ФГБОУ ВО Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.7

Сысоева Любовь Николаевна

Об одном подходе к автоматной реализации булевых функций

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент О. С. Дудакова

Москва — 2017

Содержание

Введение **4**

1 Автоматное замыкание **27**

1.1 Основные определения 27

1.2 Автоматное замыкание 29

1.3 Описание автоматно замкнутых классов 30

2 Обобщенные формулы **37**

2.1 Определение обобщенных формул 37

2.2 Соотношение между обобщенным и автоматным замыканиями 43

2.3 Свойства обобщенных формул 44

2.4 Реализация функций из класса T_{01} 53

2.4.1 Пары наборов 54

2.4.2 Отношение частичного порядка на множестве наборов 59

2.4.3 Различные допустимые последовательности 66

2.4.4 Доказательства основных утверждений 73

2.5 Реализация функций из классов T_0 и T_1 77

3 Универсальные автоматы **82**

3.1 Определения и различные постановки задачи 82

3.1.1 Неинициальный автомат 83

3.1.2 Инициальный автомат с многократной подачей наборов . . . 85
3.1.3 Инициальный автомат с однократной подачей наборов . . . 86
3.2 Булев автомат с двумя константными состояниями . . . 87
3.2.1 Свойства автоматов из множества $\mathfrak{V}_2(n)$ . . . 88
3.2.2 Верхняя оценка числа функций, реализуемых квазиуниверсальным автоматом из $\mathfrak{V}_2(n)$ . . . 94
3.2.3 Условия квазиуниверсальности автомата из $\mathfrak{V}_2(n)$ . . . 101
3.3 Булев автомат с тремя константными состояниями . . . 106
3.3.1 Примеры и оценка снизу . . . 107
3.3.2 Оценка сверху, первый случай . . . 113
3.3.3 Оценка сверху, второй случай . . . 123
3.3.4 Условия квазиуниверсальности автомата с тремя константными состояниями . . . 128
3.4 Булев автомат с k константными состояниями, $k \geq 3$ . . . 164
3.4.1 Свойства автоматов с k состояниями . . . 165
3.4.2 Оценка сверху для автоматов из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$ . . . 167
3.4.3 Пример автомата с $2^n + 2$ состояниями, реализующего все булевы функции кроме констант . . . 170

Заключение . . . 173

Литература . . . 175

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к одному из основных направлений дискретной математики и математической кибернетики — теории функциональных систем [28, 62, 66]. Функциональная система представляет собой пару $(A; \psi)$, где A является некоторым множеством функций, а ψ — некоторым отображением множества всех подмножеств системы A в себя. Функциональные системы занимают важное место в дискретной математике и математической кибернетике, поскольку их можно рассматривать как модели, описывающие функционирование сложных систем. К числу важнейших задач теории функциональных систем относятся задачи о полноте, о выразимости, о структуре замкнутых семейств функций, о тождественных преобразованиях и т.д. Результаты, получаемые при исследовании функциональных систем, позволяют разрабатывать новые подходы для решения других задач дискретной математики и математической кибернетики.

В теории функциональных систем центральное место занимает система (P_k, φ) — семейство всех функций k-значной логики ($k \geq 2$) с операцией замыкания. Из результатов Э. Л. Поста [77, 78] следует, что каждый замкнутый класс булевых функций имеет конечный базис, а семейство замкнутых классов имеет счетную мощность. Описание классов Поста приводится также в работах [29, 38, 42, 57, 59, 67, 70, 71, 79]. Многозначные логики во многом похожи на двузначную логику. В них сохраняются многие основные результаты, имеющие место в двузначной логике, к числу которых относятся реше-

ния проблемы функциональной полноты и задачи описания предполных классов [3, 14, 15, 31, 32, 37, 65, 72–76, 80, 81]. Тем не менее, имеются существенные различия между P_2 и P_k при $k \geq 3$. В частности, Ю. И. Яновым и А.А. Мучником [68] установлено, что в P_k при $k \geq 3$ существуют замкнутые классы без базиса и замкнутые классы со счетным базисом. Отсюда следует, что мощность семейства всех замкнутых классов функций k-значной логики при $k \geq 3$ континуальна, что значительно затрудняет исследование решетки замкнутых классов функций.

Для преодоления указанных трудностей при изучении семейства замкнутых классов функций многозначной логики в научной литературе было предложено несколько подходов. Один из таких подходов заключается в рассмотрении различных модификаций операции суперпозиции, которые позволили бы получить более просто устроенную решетку классов функций, замкнутых относительно новой операции (см., например, обзор [58]). Перечислим некоторые результаты, полученные в этом направлении.

В работах С. С. Марченкова [39–41] и Нгуен Ван Хоа [43–45] исследуется S-замыкание, в котором наряду с операцией суперпозиции применяется операция перехода к двойственным функциям относительно фиксированной группы подстановок. Другими словами, S-замкнутый класс для каждой принадлежащей ему функции содержит также всякую двойственную ей относительно указанной группы подстановок функцию. Таким образом, авторами изучается структура решетки замкнутых классов функций k-значной логики при отождествлении похожих, в определенном смысле, функций. В частности, для симметрической группы множества E_k в этих работах установлено, что множество S-замкнутых классов функций k-значной логики для любого $k \geq 3$ конечно, и при этом число таких классов растет сверхэкспоненциально с ростом k.

В работе А. В. Кузнецова [33] введены понятия параметрической выразимости и оператора параметрического замыкания, а также установлены критерии параметрической выразимости для k-значных логик при $k \geq 2$ и найдены

все параметрически замкнутые классы при $k = 2$. В дальнейшем А. Ф. Данильченко установлена [13] конечность семейства параметрически замкнутых классов при $k = 3$, а С. Баррисом и Р. Уиллардом — при $k > 3$ [69]. На основе понятия параметрической выразимости О. М. Касим-Заде определено [18, 19] понятие неявной выразимости. Им установлена эквивалентность параметрической и неявной выразимости при $k = 2$ и тем самым установлена конечность множества классов неявно выразимых булевых функций. Критерии неявной полноты множеств функций k-значной логики получены О. М. Касим-Заде [19] и Е. А. Ореховой [46] при $k = 2$ и $k = 3$ соответственно.

В работе Ю. В. Голункова [12] рассматривались функционально-предикатные системы с операциями замыкания программного типа, определяемые своими множествами предикатов, исследовалась задача о полноте таких систем. В работах В. А. Тайманова и В. Д. Соловьева [48–50] изучаются функциональные системы функций k-значной логики, $k \geq 2$, с операциями программного типа. В. А. Тайманов установил, что в зависимости от свойств множеств предикатов, семейства замкнутых классов могут быть конечными, счетными и континуальными. Примеры конечных описаний замкнутых классов для некоторых операций программного типа рассматривались В. Д. Соловьевым.

В работах О. С. Тарасовой [51–53] исследуются классы k-значной логики, $k \geq 2$, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановки с множеством наборов специального вида.

Заметим, что в некоторых случаях исследование семейств замкнутых классов относительно обычного замыкания можно рассматривать с точки зрения усиления операции суперпозиции. Так, например, в работах Е. Слупецкого [82] и Г. А. Бурле [10] исследуются семейства функций k-значной логики, содержащие множество всех одноместных функций. Рассматриваемые задачи можно переформулировать как исследование свойств усиленной операции суперпозиции, заключающейся в реализации функций формулами, в которых могут ис-

пользоваться не только функциональные символы функций из исходного порождающего множества, но и символы любых одноместных функций.

В ряде работ рассматривается классификация функций многозначной логики, не связанная с замыканием относительно суперпозиции, посредством введения классов функций, инвариантных относительно иных операций. В частности, в работах С. В. Яблонского [63, 64], О. М. Касим-Заде [16, 17] и Г. Г. Аманжаева [1] рассматриваются классы, инвариантные относительно подстановки некоторого множества функций одной переменной. В работах Ю. В. Кузнецова [34, 35] рассматриваются классы, инвариантные относительно отождествления переменных.

Другим важным примером функциональной системы является семейство $\mathbf{P}$ ограниченно-детерминированных функций (о.-д. функций) с операциями суперпозиции и обратной связи [29, 30]. Ограниченно-детерминированные функции являются естественным обобщением функций многозначной логики. Каждая о.-д. функция может быть реализована конечным автоматом, поэтому о.-д. функции также называют автоматными функциями. Свойства системы $\mathbf{P}$ изучались в работах многих авторов. М. И. Кратко [23] установил алгоритмическую неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных систем автоматных функций. В. Б. Кудрявцев [25, 26, 28] показал, что семейство предполных классов в $\mathbf{P}$ имеет континуальную мощность. Вместе с тем, существуют конечные полные системы автоматных функций; примеры функций, образующих полные системы в $\mathbf{P}$ и зависящих от трех и от двух переменных соответственно, приведены в работах В. Б. Кудрявцева [26] и В. А. Буевича [6, 7].

Так же, как и для функций многозначной логики, для автоматных функций в ряде работ предлагаются различные подходы к исследованию семейств автоматных функций, связанные с ослаблением, или, наоборот, усилением понятия полноты. К первому направлению относятся, например, задачи о τ-полноте и об аппроксимационной полноте (A-полноте). В задаче о τ-полноте для автоматных функций наряду с операциями суперпозиции и обратной связи допуска-

ется также добавление всех автоматных функций, совпадающих с полученными функциями на всех входных наборах длины τ, где $\tau \geq 1$. В такой постановке операция обратной связи выразима через операцию суперпозиции (см. [30]), поэтому задача о τ-полноте близка к задаче о полноте в k^τ-значной логике. В задаче об A-полноте наряду с операциями суперпозиции и обратной связи допускается также рассмотрение автоматных функций, принадлежащих пересечению τ-пополнений рассматриваемого множества функций при всех $\tau \geq 1$. Следует отметить, что определенный таким образом A-оператор является оператором замыкания, но не является алгебраическим. Свойства операций τ-замыкания и A-замыкания детально исследованы в работах В. А. Буевича [4, 5, 8, 9]. Ко второму направлению исследований можно отнести подход, связанный с разбиением конечных систем автоматов, исследуемых на полноту, на типы. К одному типу относятся все такие системы, которые содержат заданный класс Поста булевых функций (то есть автоматов без памяти). Такой подход рассматривался в работах Д. Н. Бабина (см., например, [2]).

Отдельно следует упомянуть об исследованиях, связанных с реализацией булевых функций автоматами и логическими схемами над множествами автоматов. Такие задачи могут рассматриваться как частный случай задачи о реализации ограниченно-детерминированных функций схемами в автоматных базисах, но также представляют и самостоятельный интерес. Так, например, в работе В. А. Кузьмина [36] рассматривается следующий подход: автомат с входным и выходным алфавитами $\{0, 1\}$ реализует заданную булеву функцию f от n переменных, если в моменты времени, кратные n, значение функции выхода автомата совпадает со значением функции f на наборе значений переменных, который соответствует определенному отрезку входной последовательности. В работе То Суан Зунга [54] рассматриваются логические схемы над конечными «базисными» множествами автоматов, при этом схема с n входами и одним выходом реализует заданную булеву функцию f от n переменных, если существует такое начальное состояние схемы, что для любой последовательности

входных наборов значение функции выхода схемы в каждый момент времени совпадает со значением функции f на текущем входном наборе (другой вариант — значение функции выхода совпадает со значением f на входном наборе не в каждый момент времени, а только в некоторые моменты). Похожим образом понятие реализации булевых функций схемами в автоматных базисах вводится в работе В. А. Орлова [47]. Другой подход состоит в том, что наборы, на которых заданная булева функция принимает значение 1, рассматриваются как слова конечного языка, и исследуется автомат, представляющий этот язык (см., например, работу М. А. Кибкало [20]). Отметим, что в перечисленных работах автоматная реализация булевых функций исследовалась с точки зрения изучения сложности.

В представленной диссертации рассматриваются некоторые способы реализации булевых функций автоматами и исследуются проблемы выразимости. На множестве булевых функций вводится операция автоматного замыкания: рассматриваются автоматные формулы — формулы над конечным множеством автоматов, таких, что в каждом состоянии автомата функция выхода содержится в некотором исходном множестве булевых функций. Далее, считается, что автоматная формула реализует булеву функцию, если при последовательной подстановке в некотором порядке всех наборов значений переменных функции в каждый момент времени значение формулы совпадает со значением булевой функции на текущем входном наборе значений переменных. Определенную таким образом функциональную систему, с одной стороны, можно рассматривать как семейство булевых функций с операцией, усиливающей суперпозицию, с другой стороны, как семейство автоматных функций специального вида (автоматов без памяти) со специальными операциями. Данный подход представляется перспективным для исследований, поскольку он позволяет сочетать методы, применяемые для изучения логических функций, с методами теории автоматных функций.

Помимо операции автоматного замыкания в диссертации исследуется ее ослабленный вариант — операция обобщенного замыкания. Рассматриваются обобщенные формулы специального вида, а именно, обобщенные α-формулы (то есть такие формулы, в которых каждая подформула имеет не более одной подформулы, отличной от символа переменной). Следует отметить, что исследования, направленные на изучение свойств таких формул, являются актуальными, поскольку эти формулы представляют собой весьма простую модель вычисления дискретных функций. К настоящему времени ряд свойств α-формул над конечными системами функций многозначной логики изучен как с функциональной точки зрения, так и с точки зрения теории сложности. Установлено существование конечных α-полных систем в P_k при $k \geq 3$, отсутствие конечных α-полных систем для множества P_2 всех булевых функций [11, 60, 61], а также для ряда замкнутых классов, в частности для $T_0, T_1, T_0 \cap T_1$(см. [55]).

