцениваниваю второго слагаемого в (3.13) . Для этого фиксируем натуральные $t_1 < t_2$, $k > m$, представим его в виде

$$\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_n \ge (1-\varepsilon)\exp(\theta n), \max_{i \le m}\chi_i < c_1\right),$$

и оценим сверху суммой

$$\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_n \geq (1-\varepsilon)\exp(\theta n), \tilde{Z}_k < t_1,\ \max_{i\leq m}\chi_i < c_1\right) + \tag{3.15}$$
$$\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_n \geq (1-\varepsilon)\exp(\theta n), \tilde{Z}_k > t_2,\ \max_{i\leq m}\chi_i < c_1\right)$$
$$\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_n \geq (1-\varepsilon)\exp(\theta n), t_1 \leq \tilde{Z}_k \leq t_2, \max_{i\leq m}\chi_i < c_1\right),$$

из которой, как будет видно из дальнейших построений, основным окажется последнее слагаемое. Первое слагаемое (3.15) оценим сверху величиной

$$\mathbf{P}(Z_{n-k} \geq (1-\varepsilon)\exp(\theta n)|Z_0 = t_1),$$

которая в силу соотношения (1.8) и пункта 3) леммы 3.1 не превосходит $\varepsilon_1\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$ при всех достаточно больших $k$, где $\epsilon_1$ зависит от $t_1$. Второе слагаемое оценивается сверху величиной

$$\sum_{l=t_2}^{\exp((\theta-\mu_0-\delta)n)} \mathbf{P}(\tilde{Z}_k = l, \max_{i\leq m}\chi_i \leq c_1)\mathbf{P}(Z_{n-k} \geq \exp(\theta n)|Z_0 = l) + \tag{3.16}$$
$$\mathbf{P}(\tilde{Z}_k \geq \exp((\theta-\mu_0-\delta)n), \max_{i\leq m}\chi_i \leq c_1).$$

При достаточно малых $\delta$ и достаточно больших $n$ имеем оценку для второго слагаемого в (3.16)

$$\mathbf{P}(\tilde{Z}_k \geq \exp((\theta-\mu_0-\delta)n), \max\chi_i \leq c_1) \leq \mathbf{P}(\exists i, j : \ln Z_{i,k}^{(j)} \leq (\theta-\mu_0-\delta)n - \ln(c_1 k)).$$

Учитывая, что $Z_{i,k}^{(j)}$ распределено как $Z_{k-i}$, правую сторону получившегося неравенства оценим сверху выражением

$$c_1\sum_{i=0}^{k}\mathbf{P}(Z_{k-i} \geq \exp((\theta-\mu_0-\delta)n - \ln(c_1 k))),$$

которое в силу пункта 4) леммы 3.2 есть величина порядка $o(1)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$. Ввиду пункта 3) той же леммы 3.2

$$\mathbf{P}(Z_{n-k} \geq \exp(\theta n) | Z_0 = l) \leq l^{h_\theta} \mathbf{P}(S_{n-k} \geq \theta n),$$

откуда при достаточно больших $t_2$ следует, что выражение (3.16) не превосходит $2\varepsilon_1 \mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$. В этом рассуждении использован тот факт, что в силу Замечания 3.3 имеем

$$\mathbf{E}\tilde{Z}_k^{h_\theta} \leq \mathbf{E}(Z_k^{**})^{h_\theta} < \infty,$$

а значит $\mathbf{E}\left(\tilde{Z}_k^{h_\theta}; \tilde{Z}_k > t_1\right) \to 0$ при любом $k$ и $t_1 \to \infty$, равномерность указанной сходимости по $\theta$ вытекает из монотонности $x^h$ по $h$ при $x > 1$.

Перепишем третье слагаемое суммы (3.15) в виде

$$\sum_{l=t_1}^{t_2} \mathbf{P}\left(\ln Z_{n-k} \geq \theta n + \ln(1-\varepsilon) | Z_0 = l\right) \mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)} = l, \max_{i \leq m} \chi_i < c_1\right) \quad (3.17)$$

и оценим его сверху, для чего воспользуемся асимптотикой (1.8) и непрерывностью функций $I_l(\theta)$, $D(\theta)$, в результате чего получаем:

$$\mathbf{P}\left(Z_{n-k} \geq \exp(\theta n + \ln(1-\varepsilon)) \mid Z_0 = l\right) \sim \frac{I_l(\theta)(1-\varepsilon)^{-h_\theta} l^{h_\theta}}{\sqrt{n-k}} D(\theta)\, e^{-\Lambda(\theta) n}\, R(h_\theta)^{-k}.$$

Для $l > t_1$ и достаточно большого $t_1$ в силу Замечания 1.2 верно неравенство $I_l(\theta) \leq (1+\varepsilon_1)$, откуда следует, что выражение (3.17) при всех достаточно больших $n$ не превосходит

$$\frac{(1-\varepsilon)^{-h_\theta}(1+\varepsilon_1)}{\sqrt{n}} D(\theta) e^{-\Lambda(\theta) n} \sum_{l=0}^{\infty} R(h_\theta)^{-k} l^{h_\theta} \mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)} = l\right). \quad (3.18)$$

Представляя сумму по $l$ в (3.18) в виде

$$R(h_\theta)^{-k} \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)}\right)^{h_\theta} = \mathbf{E}^{(h_\theta)}\left(e^{-h_\theta S_k}\left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)}\right)^{h_\theta}\right)$$

Таким образом, полученная оценка сверху для третьего слагаемого в (3.16) завершает оценку второго слагаемого в (3.11). Тем самым для выражения (3.11), с учетом (3.19), получаем оценку

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n^{**} \geq \exp(\theta n)) \exp(\Lambda(\theta)n)\sqrt{n} \leq 5\varepsilon_1 D(\theta) +$$

$$+(1-\varepsilon)^{-h_\theta}(1+\varepsilon_1)D(\theta)\mathbf{E}^{(h_\theta)}\left(e^{-h_\theta S_k}\left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)}\right)^{h_\theta}\right). \tag{3.19}$$

Устремляя $k, m \to \infty$ и учитывая произвольность выбора $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, приходим к требуемой оценке сверху.

