ФГБОУ ВО Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Сысоева Любовь Николаевна

Об одном подходе к автоматной реализации булевых функций

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре дискретной математики механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Дудакова Ольга Сергеевна,**
кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Чухров Игорь Петрович,**
доктор физико-математических наук,
ФГБУН Институт автоматизации проектирования РАН, отдел информатизации, математического моделирования и управления,
ведущий научный сотрудник

Подолько Дмитрий Константинович,
кандидат физико-математических наук,
УорлдКвант Ресерч (Евразия) ЛЛС,
специалист по количественным исследованиям

Ведущая организация: **ФГУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук»**

Защита состоится «23» июня 2017 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, и на сайтах http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi, http://istina.msu.ru/dissertations/51269250.
Автореферат разослан «23» мая 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе
ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова,
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук **Шафаревич Андрей Игоревич**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к одному из основных направлений дискретной математики и математической кибернетики — теории функциональных систем[1,2]. Функциональные системы занимают важное место в дискретной математике и математической кибернетике, поскольку их можно рассматривать как модели, описывающие функционирование сложных систем. К числу важнейших задач теории функциональных систем относятся задачи о полноте, о выразимости, о структуре замкнутых семейств функций и т.д. Результаты, получаемые при исследовании функциональных систем, позволяют разрабатывать новые подходы для решения других задач дискретной математики и математической кибернетики.

В теории функциональных систем центральное место занимает система P_k — семейство всех функций k-значной логики ($k \geq 2$) с операцией замыкания. Из результатов Э. Л. Поста[3] следует, что каждый замкнутый класс булевых функций имеет конечный базис, а семейство замкнутых классов имеет счетную мощность. Многозначные логики во многом похожи на двузначную логику. В них сохраняются многие основные результаты, имеющие место в двузначной логике, к числу которых относятся решения проблемы функциональной полноты и задачи описания предполных классов[4]. Тем не менее, имеются существенные различия между P_2 и P_k при $k \geq 3$. Из результатов Ю. И. Янова и А. А. Мучника[5] следует, что мощность семейства всех

[1] *Кудрявцев В. Б.* Функциональные системы. М. : Изд-во МГУ, 1982. 158 с.

[2] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института АН СССР им. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

[3] См., например, *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. V. 43, № 3. P. 163–185; *Post E. L.* The two-valued iterative systems of mathematical logic. Annals of Math. Studies. Princeton University Press, 1941. V. 5; *Марченков С. С., Угольников А. Б.* Замкнутые классы булевых функций. М. : ИПМ им. М.В. Келдыша, 1990. 148 с; *Угольников А. Б.* О замкнутых классах Поста // Известия вузов. Математика. 1988. № 7. С. 79–88; *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М. : Наука, 1966. 120 с; *Kuntzman J.* Algebra de Boole. Bibliothegue de l'Ingenieur // Automaticien. - Paris : Dunod. 1965. № 1; *Lau D.* On closed subsets of Boolean functions (A new proof for Post's theorem) // J. Process. Cybern. EIK. 1991. Bd. 23, 3. P. 167–178; *Reschke M., Denecke K.* Ein neuer Beweis für die Ergebnisse von E. L. Post über abgeschlossene Klassen Boolescher Funktionen // J. Process. Cybern. EIK. 1989. Bd. 7. P. 361–380.

[4] См., например, *Кузнецов А. В.* О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. М. : Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 145–146; *Rosenberg I. G.* La structure des functions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris, Group 5. 1965. V. 260. P. 3817–3819; *Rosenberg I. G.* Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přiv. Věd., Praha. 1970. V. 80. P. 3–93.

[5] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.

замкнутых классов функций k-значной логики при $k \geq 3$ континуальна, что значительно затрудняет исследование решетки замкнутых классов функций.

Для преодоления указанных трудностей при изучении семейства замкнутых классов функций многозначной логики в научной литературе было предложено несколько подходов. Один из них заключается в рассмотрении различных модификаций операции суперпозиции, которые позволили бы получить более просто устроенную решетку классов функций, замкнутых относительно новой операции[6]. Перечислим некоторые результаты, полученные в этом направлении.

В работах С. С. Марченкова и Нгуен Ван Хоа[7] исследуется S-замыкание, в котором наряду с операцией суперпозиции применяется операция перехода к двойственным функциям относительно фиксированной группы подстановок. Для симметрической группы множества E_k в этих работах установлено, что множество S-замкнутых классов функций k-значной логики для любого $k \geq 3$ конечно, и при этом число таких классов растет сверхэкспоненциально с ростом k.

В работе А. В. Кузнецова[8] введены понятия параметрической выразимости и параметрического замыкания, а также установлены критерии параметрической выразимости для k-значных логик при $k \geq 2$ и найдены все параметрически замкнутые классы при $k = 2$. В дальнейшем было показано, что при всех $k \geq 3$ число параметрически замкнутых классов конечно[9]. На основе понятия параметрической выразимости О. М. Касим-Заде определено[10] понятие неявной выразимости. Им установлена эквивалентность параметрической и неявной выразимости при $k = 2$ и тем самым установлена конечность множества классов неявно выразимых булевых функций. Критерии неявной полноты множеств функций k-значной логики получены О. М. Касим-Заде и Е. А. Ореховой при $k = 2$ и $k = 3$ соответственно[11].

[6] *Угольников А. Б.* О некоторых задачах в области многозначных логик. // Мат-лы X Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля, 2010 г.) / Под ред. О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ, 2010. С. 18–34.

[7] См., например, *Марченков С. С.* Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискретная математика. 1996. Т. 8, № 1. С. 99–128; *Марченков С. С.* S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. 1997. Т. 9, № 3. С. 125–152; *Нгуен Ван Хоа.* О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики в P_3 // Дискретная математика. 1992. Т. 4, № 4. С. 82–95; *Нгуен Ван Хоа.* О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 87–108.

[8] *Кузнецов А. В.* О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.

[9] *Данильченко А. Ф.* О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397–416; *Barris S., Willard R.* Finitely many primitive positive clones // Proc. of the American Mathematical Society. 1987. 101. P. 427–430.

[10] *Касим-Заде О. М.* О неявной выразимости булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 2. С. 44–49.