В диссертации для введенной операции автоматного замыкания получено описание всех автоматно замкнутых классов булевых функций. Для замкнутых классов T_0, T_1 и $T_0 \cap T_1$ найдены конечные системы булевых функций, полные в классе обобщенных α-формул. Одновременно показано, что для этих систем автоматное замыкание совпадает с замыканием в классе обобщенных формул.

Еще один подход, представленный в данной диссертации, состоит в исследовании частного случая операции автоматного замыкания с точки зрения «выразительной силы» этой операции. Рассматривается реализация булевых функций от n переменных булевыми автоматами с константными состояниями и с n входами, то есть такими автоматами с входным и выходным алфавитами $\{0, 1\}$, у которых в каждом состоянии функция выхода — это одна из функций $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (автоматами Мура [21]). Рассматривается задача нахождения максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним автоматом такого типа при условии возможности произвольного порядка подачи наборов значений входных переменных на входы автомата. Получено точное значение максимальной мощности

множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним инициальным булевым автоматом с двумя или тремя константными состояниями. Получена точная оценка максимального числа булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых инициальным булевым автоматом с произвольным количеством константных состояний, где $n > 1$. Исследован ряд свойств инициальных булевых автоматов, реализующих максимальное возможное число булевых функций от n фиксированных переменных (такие автоматы называются в работе квазиуниверсальными).

Цель работы

Исследование вопросов полноты и выразимости, возникающих при реализации булевых функций автоматами в различных постановках. В частности, описание классов булевых функций, замкнутых относительно различных вариантов операции автоматного замыкания; получение оценок мощности множества булевых функций, реализуемых одним инициальным автоматом с константными состояниями; описание автоматов с константными состояниями, реализующих максимально возможное число булевых функций.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, комбинаторного анализа, а также методы математического анализа.

Научная новизна

Все основные результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации заключаются в следующем.

1. Получено описание всех классов булевых функций, замкнутых относительно введенного в работе оператора автоматного замыкания.

2. Для замкнутых классов T_0, T_1 и $T_0 \cap T_1$ найдены конечные системы булевых функций, полные в классе обобщенных α-формул.

3. Для любого достаточно большого n найдено максимальное возможное число булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых одним инициальным булевым автоматом с двумя и тремя константными состояниями ($\frac{5}{8} \cdot 2^{2^n}$ и $2^{2^n} - 2^n$ соответственно).

4. Описаны все инициальные булевы автоматы с двумя и тремя константными состояниями, реализующие максимально возможное число булевых функций от n фиксированных переменных для любого достаточно большого n.

5. Для любого n найдено максимально возможное число $2^{2^n} - 2$ булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых одним инициальным булевым автоматом с произвольным числом константных состояний.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории функциональных систем и в других разделах дискретной математики и математической кибернетики.

Апробация диссертации

Результаты по теме диссертации докладывались автором на научно-исследовательском семинаре «Функции многозначной логики и смежные вопросы» под руководством профессора А. Б. Угольникова, профессора Р. М. Колпа-

кова, профессора С. Б. Гашкова, доцента О. С. Дудаковой (МГУ, 2012, 2016 гг.), на семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» под руководством профессора О. М. Касим-Заде (МГУ, 2016 г.).

Результаты по теме диссертации докладывались автором на следующих всероссийских и международных конференциях:

1) XI и XII Международные семинары «Дискретная математика и ее приложения» им. академика О. Б. Лупанова (г. Москва, МГУ, 2012, 2016 гг.);

2) конференции «Ломоносовские чтения» (г. Москва, МГУ, 2013, 2016 гг.);

3) Международные научные конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2013», «Ломоносов-2014», «Ломоносов-2015» (г. Москва, МГУ, 2013, 2014, 2015 гг.);

4) XVII Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (г. Казань, КФУ, 2014 г.);

5) IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (г. Москва и Подмосковье, 2015 г.);

6) X «Молодежная научная школа по дискретной математике и ее приложениям» (г. Москва, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2015 г.);

7) XI Международная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» (г. Москва, МГУ, 2016 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы автором в 9 печатных работах [83–91], из них 4 [83–86] в научных журналах из перечня, рекомендованного ВАК.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Основные утверждения работы сформулированы в виде теорем и следствий, вспомогательные — в виде лемм и утверждений. Утверждения нумеруются тройками чисел, где первое число обозначает номер главы, второе — номер параграфа, а третье — номер утверждения внутри параграфа. Общий объем работы — 183 страницы.

Содержание диссертации

Во **введении** приведена краткая история вопроса и кратко изложены основные результаты диссертации.

В **первой главе** рассматривается задача описания автоматно замкнутых классов булевых функций.

В § **1** даны основные определения. Под *булевым автоматом* будем понимать автомат $V = (A, B, Q, F, G)$ с произвольным числом входов, одним выходом, входным алфавитом $A = \{0, 1\}$, выходным алфавитом $B = \{0, 1\}$, алфавитом состояний Q, функцией перехода G и функцией выхода F. Пусть n — число входов автомата V. Без ограничения общности будем полагать, что входы занумерованы от 1 до n, и на i-й вход подается значение булевой переменной x_i. То есть в каждый момент времени на вход автомата V подается некоторый двоичный набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и для любого фиксированного состояния $q \in Q$ функция выхода $F(q, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является булевой функцией от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_2$, булев автомат V будем называть *автоматом над* $\mathcal{A}$, если для любого состояния q автомата V функция выхода $F(q, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержится в $\mathcal{A}$ (функции из $\mathcal{A}$ рассматриваются с точностью до несущественных переменных и переименования переменных). Пусть $V_{q_1} = (\{0, 1\}, \{0, 1\}, Q, F, G, q_1)$ — инициальный булев автомат

с начальным состоянием q_1 и n входами. Пусть $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ — упорядоченная последовательность всех двоичных наборов длины n, $n \geq 1$ (далее — *последовательность подаваемых наборов*). Будем говорить, что *автомат* V_{q_1} *с последовательностью* C *реализует булеву функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при последовательной подаче на вход V_{q_1} наборов из C в первые 2^n моментов времени, в каждый момент $t = 1, 2, \ldots, 2^n$ на выходе V_{q_1} выдается значение $f(\widetilde{\beta}_t)$. Будем также говорить, что V_{q_1} *реализует функцию* f, если для некоторой последовательности наборов C автомат V_{q_1} с последовательностью C реализует f.

В § **2** вводится понятие автоматного замыкания множества булевых функций. Автоматные функции, реализуемые булевыми автоматами, будем называть *двоичными автоматными функциями.* Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_2$, двоичную автоматную функцию $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть *функцией над* $\mathcal{A}$, если h реализуется некоторым инициальным булевым автоматом над $\mathcal{A}$. Пусть V_{q_1} — некоторый инициальный булев автомат, реализующий двоичную автоматную функцию h, и C — некоторая последовательность подаваемых наборов. Будем говорить, что *функция* h *с последовательностью подаваемых наборов* C *реализует булеву функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если f реализуется автоматом V_{q_1} с последовательностью подаваемых наборов C. Будем также говорить, что *функция* h *реализует булеву функцию* f, если для некоторой последовательности наборов C функция h с последовательностью C реализует f.

Для автоматных функций можно стандартным образом определить понятие автоматной формулы, т. е. формулы над системой автоматных функций (см., например, [30, 62]). Пусть дано некоторое конечное множество булевых функций $\mathcal{A}$. Введем следующее понятие *автоматной формулы над* $\mathcal{A}$ индуктивным образом: символ любой переменной является автоматной формулой над $\mathcal{A}$, называемой тривиальной формулой; далее, пусть $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — двоичная автоматная функция над $\mathcal{A}$ и $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ — автоматные формулы над $\mathcal{A}$, тогда $h(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ является автоматной формулой над $\mathcal{A}$.

Понятие *автоматной функции, реализуемой автоматной формулой над* $\mathcal{A}$, определяется стандартным образом.

Пусть C — некоторая последовательность подаваемых наборов, а Φ — автоматная формула над $\mathcal{A}$, реализующая некоторую автоматную функцию $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Будем говорить, что *булева функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *реализуется автоматной формулой* Φ *с последовательностью подаваемых наборов* C, если f реализуется функцией h с последовательностью подаваемых наборов C. Будем также говорить, что *автоматная формула* Φ *реализует булеву функцию* f, если для некоторой последовательности наборов C формула Φ с последовательностью C реализует f.

Автоматным замыканием $[\mathcal{A}]_A$ множества булевых функций $\mathcal{A}$ называется множество всех булевых функций, реализуемых автоматными формулами над $\mathcal{A}$.

В § **3** доказано, что для оператора автоматного замыкания выполняются все аксиомы замыкания (см. [28]), и описаны все замкнутые классы в P_2.

Теорема 1 (Следствие 1.3.5). *Для автоматного замыкания в* P_2 *существует ровно шесть замкнутых классов:* $\{0\}, \{1\}, T_{01}, T_0, T_1, P_2$.

Во **второй главе** рассматривается задача о реализации булевых функций обобщенными формулами.

В § **1** даны основные определения, в частности, обобщенной формулы и обобщенного замыкания. Пусть дано некоторое конечное множество булевых функций

$$\mathcal{A} = \{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}), \ldots, f_s(x_1, x_2, \ldots, x_{m_s})\}.$$

Будем обозначать через $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ множество $\{f_1^{(m_1)}, \ldots, f_s^{(m_s)}\}$ функциональных символов, соответствующих функциям из $\mathcal{A}$. Для формулы Φ над $\mathcal{A}$ и набора $\widetilde{\alpha}$ значений переменных формулы Φ будем обозначать через $\Phi|_{\widetilde{\alpha}}$ значение формулы Φ на наборе $\widetilde{\alpha}$. Через $\Psi \underset{\Gamma}{=} \Phi$ обозначается графическое равенство формул Ψ и Φ. Через $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем обозначать формулу, все перемен-

ные которой содержатся среди переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть теперь дано некоторое конечное множество

$$\mathcal{A} = \{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_s(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$$

булевых функций от m фиксированных переменных. Пусть $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^m}$ — всевозможные двоичные наборы длины m и $\mathsf{G} = \{g_{\widetilde{\alpha}_1}, g_{\widetilde{\alpha}_2}, \ldots, g_{\widetilde{\alpha}_{2^m}}\}$ — семейство отображений $g_{\widetilde{\alpha}_i} : \mathcal{F}(\mathcal{A}) \to \mathcal{F}(\mathcal{A})$, $i = 1, 2, \ldots, 2^m$. Будем называть множество G *правилом смены на множестве* $\mathcal{A}$.

Обозначим через $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ множество всех формул над $\mathcal{A}$, все переменные которых содержатся среди переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть G — некоторое правило смены на множестве $\mathcal{A}$ и $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — произвольный двоичный набор длины n. Определим следующее преобразование $\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}$ формул из $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ индукцией по глубине формул. Пусть Φ — некоторая формула из $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

1. Базис индукции. Если формула Φ является символом переменной, то $\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi) \underset{\Gamma}{=} \Phi$.

2. Индуктивный переход. Пусть

   $$\Phi \underset{\Gamma}{=} f_i^{(m)}(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m),$$

   где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ — некоторые формулы из $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Тогда

   $$\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi) \underset{\Gamma}{=} \widehat{f}^{(m)}(\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi_1), \mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi_2), \ldots, \mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi_m)),$$

   где $\widehat{f}^{(m)} = g_{\widetilde{\beta}}(f_i^{(m)})$ при $\widetilde{\beta} = (\Phi_1|_{\widetilde{\alpha}}, \Phi_2|_{\widetilde{\alpha}}, \ldots, \Phi_m|_{\widetilde{\alpha}})$.

Обобщенной формулой F *над множеством функций* $\mathcal{A}$ будем называть пару $(\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G})$, где $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\mathcal{A}$, а G — некоторое правило смены на $\mathcal{A}$. Формулу $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть *начальной формулой обобщенной формулы* F. Множество всех переменных

формулы Φ будем называть *множеством всех переменных обобщенной формулы* F.

Пусть C — последовательность подаваемых наборов (некоторая последовательность всех двоичных наборов длины n). Для обобщенной формулы $\mathsf{F} = (\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G})$ и последовательности C можно построить последовательность формул над множеством $\mathcal{A}$

$$\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, C) = (\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_{2^n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

по следующим правилам:

1) $\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \underset{\Gamma}{=} \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

2) для любого $j = 1, 2, \ldots, 2^n$ выполнено

$$\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}_j}(\Phi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \underset{\Gamma}{=} \Phi_{j+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пусть $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — некоторый набор значений всех переменных обобщенной формулы F, и пусть j — такой номер из $\{1, 2, \ldots, 2^n\}$, что $\widetilde{\beta} = \widetilde{\alpha}_j, (\widetilde{\alpha}_j \in C)$. Определим *значение* $\mathsf{F}(C)|_{\widetilde{\beta}}$ *обобщенной формулы* F *с последовательностью подаваемых наборов* C *на наборе* $\widetilde{\beta}$ *значений переменных* как $\Phi_j|_{\widetilde{\alpha}_j}$, где Φ_j — j-ая формула из последовательности $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, C)$.