2) *Оценка снизу вероятности* $\mathbf{P}(Z_n^{**} \geq \exp(\theta n))$ .

Воспользовавшись представлением (3.11) для числа частиц в $n$-м поколении процесса $Z_n^{**}$, оценим рассматриваемую вероятность снизу выражением

$$\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_n \geq \exp(\theta n), t_1 \leq \tilde{Z}_k \leq t_2\right)$$

и представим его в виде

$$\sum_{l=t_1}^{t_2} \mathbf{P}(\ln Z_{n-k} \geq \theta n | Z_0 = l)\mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)} = l\right). \tag{3.20}$$

Воспользуемся асимптотикой (1.8) и получим в силу непрерывности функций $I_l(\theta)$, $D(\theta)$ соотношение

$$\mathbf{P}\left(Z_{n-k} \geq e^{\theta n} \mid Z_0 = l\right) \sim I_l\left(\frac{\theta n}{n-k}\right)\mathbf{P}(S_{n-k} \geq \theta n - \ln l) \sim \frac{I_l(\theta) l^{h_\theta}}{\sqrt{n-k}} D(\theta) e^{-\Lambda(\theta)n} R(h_\theta)^{-k}$$

при $n \to \infty$.

При достаточно больших $t_1$ и всех $l > t_1$ выполнено неравенство $I_l(\theta) \geq (1-\varepsilon_1)$, поэтому выражение (3.20) оценивается снизу величиной

$$\frac{(1-\varepsilon_1)}{\sqrt{n}} D(\theta) e^{-\Lambda(\theta)n} R(h_\theta)^{-k} \sum_{l=t_1}^{t_2} l^{h_\theta} \mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)} = l\right) \tag{3.21}$$

при любых $t_2$, $m$, $k$ и всех достаточно больших $n$.

При $l$, не превосходящих $t_1$, используем для вероятностей больших уклонений оценку сверху

$$\frac{1}{\sqrt{n}} D(\theta) e^{-\Lambda(\theta)n} R(h_\theta)^{-k} \sum_{l=0}^{t_1} l^{h_\theta} \mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)} = l\right) \le \frac{1}{\sqrt{n}} D(\theta) e^{-\Lambda(\theta)n} R(h_\theta)^{-k} {t_1}^{h_\theta},$$

которое при достаточно большом $k$ и всех достаточно больших $n$ не превосходит $\varepsilon_1 \mathbf{P}(S_n \ge \theta n)$.

В силу Замечания 3.3 при любом $k$ и достаточно больших $t_2$, $n$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} D(\theta) e^{-\Lambda(\theta)n} \sum_{l=t_2}^{\infty} R(h_\theta)^{-k} l^{h_\theta} \mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)} = l\right) < \varepsilon_1 \mathbf{P}(S_n \ge \theta n).$$

Следовательно, выражение (3.21) оценивается снизу величиной

$$\frac{(1-\varepsilon_1)}{\sqrt{n}} D(\theta) e^{-\Lambda(\theta)n} \sum_{l=0}^{\infty} R(h_\theta)^{-k} l^{h_\theta} \mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)} = l\right) - 2\varepsilon_1 \mathbf{P}(S_n \ge \theta n). \quad (3.22)$$

Преобразуя сумму по $l$ в (3.22) как и при оценке сверху с помощью равенства

$$R(h_\theta)^{-k} \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)}\right)^{h_\theta} = \mathbf{E}^{(h_\theta)}\left(e^{-h_\theta S_k}\left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)}\right)^{h_\theta}\right)$$

получаем в итоге:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(Z_n^{**} \ge \exp(\theta n))}{D(\theta) n^{-1/2} \exp(-\Lambda(\theta)n)} \ge \left((1-\varepsilon_1)\mathbf{E}^{(h_\theta)}\left(e^{-h_\theta S_k}\left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z_{i,k}^{(j)}\right)^{h_\theta}\right) - 2\varepsilon_1\right).$$

Устремляя $k, m \to \infty$ и учитывая произвольность выбора $\varepsilon_1$, приходим к требуемой оценке снизу, тем самым завершив доказательство теоремы 3.1.

## 3.4 Доказательство теоремы 3.2

В силу того, что асимптотика вероятностей больших уклонений для случая иммиграции в каждый момент времени отличается от асимптотики для стандартного ВПСС на мультипликативную константу, вычисление распределения начальной точки останется неизменным, так как отношение вероятностей $\mathbf{P}(\ln Z_{n-m} - \theta n \in [x_0, x_0 + \Delta_0])$ и $\mathbf{P}(\ln Z_n \geqslant \theta n)$, дающее нам это распределение, не поменяется. Выпишем первую вероятность аналогично случаю ВПСС без иммиграции:

$$I^{**}(\theta)\,\frac{1}{\sqrt{n-m}}e^{-\Lambda(\theta)n}R(h_\theta)^{-m}e^{-h_\theta x_0}(1-e^{-h_\theta \Delta_0}). \tag{3.23}$$

Поделив на вероятность большого уклонения $\mathbf{P}(\ln Z_n \geqslant \theta n)$ получим такое же распределение начальной точки, как в (2.31).

Переходные вероятности

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n-k} - \theta n \in [x_{m-k}, x_{m-k} + \Delta_{m-k}] \quad | \quad \ln Z_{n-k-1} - \theta n = x_{m-k-1}) \qquad k = 0, ..., m,$$

также останутся неизменными. Запишем их, опираясь на выражение (2.23) и определение ВПСС с иммиграцией.

$$\mathbf{P}\left(\ln \frac{\sum_{j=1}^{e^{\theta n + x_{m-k-1}}} \zeta_{n-k,j} + \chi_{n-k}}{e^{\theta n}} \in [x_{m-k}, x_{m-k} + \Delta_{m-k}]\right). \tag{3.24}$$

В силу того, что для иммиграции выполнено условие (3.3), мы можем использовать сходимость (2.24), и дальнейшие рассуждения теоремы 2.2 для подсчета переходных вероятностей остаются справедливыми.

Таким образом, завершаем доказательство теоремы 3.2.