[11] *Касим-Заде О. М.* О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Доклады Академии наук. 1996. Т. 348, № 3. С. 299–301; *Орехова Е. А.* Об

В работе Ю. В. Голункова[12] рассматривались функционально-предикатные системы с операциями замыкания программного типа, определяемые своими множествами предикатов, исследовалась задача о полноте таких систем. В работах В. А. Тайманова и В. Д. Соловьева[13] изучались системы функций k-значной логики, $k \geq 2$, с операциями программного типа. В. А. Тайманов установил, что в зависимости от свойств множеств предикатов, семейства замкнутых классов могут быть конечными, счетными и континуальными. Примеры конечных описаний замкнутых классов для некоторых операций программного типа рассматривались В. Д. Соловьевым.

В работах О. С. Тарасовой[14] исследуются классы k-значной логики, $k \geq 2$, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановки с множеством наборов специального вида.

В ряде работ рассматривается классификация функций многозначной логики, не связанная с замыканием относительно суперпозиции. В частности, в работах С. В. Яблонского, О. М. Касим-Заде и Г. Г. Аманжаева[15] рассматриваются классы, инвариантные относительно подстановки некоторого множества функций одной переменной. В работах Ю. В. Кузнецова[16] рассматриваются классы, инвариантные относительно отождествления переменных.

Другим важным примером функциональной системы является семейство **P** ограниченно-детерминированных функций (автоматных

одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. М. : Физматлит, 2003. Вып. 12. С. 27–75.

[12] *Голунков Ю. В.* Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции k-значной логики // Вероятностные методы и кибернетика. 1980. Вып. 17. С. 23–24.

[13] *Тайманов В. А.* О функциональных системах k-значной логики операциями программного типа // Доклады Академии наук СССР. 1983. Т. 268, № 6. С. 1307–1310; *Тайманов В. А.* Функциональные системы с операциями замыкания программного типа : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 / Тайманов Владимир Асанович. Москва, 1983. 142 с; *Соловьев В. Д.* Замкнутые классы в k-значной логике с операцией разветвления по предикатам // Дискретная математика. 1990. Т. 2, вып. 4. С. 18–25.

[14] *Тарасова О. С.* Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановок // Математические вопросы кибернетики. 2004. Вып. 13. С. 59–112; *Тарасова О. С.* Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановки // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2004. Вып. 1. С. 25–29.

[15] *Яблонский С. В.* Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. 1959. Вып. 2. С. 75–121; *Яблонский С. В.* Об одном семействе классов функций алгебры логики, допускающих простую схемную реализацию. Труды III Всесоюзного съезда, 1956. Т. 2. С. 149; *Касим-Заде О. М.* О классах функций, инвариантных относительно подстановки функций от одной переменной // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 3. С. 79–82; *Касим-Заде О. М.* О метрических свойствах обобщенных инвариантных классов // Математические вопросы кибернетики. 2006. Вып. 15. С. 9–34; *Аманжаев Г. Г.* О замыкании ненулевого инвариантного класса Яблонского по операции отождествления переменных // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 3. С. 76–79.

[16] *Кузнецов Ю. В.* Исследование инвариантных классов, связанных с функциональными системами : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 / Кузнецов Юрий Владимирович. Москва, 1987. 12 с; *Кузнецов Ю. В.* О классах булевых функций, инвариантных относительно отождествления переменных // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290, № 4. С. 780-785.

функций) с операциями суперпозиции и обратной связи[17,18]. Автоматные функции являются естественным обобщением функций многозначной логики. М. И. Кратко[19] установил алгоритмическую неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных систем автоматных функций. В. Б. Кудрявцев[1,20] показал, что семейство предполных классов в **P** имеет континуальную мощность. Вместе с тем, существуют конечные полные системы автоматных функций[21].

Так же, как и для функций многозначной логики, для автоматных функций в ряде работ предлагаются различные подходы к исследованию семейств автоматных функций, связанные с ослаблением, или, наоборот, усилением понятия полноты. К первому направлению относятся, например, задачи о τ-полноте[22] и об аппроксимационной полноте (A-полноте)[23]. В задаче о τ-полноте для автоматных функций наряду с операциями суперпозиции и обратной связи допускается также добавление всех автоматных функций, совпадающих с полученными функциями на всех входных наборах длины τ, где $\tau \geq 1$. В такой постановке операция обратной связи выразима через операцию суперпозиции[18], поэтому задача о τ-полноте близка к задаче о полноте в k^τ-значной логике. В задаче об A-полноте наряду с операциями суперпозиции и обратной связи допускается также рассмотрение автоматных функций, принадлежащих пересечению τ-пополнений рассматриваемого множества функций при всех $\tau \geq 1$. Ко второму направлению исследований можно отнести подход, связанный с разбиением конечных систем автоматов, исследуемых на полноту, на типы[24]. К одному типу относятся все системы,

[17] *Кудрявцев В. Б.* Функциональные системы автоматов // Интеллектуальные системы. М. : Изд-во РГГУ, 2006. Т. 10, вып. 1-4. С. 565–602.

[18] *Кудрявцев В. Б, Алёшин С. В., Подколзин А. С.* Введение в теорию автоматов. М. : Наука, 1985. 320 с.

[19] *Кратко М. И.* Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 155, № 1. С. 35–37.

[20] *Кудрявцев В. Б.* Вопросы полноты для систем автоматов // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 130, № 6. С. 1190–1192.

[21] См., например, *Буевич В. А.*. Построение универсальной о.-д. функции от двух входных переменных // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 15. С. 249–252; *Буевич В. А.* Построение универсальной о.-д. функции от двух входных переменных, имеющей два внутренних состояния // Проблемы кибернетики. 1970. Вып. 22. С. 75–83.; *Кудрявцев В. Б.* О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 13. С. 45–74.

[22] См., например, *Буевич В. А.* О τ-полноте в классе автоматных отображений // Доклады Академии наук. 1980. Т. 252, № 5. С. 221–224; *Буевич В. А.* О τ-полноте в классе детерминированных функций // Доклады Академии наук. 1992. Т. 326, № 3. С. 399–403.