Таким образом можно определить значение обобщенной формулы F с последовательностью подаваемых наборов C на любом двоичном наборе значений переменных формулы F и тем самым сопоставить обобщенной формуле F с последовательностью подаваемых наборов C некоторую функцию алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Про функцию, сопоставленную указанным способом обобщенной формуле, будем говорить, что *функция* f *реализуется обобщенной формулой* F *с последовательностью подаваемых наборов* C. Будем также говорить, что *функция* f *реализуется обобщенной формулой* F, если для некоторой последовательности подаваемых наборов C функция f реализуется обобщенной формулой F с последовательностью C.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное конечное множество булевых функций от m фиксированных переменных. *Обобщенным замыканием* $[\mathcal{A}]_{\mathsf{F}}$ множества булевых функций $\mathcal{A}$ называется множество всех булевых функций, реализуемых обобщенными формулами над $\mathcal{A}$.

Обобщенную формулу $\mathsf{F} = (\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G})$ будем называть *формулой с линейной структурой* (или *обобщенной α-формулой*), если начальная формула $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является α-формулой, то есть формулой, любая подформула которой содержит не более одной подформулы, отличной от символа переменной. *Линейной дизъюнктивной* (*конъюнктивной*) формулой будем называть α-формулу, все функциональные символы которой являются дизъюнкциями (конъюнкциями).

Последовательность $A = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_i)$ двоичных наборов длины n будем называть *допустимой*, если $i = 2^n$ и $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_i\} = \{0,1\}^n$.

В § **2** показано, что обобщенное замыкание любого множества булевых функций содержится в автоматном замыкании этого множества, то есть обобщенное замыкание является более слабой операцией, чем автоматное замыкание.

В § **3** установлены некоторые свойства обобщенных формул.

В § **4** доказано, что обобщенными формулами над $\{x \vee y, x\&y\}$ можно реализовать любую функцию из замкнутого класса T_{01} с линейной сложностью и глубиной.

Пусть $\mathcal{A} = \{x \vee y, x\&y\}$. Обозначим через $\mathsf{G}^* = \{g_{(0,0)}, g_{(0,1)}, g_{(1,0)}, g_{(1,1)}\}$ правило смены на множестве $\{\vee^{(2)}, \&^{(2)}\}$, задаваемое следующей таблицей:

	$g_{(0,0)}$	$g_{(0,1)}$	$g_{(1,0)}$	$g_{(1,1)}$
$\vee^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\&^{(2)}$
$\&^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\vee^{(2)}$

Множество всех обобщенных формул над $\{x_1 \vee x_2,\ x_1 \& x_2\}$ с правилом смены G^* и начальной формулой $x_1 \vee (x_2 \vee \ldots (x_{n-1} \vee x_n) \ldots)$ (с начальной формулой $x_1 \& (x_2 \& \ldots (x_{n-1} \& x_n) \ldots)$) будем обозначать через $\mathfrak{F}_\vee$ (соответственно, $\mathfrak{F}_\&$).

Основными результатами § 4 являются следующие теоремы.

Теорема 2 (2.4.3). *Для любого $n \geq 1$, любой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса T_{01}, существует обобщенная формула F из $\mathfrak{F}_\vee \cup \mathfrak{F}_\&$ и допустимая последовательность C, такая, что обобщенная формула F с последовательностью C реализует функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Теорема 3 (Замечание 2.4.1). *Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из множества T_{01} может быть реализована обобщенной формулой над $\{\vee, \&\}$ со сложностью начальной формулы n и глубиной $n - 1$.*

В § **5** получен аналогичный результат для замкнутых классов T_0 и T_1. Обозначим множество всех линейных конъюнктивных формул над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$ (над $\{x \& y, 1(x, y)\}$), в которые каждая переменная из $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ входит ровно один раз, через $\mathfrak{P}_0(n)$ (соответственно, через $\mathfrak{P}_1(n)$), $n \geq 2$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_0$ множество обобщенных формул над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$, имеющие линейные структуры, с правилом смены $\mathsf{G}_0 = \{g_{(0,0)}, g_{(0,1)}, g_{(1,0)}, g_{(1,1)}\}$, задаваемым следующей таблицей:

	$g_{(0,0)}$	$g_{(0,1)}$	$g_{(1,0)}$	$g_{(1,1)}$
$\vee^{(2)}$	$0^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\vee^{(2)}$
$0^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$0^{(2)}$	$0^{(2)}$	$0^{(2)}$

Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ множество обобщенных формул над $\{x \& y, 1(x, y)\}$, имеющие линейные структуры, с правилом смены $\mathsf{G}_1 = \{g_{(0,0)}, g_{(0,1)}, g_{(1,0)}, g_{(1,1)}\}$, задаваемым следующей таблицей:

	$g_{(0,0)}$	$g_{(0,1)}$	$g_{(1,0)}$	$g_{(1,1)}$
$\&^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$1^{(2)}$
$1^{(2)}$	$1^{(2)}$	$1^{(2)}$	$1^{(2)}$	$\&^{(2)}$

Теорема 4 (2.5.2). *Для любого $n \geq 2$, для любой функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса T_0, для любой формулы Φ из множества $\mathfrak{P}_0(n)$ существует такая допустимая последовательность C, что обобщенная формула $\mathsf{F} = (\Phi, \mathsf{G}_0)$ из $\mathfrak{F}_0$ с последовательностью C реализует функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Теорема 5 (2.5.4). *Для любого $n \geq 2$, для любой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса T_1, для любой формулы Φ из множества $\mathfrak{P}_1(n)$ существует такая допустимая последовательность C, что обобщенная формула $\mathsf{F} = (\Phi, \mathsf{G}_1)$ из $\mathfrak{F}_1$ с последовательностью C реализует функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Теорема 6 (Замечание 2.5.1). *Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из множества $T_0 \cup T_1$ может быть реализована обобщенной формулой над $\{0, 1, \vee, \&\}$ со сложностью начальной формулы n и глубиной $n - 1$.*

В **третьей главе** исследуется реализация булевых функций *автоматами с константными состояниями* и n входами, то есть такими автоматами с входным и выходным алфавитами $\{0, 1\}$, у которых в каждом состоянии функция выхода — это одна из функций $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В § **1** рассматриваются различные постановки задачи о реализации множества булевых функций одним автоматом, аргументируется выбор одной из постановок.

Пусть $V_{q_1} = (\{0, 1\}, \{0, 1\}, Q, F, G, q_1)$ — инициальный булев автомат с начальным состоянием q_1 и n входами. Обозначим через $P(V_{q_1})$ множество всех булевых функций из $P_2(n)$, реализуемых автоматом V_{q_1}. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq P_2(n)$. Автомат V_{q_1} называется *универсальным для множества* $\mathfrak{A}$, если $P(V_{q_1}) = \mathfrak{A}$. Автомат V_{q_1} с фиксированным числом состояний называется *квазиуниверсальным*, если он реализует максимально возможное для этого числа состояний число булевых функций. Показано (утверждение 3.1.4), что не существует инициального булева автомата с константными состояниями, универсального для множества $P_2(n)$ всех булевых функций от n переменных. Далее в третьей главе рассматриваются вопросы, связанные с построением квазиуниверсальных автоматов.

В § **2** рассматривается задача нахождения максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним инициальным булевым автоматом с двумя константными состояниями. Обозначим через $\mathfrak{V}_2(n)$ множество всех инициальных булевых автоматов с двумя константными состояниями и n входами, содержащих ровно одно состояние с функцией выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ровно одно состояние с функцией выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, с функцией выхода в начальном состоянии $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (заметим, что последнее условие не является существенным для полученных результатов). Получено точное значение максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы автоматом из $\mathfrak{V}_2(n)$.

Теорема 7 (Следствие 3.2.4). *Для любого $n \geq 2$ максимальная мощность множества $P(V_{q_1})$ для автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$ равна $\frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$.*

Описаны все автоматы, для которых достигается данное значение. Пусть V_{q_1} — инициальный булев автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$ с множеством состояний $Q = \{q_1, q_2\}$, где q_1 — начальное состояние, и $g : Q \times \{0,1\}^n \to Q$ — функция переходов автомата V_{q_1}. Обозначим через M множество наборов $\widetilde{\alpha}$, таких, что $g(q_1, \widetilde{\alpha}) = q_2$, а через N — множество наборов $\widetilde{\alpha}$, таких, что $g(q_2, \widetilde{\alpha}) = q_1$. Заметим, что автомат V_{q_1} однозначно задается множествами M и N.

Теорема 8 (3.2.2). *Пусть V_{q_1} — автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$, где $n \geq 2$. Тогда равенство $|P(V_{q_1})| = \frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$ достигается в том и только том случае, когда $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \emptyset$.*

Описано множество всех функций, которые может реализовать квазиуниверсальный булев автомат с двумя константными состояниями. Пусть $n \geq 2$ и V_{q_1} — автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$, определяемый множествами M и N, такими, что $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \emptyset$. Обозначим через $\mathfrak{A}_1(V_{q_1})$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на всех трех наборах множества $M \cup N$, через $\mathfrak{A}_2(V_{q_1})$ — множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 1 на обоих наборах множества M, а через $\mathfrak{A}(V_{q_1})$ множество $\mathfrak{A}_1(V_{q_1}) \cup \mathfrak{A}_2(V_{q_1})$. За-

метим, что $|\mathfrak{A}(V_{q_1})| = \frac{3}{8} \cdot 2^{2^n}$. Обозначим через $\overline{P(V_{q_1})}$ множество всех функций из $P_2(n)$, которые не могут быть реализованы автоматом V_{q_1}.

Теорема 9 (Следствие 3.2.5). *Для любого $n \geq 2$ и автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$, такого, что $|P(V_{q_1})| = \frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$ выполнено $\overline{P(V_{q_1})} = \mathfrak{A}(V_{q_1})$.*

В § **3** рассматривается аналогичная задача для инициального булевого автомата с тремя константными состояниями.

Под 0-*состоянием* инициального булевого автомата V_{q_1} с константными состояниями понимается состояние с функцией выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а под 1-*состоянием* — состояние с функцией выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим через $\mathfrak{V}_3(n)$ множество всех инициальных булевых автоматов с n входами, содержащих хотя бы одно 0-состояние и хотя бы одно 1-состояние, при этом начальным состоянием является 0-состояние. Множество $\mathfrak{V}_3(n)$ разбивается на два подмножества: $\mathfrak{V}_3^0(n)$ состоит из всех автоматов, содержащих ровно одно 1-состояние, $\mathfrak{V}_3^1(n)$ состоит из всех автоматов, содержащих ровно одно 0-состояние, являющееся начальным. Автоматы из множеств $\mathfrak{V}_3^0(n)$ и $\mathfrak{V}_3^1(n)$ можно схематично изобразить с помощью диаграмм, изображенных на рис. *a* и рис. *b*, где $A, B, K, M, T, E \subseteq \{0,1\}^n$ (в кружочках, обозначающих состояния, написаны символы, соответствующие функции выхода в этом состоянии, а на стрелках — множества всех наборов, при подаче которых на вход автомата автомат из состояния, из которого идет стрелка, переходит в состояние, на которое указывает стрелка. Звездочкой помечено начальное состояние автомата.).

Получено точное значение максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним инициальным булевым автоматом с тремя константными состояниями.

Теорема 10 (Следствие 3.3.6). *Для любого $n \geq 6$ максимальная мощность множества $P(V_{q_1})$ для автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3(n)$ равна $2^{2^n} - 2^n$.*

Описаны все автоматы, для которых достигается данное значение.

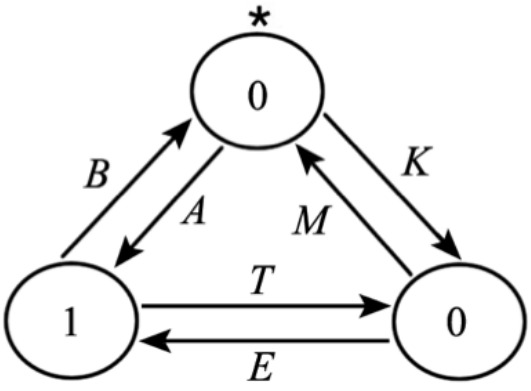


рис. a

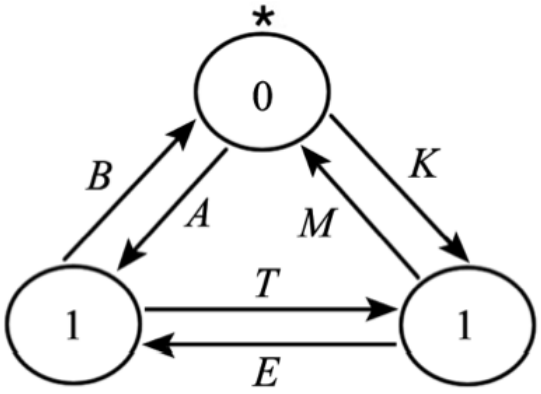


рис. b

Теорема 11 (3.3.5). *При $n \geq 9$ автомат V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным тогда и только тогда, когда V_{q_1} принадлежит $\mathfrak{V}_3^0(n)$ и задается одним из следующих наборов условий:*

1. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$;
2. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}\}$;
3. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$;
4. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}\}$;
5. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$.

где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}$ — различные наборы из $\{0,1\}^n$.

Описано множество всех функций, которые может реализовать квазиуниверсальный булев автомат с тремя константными состояниями. Обозначим через $\mathfrak{V}_3^q(n)$ множество всех автоматов из $\mathfrak{V}_3(n)$, для которых выполнены следующие условия:

1. $V_{q_1} \in \mathfrak{V}_3^0(n)$;
2. $|B \cup T| = 2$;

3. $|K \cap B| = 0$;

4. $|K \cap T| = 1$;

5. $|A \cap E| \leq 1$;

6. $|A \cup E \cup B \cup T| = 2^n$.