## 3.5 Доказательство вспомогательных утверждений

**Доказательство леммы 3.1.**

1) Утверждение прямо следует из того, что функция $\Lambda(\theta)$ выпукла вниз и $\Lambda'(\theta) = h_\theta$.

2) Воспользуемся пунктом 1) и получим

$$\Lambda\left(\frac{\theta}{1-\delta_1}\right) = \Lambda\left(\theta + \frac{\delta_1\theta}{1-\delta_1}\right) \geq \Lambda(\theta) + \frac{h_\theta\theta\delta_1}{1-\delta_1} = \Lambda(\theta) + \frac{\delta_1}{1-\delta_1}\Lambda(\theta) + \frac{\delta_1 \ln R(h_\theta)}{1-\delta_1}.$$

При фиксированном $0 < \delta_1 < 1$ в силу выпуклости и равномерной непрерывности $\Lambda(\theta)$ найдется достаточно малое $\delta > 0$, что при всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\Lambda\left(\frac{\theta(1-\delta)}{1-\delta_1}\right) > \frac{\Lambda(\theta)}{1-\delta_1}.$$

3) $\Lambda(\theta)$ — гладкая функция с $\Lambda'(\theta) = h_\theta$, $\Lambda''(\theta) = \sigma^{-2}(h_\theta)$, откуда

$$\Lambda\left(\frac{\theta n - a_n}{n - b_n}\right) = \Lambda(\theta) + h_\theta\left(\frac{\theta b_n - a_n}{n - b_n}\right) + \frac{\sigma^2(\tilde{h})}{2}\left(\frac{\theta b_n - a_n}{n - b_n}\right)^2,$$

где $\tilde{h} \in [h_\theta, h_{(\theta - a_n)/(n-b_n)}]$. В силу ограниченности $\sigma(\cdot)$ получаем требуемое соотношение при $a_n, b_n = o(\sqrt{n})$, а в силу положительности $\sigma^2(\cdot)$ имеем требуемое неравенство при $a_n, b_n = O(n)$.

Для получения предельных соотношений для $\mathbf{P}(S_{n-b_n} \geq \theta n - a_n)$ остается подставить полученные соотношения в асимптотику (1.7).

4) Для получения требуемого утверждения достаточно разделить обе части равенства на вероятность $\mathbf{P}(S_n \geqslant \theta n)$, и использовать результат (1.5).

**Доказательство леммы 3.2.**

1) Положим $\tilde{\theta} = \theta - \delta - \mu_0$. Применяя неравенство Маркова, получаем:

$$\mathbf{P}(\max_{i \leq n} \chi_i \geq \exp(\tilde{\theta} n)) \leq n\mathbf{P}(\chi_1 \geq \exp(\tilde{\theta} n)) \leq$$
$$\leq \frac{n\mathbf{E}\chi_1^{h_\theta}}{\exp(h_\theta \tilde{\theta} n)} = n\mathbf{E}\chi_1^{h_\theta} e^{-\Lambda(\theta)n} e^{((\delta+\mu_0)h_\theta - \ln R(h_\theta))n}.$$

Остается заметить, что поскольку $\ln R(h_\theta) > \ln R(h_{\theta_1}) > 0$ и

$$\ln R(h_\theta) = m(0)h_\theta + \frac{\sigma^2(\tilde{h})h_\theta^2}{2} \geq \mu h_\theta + \frac{h_\theta^2}{2} \inf_{h\in[0,h_{\theta_2}]} \sigma^2(h), \;\; \tilde{h} \in [0, h_\theta], \tag{3.25}$$

то $(\mu_0 + \delta) < \ln R(h_\theta)/h_\theta$ при достаточно малых $\delta$ .
2) Фиксируем $\alpha > 1$ и разобьем область возможных значений среды $\eta$ на три подмножества

$$B_1 = \{\eta : U_k > V_k\}, B_2 = \{\eta : (u-1)U_k < n^\alpha l V_k\} \cap \overline{B_1}, B_3 = \overline{B_1 \cup B_2}.$$

Оценим вероятность $\mathbf{P}(Z_k \geq u|Z_0 = l)$, $u = [\exp(\theta n - x)]$, где $[\cdot]$ — целая часть.

При $\eta \in B_1$ соответствующая часть в разложении вероятности $\mathbf{P}(Z_k \geq u|Z_0 = l)$ относительно возможных значений среды оценивается сверху величиной

$$l\,\mathbf{E}\left(\mathbf{P}\left(Z_k \geq \frac{u}{l}\middle|\,\eta\right); B_1\right) \leq l\mathbf{E}\left(\mathbf{P}\left(Z_k \geq e^{\delta n}\middle|\,\eta\right); B_1\right) \leq l2^{-e^{\delta n}}, \tag{3.26}$$

где последнее неравенство следует из неравенства

$$\mathbf{P}\left(Z_k \geq e^{\delta n}\middle|\,\eta\right) = \frac{1}{U_k + V_k}\left(1 + \frac{U_k}{V_k}\right)^{-e^{\delta n}} < 2^{-e^{\delta n}},$$

что дает третье слагаемое в правой части неравенства пункта 2) леммы 3.2. Для оценки остальных частей в разложении воспользуемся следующим представлением вероятности $\mathbf{P}(Z_k \geq u|Z_0 = l, \eta)$ из работы [4]:

$$\left(\frac{V_k}{U_k+V_k}\right)^{u-1} \sum_{j=0}^{l-1} C_l^j \left(1 - \frac{1}{U_k+V_k}\right)^j \left(\frac{1}{U_k+V_k}\right)^{l-j} \sum_{i=0}^{l-j-1} C_{u-1}^i \left(\frac{U_k}{V_k}\right)^i, \tag{3.27}$$

(множитель $\left(1 - V_n^{-1}\right)^k$ в [4] следует заменить на $\left(1 - (U_n + V_n)^{-1}\right)^k$).