[23] См., например, *Буевич В. А.* Условия A-полноты для конечных автоматов, ч.1. М. : Изд-во МГУ, 1986. 101 с; *Буевич В. А.* Условия A-полноты для конечных автоматов, ч.2. М. : Изд-во МГУ, 1987. 108 с.

[24] См., например, *Бабин Д. Н.* Неразрешимость проблемы полноты и A-полноты некоторых систем автоматных функций // Дискретная математика. 1995. Т. 7, № 2 С. 52–65.

содержащие заданный класс Поста булевых функций (то есть автоматов без памяти).

Отдельно следует упомянуть об исследованиях, связанных с реализацией булевых функций автоматами и логическими схемами над множествами автоматов. Такие задачи могут рассматриваться как частный случай задачи о реализации автоматных функций схемами в автоматных базисах, но также представляют и самостоятельный интерес. Так, например, в работе В. А. Кузьмина[25] рассматривается следующий подход: автомат с входным и выходным алфавитами $\{0,1\}$ реализует заданную булеву функцию f от n переменных, если в моменты времени, кратные n, значение функции выхода автомата совпадает со значением функции f на наборе значений переменных, который соответствует определенному отрезку входной последовательности. В работе То Суан Зунга[26] рассматриваются логические схемы над конечными множествами автоматов, при этом схема с n входами и одним выходом реализует заданную булеву функцию f от n переменных, если существует такое начальное состояние схемы, что для любой последовательности входных наборов значение функции выхода схемы в каждый момент времени (в другой постановке — в определенные моменты времени) совпадает со значением функции f на текущем входном наборе. Похожим образом понятие реализации булевых функций схемами в автоматных базисах вводится в работе В. А. Орлова[27]. Другой подход[28] состоит в том, что наборы, на которых заданная булева функция принимает значение 1, рассматриваются как слова конечного языка, и исследуется автомат, представляющий этот язык. Отметим, что в перечисленных работах автоматная реализация булевых функций исследовалась с точки зрения изучения сложности.

В представленной диссертации рассматриваются некоторые способы реализации булевых функций автоматами и исследуются проблемы выразимости. На множестве булевых функций вводится операция автоматного замыкания: рассматриваются автоматные формулы — формулы над конечным множеством автоматов, таких, что в каждом состоянии автомата функция выхода содержится в некотором исходном множестве булевых функций. Далее, считается, что автоматная формула реализует булеву функцию, если при последовательной подстановке в некотором порядке всех наборов значений переменных функции в каждый момент времени значение формулы совпадает со значением булевой функции на текущем входном наборе зна-

[25] *Кузьмин В. А.* Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 13. С. 75–96.

[26] *То Суан Зунг.* Об асимптотических закономерностях сложности автоматов из некоторых классов // Проблемы кибернетики. 1970. Вып. 22. С. 5–44.

[27] *Орлов В. А.* О сложности реализации ограниченно-детерминированных операторов схемами в автоматных базисах // Проблемы кибернетики. 1973. Вып. 26. С. 141–182.

[28] *Кибкало М. А.* Автоматная сложность булевых функций из классов Поста : автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 / Кибкало Мария Александровна. Москва, 2013. 22 с.

чений переменных. Определенную таким образом функциональную систему, с одной стороны, можно рассматривать как семейство булевых функций с операцией, усиливающей суперпозицию, с другой стороны, как семейство автоматных функций специального вида (автоматов без памяти) со специальными операциями. Данный подход представляется перспективным для исследований, поскольку он позволяет сочетать методы, применяемые для изучения логических функций, с методами теории автоматных функций.

Помимо операции автоматного замыкания в диссертации исследуется ее ослабленный вариант — операция обобщенного замыкания. Рассматриваются обобщенные формулы специального вида, а именно, обобщенные α-формулы (то есть такие формулы, в которых каждая подформула имеет не более одной подформулы, отличной от символа переменной). Следует отметить, что исследования, направленные на изучение свойств таких формул, являются актуальными, поскольку эти формулы представляют собой весьма простую модель вычисления дискретных функций. К настоящему времени ряд свойств α-формул над конечными системами функций многозначной логики изучен как с функциональной точки зрения, так и с точки зрения теории сложности. Установлено существование конечных α-полных систем в P_k при $k \geq 3$, отсутствие конечных α-полных систем для множества P_2 всех булевых функций[29], а также для ряда замкнутых классов[30], в частности для $T_0, T_1, T_0 \cap T_1$. В диссертации для этих замкнутых классов найдены конечные системы булевых функций, полные в классе обобщенных α-формул., а также для ряда замкнутых классов[31], в частности для $T_0, T_1, T_0 \cap T_1$.

В диссертации для введенной операции автоматного замыкания получено описание всех автоматно замкнутых классов булевых функций. Для замкнутых классов T_0, T_1 и $T_0 \cap T_1$ найдены конечные системы булевых функций, полные в классе обобщенных α-формул. Одновременно показано, что для этих систем автоматное замыкание совпадает с замыканием в классе обобщенных формул.

Еще один подход, представленный в данной диссертации, состоит в исследовании частного случая операции автоматного замыкания с точки зрения «выразительной силы» этой операции. Рассматривается реализация булевых функций от n переменных булевыми автоматами с константными состояниями и с n входами, то есть такими автоматами с входным

[29]См., например, *Глухов М. М.* Об α-замкнутых классах и α-полных системах функций k-значной логики // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 1. С. 16–21; *Чернышов А. Л.* Условия α-полноты систем функций многозначной логики // Дискретная математика. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 117–130; *Шабунин А. Л.* Примеры α-полных систем k-значной логики при $k = 3, 4$ // Дискретная математика. 2006. Т. 18, вып. 4. С. 45–55.

[30]*Трущин Д. В.* О глубине α-пополнения систем булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2009. № 2 С. 72–75.

[31]*Трущин Д. В.* О глубине α-пополнения систем булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2009. № 2 С. 72–75.

и выходным алфавитами $\{0, 1\}$, у которых в каждом состоянии функция выхода — это одна из функций $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (автоматами Мура[32]). Рассматривается задача нахождения максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним автоматом такого типа при условии возможности произвольного порядка подачи наборов значений входных переменных на входы автомата. Получено точное значение максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним инициальным булевым автоматом с двумя или тремя константными состояниями. Получена точная оценка максимального числа булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых инициальным булевым автоматом с произвольным количеством константных состояний, где $n > 1$. Исследован ряд свойств инициальных булевых автоматов, реализующих максимальное возможное число булевых функций от n фиксированных переменных (такие автоматы называются в работе квазиуниверсальными).