Из условий следует, что для любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ выполнено $|K \cap T| = 1$ и $|(B \cup T) \backslash K| = 1$. Обозначим через $\widetilde{\alpha}(V_{q_1})$ единственный набор множества $K \cap T$, а через $\widetilde{\beta}(V_{q_1})$ единственный набор множества $(B \cup T) \backslash K$. Отметим, что $B \cup T = \{\widetilde{\alpha}(V_{q_1}), \widetilde{\beta}(V_{q_1})\}$. Опишем все функции, которые не может реализовать квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{V}_3^q(n)$. Обозначим через $\mathfrak{A}^q(V_{q_1})$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на не более, чем одном наборе, кроме функции, принимающей значение 0 на наборе $\widetilde{\beta}(V_{q_1})$. Заметим, что $|\mathfrak{A}^q(V_{q_1})| = 2^n$. Через $\overline{P(V_{q_1})}$ обозначается множество всех функций из $P_2(n)$, которые не могут быть реализованы автоматом V_{q_1}.

Теорема 12 (3.3.4). *Если $n \geq 6$ и автомат V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ является квазиуниверсальным, то $\overline{P(V_{q_1})} = \mathfrak{A}^q(V_{q_1})$.*

В § **4** рассматривается аналогичная задача для инициального булевого автомата с произвольным числом константных состояний.

Через $\mathfrak{V}_k^1(n)$ будем обозначать множество всех инициальных булевых автоматов с k константными состояниями и n входами, содержащих ровно одно 0-состояние, являющееся начальным, $n \geq 1$, $k \geq 3$. Получена оценка максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним инициальным булевым автоматом из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$.

Теорема 13 (3.4.1). *Для любого $n \geq 4$, любого $k \geq 3$ и любого автомата V_{q_1} из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$ верно $|P(V_{q_1})| \leq 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}$.*

Найдены некоторые необходимые условия квазиуниверсальности инициальных автоматов с k константными состояниями. В частности:

Теорема 14 (Следствие 3.4.4). *Для любого $n \geq 4$ и любого $k \geq 3$ никакой автомат V_{q_1} из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$ не является квазиуниверсальным.*

Получена оценка максимального числа булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых инициальным булевым автоматом с произвольным количеством константных состояний, где $n > 1$. Обозначим через $\mathfrak{W}_k(n)$ множество всех инициальных булевых автоматов с k константными состояниями и n входами. Положим $p_k(n) = \max_{V_{q_1} \in \mathfrak{W}_k(n)} |P(V_{q_1})|$.

Теорема 15 (Следствие 3.4.5). *Для любого $n \geq 1$ и любого $k \geq 1$ верно неравенство $p_k(n) \leq 2^{2^n} - 2$.*

Доказано, что эта оценка является точной для автоматов с количеством состояний превосходящим $2^n + 1$.

Теорема 16 (Следствие 3.4.6). *Для любого $n \geq 1$ и любого $m \geq 2^n + 2$ верно $p_m(n) = 2^{2^n} - 2$.*

В **заключении** сформулированы полученные в работе результаты, а также возможные направления дальнейших исследований.

Благодарности

Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора А. Б. Угольникова за постановку задачи и научное руководство. Также за научное руководство автор благодарит кандидата физико-математических наук, доцента Ольгу Сергеевну Дудакову. Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора Романа Максимовича Колпакова за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Глава 1

Автоматное замыкание

1.1 Основные определения

Пусть $\{0,1\}^n$ — множество всех наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, таких что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$, α_i назовем i-ой компонентой набора $\widetilde{\alpha}$, где $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$. Пусть X — счетное множество переменных, элементы множества X обозначаются символами $x_i, y_i, z_i, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$; нижние индексы иногда опускаются. Обозначим через $\widetilde{x}$ набор переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Пусть $f^{(n)}$ — отображение множества $\{0,1\}^n$ в $\{0,1\}$, $n \geq 1$, и пусть функция $f^{(n)}(\widetilde{x})$, задает это отображение. Функция $f^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *n-местной булевой функцией* (или *функцией алгебры логики*), а $f^{(n)}$ — *n-местным функциональным символом*, соответствующим этой функции. Множество всех функций алгебры логики обозначается через P_2. Через $P_2(n)$ обозначается множество всех булевых функций от фиксированных переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Под *булевым автоматом* будем понимать автомат $V = (A, B, Q, F, G)$ с произвольным числом входов, одним выходом, входным алфавитом $A = \{0,1\}$, выходным алфавитом $B = \{0,1\}$, алфавитом состояний Q, функцией перехода G и функцией выхода F (основные понятия теории автоматов см., например, в [28, 30, 62]). Пусть n — число входов автомата V. Без ограничения общности будем полагать, что входы автомата V занумерованы от 1 до n, и на i-й вход автомата V подается значение булевой переменной x_i. Тем самым можно считать, что в каждый момент времени на вход автомата V подается некоторый двоич-

ный набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и для любого фиксированного состояния $q \in Q$ функция выхода $F(q, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является булевой функцией от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_2$, булев автомат V будем называть *автоматом над* $\mathcal{A}$, если для любого состояния q автомата V функция выхода $F(q, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержится в $\mathcal{A}$. Заметим, что функции рассматриваются с точностью до несущественных переменных и переименования переменных.

Пусть $V_{q_1} = (\{0,1\}, \{0,1\}, Q, F, G, q_1)$ — инициальный булев автомат с начальным состоянием q_1 и n входами. Пусть $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ — упорядоченная последовательность всех двоичных наборов длины n, $n \geq 1$ (далее — *последовательность подаваемых наборов*). Будем говорить, что *автомат* V_{q_1} *с последовательностью* C *реализует булеву функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при последовательной подаче на вход V_{q_1} наборов из C в первые 2^n моментов времени, в каждый момент $t = 1, 2, \ldots, 2^n$ на выходе V_{q_1} выдается значение $f(\widetilde{\beta}_t)$. Будем также говорить, что V_{q_1} *реализует функцию* f, если для некоторой последовательности наборов C автомат V_{q_1} с последовательностью C реализует f.

Аналогичные определения можно ввести для неинициального автомата. Пусть $V = (\{0,1\}, \{0,1\}, Q, F, G)$ — неинициальный булев автомат с n входами. Пусть $q \in Q$, обозначим через V_q инициальный булев автомат, являющийся автоматом V с начальным состоянием q. Пусть $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ — последовательность подаваемых наборов. Будем говорить, что *автомат* V *с последовательностью* C *реализует булеву функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если существует такое состояние $q \in Q$, что функция f реализуется автоматом V_q с последовательностью C. Будем также говорить, что V *реализует функцию* f, если для некоторой последовательности подаваемых наборов C автомат V с последовательностью C реализует f.

1.2 Автоматное замыкание

В данной главе изучаются вопросы, связанные с автоматным замыканием множеств булевых функций. Дадим необходимые определения.

Автоматные функции, реализуемые булевыми автоматами, будем называть *двоичными автоматными функциями*. Другими словами, автоматная функция является двоичной, если входным и выходным алфавитом для этой функции является алфавит $\{0,1\}$. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_2$, двоичную автоматную функцию $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть *функцией над* $\mathcal{A}$, если h реализуется некоторым инициальным булевым автоматом над $\mathcal{A}$. Пусть V_{q_1} — некоторый инициальный булев автомат, реализующий двоичную автоматную функцию h, и C — некоторая последовательность подаваемых наборов. Будем говорить, что *функция h с последовательностью подаваемых наборов C реализует булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, если f реализуется автоматом V_{q_1} с последовательностью подаваемых наборов C. Будем также говорить, что *функция h реализует булеву функцию f*, если для некоторой последовательности наборов C функция h с последовательностью C реализует f.

Для автоматных функций можно стандартным образом определить понятие автоматной формулы, т.е. формулы над системой автоматных функций (см. например, [30, 62]). Пусть дано некоторое конечное множество булевых функций $\mathcal{A}$. Введем следующее понятие *автоматной формулы над* $\mathcal{A}$ индуктивным образом.

1. Базис индукции. Символ любой переменной является автоматной формулой над $\mathcal{A}$, называемой тривиальной формулой.

2. Индуктивный переход. Пусть $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — двоичная автоматная функция над $\mathcal{A}$ и $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ — автоматные формулы над $\mathcal{A}$. Тогда $h(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ является автоматной формулой над $\mathcal{A}$.

Понятие *автоматной функции, реализуемой автоматной формулой над* $\mathcal{A}$, определяется стандартным образом.

Пусть C — некоторая последовательность подаваемых наборов, а Φ — автоматная формула над $\mathcal{A}$, реализующая некоторую автоматную функцию $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Будем говорить, что *булева функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *реализуется автоматной формулой* Φ *с последовательностью подаваемых наборов* C, если f реализуется функцией h с последовательностью подаваемых наборов C. Будем также говорить, что *автоматная формула* Φ *реализует булеву функцию* f, если для некоторой последовательности наборов C формула Φ с последовательностью C реализует f.

Автоматным замыканием $[\mathcal{A}]_A$ множества булевых функций $\mathcal{A}$ называется множество всех булевых функций, реализуемых автоматными формулами над $\mathcal{A}$. Нетрудно заметить, что $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{A}]_A$ и для любых множеств булевых функций из $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ следует $[\mathcal{A}_1]_A \subseteq [\mathcal{A}_2]_A$. Далее будет показано, что для любой конечной системы булевых функций выполняется $[[\mathcal{A}]_A]_A = [\mathcal{A}]_A$, то есть, автоматное замыкание удовлетворяет всем аксиомам оператора замыкания (см. [28]). Далее в данной главе для удобства под автоматной функцией будем понимать двоичную автоматную функцию.

1.3 Описание автоматно замкнутых классов

Очевидно, что верно следующее утверждение.

Утверждение 1.3.1. *Верны включения:* $[T_0]_A \subseteq T_0$, $[T_1]_A \subseteq T_1$, $[T_{01}]_A \subseteq T_{01}$, $[\{0\}]_A \subseteq \{0\}$, $[\{1\}]_A \subseteq \{1\}$.

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $\mathcal{A} \subseteq P_2$ *и* $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

1. *Если* $\mathcal{A} \not\subseteq T_0$ *и* $\mathcal{A} \not\subseteq T_1$, *то* $[\mathcal{A}]_A = P_2$.

2. *Если* $\mathcal{A} \subseteq T_0 \backslash T_1$ *и* $\mathcal{A} \neq \{0\}$, *то* $[\mathcal{A}]_A = T_0$.

3. *Если* $\mathcal{A} \subseteq T_1 \backslash T_0$ *и* $\mathcal{A} \neq \{1\}$, *то* $[\mathcal{A}]_A = T_1$.

4. *Если* $\mathcal{A} \subseteq T_{01}$, *то* $[\mathcal{A}]_A = T_{01}$.

5. *Если* $\mathcal{A} = \{0\}$, *то* $[\mathcal{A}]_A = \{0\}$.

6. *Если* $\mathcal{A} = \{1\}$, *то* $[\mathcal{A}]_A = \{1\}$.

Для доказательства этой теоремы введем некоторые обозначения и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Обозначим через $C_L(n) = (\widetilde{\alpha}_1^L, \widetilde{\alpha}_2^L, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n}^L)$ последовательность всех двоичных наборов длины n, идущих в лексикографическом порядке. Пусть f — функция из $P_2(n)$, $\widetilde{\alpha}$ — двоичный набор длины n, $n \geq 1$. Обозначим через $j(f, \widetilde{\alpha})$ величину $\min_{1 \leq i \leq 2^n}\{i : \alpha_i = f(\widetilde{\alpha})\}$, где $\widetilde{\alpha}_i$ — i-ая компонента набора $\widetilde{\alpha}$. Заметим, что значение $j(f, \widetilde{\alpha})$ определено не для всех пар $(f, \widetilde{\alpha})$. Пусть автоматная функция $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет 2^n состояний $(q_1, q_2, \ldots, q_{2^n})$. Обозначим через $\check{G}$ функцию перехода для ψ, такую, что

$$\check{G}(q_i, \widetilde{\alpha}_r^L) = \begin{cases} q_{i+1} \text{ , при } i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1 \\ q_i \quad \text{ , при } i = 2^n \end{cases}$$

для $r = 1, 2, \ldots, 2^n$.