Вероятность события $B_2 = \{\eta : (u-1)U_k V_k^{-1} < n^\alpha l\} \cap \overline{B_1}$ с учетом неравенства

$$\frac{u}{2m} < \frac{u-1}{m} < \frac{V_k n^\alpha}{U_k} = n^\alpha \sum_{i=0}^{k-1} e^{S_k - S_i}$$

оценивается сверху величиной

$$\sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}\left(S_i \geq \ln\frac{u}{2n^{1+\alpha}l}\right) \leq \sum_{i=1}^{k} R(h_\theta)^i e^{-h_\theta \ln\left(\frac{u}{2n^{1+\alpha}l}\right)} \leq \frac{e^{-\Lambda(\theta)n+h_\theta x}}{1-R(h_\theta)^{-1}} R(h_\theta)^{k-n+1}(2n^{1+\alpha}l)^{h_\theta},$$

которая представляет собой второе слагаемое в правой части неравенства пункта 2) леммы 3.2.

Перейдем к оценке вероятности события $B_3$. Оно включает в себе такие значения среды $\eta$, для которых выполняется неравенство $(u-1)U_kV_k^{-1} \geq n^\alpha l$, $U_k \leq V_k$. Поскольку верна оценка снизу

$$\frac{C_{u-1}^{i+1}U_k^{i+1}V_k^{-i-1}}{C_{u-1}^{i}U_k^{i}V_k^{-i}} = \frac{(u-i-1)}{(i+1)}\frac{U_k}{V_k} \geq \frac{u-l}{l}\frac{U_k}{V_k} > n^\alpha - 1 \geq 2,$$

то величины $C_{u-1}^{i}U_k^{i}V_k^{-i}$ монотонно возрастают по $i<l$. Следовательно выполняется следующее неравенство для последнего множителя выражения (3.27)

$$\sum_{i=0}^{l-j-1} C_{u-1}^{i}\left(\frac{U_k}{V_k}\right)^i \leq C_{u-1}^{l}U_k^{l}V_k^{-l}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i} = 2C_{u-1}^{l}U_k^{l}V_k^{-l}. \tag{3.28}$$

Используя неравенство $\frac{V_k}{U_k+V_k} \leqslant 1-\frac{U_k}{2V_k}$ и оценку (3.28) получаем, что выражение (3.27) оценивается сверху величиной

$$e^{(u-1)\ln\left(1-\frac{U_k}{2V_k}\right)}2C_{u-1}^{l}\frac{U_k^l}{V_k^l} \leq \frac{2}{l!}\left(\frac{(u-1)U_k}{V_k}\right)^l \exp\left(-\frac{(u-1)U_k}{2V_k}\right). \tag{3.29}$$

В силу неравенства $l! > l^l e^{-l}$ правая часть в (3.29) оценивается сверху величиной $(f((u-1)U_kV_k^{-1}/l))^l$, где $f(v) = 2\exp(\ln v - v/2 + 1)$. Функция $f(v)$ монотонно убывает при $v>2$, а потому выражение (3.29) не превосходит $2\exp(-l(n^\alpha/2 - \alpha\ln n - 1))$, что представляет собой первый член в правой части неравенства пункта 2) леммы 3.2. Объединив полученные оценки, завершаем доказательство леммы.

3) Оценим сверху вероятность $\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n | Z_0 = l)$.

а) Фиксируем $\delta_1 > 0$ и предположим, что $l < e^{\delta_1 n}$. Воспользуемся представлением (3.27). Разобьем возможные значения среды $\boldsymbol{\eta}$ на три подмножества:

$$\tilde{B}_1 = \{\eta : (u-1)U_nV_n^{-1} > n^\alpha l\}, \tilde{B}_2 = \{\eta : le^t < (u-1)U_nV_n^{-1} \leq n^\alpha l\},$$

$$\tilde{B}_3 = \{\eta : (u-1)U_nV_n^{-1} \leq le^t\}, \quad \text{где } t > 2, \alpha > 1.$$

Вероятность большого уклонения, суженного на событие $\tilde{B}_1$, есть $o(1)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)l^{h_\theta}$ в силу оценок (3.26), (3.29).

В силу того, что $u = [\exp(\theta n - x)]$, а определение события $\tilde{B}_3$ можно переписать в виде $\{\eta : V_n/U_n \geq \exp(\ln(u-1) - \ln l - t)\}$, вероятность того же события, суженного на $\tilde{B}_3$, оценивается сверху величиной

$$\mathbf{P}(V_n/U_n \geq \exp(\theta n - \ln l - t)) = \mathbf{P}\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{S_i}\right) \geq \theta n - \ln l - t\right) \sim \qquad (3.30)$$
$$I_+\left(\frac{\theta n - \ln l - t}{n}\right)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n - \ln l - t).$$

Последняя эквивалентность вытекает из Теоремы 1 работы [10] (при этом в случае $\mu < 0$ там требуется выполнение условия $\theta n - \ln l - t > \gamma n$, которое в нашем случае выполняется при $\delta_1 < (\theta_1 - \gamma)/2$).

Функция $I_+(\cdot)$ в явном виде приведена в [10] и при рассматриваемых значениях параметров ограничена некоторой константой $c_1$. Тем самым, применив асимптотику (1.4) и эквивалентность из пункта 3) леммы 3.1 получаем для (3.30) оценку сверху $2c_1e^{h_\theta t}l^{h_\theta}\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$ при всех достаточно больших $n$.

Для вероятности события, суженного на $\tilde{B}_2$, получаем оценку сверху

$$\sum_{i=[e^t]}^{[\exp(\delta n)]+1} \mathbf{E}\left(\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n | Z_0 = l, \eta); \eta : li \leq (u-1)U_nV_n^{-1} < l(i+1)\right). \qquad (3.31)$$

При рассматриваемом ограничении на среду имеем, как и прежде, $U_n \leq V_n$. Величина $C_{u-1}^j U_n^j V_n^{-j}$ монотонно возрастает при $j \leq l$, причем каждый следующий член по меньшей мере в $e^t - 1 > 2$ раз больше предыдущего. Таким образом, сохраняет силу неравенство (3.29), откуда получаем

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n | Z_0 = l, \eta) \leq f\left(\frac{(u-1)U_n}{V_n l}\right)^l,$$