Цель работы

Основной целью данной диссертации является исследование вопросов полноты и выразимости, возникающих при реализации булевых функций автоматами в различных постановках. В частности, описание классов булевых функций, замкнутых относительно различных вариантов операции автоматного замыкания; получение оценок мощности множества булевых функций, реализуемых одним инициальным автоматом с константными состояниями; описание автоматов с константными состояниями, реализующих максимально возможное число булевых функций.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, комбинаторного анализа, а также методы математического анализа.

Научная новизна работы

Все основные результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации заключаются в следующем.

1. Получено описание всех классов булевых функций, замкнутых относительно введенного в работе оператора автоматного замыкания.

[32] *Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А.* Введение в теорию конечных автоматов. М. : Физматгиз, 1962. 404 с.

2. Для замкнутых классов T_0, T_1 и $T_0 \cap T_1$ найдены конечные системы булевых функций, полные в классе обобщенных α-формул.

3. Для любого достаточно большого n найдено максимальное возможное число булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых одним инициальным булевым автоматом с двумя и тремя константными состояниями ($\frac{5}{8} \cdot 2^{2^n}$ и $2^{2^n} - 2^n$ соответственно).

4. Описаны все инициальные булевы автоматы с двумя и тремя константными состояниями, реализующие максимально возможное число булевых функций от n фиксированных переменных для любого достаточно большого n.

5. Для любого n найдено максимально возможное число $2^{2^n} - 2$ булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых одним инициальным булевым автоматом с произвольным числом константных состояний.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории функциональных систем и в других разделах дискретной математики и математической кибернетики.

Апробация результатов

Результаты по теме диссертации докладывались автором на научно-исследовательском семинаре «Функции многозначной логики и смежные вопросы» под руководством профессора А. Б. Угольникова, профессора Р. М. Колпакова, профессора С. Б. Гашкова, доцента О. С. Дудаковой (МГУ, 2012, 2016 гг.), на семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» под руководством профессора О. М. Касим-Заде (МГУ, 2016 г.).

Результаты по теме диссертации докладывались автором на следующих всероссийских и международных конференциях:

– XI и XII Международные семинары «Дискретная математика и ее приложения» им. академика О. Б. Лупанова (г. Москва, МГУ, 2012, 2016 гг.);

– конференции «Ломоносовские чтения» (г. Москва, МГУ, 2013, 2016 гг.);

– Международные научные конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2013», «Ломоносов-2014», «Ломоносов-2015» (г. Москва, МГУ, 2013, 2014, 2015 гг.);

– XVII Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (г. Казань, КФУ, 2014 г.);

– IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (г. Москва и Подмосковье, 2015 г.);

– X «Молодежная научная школа по дискретной математике и ее приложениям» (г. Москва, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2015 г.);

– XI Международная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» (г. Москва, МГУ, 2016 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы автором в 9 печатных работах [1–9], из них 4 [1–4] в научных журналах из перечня, рекомендованного ВАК (список публикаций приведен в конце автореферата).

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 91 наименования. Общий объем работы — 183 страницы.

Краткое содержание работы

Во **введении** приведен обзор результатов по тематике работы и кратко изложены основные результаты диссертации.

В **первой главе** рассматривается задача описания автоматно замкнутых классов булевых функций.

В § **1** даны основные определения. *Булевым автоматом* назовем автомат V с произвольным числом входов, одним выходом, входным и выходным алфавитами $\{0, 1\}$. Будем полагать, что входы автомата V занумерованы от 1 до n, и на i-й вход подается значение булевой переменной x_i. То есть в каждый момент времени на вход автомата V подается некоторый двоичный набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и для любого фиксированного состояния $q \in Q$ функция выхода $F(q, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является булевой функцией от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_2$, булев автомат V назовем *автоматом над* $\mathcal{A}$, если для любого состояния q функция выхода $F(q, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержится в $\mathcal{A}$ (функции из $\mathcal{A}$ рассматриваются с точностью до несущественных переменных и переименования переменных). Пусть V_{q_1} — инициальный булев автомат с начальным состоянием q_1 и n входами. Скажем, что V_{q_1} *реализует функцию* f, если существует упорядоченная последовательность всех двоичных наборов $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$, такая, что при последовательной подаче на вход V_{q_1} наборов из C в каждый момент $t = 1, 2, \ldots, 2^n$ на выходе V_{q_1} выдается значение $f(\widetilde{\beta}_t)$.

В § **2** вводится понятие автоматного замыкания множества булевых функций. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_2$, автоматную функцию h будем называть *двоичной автоматной функцией над* $\mathcal{A}$, если h реализуется некоторым инициальным булевым автоматом над $\mathcal{A}$. Пусть V_{q_1} — инициальный булев автомат, реализующий двоичную автоматную функцию h. Будем говорить, что *функция* h *реализует булеву функцию* f, если V_{q_1} реализует функцию f.

Для автоматных функций можно стандартным образом определить понятие автоматной формулы, т. е. формулы над системой автоматных функций[18,33]. Пусть дано некоторое конечное множество булевых функций $\mathcal{A}$. Введем следующее понятие *автоматной формулы над* $\mathcal{A}$ индуктивным образом: символ любой переменной является (тривиальной) автоматной формулой над $\mathcal{A}$; далее, пусть $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — двоичная автоматная функция над $\mathcal{A}$ и $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ — автоматные формулы над $\mathcal{A}$, тогда $h(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ является автоматной формулой над $\mathcal{A}$. Понятие *автоматной функции, реализуемой автоматной формулой над* $\mathcal{A}$, определяется стандартным образом. Пусть автоматная формула Φ над $\mathcal{A}$, реализует некоторую автоматную функцию h. Скажем, что *автоматная формула* Φ *реализует булеву функцию* f, если f реализуется функцией h.

Автоматным замыканием $[\mathcal{A}]_A$ множества булевых функций $\mathcal{A}$ называется множество всех булевых функций, реализуемых автоматными формулами над $\mathcal{A}$.