Лемма 1.3.1. $[\{0, 1\}]_A = P_2$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2$. Рассмотрим автоматную функцию $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ над $\{0, 1\}$, такую, что ψ имеет 2^n состояний $(q_1, q_2, \ldots, q_{2^n})$, начальное состояние q_1, функцию перехода $\check{G}$ и функцию выхода F, такую, что

$$F(q_i, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{cases} 0 \text{ , если } f(\widetilde{\alpha}_i^L) = 0 \\ 1 \text{ , если } f(\widetilde{\alpha}_i^L) = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что автоматная функция $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с последовательностью подаваемых наборов $C_L(n)$ реализует функцию f. Лемма доказана. ■

Лемма 1.3.2. $[\{x\}]_A = T_{01}$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_{01}$. Заметим, что для функции f из класса T_{01} значение $j(f, \widetilde{\alpha})$ определено для любого набора $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$. Рассмотрим автоматную функцию $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ над $\{x\}$, такую, что ψ имеет 2^n состояний $(q_1, q_2, \ldots, q_{2^n})$, начальное состояние q_1, функцию перехода $\check{G}$ и функцию выхода F, такую, что

$$F(q_i, y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_{j(f, \widetilde{\alpha}_i^L)} \text{ , при } i = 1, 2, \ldots, 2^n.$$

Легко видеть, что автоматная функция $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с последовательностью подаваемых наборов $C_L(n)$ реализует функцию f. Следовательно $T_0 \subseteq [\{x\}]_A$. В силу утверждения 1.3.1 выполнено $[\{x\}]_A \subseteq [T_0]_A \subseteq T_0$. Значит, $[\{x\}]_A = T_0$. Лемма доказана. ■

Лемма 1.3.3. $[\{\overline{x}\}]_A = P_2$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2$. Заметим, что значение $j(\overline{f}, \widetilde{\alpha})$ определено для любого набора $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$ кроме, быть может, наборов $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$. Обозначим через $\varphi(y)$ автоматную функцию, такую, что φ имеет одно состояние и в этом состоянии имеет функцию выхода $\overline{y}$. Рассмотрим автоматную функцию $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ над $\{\overline{x}\}$, такую, что ψ имеет 2^n состояний $(q_1, q_2, \ldots, q_{2^n})$, начальное состояние q_1, функцию перехода $\check{G}$ и функцию выхода F, такую, что

$$F(q_i, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) = \begin{cases} \overline{y}_{j(\overline{f}, \widetilde{\alpha}_i^L)} \text{ , если } j(\overline{f}, \widetilde{\alpha}_i^L) \text{ определено} \\ \overline{y}_{n+1} \text{ , если } j(\overline{f}, \widetilde{\alpha}_i^L) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Легко видеть, что автоматная функция, реализуемая автоматной формулой $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1))$, с последовательностью подаваемых наборов $C_L(n)$ реализует функцию f. Следовательно $P_2 \subseteq [\{\overline{x}\}]_A$, а значит, $[\{\overline{x}\}]_A = P_2$. Лемма доказана. ■

Лемма 1.3.4. *Пусть* $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P_2 \setminus (T_0 \cup T_1)$. *Тогда* $[\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A = P_2$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2$. Заметим, что $g(x, x, \ldots, x) = \overline{x}$, а значение $j(\overline{f}, \widetilde{\alpha})$ определено для любого набора $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$ кроме, быть может, наборов $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$. Обозначим через $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ автоматную функцию, такую, что φ имеет одно состояние и в этом состоянии имеет функцию выхода $g(y_1, y_2, \ldots, y_k)$. Рассмотрим автоматную функцию

$$\psi(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_k^1, y_1^2, y_2^2, \ldots, y_k^2, \ldots, y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \ldots, y_k^{n+1})$$

над $\{g\}$, такую, что ψ имеет 2^n состояний $(q_1, q_2, \ldots, q_{2^n})$, начальное состояние q_1, функцию перехода $\check{G}$ и функцию выхода F, такую, что

$$F(q_i, y_1^1, y_2^1, \ldots, y_k^1, y_1^2, y_2^2, \ldots, y_k^2, \ldots, y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \ldots, y_k^{n+1}) =$$

$$= \begin{cases} g(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \ldots, y_k^{n+1}) \text{ , если } i = 1 \text{ и } f(\widetilde{0}) = 0 \\ g(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \ldots, y_k^{n+1}) \text{ , если } i = 2^n \text{ и } f(\widetilde{1}) = 1 \\ g(y_1^{j(\overline{f}, \widetilde{\alpha}_i^L)}, y_2^{j(\overline{f}, \widetilde{\alpha}_i^L)}, \ldots, y_k^{j(\overline{f}, \widetilde{\alpha}_i^L)}) \text{ , иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно показать, что автоматная функция, реализуемая автоматной формулой

$$\psi(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{k}, \ldots, \underbrace{x_n, x_n, \ldots, x_n}_{k}, \underbrace{\varphi(x_1, x_1, \ldots, x_1), \ldots, \varphi(x_1, x_1, \ldots, x_1)}_{k}),$$

с последовательностью подаваемых наборов $C_L(n)$ реализует функцию f. Следовательно $P_2 \subseteq [\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A$, а значит, $[\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A = P_2$. Лемма доказана. ■

Лемма 1.3.5. *Пусть* $\mathcal{A} \subseteq P_2$, $\mathcal{A} \nsubseteq T_0$ *и* $\mathcal{A} \nsubseteq T_1$. *Тогда* $[\mathcal{A}]_A = P_2$.

Доказательство. Если в множестве $\mathcal{A}$ существует функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, такая что $g \notin T_0$ и $g \notin T_1$, то утверждение леммы верно в силу леммы 1.3.4. Пусть такой функции не существует, тогда в $\mathcal{A}$

существуют функции $g_0(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_l)$, такие, что $g_0 \in T_0 \backslash T_1$ и $g_1 \in T_1 \backslash T_0$. Заметим, что $g_0(x, x, \ldots, x) = 0$ и $g_1(x, x, \ldots, x) = 1$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2$. Рассмотрим автоматную функцию

$$\psi(y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1, z_2, \ldots, z_l)$$

над $\{g_0, g_1\}$, такую, что ψ имеет 2^n состояний $(q_1, q_2, \ldots, q_{2^n})$, начальное состояние q_1, функцию перехода $\check{G}$, и функцию выхода F, такую, что

$$F(q_i, y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1, z_2, \ldots, z_l) = \begin{cases} g_0(y_1, y_2, \ldots, y_k) \text{ , если } f(\widetilde{\alpha}_i^L) = 0 \\ g_1(z_1, z_2, \ldots, z_l) \text{ , если } f(\widetilde{\alpha}_i^L) = 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что автоматная функция, реализуемая автоматной формулой

$$\psi(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{k}, \underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{l}),$$

с последовательностью подаваемых наборов $C_L(n)$ реализует функцию f. Следовательно $P_2 \subseteq [\mathcal{A}]_A$, а значит, $[\mathcal{A}]_A = P_2$. Лемма доказана. ■

Лемма 1.3.6. *Пусть* $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in T_{01}$. *Тогда* $[\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A = T_{01}$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_{01}$. Заметим, что $g(x, x, \ldots, x) = x$, а значение $j(f, \widetilde{\alpha})$ определено для любого набора $\widetilde{\alpha} \in \{0, 1\}^n$. Рассмотрим автоматную функцию

$$\psi(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_k^1, y_1^2, y_2^2, \ldots, y_k^2, \ldots, y_1^n, y_2^n, \ldots, y_k^n)$$

над $\{g\}$, такую, что ψ имеет 2^n состояний $(q_1, q_2, \ldots, q_{2^n})$, начальное состояние q_1, функцию перехода $\check{G}$, и функцию выхода F, такую, что

$$F(q_i, y_1^1, y_2^1, \ldots, y_k^1, y_1^2, y_2^2, \ldots, y_k^2, \ldots, y_1^n, y_2^n, \ldots, y_k^n) =$$

$$= g(y_1^{j(f, \widetilde{\alpha}_i^L)}, y_2^{j(f, \widetilde{\alpha}_i^L)}, \ldots, y_k^{j(f, \widetilde{\alpha}_i^L)}).$$

Легко видеть, что автоматная функция, реализуемая автоматной формулой

$$\psi(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{k}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{k} \ldots, \underbrace{x_n, x_n, \ldots, x_n}_{k}),$$

с последовательностью подаваемых наборов $C_L(n)$ реализует функцию f. Следовательно $T_{01} \subseteq [\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A$. В силу утверждения 1.3.1 выполнено $[\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A \subseteq [T_{01}]_A \subseteq T_{01}$. Значит, $[\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A = T_{01}$. Лемма доказана. ■

Следствие 1.3.1. *Пусть* $\mathcal{A} \subseteq T_{01}$ *и* $\mathcal{A} \neq \emptyset$. *Тогда* $[\mathcal{A}]_A = T_{01}$.

Лемма 1.3.7. *Пусть* $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in T_0 \backslash T_1$ *и* $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \not\equiv 0$. *Тогда* $[\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A = T_0$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_0$. Заметим, что $g(x, x, \ldots, x) = 0$ и существует набор $\widetilde{\beta}$, такой, что $\widetilde{\beta} \notin \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}$ и $g(\widetilde{\beta}) = 1$. Без ограничения общности будем считать, что

$$\widetilde{\beta} = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k_1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k_2}).$$

Кроме того, заметим, что если $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, то $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0}$, а значит, для всех $\widetilde{\alpha} \in \{0, 1\}^n$ определено значение $j(f, \widetilde{\alpha})$. Обозначим через $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ автоматную функцию, такую, что φ имеет одно состояние и в этом состоянии имеет функцию выхода $g(y_1, y_2, \ldots, y_k)$. Рассмотрим автоматную функцию

$$\psi(\underbrace{y_1^1, y_2^1, \ldots, y_k^1}_{k}, \underbrace{y_1^2, y_2^2, \ldots, y_{k_1}^2}_{k_1}, \ldots, \underbrace{y_1^n, y_2^n, \ldots, y_{k_1}^n}_{k_1}, \underbrace{z_1, z_2, \ldots, z_{k_2}}_{k_2})$$

над $\{g\}$, такую, что ψ имеет 2^n состояний $(q_1, q_2, \ldots, q_{2^n})$, начальное состояние q_1, функцию перехода $\check{G}$, и функцию выхода F, такую, что

$$F(q_i, y_1^1, y_2^1, \ldots, y_k^1, y_1^2, y_2^2, \ldots, y_{k_1}^2, \ldots, y_1^n, y_2^n, \ldots, y_{k_1}^n, z_1, z_2, \ldots, z_{k_2}) =$$

$$= \begin{cases} g(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_k^1) \text{ , если } f(\widetilde{\alpha}_i^L) = 0 \\ g(y_1^{j(f,\widetilde{\alpha}_i^L)}, y_2^{j(f,\widetilde{\alpha}_i^L)}, \ldots, y_{k_1}^{j(f,\widetilde{\alpha}_i^L)}, z_1, z_2, \ldots, z_{k_2}) \text{ , если } f(\widetilde{\alpha}_i^L) = 1 \end{cases}.$$

Нетрудно показать, что автоматная функция, реализуемая автоматной формулой

$$\psi(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{k_1} \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{k_1}, \underbrace{\varphi(x_1, x_1, \ldots, x_1), \ldots, \varphi(x_1, x_1, \ldots, x_1)}_{k_2}),$$

с последовательностью подаваемых наборов $C_L(n)$ реализует функцию f. Следовательно $T_0 \subseteq [\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A$. В силу утверждения 1.3.1 выполнено $[\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A \subseteq [T_0]_A \subseteq T_0$. Значит, $[\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A = T_0$. Лемма доказана. ■

Следствие 1.3.2. *Пусть* $\mathcal{A} \subseteq T_0$, $\mathcal{A} \nsubseteq T_1$ *и* $\mathcal{A} \neq \{0\}$. *Тогда* $[\mathcal{A}]_A = T_0$.

Аналогично лемме 1.3.7 можно доказать следующую лемму.

Лемма 1.3.8. *Пусть* $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in T_1 \backslash T_0$ *и* $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 1$. *Тогда* $[\{g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}]_A = T_1$.

Следствие 1.3.3. *Пусть* $\mathcal{A} \subseteq T_1$, $\mathcal{A} \nsubseteq T_0$ *и* $\mathcal{A} \neq \{1\}$. *Тогда* $[\mathcal{A}]_A = T_1$.

Доказательство теоремы 1.3.1. Пусть $\mathcal{A} \nsubseteq T_0$ и $\mathcal{A} \nsubseteq T_1$. Тогда утверждение теоремы выполнено в силу леммы 1.3.5. Пусть $\mathcal{A} \subseteq T_0 \backslash T_1$ и $\mathcal{A} \neq \{0\}$. Тогда утверждение теоремы выполнено в силу следствия 1.3.2. Пусть $\mathcal{A} \subseteq T_1 \backslash T_0$ и $\mathcal{A} \neq \{1\}$. Тогда утверждение теоремы выполнено в силу следствия 1.3.3. Пусть $\mathcal{A} \subseteq T_{01}$ и $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Тогда утверждение теоремы выполнено в силу следствия 1.3.1. Соотношения $[\{1\}]_A = \{1\}$ и $[\{0\}]_A = \{0\}$ очевидны. Теорема доказана. ■

Из теоремы 1.3.1 можно извлечь следствия.

Следствие 1.3.4. *Для автоматного замыкания в* P_2 *выполнены все аксиомы оператора замыкания.*

Следствие 1.3.5. *В* P_2 *существует шесть замкнутых относительно этого оператора классов:* $\{0\}, \{1\}, T_{01}, T_0, T_1, P_2$.

Глава 2

Обобщенные формулы

В данной главе вводится понятие обобщенных формул, являющихся в выразительном плане ослабленным вариантом автоматных формул.