где функция $f$ определена в пункте 2) доказательства леммы 3.2 (см. (3.29) и далее). В силу указанного ограничения на $\eta$ сумма (3.31) оценивается сверху следующей

$$\sum_{i=[e^t]}^{[\exp(\delta n)]+1} \mathbf{P}\left(V_n U_n^{-1} \geq e^{\theta n - \ln l - \ln(i+1)}\right) f(i)^l \sim \tag{3.32}$$

$$I_+\left(\frac{\theta n - \ln l - t}{n}\right) \sum_{i=[e^t]}^{[\exp(\delta n)]+1} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n - \ln l - \ln(i+1)) f(i)^l,$$

где была использована эквивалентность (3.30). Применяя пункт 3) леммы 3.1, пользуясь монотонностью $f$ и тем, что $f(i)$ стремится к 0 при $i \to \infty$ при достаточно больших $t$, имеем для (3.32), а следовательно, и для (3.31) при всех достаточно больших $n$ оценку сверху в виде

$$2c_1 \mathbf{P}(S_n \geq \theta n) l^{h_\theta} \sum_{i=[e^t]}^{\infty} (i+1)^{h_\theta} i \exp(-i/2+1).$$

Здесь ряд сходится равномерно по всем рассматриваемым $\theta$, откуда и следует требуемая оценка.

Аналогичная оценка для вероятности

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n | Z_0 = l, \eta); S_n \leq \theta n - \ln l - t_1\right)$$

показывают, что при достаточно больших $t_1$ вероятность $\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n | Z_0 = l)$ не превосходит величины $\varepsilon l^{h_\theta} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$.

б) В случае $l \geq \exp(\delta_1 n)$, $\mu < 0$ вместо оценок (3.30), (3.32) воспользуемся неравенством

$$\mathbf{P}\left(\frac{V_n}{U_n} \geq e^{\theta n - \ln l - t}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(S_i \geq \theta n - \ln l - \ln n + t) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{R(h)^i n^h e^{ht}}{\exp(h(\theta n - \ln l))}, \tag{3.33}$$

справедливым при всех $h \in (0, h^+)$. Заметим, что при любом $a > 0$

$$h(\theta - a) - \ln R(h) = h_\theta(\theta - a) - \ln R(h_\theta) + (h - h_\theta)(\theta - a - m(\tilde{h})),$$

где $\tilde{h} \in [h, h_\theta]$. Следовательно, при некотором достаточно малом $\delta_2$ и всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ найдется такое $h < h_\theta$ (зависящее от $\theta$), что $R(h) > 1 + \delta_2$, и при всех $a > \delta_1$ справедливо неравенство

$$h(\theta - a) - \ln R(h) > h_\theta(\theta - a) - \ln R(h_\theta) + \delta_2.$$

Подставляя указанное $h$ и $a = (\ln l)/n$ в неравенство (3.33), имеем

$$\mathbf{P}\left(\frac{V_n}{U_n} \geq e^{\theta n - \ln l - t}\right) \leq \frac{R(h_\theta)^n}{1 - R(h)^{-1}} e^{ht} n^h \exp(-h_\theta(\theta n - \ln l)) e^{-\delta_2 n} = o(1)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n) l^{h_\theta}.$$

Таким образом, оценки пункта а) сохраняют свою силу и в случае б).
4) Из пункта 2) при $x = (\delta + \mu_0)l$ находим для рассматриваемой вероятности оценку сверху

$$\exp(-\Lambda(\theta)n) R(h_\theta)^{1+k-n} \frac{1}{1 - R(h_\theta)^{-1}} \exp(h_\theta(\delta + \mu_0)n) n^{h_\theta} + o(1)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n). \tag{3.34}$$

Остается заметить, что в силу (3.25) при достаточно малом $\delta$ и всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ выполнено неравенство $h_\theta \mu_0 - \ln R(h_\theta) < -2h_\theta \delta$, откуда и вытекает утверждение 4) леммы 3.2.
5) Представим рассматриваемую вероятность в виде

$$\sum_{l=t_1}^{\infty} \mathbf{P}(\ln Z_{n-k} \geq \theta n | Z_0 = l) \mathbf{P}(Z_k = l).$$

При помощи неравенства пункта 3) оценим сверху указанную сумму величиной

$$c_1\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)R(h_\theta)^{-k}\sum_{l=t_1}^{\infty} l^{h_\theta}\mathbf{P}(Z_k = l) + \mathbf{P}(\ln Z_k \geq \exp((\theta - \delta - \mu_0)n)). \quad (3.35)$$

Ввиду пункта 4) второе слагаемое в (3.35) при достаточно малых $\delta$ не превосходит $\varepsilon_1\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$. Первое слагаемое в (3.35) ввиду конечности $\mathbf{E}Z_k^{h_\theta}$ (См. Замечание 3.3) может быть сделано меньше, чем $\varepsilon_1\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$ за счет выбора $t_1$.

**Доказательство Леммы 3.3.**

Фиксируем $\delta,\ \delta_1 > 0$, положим $\tilde{\theta} = \theta - 2\delta - \mu_0$ и оценим вероятность $\mathbf{P}(A_{n,\delta,t})$ сверху следующей суммой

$$\mathbf{P}(\max_{i\leq n}\chi_i \geq \exp(\tilde{\theta}n)) + \quad (3.36)$$

$$\sum_{k=0}^{[\exp(\tilde{\theta}n)]}\sum_{i=1}^{[(1-\delta_1)n-1]}\mathbf{P}(\ln Z_i \geq (\theta - \delta)n | Z_0 = k)\mathbf{P}(\chi_1 = k) +$$

$$+\sum_{k=0}^{[\exp(\tilde{\theta}n)]}\sum_{i=[n(1-\delta_1)]}^{n}\mathbf{P}(\ln Z_i \geq \theta n - \delta(n-i) + t | Z_0 = k)\mathbf{P}(\chi_1 = k).$$

Первое слагаемое в (3.36) есть $o(1)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$ в силу пункта 1) леммы 3.2. Второе слагаемое с учетом утверждения 2) Леммы 3.2 мы оценим сверху величиной

$$\left(\sum_{i=1}^{[n(1-\delta_1 n)]}\sum_{k=0}^{[\exp(\tilde{\theta}n)]}\mathbf{P}(\chi_1 = k)k^{h_\theta}e^{h_\theta\delta n}n^{(1+\alpha)h_\theta}\frac{R(h_\theta)^{i-n+1}}{1-R^{-1}(h_\theta)} + o(1)\right)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$$

$$\leq \left(\mathbf{E}\chi_1^{h_\theta}\frac{1}{(1-R^{-1}(h_\theta))^2}n^{(1+\alpha)h_\theta}e^{\delta h_\theta n}R(h_\theta)^{-\delta_1 n} + o(1)\right)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n),$$

которая есть $o(1)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$ при любом $\delta_1$ и достаточно малом $\delta$.