В § **3** доказано, что для оператора автоматного замыкания выполняются все аксиомы замыкания[1], и описаны все замкнутые классы в P_2.

Теорема 1. *Для автоматного замыкания в* P_2 *существует ровно шесть замкнутых классов:* $\{0\}, \{1\}, T_0 \cap T_1, T_0, T_1, P_2$.

Во **второй главе** рассматривается задача о реализации булевых функций обобщенными формулами.

В § **1** даны основные определения, в частности, обобщенной формулы и обобщенного замыкания. Пусть дано некоторое конечное множество $\mathcal{A} = \{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_s(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$ булевых функций от m фиксированных переменных. Через $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ обозначается множество $\{f_1^{(m)}, \ldots, f_s^{(m)}\}$ функциональных символов, соответствующих функциям из $\mathcal{A}$. Пусть $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^m}$ — всевозможные двоичные наборы длины m и $\mathsf{G} = \{g_{\widetilde{\alpha}_1}, g_{\widetilde{\alpha}_2}, \ldots, g_{\widetilde{\alpha}_{2^m}}\}$ — семейство отображений $g_{\widetilde{\alpha}_i} : \mathcal{F}(\mathcal{A}) \to \mathcal{F}(\mathcal{A})$, $i = 1, 2, \ldots, 2^m$. Назовем множество G *правилом смены на множестве* $\mathcal{A}$.

Обозначим через $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ множество всех формул над $\mathcal{A}$, все переменные которых содержатся среди переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть G — некоторое правило смены на множестве $\mathcal{A}$ и $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — произ-

[33] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М. : Высшая школа, 2008. 384 с.

вольный двоичный набор длины n. Определим следующее преобразование $\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}$ формул из $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ индукцией по глубине формул. Пусть Φ — некоторая формула из $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

1. Базис индукции. Если Φ — символ переменной, то[34] $\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi) \underset{\Gamma}{=} \Phi$.
2. Индуктивный переход.
   Пусть $\Phi \underset{\Gamma}{=} f_i^{(m)}(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m)$, где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.
   Тогда $\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi) \underset{\Gamma}{=} \widehat{f}^{(m)}(\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi_1), \mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi_2), \ldots, \mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi_m))$, где $\widehat{f}^{(m)} = g_{\widetilde{\beta}}(f_i^{(m)})$ при $\widetilde{\beta} = (\Phi_1|_{\widetilde{\alpha}}, \Phi_2|_{\widetilde{\alpha}}, \ldots, \Phi_m|_{\widetilde{\alpha}})$.

Обобщенной формулой F *над множеством функций* $\mathcal{A}$ будем называть пару $(\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G})$, где $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\mathcal{A}$ (*начальная формула обобщенной формулы* F), а G — некоторое правило смены на $\mathcal{A}$. Множество всех переменных формулы Φ будем называть *множеством всех переменных обобщенной формулы* F.

Пусть C — последовательность всех двоичных наборов длины n, такую последовательность назовем *допустимой*. Для обобщенной формулы $\mathsf{F} = (\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G})$ и последовательности C можно построить последовательность формул над множеством $\mathcal{A}$

$$\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, C) = (\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_{2^n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

по следующим правилам:

1) $\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \underset{\Gamma}{=} \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
2) $\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}_j}(\Phi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \underset{\Gamma}{=} \Phi_{j+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для любого $j = 1, 2, \ldots, 2^n$.

Пусть $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — некоторый набор значений всех переменных обобщенной формулы F, и пусть j — такой номер из $\{1, 2, \ldots, 2^n\}$, что $\widetilde{\beta} = \widetilde{\alpha}_j$, где $\widetilde{\alpha}_j \in C$. Определим *значение* $\mathsf{F}(C)|_{\widetilde{\beta}}$ *обобщенной формулы* F *с последовательностью* C *на наборе* $\widetilde{\beta}$ *значений переменных* как $\Phi_j|_{\widetilde{\alpha}_j}$, где Φ_j — j-ая формула из последовательности $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, C)$.

Таким образом можно определить значение обобщенной формулы F с допустимой последовательностью C на любом наборе значений переменных формулы F и тем самым сопоставить обобщенной формуле F с допустимой последовательностью C функцию алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Скажем, что *функция* f *реализуется обобщенной формулой* F *с последовательностью* C. Будем также говорить, что *функция* f *реализуется обобщенной формулой* F, если для некоторой допустимой последовательности C функция f реализуется обобщенной формулой F с последовательностью C.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное конечное множество булевых функций от m фиксированных переменных. *Обобщенным замыканием* $[\mathcal{A}]_{\mathsf{F}}$ множества

[34]Через $\Psi \underset{\Gamma}{=} \Phi$ обозначается графическое равенство формул Ψ и Φ.

булевых функций $\mathcal{A}$ называется множество всех булевых функций, реализуемых обобщенными формулами над $\mathcal{A}$.

Обобщенную формулу $\mathsf{F} = (\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G})$ будем называть *формулой с линейной структурой* (или *обобщенной α-формулой*), если начальная формула $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является α-формулой, то есть формулой, любая подформула которой содержит не более одной главной подформулы, отличной от символа переменной. *Линейной дизъюнктивной* (*конъюнктивной*) формулой будем называть α-формулу, все функциональные символы которой являются дизъюнкциями (конъюнкциями).

В § **2** показано, что обобщенное замыкание любого множества булевых функций содержится в автоматном замыкании этого множества, то есть обобщенное замыкание является более слабой операцией, чем автоматное замыкание.

В § **3** установлены некоторые свойства обобщенных формул.

В § **4** доказано, что обобщенными формулами над $\{x \vee y, x\&y\}$ можно реализовать любую функцию из замкнутого класса $T_0 \cap T_1$ с линейной сложностью и глубиной.