2.1 Определение обобщенных формул

Пусть дано некоторое конечное множество булевых функций

$$\mathcal{A} = \{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}), \ldots, f_s(x_1, x_2, \ldots, x_{m_s})\}.$$

Будем обозначать через $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ множество $\{f_1^{(m_1)}, \ldots, f_s^{(m_s)}\}$ функциональных символов, соответствующих функциям из $\mathcal{A}$. Определение понятия формулы над множеством $\mathcal{A}$ булевых функций, а также определение понятий подформул формулы Φ и тривиальной формулы см., например, в [62]. Для любой формулы Φ над $\mathcal{A}$ и для любого набора $\widetilde{\alpha}$ значений переменных формулы Φ будем обозначать через $\Phi|_{\widetilde{\alpha}}$ *значение формулы* Φ *на наборе* $\widetilde{\alpha}$. Формулы над $\mathcal{A}$ можно рассматривать как слова определенного вида (конечной длины) в алфавите $X \cup \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — множество вспомогательных символов, состоящее из левой и правой скобок, а также запятой. Формулы Ψ и Φ будем называть *графически равными* (обозначение $\Psi \underset{\Gamma}{=} \Phi$), если эти формулы совпадают как слова. Пусть $\Phi \underset{\Gamma}{=} f^{(m)}(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$. Формулы $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ называются *главными подформулами* формулы Φ. Функциональный символ $f^{(m)}$ называется *внешним функциональным символом* формулы Φ.

Через $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем обозначать формулу, все переменные которой содержатся среди переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (т. е. множество всех переменных формулы $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является подмножеством в $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$).

Пусть теперь дано некоторое конечное множество

$$\mathcal{A} = \{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_s(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$$

булевых функций от m фиксированных переменных.

Пусть $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^m}$ — всевозможные двоичные наборы длины m и $\mathsf{G} = \{g_{\widetilde{\alpha}_1}, g_{\widetilde{\alpha}_2}, \ldots, g_{\widetilde{\alpha}_{2^m}}\}$ — семейство отображений $g_{\widetilde{\alpha}_i} : \mathcal{F}(\mathcal{A}) \to \mathcal{F}(\mathcal{A})$, $i = 1, 2, \ldots, 2^m$. Будем называть множество G *правилом смены на множестве* $\mathcal{A}$. Заметим, что семейство G может быть задано таблицей:

	$g_{\widetilde{\alpha}_1}$	$g_{\widetilde{\alpha}_2}$	$\ldots$	$g_{\widetilde{\alpha}_{2^m}}$
$f_1^{(m)}$	$f_{1,1}^{(m)}$	$f_{1,2}^{(m)}$	$\ldots$	$f_{1,2^m}^{(m)}$
$f_2^{(m)}$	$f_{2,1}^{(m)}$	$f_{2,2}^{(m)}$	$\ldots$	$f_{2,2^m}^{(m)}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$f_s^{(m)}$	$f_{s,1}^{(m)}$	$f_{s,2}^{(m)}$	$\ldots$	$f_{s,2^m}^{(m)}$

где через $f_{i,k}^{(m)}$ обозначается символ $g_{\widetilde{\alpha}_k}(f_i^{(m)})$.

Обозначим через $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ множество всех формул над $\mathcal{A}$, все переменные которых содержатся среди переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть G — некоторое правило смены на множестве $\mathcal{A}$ и $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — произвольный двоичный набор длины n. Определим следующее преобразование $\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}$ формул из $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ индукцией по глубине формул. Пусть Φ — некоторая формула из $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

1. Базис индукции. Если формула Φ является символом переменной, то $\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi) \underset{\Gamma}{=} \Phi$.

2. Индуктивный переход. Пусть

$$\Phi \underset{\Gamma}{=} f_i^{(m)}(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m),$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ — некоторые формулы из $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Тогда

$$\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi) \underset{\Gamma}{=} \widehat{f}^{(m)}(\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi_1), \mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi_2), \ldots, \mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}(\Phi_m)),$$

где $\widehat{f}^{(m)} = g_{\widetilde{\beta}}(f_i^{(m)})$ при $\widetilde{\beta} = (\Phi_1|_{\widetilde{\alpha}}, \Phi_2|_{\widetilde{\alpha}}, \ldots, \Phi_m|_{\widetilde{\alpha}})$.

Отметим, что преобразование $\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}}$ сохраняет множество всех переменных формулы.

Обобщенной формулой F *над множеством функций* $\mathcal{A}$ будем называть пару $(\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G})$, где $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\mathcal{A}$, а G — некоторое правило смены на $\mathcal{A}$. Формулу $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть *начальной формулой обобщенной формулы* F. Множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ всех переменных формулы Φ будем называть *множеством всех переменных обобщенной формулы* F.

Пусть $C = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n})$ — некоторая последовательность всех двоичных наборов длины n, будем называть C последовательностью подаваемых наборов для обобщенной формулы F. Для обобщенной формулы $\mathsf{F} = (\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G})$ и последовательности подаваемых наборов C можно построить последовательность формул над множеством $\mathcal{A}$

$$\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, C) = (\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_{2^n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

по следующим правилам:

1) $\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \underset{\Gamma}{=} \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

2) для любого $j = 1, 2, \ldots, 2^n$ выполнено

$$\mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}_j}(\Phi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \Phi_{j+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пусть $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — некоторый набор значений всех переменных обобщенной формулы F, и пусть j — такой номер из $\{1, 2, \ldots, 2^n\}$, что

$\widetilde{\beta} = \widetilde{\alpha}_j, (\widetilde{\alpha}_j \in C)$. Определим *значение* $\mathsf{F}(C)|_{\widetilde{\beta}}$ *обобщенной формулы* F *с последовательностью подаваемых наборов* C *на наборе* $\widetilde{\beta}$ *значений переменных* как $\Phi_j|_{\widetilde{\alpha}_j}$, где Φ_j — j-ая формула из последовательности $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, C)$.

Таким образом можно определить значение обобщенной формулы F с последовательностью подаваемых наборов C на любом двоичном наборе значений переменных формулы F и тем самым сопоставить обобщенной формуле F с последовательностью подаваемых наборов C некоторую функцию алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Про функцию, сопоставленную выше указанным способом обобщенной формуле, будем говорить, что *функция* f *реализуется обобщенной формулой* F *с последовательностью подаваемых наборов* C. В этом случае будем также говорить, что *функция* f *реализуется обобщенной формулой* F.

Следует отметить, что булевы функции, реализуемые обобщенной формулой F с разными последовательностями подаваемых наборов, могут различаться. Таким образом, обобщенной формуле ставится в соответствие некоторое множество булевых функций, реализуемых этой формулой.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное конечное множество булевых функций от m фиксированных переменных. *Обобщенным замыканием* $[\mathcal{A}]_{\mathsf{F}}$ множества булевых функций $\mathcal{A}$ называется множество всех булевых функций, реализуемых обобщенными формулами над $\mathcal{A}$.

Подформулой обобщенной формулы $\mathsf{F} = (\Phi, \mathsf{G})$ будем называть обобщенную формулу $\mathsf{F}' = (\Psi, \mathsf{G})$, где Ψ является подформулой формулы Φ.

Пусть $\mathsf{F} = (\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G})$ — некоторая обобщенная формула с множеством переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ — некоторое множество переменных, содержащее все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обобщенной формулы F. Пусть $\widetilde{B} = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_t)$ — некоторая последовательность значений переменных из X, в которой наборы могут повторяться и некоторые двоичные наборы длины k могут отсутствовать. Будем называть такую последовательность $\widetilde{B}$ *квазипоследовательностью подаваемых наборов*. Аналогично последовательности $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, C)$ для обобщенной формулы F и квазипоследователь-

ности подаваемых наборов $\widetilde{B}$ можно определить последовательность формул

$$\widetilde{\Phi}(\mathsf{F},\widetilde{B}) = (\Phi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\Phi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,\Phi_{t+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)),$$

удовлетворяющую условиям 1), 2). Также аналогично определению значения $\mathsf{F}(C)|_{\widetilde{\beta}}$ для обобщенной формулы F, квазипоследовательности подаваемых наборов $\widetilde{B}$ и набора $\widetilde{\beta}_j$ из $\widetilde{B}$ можно определить *значение обобщенной формулы* F *с квазипоследовательностью подаваемых наборов* $\widetilde{B}$ *на наборе* $\widetilde{\beta}_j$.

Обобщенную формулу $\mathsf{F} = (\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n),\mathsf{G})$ будем называть *формулой с линейной структурой* (или *обобщенной* α*-формулой*), если начальная формула $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является α-формулой, то есть формулой, любая подформула которой содержит не более одной подформулы, отличной от символа переменной.

Через $\mathcal{H}$ будем обозначать множество всех формул $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ вида

$$H_1(x_1,H_2(x_2,\ldots H_{n-1}(x_{n-1},x_n))\ldots),$$

где $H_i(x,y) \in \{x \vee y, x\&y\}$, для всех $i = 1,2,\ldots,n-1$.

Линейной дизъюнктивной (*конъюнктивной*) *формулой* будем называть α-формулу, все функциональные символы которой являются дизъюнкциями (конъюнкциями).

Обозначим через $\mathsf{G}^* = \{g_{(0,0)},g_{(0,1)},g_{(1,0)},g_{(1,1)}\}$ правило смены на множестве $\{x_1\&x_2, x_1 \vee x_2\}$, задаваемое следующей таблицей:

	$g_{(0,0)}$	$g_{(0,1)}$	$g_{(1,0)}$	$g_{(1,1)}$
$\vee^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\&^{(2)}$
$\&^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\vee^{(2)}$

т.е. на наборах $(0,0)$ и $(1,1)$ формула $x_1 \vee x_2$ меняется на $x_1\&x_2$ и формула $x_1\&x_2$ меняется на $x_1 \vee x_2$, а на наборах $(0,1)$ и $(1,0)$ формулы $x_1 \vee x_2$ и $x_1\&x_2$ не меняются.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех обобщенных формул над $\{x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2\}$ с начальными формулами из множества $\mathcal{H}$ и с правилом смены G^*.

Пример 2.1.1. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{F}$ *и имеет начальную формулу* $x_1 \vee x_2$. *Рассмотрим последовательность подаваемых наборов* $C = ((0,0),(0,1),(1,0),(1,1))$. *Таблица значений функции, которая реализуется обобщенной формулой* F *с последовательностью подаваемых наборов* C, *выглядит следующим образом:*

i	α_i	$\mathsf{F}\|_{\alpha_i}$	Φ_i
1	00	0	$x_1 \vee x_2$
2	01	0	$x_1 \& x_2$
3	10	0	$x_1 \& x_2$
4	11	1	$x_1 \& x_2$

Если подавать наборы в другой последовательности, то можно получить другой столбец значений функции.

Пример 2.1.2. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{F}$ *и имеет начальную формулу* $x_1 \vee x_2$. *Рассмотрим последовательность подаваемых наборов* $C = ((0,0),(1,1),(0,1),(1,0))$. *Таблица значений функции, которая реализуется обобщенной формулой* F *с последовательностью подаваемых наборов* C, *выглядит следующим образом:*

i	α_i	$\mathsf{F}\|_{\alpha_i}$	Φ_i
1	00	0	$x_1 \vee x_2$
2	11	1	$x_1 \& x_2$
3	01	1	$x_1 \vee x_2$
4	10	1	$x_1 \vee x_2$

2.2 Соотношение между обобщенным и автоматным замыканиями

Пусть $\mathcal{A} = \{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_s(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$ — некоторое множество булевых функций от m фиксированных переменных, $\mathsf{G} = \{g_{\widetilde{\alpha}_1}, g_{\widetilde{\alpha}_2}, \ldots, g_{\widetilde{\alpha}_{2^m}}\}$ — некоторое правило смены на $\mathcal{A}$. Обозначим через $V(\mathsf{G}) = (\{0,1\}, \{0,1\}, Q, F, G)$ булев автомат с m входами над множеством $\mathcal{A}$, где Q — множество всех функциональных символов из $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, для любого набора $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$ и любого состояния $f_i \in Q$ выполняется $F(f_i, \widetilde{\alpha}) = f_i(\widetilde{\alpha})$ и $G(f_i, \widetilde{\alpha}) = g_{\widetilde{\alpha}}(f_i)$. Каждому символу f_i из $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ сопоставляется автоматная двоичная функция $h_i^G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, реализуемая автоматом $V(\mathsf{G})$ с начальным состоянием f_i.

Утверждение 2.2.1. *Для любого множества $\mathcal{A}$ булевых функций от фиксированных переменных выполнено $[\mathcal{A}]_{\mathsf{F}} \subseteq [\mathcal{A}]_A$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из $[\mathcal{A}]_{\mathsf{F}}$. Следовательно, f реализуется некоторой обобщенной формулой $\mathsf{F} = (\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G})$ над $\mathcal{A}$ с некоторой последовательностью подаваемых наборов C. Рассмотрим автоматную формулу $\widehat{\Phi}$ над $\mathcal{A}$, полученную из Φ заменой каждого функционального символа f_i, содержащегося в Φ, на символ автоматной функции h_i^G. Нетрудно заметить, что f реализуется автоматной формулой $\widehat{\Phi}$ с последовательностью подаваемых наборов C. Следовательно, $f \in [\mathcal{A}]_A$. Утверждение доказано. ■

Следующее утверждение показывает, что для некоторых множеств булевых функций выполняется строгое вложение, то есть обобщенное замыкание является более слабой операцией, чем автоматное замыкание.

Утверждение 2.2.2. *Пусть $\mathcal{A} = P_2(1)$, тогда $[\mathcal{A}]_{\mathsf{F}} \subset [\mathcal{A}]_A$.*

Доказательство. Очевидно, что $[\mathcal{A}]_{\mathsf{F}} = P_2(1)$, тогда как в силу леммы 1.3.3 $[\mathcal{A}]_A = P_2$. Утверждение доказано. ■

2.3 Свойства обобщенных формул

Набор $(0, 0, \ldots, 0)$ длины n будем обозначать через $\widetilde{0}$, а набор $(1, 1, \ldots, 1)$ длины n будем обозначать через $\widetilde{1}$. В данной работе определения замкнутых классов булевых функций $C_0, C_1, T_{01}, T_0, T_1, M$ берутся из книги [59]. Очевидно, что верно следующее утверждение.

