Отзыв официального оппонента о диссертационной работе Дмитрущенкова Д.В. "Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде с иммиграцией"

Одним из важных направлений в теории ветвящихся процессов является исследование ветвящихся процессов, эволюционирующих в случайной среде. Впервые модель ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС) была рассмотрена в работе Смита и Вилкинсона (1969) в предположении о независимости выбора среды в разные моменты времени. Более общая модель была исследована в двух, ставшими ныне классическими, статьях, написанных Атрейя и Карлиным в 1971 году. С тех пор на эту тему было опубликовано большое число работ. Исследования последних лет, в которых, наряду с оппонентом, принимали участие как зарубежные, так и российские ученые, в том числе Й.Гейгер, Г.Керстинг, В.Бансайе, К.Боингхофф, М.В.Козлов, В.И.Афанасьев, Е.Е. Дьяконова и ряд других, показали, что асимптотические свойства ВПСС во многом определяются свойствами так называемых сопровождающих случайных блужданий, являющихся обычными случайными блужданиями с приращениями, порождаемыми логарифмами среднего числа частиц различных поколений. Такое важное наблюдение позволило привлечь к анализу асимптотических свойств ВПСС известные свойства обычных случайных блужданий, полученных как на основе факторизационных тождеств Спарре-Андерсона и Спитцера, так и исходя из условных функциональных предельных теорем, доказанных для обычных случайных блужданий при условии их неотрицательности. В настоящее временя имеется достаточно большое число результатов, опирающихся на свойства типичных траекторий случайных блужданий.

Естественно поставить вопрос о том, а нет ли аналогов свойств ВПСС, соответствующих свойствам траекториям случайных блужданий в области больших уклонений? Изучению таких свойств ВПСС и посвящена диссертация Д.В.Дмитрущенкова. В ней выводится точная асимптотика вероятностей больших уклонений ВПСС с иммиграцией в случае, когда шаг сопровождающего случайного блуждания удовлетворяет так называемому правостороннему условию Крамера. Как оказалось (что и не удивительно в свете известных ранее результатов для ВПСС, рассматриваемых в зоне стандартных уклонений), асимптотика вероятностей больших уклонений размеров популяции ВПСС с точностью до константы определяется асимптотическим поведением вероятностей больших уклонений соответствующих сопровождающих случайных блужданий. Эта фраза может навести на мысль, что речь идет о простой переформулировке результатов для случайных блужданий в терминах ВПСС. Однако это не так. Для обоснования упомянутых результатов требуются значительные усилия. Хочу заметить, что первые работы о вероятностях больших уклонений случайных блужданий, полученные Г. Крамером, Бахадуром и Р.Рао, содержали утверждения о логарифмической асимптотике таких вероятностей. В определенном смысле окончательные результаты о вероятностях больших уклонений для случайных блужданий были (независимо) получены В.В. Петровым, в работе которого (ТВП, 1965 г.) была найдена точная асимптотика вероятностей уклонений случайного блуждания на расстояние tn от его математического ожидания в момент n, равномерная по t. Этот результат служит основой и для модели ВПСС с иммиграцией, рассматриваемой в диссертации.

Тематика диссертации (но не рассматриваемый в ней круг задач) не нова. Так в работе М. Козлова (1976) исследовался ВПСС без иммиграции с геометрическим условным относительно среды распределением числа непосредственных потомков частицы. Преимуществом этой частной модели является возможность выписать производящую функцию числа частиц n-го поколения в явном виде. Причем эта производящая функция была получена как математическое ожидание некоторого функционала от сопровождающего случайного блуждания. Именно эта модель с дополнением случайной и не зависящей от среды иммиграцией рассматривается в диссертации Д.В.Дмитрущенкова.

Исследование асимптотики вероятностей больших уклонений, проведенное в диссертации опирается, на работу М.В.Козлова, опубликованную в 2006, а также на ряд стаей А.В. Шкляева, значительно развивших тематику точной асимптотики вероятностей больших уклонений для ВПСС и реккурентных последовательностей со случайными коэффициентами.

В диссертации рассматривается два типа иммиграции - в моменты вырождения обычного ВПСС (глава 2) и в каждый момент времени (глава 3). Во обеих главах существенно используется найденная ранее А.В. Шкляевым асимптотика вероятностей больших уклонений ВПСС, начинающегося с произвольного числа частиц (в упомянутой работе М.В.Козлова ВПСС стартует с одной частицы). Показано, что при каждом типе иммиграции и определенных ограничениях, накладываемых на среднее сопровождающего случайного блуждания и на параметр t в уровне tn уклонения логарифма значений ВПСС с иммиграцией, соответствующие траектории проводят ограниченное по вероятности время в некоторой окрестности нуля, а затем двигаются в стороны больших значений.

Для более детального описания результатов диссертации необходимо остановиться на ее содержании подробнее.

Диссертация состоит из введения и трех глав.

Во введении приводятся ряд формальных сведений, обычно содержащихся в автореферате.

В главе 1 в фрагментарной форме изложены некоторые известные результаты теории ВПСС и теории больших уклонений для случайных блужданий с условием Крамера на распределение шага блуждания. Приводятся формулировки ряда утверждений, доказанных предшественниками, по асимптотике вероятностей больших уклонений ВПСС.

Глава 2 - содержательная. Она посвящена ВПСС $Z_n^*, n = 0, 1, 2, ...$ с иммиграцией, происходящей в моменты вырождения процесса. В разделе 2.1 формулируются две теоремы, из которых центральной является теорема 2.1. В ней утверждается, что асимптотика вероятностей больших уклонений числа частиц в таком процессе с иммиграцией совпадает (с точностью до постоянного множителя, не зависящего от времени и имеющего явный вид) с асимптотикой вероятностей больших уклонений числа частиц в ВПСС без иммиграции.