Третье слагаемое в (3.36) оценим сверху с помощью утверждения пункта 3) леммы

3.2 при всех достаточно больших $n$ величиной

$$\sum_{i=[n(1-\delta_1)]}^{n} c_1 \mathbf{P}(S_i \geq \theta n - \delta(n-i) + t) \sum_{k=1}^{[\exp(\tilde{\theta} n)]} k^{h_\theta} \mathbf{P}(\chi_1 = k) \leq$$

$$c_1 \mathbf{E} \chi_1^{h_\theta} \sum_{i=[n(1-\delta_1)]}^{n} \mathbf{P}(S_i \geq \theta n - \delta(n-i) + t).$$

В силу утверждения 3) леммы 3.1 при некотором $c_2$ и всех достаточно больших $n$ выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(S_i \geq \theta n - \delta(n-i) + t) \leq \frac{c_2}{\sqrt{i}} \exp(-\Lambda(\theta) n) e^{-h_\theta t} e^{h_\theta \delta(n-i)} R(h_\theta)^{i-n}, \qquad (3.37)$$

где $\delta_1$, $\delta$ выбираются настолько малыми, что при всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\frac{\theta n - \delta(n-i) + t}{i} \in [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$$

для некоторого отрезка $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] \subset (\mu, m^+)$.

Функция $R(h_\theta)$ при $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ отделена сверху от единицы, а величина $h_\theta$ ограничена, так что при достаточно малых $\delta$ справедливо неравенство $c_3 := \sup_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} R(h_\theta)$ 1, и выражение (3.37) оценивается сверху величиной

$$e^{-h_\theta t} \frac{c_1 c_2 \mathbf{E} \chi_1^{h_\theta}}{(1 - c_3^{-1})} \frac{1}{\sqrt{(1-\delta_1) n}} \exp(-\Lambda(\theta) n).$$

Выбирая $t$ достаточно большим, приходим к заключению Леммы 3.3.

**Доказательство Леммы 3.4.**

При $h \geq 1$ воспользуемся следующими неравенствами из работы([11])

$$\mathbf{E} \max_{i \leq n} X_i^h < \left( \frac{h}{h-1} \right)^h \mathbf{E} X_n^h, \ \mathbf{P}(\max_{i \leq n} X_i > x) \leq \frac{\mathbf{E} \left( X_n^h I_{\max X_n > x} \right)}{x^h}.$$

Отсюда, в частности, вытекает оценка (3.6). При $1 \le h \le 2$ запишем

$$\mathbf{E}\max_{i\le n} X_i^h \le \int_1^\infty h x^{h-1}\mathbf{P}(\max_{i\le n} X_i > x)dx + 1 \le \tag{3.38}$$
$$h\int_1^\infty x^{-1}\mathbf{E}X_n^h I_{\max_{i\le n} X_i > x} dx + 1 \le 2\mathbf{E}X_n^h \ln^+ \max_{i\le n} X_i + 1.$$

В силу неравенства $a^h \ln^+ b \le a^h \ln^+ a + e^{-1}b^h$, $0 < a < b$, имеем

$$\mathbf{E}\max_{i\le n} X_i^h \le 2\mathbf{E}X_n^h \ln^+ X_n + \frac{2}{e}\mathbf{E}\max_{i\le n} X_i^h + 1,$$

откуда и следует оценка (3.7). При $h < 1$

$$\mathbf{E}\max_{i\le n} X_i^h \le 1 + \mathbf{E}\max X_i,$$

откуда следует оценка (3.8).

**Доказательство Леммы 3.5.**

1) Заметим, что $R^{(h)}(-h) = R(h)^{-1} < 1$, так что

$$\mathbf{E}^{(h)}\ln^+ U_n \le \sum_{k=0}^\infty (k+1)\mathbf{P}(S_n^{(h)} < -k) \le R^{(h)}(-h)^n \sum_{k=0}^\infty (k+1)e^{-kh} < \infty, \tag{3.39}$$

$$e^{h\mathbf{E}^{(h)}\ln^+ V_n} \le \mathbf{E}^{(h)} e^{h\ln^+ V_n} \le 1 + \sum_{i=0}^\infty R^{(h)}(-h)^i < \infty. \tag{3.40}$$

Из неравенства $\ln^+(a_1 + ... + a_n) \le \ln^+(\max(2, a_1)) + ... + \ln^+(\max(2, a_n))$ следует, что

$$\mathbf{E}^{(h)}U_n^h \ln^+ V_n = R(h)^{-n}\mathbf{E}\ln^+ V_n \le R(h)^{-n}\sum_{i=0}^{n-1}(2 + \mathbf{E}\ln^+ e^{-S_i}) \le \tag{3.41}$$
$$2nR(h)^{-n} + \frac{n(n+1)}{2}R(h)^{-n}\mathbf{E}(X_1^-).$$

Поскольку для $Y_n = Z_n e^{-S_n}$ имеем $\mathbf{E}(Y_n|\eta) = 1$ п.н., то

$$\mathbf{E}^{(h)}(Y_{n+1}|Y_n, ..., Y_1) = Z_n e^{-S_n}\, \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\left.\frac{Z_{n+1}}{Z_n e^{\xi_{n+1}}}\right| Z_n, Z_{n-1}, ..., Z_1, \eta\right)\middle| Y_n, ..., Y_1\right) =$$

$$Y_n \mathbf{E}\left(\frac{1}{Z_n}\sum_{i=1}^{Z_n} \mathbf{E}\left(\left.\frac{Z^{(i)}_{n,n+1}}{e^{\xi_{n+1}}}\right| \eta\right)\right) = Y_n,$$