Утверждение 2.3.1.

1. $[C_0]_{\mathsf{F}} = [C_0]_A = C_0$;
2. $[C_1]_{\mathsf{F}} = [C_1]_A = C_1$;
3. $[T_{01}]_{\mathsf{F}} = [T_{01}]_A = T_{01}$;
4. $[T_0]_{\mathsf{F}} = [T_0]_A = T_0$;
5. $[T_1]_{\mathsf{F}} = [T_1]_A = T_1$;
6. $[P_2]_{\mathsf{F}} = [P_2]_A = P_2$;

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2.3.2. *Пусть* $\mathsf{F} = (\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G})$ *— обобщенная формула и* f *— функция, реализуемая формулой* Φ. *Тогда обобщенная формула* F *не может реализовать функцию* $\overline{f}$.

Будем говорить, что *набор* $\widetilde{\beta}$ *противоположен набору* $\widetilde{\gamma}$ ($\widetilde{\beta} = \overline{\widetilde{\gamma}}$), если $\beta_i = \overline{\gamma}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем говорить, что *квазипоследовательность подаваемых наборов* C_1 *противоположна квазипоследовательности подаваемых наборов* C_2 ($C_1 = \overline{C}_2$), если $C_1 = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots \widetilde{\alpha}_t)$ и $C_2 = (\overline{\widetilde{\alpha}}_1, \overline{\widetilde{\alpha}}_2, \ldots \overline{\widetilde{\alpha}}_t)$.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2$, *функция* $f^* = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ *называется двойственной к функции* f. Пусть функция f двойственна к функции g, тогда соответствующие им *функциональные символы назовем двойственными. Формулы* Φ *и* Ψ *будем называть двойственными* ($\Psi = \Phi^*$), если формула Ψ получена из формулы Φ заменой каждого функционального символа на двойственный. Пусть даны два множества функций:

$$\mathcal{A} = \{f_1(x_1, x_2, \ldots x_m), f_2(x_1, x_2, \ldots x_m), \ldots, f_k(x_1, x_2, \ldots x_m)\},$$

$$\mathcal{B} = \{g_1(x_1, x_2, \ldots x_m), g_2(x_1, x_2, \ldots x_m), \ldots, g_k(x_1, x_2, \ldots x_m)\},$$

таких, что для всякого i, $1 \leq i \leq k$, функция $f_i(x_1, x_2, \ldots x_m)$ является двойственной к функции $g_i(x_1, x_2, \ldots x_m)$. Тогда две *обобщенные формулы* $\mathsf{F}^1 = (\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G}^1)$ *над* $\mathcal{A}$ *и* $\mathsf{F}^2 = (\Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G}^2)$ *над* $\mathcal{B}$ *будем называть двойственными*, если $\Phi_2 = \Phi_1^*$ и $\mathsf{G}^1 = \{g^1_{\widetilde{\alpha}_1}, g^1_{\widetilde{\alpha}_2}, \ldots, g^1_{\widetilde{\alpha}_{2^n}}\}$, $\mathsf{G}^2 = \{g^2_{\widetilde{\alpha}_1}, g^2_{\widetilde{\alpha}_2}, \ldots, g^2_{\widetilde{\alpha}_{2^n}}\}$ являются правилами перехода, такими, что $g^1_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_j$ тогда и только тогда, когда $g^2_{\widetilde{\widetilde{\alpha}}}(g_i) = g_j$, где $1 \leq i, j \leq k$.

Утверждение 2.3.3. *Пусть* $\mathsf{F}^1 = (\Phi^1, \mathsf{G}^1)$, $\mathsf{F}^2 = (\Phi^2, \mathsf{G}^2)$ — *две двойственные обобщенные формулы,* $C_1 = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots \widetilde{\alpha}_t)$, $C_2 = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots \widetilde{\beta}_t)$ — *противоположные квазипоследовательности подаваемых наборов,*

$$\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}^1, C_1) = (\Phi^1_1, \Phi^1_2, \ldots, \Phi^1_{t+1}) \quad \textit{и} \quad \widetilde{\Phi}(\mathsf{F}^2, C_2) = (\Phi^2_1, \Phi^2_2, \ldots, \Phi^2_{t+1}).$$

Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, t$ *выполнено* $\Phi^1_j = \Phi^{2*}_j$ *и* $\Phi^1_j|_{\widetilde{\alpha}_j} = \overline{\Phi}^2_j|_{\widetilde{\beta}_j}$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по глубине начальных формул.

База. Рассмотрим обобщенную формулу с глубиной начальной формулы равной 0. В этом случае все формулы из последовательностей $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}^1, C_1)$ и $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}^2, C_2)$ являются тривиальными, поэтому $\Phi^1_j = \Phi^{2*}_j$. А равенство $\Phi^1_j|_{\widetilde{\alpha}_j} = \overline{\Phi}^2_j|_{\widetilde{\beta}_j}$ следует из того, что $\widetilde{\alpha}_j = \overline{\widetilde{\beta}}_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, t$.

Переход. Пусть утверждение верно для обобщенных формул с глубиной начальных формул не более r, докажем его для обобщенных формул с глубиной начальных формул равной $r+1$. Пусть $\Phi^1 = f_p(\Psi^1, \Psi^2, \ldots, \Psi^m)$ и $\Phi^2 = h_p(\Omega^1, \Omega^2, \ldots, \Omega^m)$, где $p \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Рассмотрим обобщенные формулы $\mathsf{H}_i = (\Psi^i, \mathsf{G}^1)$ и $\mathsf{K}_i = (\Omega^i, \mathsf{G}^2)$, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть

$$\widetilde{\Phi}(\mathsf{H}_i, C_1) = (\Psi^i_1, \Psi^i_2, \ldots, \Psi^i_{t+1}) \quad \text{и} \quad \widetilde{\Phi}(\mathsf{K}_i, C_2) = (\Omega^i_1, \Omega^i_2, \ldots, \Omega^i_{t+1}).$$

Поскольку формулы Φ^1 и Φ^2 являются двойственными, то обобщенные формулы H_i и K_i являются двойственными для любого $i = 1, 2, \ldots, m$. По предположению индукции для $\widetilde{\Phi}(\mathsf{H}_i, C_1)$ и $\widetilde{\Phi}(\mathsf{K}_i, C_2)$ следуют равенства $\Psi^i_j = \Omega^{i*}_j$ и $\Psi^i_j|_{\widetilde{\alpha}_j} = \overline{\Omega}^i_j|_{\widetilde{\beta}_j}$ для любых $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, t$.

Рассмотрим противоположные квазипоследовательности

$$C_3 = ((\Psi^1_1|_{\widetilde{\alpha}_1}, \Psi^2_1|_{\widetilde{\alpha}_1}, \ldots, \Psi^m_1|_{\widetilde{\alpha}_1}), (\Psi^1_2|_{\widetilde{\alpha}_2}, \Psi^2_2|_{\widetilde{\alpha}_2}, \ldots, \Psi^m_2|_{\widetilde{\alpha}_2}), \ldots,$$

$$(\Psi^1_t|_{\widetilde{\alpha}_t}, \Psi^2_t|_{\widetilde{\alpha}_t}, \ldots, \Psi^m_t|_{\widetilde{\alpha}_t})) = (\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \ldots, \widetilde{\gamma}_t) \quad \text{и}$$

$$C_4 = ((\Omega^1_1|_{\widetilde{\beta}_1}, \Omega^2_1|_{\widetilde{\beta}_1}, \ldots, \Omega^m_1|_{\widetilde{\beta}_1}), (\Omega^1_2|_{\widetilde{\beta}_2}, \Omega^2_2|_{\widetilde{\beta}_2}, \ldots, \Omega^m_2|_{\widetilde{\beta}_2})),$$

$$\ldots, (\Omega^1_t|_{\widetilde{\beta}_t}, \Omega^2_t|_{\widetilde{\beta}_t}, \ldots, \Omega^m_t|_{\widetilde{\beta}_t}) = (\widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2, \ldots, \widetilde{\delta}_t)$$

и двойственные обобщенные формулы $\mathsf{M}^1 = (f_p(x_1, x_2, \ldots, x_m), \mathsf{G}^1)$ и $\mathsf{M}^2 = (h_p(x_1, x_2, \ldots, x_m), \mathsf{G}^2)$. Пусть

$$\widetilde{\Phi}(\mathsf{M}^1, C_3) = (f_{p_1}(x_1, x_2, \ldots, x_m), f_{p_2}(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_{p_{t+1}}(x_1, x_2, \ldots, x_m)),$$

$$\widetilde{\Phi}(\mathsf{M}^2, C_4) = (h_{l_1}(x_1, x_2, \ldots, x_m), h_{l_2}(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, h_{l_{t+1}}(x_1, x_2, \ldots, x_m)).$$

Индукцией по i докажем, что $p_i = l_i$ для $i = 1, 2, \ldots t+1$. При $i = 1$ имеем $p_1 = l_1 = p$. Пусть для $i > 1$ уже доказано, что $p_{i-1} = l_{i-1}$, докажем, что $p_i = l_i$. Заметим, что $f_{p_i} = g^1_{\widetilde{\gamma}_{i-1}}(f_{p_{i-1}})$ и $h_{l_i} = g^2_{\widetilde{\delta}_{i-1}}(h_{l_{i-1}})$. Поэтому из $p_{i-1} = l_{i-1}$ и $\widetilde{\gamma}_{i-1} = \overline{\widetilde{\delta}}_{i-1}$ согласно определению двойственных формул

получаем, что $p_i = l_i$. Таким образом для любого $j = 1, 2, \dots t+1$ функции f_{p_j} и h_{l_j} являются двойственными, поэтому

$$\Phi_j^1 = f_{p_j}(\Psi_j^1, \Psi_j^2, \dots, \Psi_j^m) = h_{l_j}^*(\Psi_j^1, \Psi_j^2, \dots, \Psi_j^m) =$$

$$= h_{l_j}^*(\Omega_j^{1*}, \Omega_j^{2*}, \dots, \Omega_j^{m*}) = (h_{l_j}(\Omega_j^1, \Omega_j^2, \dots, \Omega_j^m))^* = \Phi_j^{2*}.$$

Верны следующие цепочки равенств

$$\Phi_j^1|_{\widetilde{\alpha}_j} = f_{p_j}(\Psi_j^1, \Psi_j^2, \dots, \Psi_j^m)|_{\widetilde{\alpha}_j} = f_{p_j}(\Psi_j^1|_{\widetilde{\alpha}_j}, \Psi_j^2|_{\widetilde{\alpha}_j}, \dots, \Psi_j^m|_{\widetilde{\alpha}_j}) = f_{p_j}(\widetilde{\gamma}_j) =$$

$$= \overline{h}_{l_j}(\widetilde{\delta}_j) = \overline{h}_{l_j}(\Omega_j^1|_{\widetilde{\beta}_j}, \Omega_j^2|_{\widetilde{\beta}_j}, \dots, \Omega_j^m|_{\widetilde{\beta}_j}) = \overline{h}_{l_j}(\Omega_j^1, \Omega_j^2, \dots, \Omega_j^m)|_{\widetilde{\beta}_j} = \overline{\Phi}_j^2|_{\widetilde{\beta}_j}.$$

Утверждение доказано. ■

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_2$, *функция* $\overline{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *называется противоположной к функции* f. Пусть дано множество функций:

$$\mathcal{A} = \{f_1(x_1, x_2, \dots x_m), f_2(x_1, x_2, \dots x_m), \dots f_k(x_1, x_2, \dots x_m)\},$$

такое, что если $f(x_1, x_2, \dots x_m) \in \mathcal{A}$, то $\overline{f}(x_1, x_2, \dots x_m) \in \mathcal{A}$. Пусть $\mathsf{G} = \{g_{\widetilde{\alpha}_1}, g_{\widetilde{\alpha}_2}, \dots, g_{\widetilde{\alpha}_{2^m}}\}$ — правило смены на $\mathcal{A}$, такое, что $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_j$ тогда и только тогда, когда $g_{\widetilde{\alpha}}(\overline{f}_i) = \overline{f}_j$. Пусть $\Phi^1 \underset{\Gamma}{=} f_i(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m)$ и $\Phi^2 \underset{\Gamma}{=} \overline{f}_i(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m)$ — две формулы, отличающиеся только внешними функциональными символами, сопоставленными противоположным функциям. Тогда *обобщенные формулы* $\mathsf{F}^1 = (\Phi_1, \mathsf{G})$ *и* $\mathsf{F}^2 = (\Phi_2, \mathsf{G})$ *будем называть противоположными.* Аналогично доказательству утверждения 2.3.3 можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2.3.4. *Противоположные обобщенные формулы* F^1 *и* F^2 *с одной и той же последовательностью подаваемых наборов* C *реализуют противоположные функции.*

Пусть $\mathcal{A} = \{f_1(x_1, x_2, \dots x_m), f_2(x_1, x_2, \dots x_m), \dots f_k(x_1, x_2, \dots x_m)\}$ — некоторое множество булевых функций от m фиксированных переменных. Обозначим через $\mathfrak{T}_{01}(\mathcal{A})$ множество всех обобщенных формул (Φ, G) над $\mathcal{A}$, где

$\mathsf{G} = \{g_{\widetilde{\alpha}_1}, g_{\widetilde{\alpha}_2}, \ldots, g_{\widetilde{\alpha}_{2^m}}\}$ — правило смены на $\mathcal{A}$, удовлетворяющее следующим условиям: $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_i$, если $\widetilde{\alpha} \notin \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}$, и $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_j$ тогда и только тогда, когда $g_{\widetilde{\alpha}}(f_j) = f_i$, если $\widetilde{\alpha} \in \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}$.