Доказательство теоремы 2.1 проводится в разделе 2.2. Вводится случайная величина $\tau = \tau(n)-$ момент последнего вырождения процесса до момента наблюдения n выхода ВПСС с иммиграцией в зону больших уклонений. Показано, что $\tau(n) = o(n)$. Отсюда следует, что анализируемая задача для ВПСС с указанной иммиграцией является, по сути, задачей об асимптотическом поведении вероятностей больших уклонений ВПСС без иммиграции, начинающегося со случайного числа частиц. При этом для совпадения (с точностью до постоянного множителя) асимптотического поведения анализируемых вероятностей процесса с иммиграцией с асимптотикой соответствующих вероятностей для процессов без иммиграции необходимо накладывать такие ограничения на распределение числа иммигрантов, которые препятствуют появлению "слишком большого"числа иммигрантов. Именно такие ограничения и введены в условия теоремы 2.1.

В разделе 2.3 доказана теорема об асимптотике вероятности одновременного попадания в зону больших уклонений компонент $(m+1)-$го вектора

$$(\ln Z^*_{n-m} - n\theta, ..., \ln Z^*_n - n\theta).$$

Глава 3 посвящена ВПСС $Z^{**}_n, n = 0, 1, ...$ с иммиграцией, происходящей в моменты времени $n = 1, 2, ...$ Основным результатом этой главы является теорема 3.1 об асимптотике вероятностей больших уклонений такого процесса. Как и в теореме 2.1 ограничения на параметры основного процесса и процесса иммиграции $\{\chi_1, \chi_2, ...\}$ таковы, что асимптотика вероятностей больших уклонений популяции ВПСС с иммиграцией определяется соответствующей асимптотикой сопровождающего случайного блуждания. В основе доказательства лежит разложение

$$Z^{**}_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{\chi_i} Z^{(j)}_{i,n}$$

где $Z^{(j)}_{i,n}$ - число частиц в n-ом поколении процесса, являющихся потомками j-й частицы-иммигранта, появившейся в процессе в момент i. Все эти величины связаны между собой случайной средой. Непосредственное доказательство теоремы 3.1 проводится в разделе 3.3, ему предшествуют формулировки вспомогательных утверждений в разделе 3.2, доказательство которых отнесено в последний раздел главы 3.5.

Доказательство теоремы 3.1 технически сложно и громоздко. Как и в теореме 2.1, попадание размера популяции в зону больших уклонений обусловлено, главным образом, влиянием иммигрантов, пришедших в популяцию на начальном отрезке эволюции процесса. При этом оказывается, что (в рамках введенных ограничений) количество иммигрантов в эти моменты времени можно, не теряя общности, равномерно ограничить константой, которая в последствии берется сколь угодно большой.

Научная и практическая ценность диссертации. Диссертация имеет теоретический характер. Рассмотренные в ней задачи и разработанные методы будут, несомненно, полезны специалистам, сталкивающимся в своей работе с проблемами вероятностей больших уклонений сумм зависимых случайных величин.

Все результаты диссертации являются новыми и опубликованы в двух работах автора, входящих в список, рекомендуемый ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Хотя в целом диссертация оставляет приятное впечатление, в ней имеется ряд недостатков. Перечислим некоторые из них.

- для обозначения вероятности и математического ожидания при фиксированной среде и после усреднения по среде следовало бы ввести разные символы, что сильно бы облегчило понимание текста;

- стр. 19, 3 строка сверху: вместо $x_m + \Delta_0$ должно быть $x_m + \Delta_m$;
- в ряде мест имеются довольно бессвязные фразы типа "Используя полученные оценки (2.11) и (2.8), получаем для нее оценку сверху"на стр.22;
- на стр. 25, формула (2.19) величина x_{m-k-1} не определена при $k = m$;
- стр. 33, формула (3.5) : вместо $E^{(h_\theta)}$должно быть $\mathbf{E}^{(h_\theta)}$;
- стр. 37, формула (3.9) : вместо $E^{(h_\theta)}$должно быть $\mathbf{E}^{(h_\theta)}$.
- стр. 42, формула (3.15) пропущен знак $+$.

Выводы. Указанные недостатки диссертации не оказывают существенного влияния на окончательные выводы относительно ее содержания. При получении результатов автор использовал тонкие вероятностные идеи и собственные методы, что является несомненным свидетельством высокой математической культуры диссертанта. Диссертация "Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде с иммиграцией" является законченной исследовательской работой, выполненной на высоком научном уровне. Она соответствует всем требованиям ВАК России, предъявляемым к кандидатским диссертациям в п. 9 "Положения о порядке присуждения учёных степеней" , а именно, в ней решены задачи, имеющие существенное значение для теории больших уклонений ветвящихся процессов в случайной среде, а ее автор Дмитрущенков Дмитрий Валерьевич заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика.

Ведущий научный сотрудник
МИРАН им. В.А. Стеклова, доктор физико-математических наук (специальность 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика)

Вату

В.А. Ватутин

05 июня 2017 года

Место работы:

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН,

г.Москва, 119991, ул. Губкина, дом 8

тел. 8-495-9848142, е-майл: vatutin@mi.ras.ru

Подпись Ватутина В.А. заверяю:
Зав. отделом кадров МИАН Васенская В.И.
05 июня 2017 года