Пусть $\mathcal{A} = \{x \vee y, x\&y\}$. Обозначим через $\mathsf{G}^* = \{g_{(0,0)}, g_{(0,1)}, g_{(1,0)}, g_{(1,1)}\}$ правило смены на множестве $\{\vee^{(2)}, \&^{(2)}\}$, задаваемое следующей таблицей:

	$g_{(0,0)}$	$g_{(0,1)}$	$g_{(1,0)}$	$g_{(1,1)}$
$\vee^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\&^{(2)}$
$\&^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\vee^{(2)}$

Множество всех обобщенных формул над $\{x_1 \vee x_2,\ x_1\&x_2\}$ с правилом смены G^* и начальной формулой $x_1 \vee (x_2 \vee \ldots (x_{n-1} \vee x_n) \ldots)$ (с начальной формулой $x_1\&(x_2\& \ldots (x_{n-1}\&x_n) \ldots))$ будем обозначать через $\mathfrak{F}_\vee$ (соответственно, $\mathfrak{F}_\&$).

Основными результатами § 4 являются следующие теоремы.

Теорема 2. *Для любого $n \geq 1$, любой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса $T_0 \cap T_1$, существует обобщенная формула F из $\mathfrak{F}_\vee \cup \mathfrak{F}_\&$ и допустимая последовательность C, такая, что обобщенная формула F с последовательностью C реализует функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Теорема 3. *Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из множества $T_0 \cap T_1$ может быть реализована обобщенной формулой над $\{\vee, \&\}$ со сложностью начальной формулы n и глубиной $n - 1$.*

В § **5** получен аналогичный результат для замкнутых классов T_0 и T_1. Обозначим множество всех линейных дизъюнктивных (соответственно, конъюнктивных) формул, в которые каждая переменная из $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ входит ровно один раз, через $\mathfrak{P}_0(n)$ (соответственно, через $\mathfrak{P}_1(n)$), $n \geq 2$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_0$ (соответственно, $\mathfrak{F}_1$) множество обобщенных формул над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$ (над $\{x\&y, 1(x, y)\}$), имеющие линейные структуры, с правилом смены $\mathsf{G}_0 = \{g_{(0,0)}, g_{(0,1)}, g_{(1,0)}, g_{(1,1)}\}$ ($\mathsf{G}_1 = \{g_{(0,0)}, g_{(0,1)}, g_{(1,0)}, g_{(1,1)}\}$), задаваемым следующей таблицей:

$$\begin{array}{c|cccc} \mathsf{G}_0 & g_{(0,0)} & g_{(0,1)} & g_{(1,0)} & g_{(1,1)} \\ \hline \vee^{(2)} & 0^{(2)} & \vee^{(2)} & \vee^{(2)} & \vee^{(2)} \\ 0^{(2)} & \vee^{(2)} & 0^{(2)} & 0^{(2)} & 0^{(2)} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{c|cccc} \mathsf{G}_1 & g_{(0,0)} & g_{(0,1)} & g_{(1,0)} & g_{(1,1)} \\ \hline \&^{(2)} & \&^{(2)} & \&^{(2)} & \&^{(2)} & 1^{(2)} \\ 1^{(2)} & 1^{(2)} & 1^{(2)} & 1^{(2)} & \&^{(2)} \end{array}\right)$$

Теорема 4. *Для любого $n \geq 2$, для любой функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса T_0, для любой формулы Φ из множества $\mathfrak{P}_0(n)$ существует такая допустимая последовательность C, что обобщенная формула $\mathsf{F} = (\Phi, \mathsf{G}_0)$ из $\mathfrak{F}_0$ с последовательностью C реализует функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Теорема 5. *Для любого $n \geq 2$, для любой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса T_1, для любой формулы Φ из множества $\mathfrak{P}_1(n)$ существует такая допустимая последовательность C, что обобщенная формула $\mathsf{F} = (\Phi, \mathsf{G}_1)$ из $\mathfrak{F}_1$ с последовательностью C реализует функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Теорема 6. *Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из множества $T_0 \cup T_1$ может быть реализована обобщенной формулой над $\{0, 1, \vee, \&\}$ со сложностью начальной формулы n и глубиной $n - 1$.*

В **третьей главе** исследуется реализация булевых функций *автоматами с константными состояниями* и n входами, то есть такими автоматами с входным и выходным алфавитами $\{0, 1\}$, у которых в каждом состоянии функция выхода — это одна из функций $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (такие состояния будем называть 0-*состоянием* и 1-*состоянием* соответственно).

В § **1** рассматриваются различные постановки задачи о реализации множества булевых функций одним автоматом, аргументируется выбор одной из постановок.

Пусть V_{q_1} — инициальный булев автомат с начальным состоянием q_1 и n входами. Обозначим через $P(V_{q_1})$ множество всех булевых функций из $P_2(n)$, реализуемых автоматом V_{q_1}. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq P_2(n)$. Автомат V_{q_1} называется *универсальным для множества* $\mathfrak{A}$, если $P(V_{q_1}) = \mathfrak{A}$. Автомат V_{q_1} с фиксированным числом состояний называется *квазиуниверсальным*, если он реализует максимально возможное для этого числа состояний число булевых функций. Показано, что не существует инициального булева автомата с константными состояниями, универсального для множества $P_2(n)$ всех булевых функций от n переменных. Далее в третьей главе рассматриваются вопросы, связанные с построением квазиуниверсальных автоматов.

В § **2** рассматривается задача нахождения максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним инициальным булевым автоматом с двумя константными состояниями. Обозначим через $\mathfrak{V}_2(n)$ множество всех инициальных булевых автоматов с двумя константными состояниями и n входами, содержащих одно 0-состояние и одно 1-состояние; без ограничения общности будем считать, что начальным является 0-состояние. Получено точное значение максимальной мощности множества булевых функций, реализуемых автоматом из $\mathfrak{V}_2(n)$.

Теорема 7. *Для любого $n \geq 2$ максимальная мощность множества $P(V_{q_1})$ для автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$ равна $\frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$.*

Описаны все автоматы, для которых достигается данное значение. Пусть V_{q_1} — инициальный булев автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$ с множеством состояний $Q = \{q_1, q_2\}$, где q_1 — начальное состояние, и $g : Q \times \{0,1\}^n \to Q$ — функция переходов автомата V_{q_1}. Пусть $M = \{\widetilde{\alpha} : g(q_1, \widetilde{\alpha}) = q_2\}$, и $N = \{\widetilde{\alpha} : g(q_2, \widetilde{\alpha}) = q_1\}$. Заметим, что автомат V_{q_1} однозначно задается множествами M и N.