так что $Y_n$ является мартингалом по мере $\mathbf{P}^{(h)}$ при любом $h$.
Ввиду формулы (1.3)

$$\mathbf{E}(Y_n \ln^+ Y_n|\eta) \le \ln^+ V_n + \sum_{k=1}^{\infty} kU_n \ln^+\left(\frac{kU_n}{V_n}\right) \frac{U_n}{V_n(U_n+V_n)}\left(1+\frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}. \quad (3.42)$$

Применяя неравенство $\ln(1+x) \ge x/2$, $x \le 1$, оценим (3.42) сверху при $U_n/V_n \le 1$ величиной

$$\ln^+ V_n + 2\ln 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{U_n}{V_n}\frac{kU_n}{V_n} \ln^+\left(\frac{kU_n}{V_n}\right) e^{-\frac{kU_n}{2V_n}}.$$

Эта величина не превосходит

$$\ln^+ V_n + 2\ln 2 + \int_1^{\infty} g(x)dx,$$

поскольку $g(x) = xe^{-x/2}\ln^+ x$ — некоторая интегрируемая монотонно убывающая при $x \ge 0$ функция. Аналогичным образом при $U_n/V_n \le 1$

$$\mathbf{E}(Y_n^h \ln^+ Y_n|\boldsymbol{\eta}) \le \ln^+ V_n\ \mathbf{E}(Y_n^h|\boldsymbol{\eta}) + V_n^h \mathbf{E}\left(\left(\frac{Y_n}{V_n}\right)^h \ln^+\left(\frac{Y_n}{V_n}\right)\middle| \boldsymbol{\eta}\right) \le$$

$$\ln^+ V_n\ V_n^{h-1}\int_0^{\infty} \tilde g(x)dx + V_n^{h-1}\int_0^{\infty}\tilde g(x)dx,$$

где функция $\tilde g(x)$ — монотонно убывающая, интегрируемая на полупрямой, $\tilde g(x) =$

$x^h e^{-x/2} \ln^+ x$. При $U_n/V_n > 1$

$$\mathbf{E}(Y_n \ln^+ Y_n \eta) \le \ln^+ V_n + \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-k} \ln k,$$

$$\mathbf{E}(Y_n^h \ln^+ Y_n | \eta) \le \ln^+ V_n \ V_n^{\max(h-1,0)} \sum_{k=1}^{\infty} k^h 2^{-k} \ln k + V_n^{\max(h-1,0)} \sum_{k=1}^{\infty} k^h 2^{-k}.$$

Для доказательства утверждения 1) леммы 3.5 остается проверить конечность (и равномерную ограниченность по $n$) величины $\mathbf{E}^{(h)} V_n^h \ln^+ V_n$. При $h \ge 1$ в силу неравенства Минковского

$$\left(\mathbf{E}^{(h)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(e^{-S_i} \left(\ln^+ V_n\right)^{1/h}\right)\right)^h\right)^{1/h} \le \sum_{i=0}^{n-1} \left(\mathbf{E}^{(h)} e^{-hS_i} \ln^+ V_n\right)^{1/h}.$$

Применяя неравенство $\ln^+(a+b) \le \ln^+ 2a + \ln^+ 2b$, получаем

$$\mathbf{E}^{(h)} e^{-hS_i} \ln^+ V_n \le \mathbf{E}^{(h)} e^{-hS_i} \ln^+(2V_i) + \mathbf{E}^{(h)} e^{-hS_i} \mathbf{E}^{(h)} \ln^+ \left(2e^{-S_i} \sum_{j=0}^{n-i-1} e^{-S_{i,i+j}}\right) \le$$
$$\mathbf{E}^{(h)} U_i^h \ln^+(2V_i) + R(h)^{-i} \left(\ln^+(2) + \mathbf{E}^{(h)} \ln^+ V_{n-i}\right),$$

и остается воспользоваться соотношениями (3.40), (3.41). При $h < 1$ аналогичные оценки можно получить с использованием неравенства

$$(a_1 + ... + a_n)^{h_\theta} \le \sum a_i^{h_\theta}. \tag{3.43}$$

2) В силу утверждения 1) леммы 3.5 для мартингала $Z_k e^{-S_k}$ выполнены условия леммы 3.4, откуда и следует требуемое заключение.

**Доказательство Леммы 3.6.**

Допустим, что $h_\theta \ge 1$. Заметим, что последовательность

$$\hat{Z}_{m,k} = \sum_{i=0}^{m} e^{-S_i} \sum_{j=1}^{\chi_i} \frac{Z_{i,k}^{(j)}}{\exp(S_{i,k})}$$

сходится п.н. при $k \to \infty$ и фиксированном $m$ к некоторой сл.в. $\hat{Z}_m$, поскольку сходятся последовательности $Z_{i,k}^{(j)} e^{-S_{i,k}}$. Последовательность $\hat{Z}_{m,k}$ мажорируется случайной величиной

$$\hat{Z}_m^{**} = \sum_{i=0}^{m} e^{-S_i} \sum_{j=1}^{\chi_i} \max_k \frac{Z_{i,k}^{(j)}}{\exp(S_{i,k})}.$$

В силу неравенства Минковского

$$\left(\mathbf{E}^{(h_\theta)} (\hat{Z}_m^{**})^{h_\theta}\right)^{1/h_\theta} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left( \mathbf{E}^{(h_\theta)} \left( e^{-h_\theta S_i} \left( \sum_{j=1}^{\chi_i} \max_k \frac{Z_{i,k}^{(j)}}{\exp(S_{i,k})} \right)^{h_\theta} \right) \right)^{1/h_\theta} \leq$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} R(h_\theta)^{-i/h_\theta} \left( \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{P}(\chi_i = l) l^{h_\theta} \mathbf{E}^{(h_\theta)} \left( \max_k \frac{Z_k}{\exp(S_k)} \right)^{h_\theta} \right)^{1/h_\theta} \leq$$
$$\frac{1}{1 - R^{1/h_\theta}(h_\theta)} \left( \mathbf{E}\chi_1^{h_\theta} \mathbf{E}^{(h_\theta)} \left( \max_k \frac{Z_k}{\exp(S_k)} \right)^{h_\theta} \right)^{1/h_\theta} < \infty,$$

где $Z_k$ — соответствующий $Z_k^{**}$ ветвящийся процесс без иммиграции (то есть $Z_k$ обозначает число тех частиц $k$-го поколения $Z_k^{**}$, которые являются потомками исходной частицы). В последнем неравенстве мы воспользовались условием (3.3) и леммой 3.5. Ввиду теоремы Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\mathbf{E}(\hat{Z}_{m,k})^{h_\theta} \to \mathbf{E}\hat{Z}_m^{h_\theta}.$$

Остается заметить, что последовательность $\hat{Z}_m^{h_\theta}$ монотонно сходится при $m \to \infty$ к случайной величине $\hat{Z}$, имеющей конечное положительное математическое ожидание.