Теорема 8. *Пусть V_{q_1} — автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$, где $n \geq 2$. Тогда равенство $|P(V_{q_1})| = \frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$ достигается в том и только том случае, когда $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \emptyset$.*

Описано множество всех функций, реализуемых квазиуниверсальным булевым автоматом с двумя константными состояниями. Пусть $n \geq 2$ и V_{q_1} — автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$, определяемый множествами M и N, такими, что $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \emptyset$. Обозначим через $\mathfrak{A}_1(V_{q_1})$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на всех трех наборах множества $M \cup N$, через $\mathfrak{A}_2(V_{q_1})$ — множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 1 на обоих наборах множества M, а через $\mathfrak{A}(V_{q_1})$ множество $\mathfrak{A}_1(V_{q_1}) \cup \mathfrak{A}_2(V_{q_1})$. Заметим, что $|\mathfrak{A}(V_{q_1})| = \frac{3}{8} \cdot 2^{2^n}$. Обозначим через $\overline{P(V_{q_1})}$ множество всех функций из $P_2(n)$, которые не могут быть реализованы автоматом V_{q_1}.

Теорема 9. *Для любого $n \geq 2$ и автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$, такого, что $|P(V_{q_1})| = \frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$ выполнено $\overline{P(V_{q_1})} = \mathfrak{A}(V_{q_1})$.*

В § **3** рассматривается аналогичная задача для инициального булевого автомата с тремя константными состояниями.

Обозначим через $\mathfrak{V}_3(n)$ множество всех инициальных булевых автоматов с n входами, содержащих хотя бы одно 0-состояние и хотя бы одно 1-состояние, с начальным 0-состоянием. Множество $\mathfrak{V}_3(n)$ разбивается на два подмножества: $\mathfrak{V}_3^0(n)$ состоит из всех автоматов, содержащих ровно одно 1-состояние, $\mathfrak{V}_3^1(n)$ состоит из всех автоматов, содержащих ровно одно 0-состояние, являющееся начальным. Автоматы из множеств $\mathfrak{V}_3^0(n)$ и $\mathfrak{V}_3^1(n)$ можно схематично изобразить с помощью диаграмм, изображенных на рис. 1 и рис. 2, где $A, B, K, M, T, E \subseteq \{0,1\}^n$ (в кружочках, обозначающих состояния, написаны символы, соответствующие функции выхода в этом состоянии, а на стрелках — множества всех наборов, при подаче которых на вход автомата автомат переходит из одного состояния в другое. Звездочкой помечено начальное состояние автомата.).

Получено точное значение максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним инициальным булевым автоматом с тремя константными состояниями.

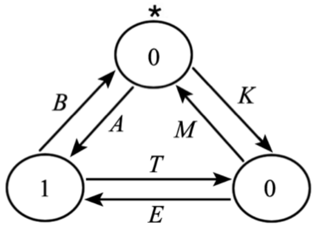

рис. 1

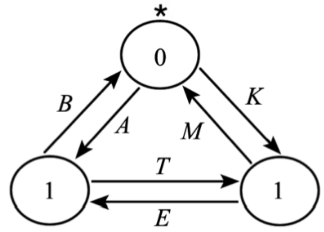

рис. 2

Теорема 10. *Для любого $n \geq 6$ максимальная мощность множества $P(V_{q_1})$ для автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3(n)$ равна $2^{2^n} - 2^n$.*

Теорема 11. *При $n \geq 9$ автомат V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным тогда и только тогда, когда V_{q_1} принадлежит $\mathfrak{V}_3^0(n)$ и задается одним из следующих наборов условий:*

1. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$;
2. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}\}$;
3. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}, K = \{\widetilde{\alpha}\}, B = \{\widetilde{\beta}\}, T = \{\widetilde{\alpha}\}, E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}, M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$;
4. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}, K = \{\widetilde{\alpha}\}, B = \{\widetilde{\beta}\}, T = \{\widetilde{\alpha}\}, E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}, M \subseteq \{\widetilde{\mu}\}$;
5. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$,

где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}$ — различные наборы из $\{0,1\}^n$.

Описано множество всех функций, которые может реализовать квазиуниверсальный булев автомат с тремя константными состояниями. Обозначим через $\mathfrak{V}_3^q(n)$ множество всех автоматов из $\mathfrak{V}_3(n)$, для которых выполнены следующие условия: $V_{q_1} \in \mathfrak{V}_3^0(n)$; $|B \cup T| = 2$; $|K \cap B| = 0$; $|K \cap T| = 1$; $|A \cap E| \leq 1$; $|A \cup E \cup B \cup T| = 2^n$. Из условий следует, что для любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ выполнено $|K \cap T| = 1$ и $|(B \cup T) \backslash K| = 1$. Обозначим через $\widetilde{\alpha}(V_{q_1})$ единственный набор множества $K \cap T$, а через $\widetilde{\beta}(V_{q_1})$ единственный набор множества $(B \cup T) \backslash K$. Отметим, что $B \cup T = \{\widetilde{\alpha}(V_{q_1}), \widetilde{\beta}(V_{q_1})\}$. Опишем все функции, которые не может реализовать квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{V}_3^q(n)$. Обозначим через $\mathfrak{A}^q(V_{q_1})$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на не более, чем одном наборе, кроме функции, принимающей значение 0 на наборе $\widetilde{\beta}(V_{q_1})$. Заметим, что $|\mathfrak{A}^q(V_{q_1})| = 2^n$.

Теорема 12. *Если $n \geq 6$ и автомат V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ является квазиуниверсальным, то $\overline{P(V_{q_1})} = \mathfrak{A}^q(V_{q_1})$.*

В § **4** рассматривается аналогичная задача для инициального булевого автомата с произвольным числом константных состояний.

Через $\mathfrak{V}_k^1(n)$ будем обозначать множество всех инициальных булевых автоматов с k константными состояниями и n входами, содержащих ровно одно 0-состояние, являющееся начальным, $n \geq 1$, $k \geq 3$. Получена оценка максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним инициальным булевым автоматом из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$.