При $h_\theta \leq 1$ доказательство аналогично с точностью до замены неравенства Минковского неравенством (3.43).

Равномерность всех рассматриваемых сходимостей $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ следует из равномерности использованных оценок.

# Заключение

В настоящей диссертационной работе были изучены ветвящиеся процессы в случайной среде с условным геометрическим распределением числа непосредственных потомков. Были рассмотрены случаи с иммиграцией в момент вырождения и в каждый момент времени. Для обоих случаев были получены новые асимптотические оценки для вероятностей больших уклонений таких ветвящихся процессов. При установленных ограничениях на сам процесс и иммиграцию было показано, что они отличаются от случая стандартного ветвящегося процесса в случайной среде на мультипликативную константу.

На основании этого факта было показано, что при условиях больших уклонений соответствующих процессов различия в асимптотическом поведении траекторий процессов с иммиграцией и без проявляются только на начальных участках траекторий, а поведение процессов идентично в левой окрестности точки $n$, т.е. отрезки соответствующих процессов сходятся по распределению к отрезку некоторого случайного блуждания.

Полученные результаты в случае иммиграции в момент вырождения и в каждый момент времени дополняют работы([3],[4],[8]) для случая геометрического распределения числа непосредственных потомков. Дальнейшее исследование темы может быть связано с перенесением полученных результатов на случай распределений более общего вида, а также дальнейшим изучением свойств траекторий рассматриваемых процессов и получением целого ряда функциональных предельных теорем.

# Список литературы


[1] Agresti A. On the extinction times of varying and random environment branching processes. *J. Appl. Prob.*, (1975), **12**, 1, 39-46.

[2] Петров В.В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения*, (1965), **10**, 310-322.

[3] Козлов М.В. О больших уклонениях ветвящихся процессов. *Дискретная математика*, (2006), **18**, 2, 29-47.

[4] Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде с произвольным начальным числом частиц. *Дискретная математика*, (2012), **24**, 4, 114-130.

[5] Боровков А.А., Коршунов Д.А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова, 2. Достационарные распределения в экспоненциальном случае. *Теория вероятностей и ее применения*, (2000), **45**, 3, 437-468.

[6] Шкляев А.В. Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума. *Теория вероятностей и ее применения*, (2010), **55**, 3, 590-598.

[7] Козлов М.В. О больших уклонениях максимума крамеровского случайного блуждания и процесса ожидания. *Теория вероятностей и ее применения*, (2013), **58**, 1, 81-116.

[8] Козлов М.В. О больших уклонениях строго докритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков. *Теория вероятностей и ее применения*, (2009), **54**, 3, 439-465.

[9] Bartfai P. On a conditional limit theorem. *Progress in statistics*, (1972), **1**, 85-91.

[10] Shklyaev A.V. Large Deviations for Solution of Random Recurrence Equation. *Markov Processes and Related Fields*, (2016), **22**, 1-26.

[11] Ширяев А.Н. *Вероятность-2.* Издательство МЦНМО, Москва, 2004.

[12] Козлов М.В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения*, (1976), **21**, 4, 813-825.

[13] Ватутин А.В., Дьяконова Е. Е., Критические ветвящиеся процессы в случайной среде: вероятности вырождения в фиксированный момент. *Дискретная математика*, (1997), **9**, 4, 100–126.

[14] Boinghoff C. , Dyakonova E. E. , Kersting G., Vatutin V. A., Branching processes in random environment which extinct at a given moment. *Markov Process. Related Fields*, (2010), **16**, 2, 329–350.

[15] Afanasyev V. I. , Geiger J. , Kersting G. , Vatutin V. A. , Functional limit theorems for strongly subcritical branching processes in random environment. *Stochastic Process. Appl.*, (2005), **115**, 10, 1658–1676.

[16] Dyakonova E. E. , Geiger J. , Vatutin V. A. , On the survival probability and a functional limit theorem for branching processes in random environment. *Markov Process. Related Fields*, (2004), **10**, 2, 289–306.

[17] Афанасьев В. И. , Функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика*, 13:4 (2001), 73–91.

[18] Bahadur R.R., Rango Rao R. On deviations of the sample mean. *Ann. Math. Statist.*, (1960), **31**, 4, 1015-1027.

[19] Харрис Т.Е., *Теория ветвящихся процессов.* Мир, Москва, 1966.

[20] Севастьянов Б.А., *Ветвящиеся процессы.* Наука, Москва, 1971.

[21] Athreya K.B., Ney P.E., *Branching Processes*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[22] Smith W.L., Wilkinson W.E., On branching processes in random environments, *Ann. Math. Statist.*, (1969), **40**, 3, 814-827.

[23] Athreya K.B., Karlin. S., On branching processes with random environments, I: Extinction probabilities, *Ann. Math. Statist.*, (1971), **42**, 5, 1499-1520.

[24] Афанасьев В. И. , Предельные теоремы для условного случайного блуждания и некторые применения. *Диссертация кандидата наук* (1980). Москва, МГУ, 1980.

[25] Боровков А. А., О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. *Сиб. матем. журн.*, (1995), **36**, 3, 493–509/

## Публикации автора

[26] Дмитрущенков Д.В. О больших уклонениях ветвящегося процесса в случайной среде с иммиграцией в моменты вырождения. *Дискретная математика*, (2014), **26**, 4, 36-42.

[27] Дмитрущенков Д.В., Шкляев А.В. Большие уклонения ветвящихся процессов с иммиграцией в случайной среде. *Дискретная математика*, (2016), **28**, 3, 34-54.