Теорема 13. *Для любого $n \geq 4$, любого $k \geq 3$ и любого автомата V_{q_1} из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$ верно $|P(V_{q_1})| \leq 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}$.*

Найдены некоторые необходимые условия квазиуниверсальности инициальных автоматов с k константными состояниями. В частности:

Теорема 14. *Для любого $n \geq 4$ и любого $k \geq 3$ никакой автомат V_{q_1} из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$ не является квазиуниверсальным.*

Получена оценка максимального числа булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых инициальным булевым автоматом с произвольным количеством константных состояний, где $n > 1$. Обозначим через $\mathfrak{W}_k(n)$ множество всех инициальных булевых автоматов с k константными состояниями и n входами. Положим $p_k(n) = \max_{V_{q_1} \in \mathfrak{W}_k(n)} |P(V_{q_1})|$.

Теорема 15. *Для любого $n \geq 1$ и любого $k \geq 1$ верно неравенство $p_k(n) \leq 2^{2^n} - 2$.*

Доказано, что эта оценка является точной для автоматов с количеством состояний превосходящим $2^n + 1$.

Теорема 16. *Для любого $n \geq 1$ и любого $m \geq 2^n + 2$ верно $p_m(n) = 2^{2^n} - 2$.*

Заключение

В диссертации введены понятия автоматного замыкания и обобщенного замыкания множества булевых функций. Показано, что обобщенные формулы являются в выразительном плане ослабленным вариантом автоматных формул. Получено описание всех автоматно замкнутых классов булевых функций. Исследована проблема реализации булевых функций обобщенными формулами специального вида, а именно, обобщенными α-формулами (то есть такими формулами, в которых каждая подформула имеет не более одной главной подформулы, отличной от символа переменной). Для замкнутых классов T_0, T_1 и $T_0 \cap T_1$ найдены конечные системы булевых функций, полные в классе обобщенных α-формул. Показано, что для этих систем автоматное замыкание совпадает с замыканием в классе обобщенных формул.

Исследован частный случай операции автоматного замыкания с точки зрения «выразительной силы» этой операции: рассмотрена задача о реализации булевых функций от n переменных булевыми автоматами с константными состояниями и с n входами, то есть такими автоматами с входным и выходным алфавитами $\{0, 1\}$, у которых в каждом состоянии функция выхода — это одна из функций $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при условии возможности произвольного порядка подачи наборов значений входных переменных на входы автомата. Получено точное значение максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним инициальным булевым автоматом с двумя или тремя константными состояниями. Получена точная оценка максимального числа булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых инициальным булевым автоматом с произвольным количеством константных состояний, где $n > 1$.

В то же время, исследование реализации функций обобщенными формулами произвольного вида остается открытым для дальнейших исследований. Перспективной для дальнейших исследований представляется задача об описании автоматно замкнутых и обобщенно замкнутых классов функций многозначной логики.

Также следует отметить ряд нерешенных задач, связанных с изучением свойств универсальных и квазиуниверсальных автоматов: получение оценок мощности множеств функций, реализуемых одним автоматом с произвольным числом константных состояний, описание квазиуниверсальных автоматов с произвольным числом состояний, оценка минимального числа состояний автомата, реализующего максимально возможное число $(2^{2^n} - 2)$ булевых функций. Кроме того, представляет интерес решение аналогичных задач для автоматов, в состояниях которых реализуются булевы функции, отличные от констант.

Таким образом, область исследований задач, которым посвящена данная работа, представляется достаточно обширной и заслуживает дальнейшего изучения и развития.

Благодарности

Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора $\boxed{\text{А. Б. Угольникова}}$ за постановку задачи и научное руководство. Также за научное руководство автор благодарит кандидата физико-математических наук Ольгу Сергеевну Дудакову. Автор благодарит доктора физико-математических наук Романа Максимовича Колпакова за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Сысоева Л. Н.* О некоторых свойствах обобщенных α-формул // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2013. № 4. С. 51–55. (Перевод: *Sysoeva L. N.* Certain properties of generalized α-formulas / Пер. с рус. // Moscow University Mathematics Bulletin. 2013. V. 68, № 4. P. 211–214.)

2. *Сысоева Л. Н.* О реализации булевых функций обобщенными α-формулами // Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки. 2014. Т. 156, № 3. С. 116–122.

3. *Сысоева Л. Н.* Максимальное число булевых функций, реализуемых инициальным булевым автоматом с двумя константными состояниями // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2016. № 4. С. 12–17. (Перевод: *Sysoeva L. N.* Maximal number of Boolean functions realized by an initial Boolean automaton with two constant states / Пер. с рус. // Moscow University Mathematics Bulletin. 2016. V. 71, № 4. P. 140–145.)

4. *Сысоева Л. Н.* Максимальные множества булевых функций, реализуемых инициальным булевым автоматом с двумя или тремя константными состояниями // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. Т. 20, вып. 4. С. 95–99.

5. *Сысоева Л. Н.* Универсальные множества обобщенных формул // Мат-лы XI Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.). / Под ред. О. М. Касим-Заде. М. : Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ, 2012. С. 218–220.

6. *Сысоева Л. Н.* О реализации булевых функций обобщенными формулами // Проблемы теоретической кибернетики. Мат-лы XVII междунар. конференции (Казань, 16–20 июня 2014 г.). / Под ред. Ю. И. Журавлева. Казань : Отечество, 2014. С. 268–270.

7. *Сысоева Л. Н.* Максимальное число булевых функций, порождаемых инициальным автоматом с двумя константными состояниями // IX Междунар. конференция, Москва и Подмосковье, 20–22 мая 2015 г.: Труды / Отв. ред. В. Б. Алексеев, Д. С. Романов, Б. Р. Данилов. М. : МАКС Пресс, 2015. С. 239–241.

8. *Сысоева Л. Н.* Оценки на число булевых функций, реализуемых инициальным константным булевым автоматом с тремя состояниями // Мат-лы X молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 5–11 октября 2015 г.). / Под ред. А. В. Чашкина. М. : ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015. С. 74–78.

9. *Сысоева Л. Н.* Квазиуниверсальные инициальные булевы автоматы с константными состояниями // Мат-лы XII Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения», имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2016 г.). / Под ред. О. М. Касим-Заде. М. : Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ, 2016. С. 229–232.