Лемма 2.3.1. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{T}_{01}(\mathcal{A})$, *где* $\mathcal{A} \in T_{01}$, $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ — *квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что для некоторого* i *наборы* $\widetilde{\alpha}_i$ *и* $\widetilde{\alpha}_{i+1}$ *равны,* $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k+1})$. *Тогда* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$ *и* $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$.

Доказательство. Пусть $\mathsf{F} = (\Phi, \mathsf{G})$. Доказательство будем вести индукцией по глубине начальной формулы Φ.

База. Пусть Φ имеет глубину 1. То есть $\Phi \underset{\Gamma}{=} f_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $\Phi_j \underset{\Gamma}{=} f_{p_j}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ для $j = 1, 2, \ldots k$. Рассмотрим два случая. Пусть $\widetilde{\alpha}_i = \widetilde{\alpha}_{i+1} \in \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}$. Напомним, что в этом случае $g_{\widetilde{\alpha}_i}(f_i) = f_j$ тогда и только тогда, когда $g_{\widetilde{\alpha}_i}(f_j) = f_i$. Поэтому

$$f_{p_{i+2}} = g_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}(f_{p_{i+1}}) = g_{\widetilde{\alpha}_i}(g_{\widetilde{\alpha}_i}(f_{p_i})) = f_{p_i}.$$

Тем самым $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$. Заметим, что f_{p_i} и $f_{p_{i+1}}$ принадлежат классу T_{01}, тем самым $f_{p_i}(\widetilde{0}) = f_{p_{i+1}}(\widetilde{0}) = 0$ и $f_{p_i}(\widetilde{1}) = f_{p_{i+1}}(\widetilde{1}) = 1$, т. е.

$$\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = f_{p_i}(\widetilde{\alpha}_i) = f_{p_{i+1}}(\widetilde{\alpha}_i) = f_{p_{i+1}}(\widetilde{\alpha}_{i+1}) = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}.$$

Пусть теперь $\widetilde{\alpha}_i \notin \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}$. Напомним, что в этом случае $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_i$, если $\widetilde{\alpha} \notin \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}$. Поэтому $f_{p_{i+2}} = f_{p_{i+1}} = f_{p_i}$. Тем самым $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$ и $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = f_{p_i}(\widetilde{\alpha}_i) = f_{p_{i+1}}(\widetilde{\alpha}_{i+1}) = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$.

Переход. Пусть утверждение верно для любой обобщенной формулы F с глубиной начальной формулы не более r, докажем для обобщенной формулы с глубиной начальной формулы равной $r + 1$. Пусть формула Φ имеет глубину $r + 1$. То есть $\Phi \underset{\Gamma}{=} f_p(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m)$, где глубина формул $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ не превосходит r. Рассмотрим обобщенные формулы $\mathsf{F}_j = (\Psi_j, \mathsf{G})$ для $j = 1, 2, \ldots m$. Пусть $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}_j, \widetilde{B}) =$

$(\Lambda_1^j, \Lambda_2^j, \ldots, \Lambda_{k+1}^j)$. Заметим, что $\Phi_j \underset{\Gamma}{=} f_{p_j}(\Lambda_j^1, \Lambda_j^2, \ldots, \Lambda_j^m)$, где $f_{p_j} \in \mathcal{A}$. Положим $\widetilde{\gamma}_i = (\Lambda_i^1|_{\widetilde{\alpha}_i}, \Lambda_i^2|_{\widetilde{\alpha}_i}, \ldots, \Lambda_i^m|_{\widetilde{\alpha}_i})$, где $i = 1, 2, \ldots k$. Согласно индуктивному предположению имеем $\mathsf{F}_j(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \Lambda_i^j|_{\widetilde{\alpha}_i} = \Lambda_{i+1}^j|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = \mathsf{F}_j(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$, следовательно $\widetilde{\gamma}_i = \widetilde{\gamma}_{i+1}$. Таким образом аналогично базису индукции можно получить, что $f_{p_{i+2}} = f_{p_i}$ и $f_{p_{i+1}}(\widetilde{\gamma}_{i+1}) = f_{p_i}(\widetilde{\gamma}_i)$. Кроме того, согласно индуктивному предположению $\Lambda_i^j \underset{\Gamma}{=} \Lambda_{i+2}^j$, таким образом

$$\Phi_i \underset{\Gamma}{=} f_{p_i}(\Lambda_i^1, \Lambda_i^2, \ldots, \Lambda_i^m) \underset{\Gamma}{=} f_{p_{i+2}}(\Lambda_{i+2}^1, \Lambda_{i+2}^2, \ldots, \Lambda_{i+2}^m) \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}.$$

Кроме того, заметим, что

$$\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \Phi_i|_{\widetilde{\alpha}_i} = f_{p_i}(\widetilde{\gamma}_i) = f_{p_{i+1}}(\widetilde{\gamma}_{i+1}) = \Phi_{i+1}|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}.$$

Лемма доказана. ■

Аналогичное утверждение можно доказать для функций из класса T_0. Будем обозначать через $\mathfrak{T}_0$ множество всех обобщенных формул F над

$$\mathcal{A} = \{f_1(x_1, x_2, \ldots x_m), f_2(x_1, x_2, \ldots x_m), \ldots f_k(x_1, x_2, \ldots x_m)\},$$

где $f_i(x_1, x_2, \ldots x_m) \in T_0$, $1 \leq i \leq k$ с правилом смены, удовлетворяющим условиям $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_j$ тогда и только тогда, когда $g_{\widetilde{\alpha}}(f_j) = f_i$ и $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_i$, если $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0}$, где $\mathsf{G} = \{g_{\widetilde{\alpha}_1}, g_{\widetilde{\alpha}_2}, \ldots, g_{\widetilde{\alpha}_{2^m}}\}$. Верна следующая лемма.

Лемма 2.3.2. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{T}_0$, $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ — *квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что наборы* $\widetilde{\alpha}_i$ *и* $\widetilde{\alpha}_{i+1}$ *равны,* $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k+1})$. *Тогда* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$ *и* $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по глубине начальной формулы.

База. Рассмотрим обобщенную формулу с глубиной начальной формулы равной 1. В этом случае в формулах Φ_i и Φ_{i+1} имеется только один функциональный символ. Рассмотрим два случая. Пусть $\widetilde{\alpha} = \widetilde{0}$. Тогда, в силу

условия $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_j$ тогда и только тогда, когда $g_{\widetilde{\alpha}}(f_j) = f_i$ на правило смены, функциональный символ формул Φ_i и Φ_{i+1} либо не изменится, либо изменится дважды, значит, будет верно равенство $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$. Кроме того, поскольку все функций из $\mathcal{A}$ принадлежат классу T_0 и на внешний функциональный символ дважды подается набор $\widetilde{0}$, то верно равенство $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = 0$. Пусть теперь $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0}$. Тогда, в силу условия $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_i$, если $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0}$ на правило смены, функциональный символ формул Φ_i и Φ_{i+1} не изменится, следовательно верно равенство $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$. Поскольку на внешний функциональный символ дважды подается один и тот же набор, то $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$.

Переход. Пусть лемма доказана для обобщенных формул с глубиной начальных формул не более r, докажем для обобщенных формул с глубиной начальных формул равной $r + 1$. На внешний функциональный символ формул Φ_i и Φ_{i+1} подаются одинаковые наборы в силу предположения индукции. Возможны два случая. Пусть на внешний функциональный символ формул Φ_i и Φ_{i+1} подается набор $\widetilde{0}$. Поскольку все функций из $\mathcal{A}$ принадлежат классу T_0 и на внешний функциональный символ дважды подается набор $\widetilde{0}$, то верно равенство $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = 0$. В силу условия $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_j$ тогда и только тогда, когда $g_{\widetilde{\alpha}}(f_j) = f_i$ на правило смены, внешний функциональный символ формул Φ_i и Φ_{i+1} либо не изменится, либо изменится дважды, применяя предположение индукции, получаем равенство $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$. Пусть теперь на внешний функциональный символ подается набор отличный от $\widetilde{0}$. Тогда, в силу условия $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_i$, если $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0}$ на правило смены, внешний функциональный символ формул Φ_i и Φ_{i+1} не изменится, применяя предположение индукции, получаем равенства $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$. Поскольку на внешний функциональный символ дважды подается один и тот же набор, то $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$. Лемма доказана. ■

Воспользовавшись принципом двойственности для обобщенных формул (утверждение 2.3.3), можно сформулировать следующую лемму, являющуюся двойственной к лемме 2.3.2. Множество всех обобщенных формул F над

$$\mathcal{A} = \{f_1(x_1, x_2, \dots x_m), f_2(x_1, x_2, \dots x_m), \dots f_k(x_1, x_2, \dots x_m)\},$$

где $f_i(x_1, x_2, \dots x_m) \in T_1$, $1 \leq i \leq k$ с правилом смены, удовлетворяющим условиям $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_j$ тогда и только тогда, когда $g_{\widetilde{\alpha}}(f_j) = f_i$ и $g_{\widetilde{\alpha}}(f_i) = f_i$, если $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{1}$, где $\mathsf{G} = \{g_{\widetilde{\alpha}_1}, g_{\widetilde{\alpha}_2}, \dots, g_{\widetilde{\alpha}_{2^m}}\}$, будем обозначать через $\mathfrak{T}_1$. Верна следующая лемма.

Лемма 2.3.3. *Пусть обобщенная формула F принадлежит множеству $\mathfrak{T}_1$, $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \dots, \widetilde{\alpha}_k)$ — квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что наборы $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\alpha}_{i+1}$ равны, $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k+1})$. Тогда $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$ и $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$.*

Если справедливо включение $\mathcal{A} \subseteq M$, то верно следующее утверждение.

Утверждение 2.3.5. *Пусть обобщенная формула F над $\mathcal{A}$ принадлежит множеству $\mathfrak{T}_{01}$ $(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1)$, справедливо включение $\mathcal{A} \subseteq M$, и $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \dots, \widetilde{\alpha}_k)$ — квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что верно $\widetilde{\alpha}_i \leq \widetilde{\alpha}_{i+1}$. Тогда $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} \leq \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k+1})$, где k — длина квазипоследовательности $\widetilde{B}$. В силу леммы 2.3.1 (2.3.2, 2.3.3) верно равенство $\Phi_{i+1}(\widetilde{\alpha}) = \Phi_i(\widetilde{\alpha})$. Поскольку все функции из $\mathcal{A}$ принадлежат классу M, то все функции, реализуемые формулами Φ_j, где $1 \leq j \leq k+1$ монотонны. В частности, монотонна функция, реализуемая формулой Φ_{i+1}. А значит, в силу неравенства $\widetilde{\alpha}_i \leq \widetilde{\alpha}_{i+1}$, верно неравенство

$$\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \Phi_i(\widetilde{\alpha}_i) = \Phi_{i+1}(\widetilde{\alpha}_i) \leq \Phi_{i+1}(\widetilde{\alpha}_{i+1}) = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}.$$

Утверждение доказано. ■

Это свойство обобщенных формул назовем *монотонностью обобщенных формул.*

Следствие 2.3.1. *Пусть обобщенная формула* F *над* $\mathcal{A}$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{T}_{01}$ $(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1)$*, справедливо включение* $\mathcal{A} \subseteq M$*, и* C *— последовательность подаваемых наборов, такая, в ней существуют два сравнимых подряд идущих набора. Тогда значение* F *с последовательностью подаваемых наборов* C *на большем из этих наборов не меньше значения* F *с последовательностью подаваемых наборов* C *на меньшем из них.*

Рассмотрим все такие булевы функции $f \in P_2(n)$, что для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \{0,1\}^n$ если набор $\widetilde{\alpha}$ имеет в лексикографическом порядке меньший номер, чем набор $\widetilde{\beta}$, то верно неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \leq f(\widetilde{\beta})$, $n \geq 1$. Множество всех таких булевых функций при всевозможных $n \geq 1$ обозначим через $\mathfrak{L}$. Множество обобщенных формул F над $\mathfrak{L}$, таких, что в них каждая переменная из множества всех переменных F входит ровно один раз, обозначим через $\mathfrak{O}$. Определим индуктивно *лексикографический порядок вхождения переменных в формулу* $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1. Пусть глубина формулы Φ равна 1. Тогда порядок вхождения переменных в формулу Φ будем называть лексикографическим, если переменная, подающаяся на i-й вход формулы имеет больший номер, чем переменная, подающаяся на $i-1$-й вход и меньший, чем переменная, подающаяся на $i+1$-й вход, $2 \leq i \leq n-1$.

2. Пусть уже определен лексикографический порядок вхождения переменных в формулы глубины не больше m, определим его для формулы Φ глубины $m+1$. Формула Φ имеет вид

$$f_i^{(n_i)}(\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_{n_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

где глубина формул Φ_i не больше m, $1 \leq i \leq n_i$. Порядок вхождения переменных в формулу Φ будем называть лексикографическим, если номера

всех переменных, входящих в формулу Φ_i, меньше номеров всех переменных, входящих в формулу Φ_j, при $i \leq j$, и порядок вхождения переменных во все формулы Φ_i является лексикографическим, $1 \leq i \leq n_i$.

Верно следующее утверждение.

Утверждение 2.3.6. *Пусть обобщенная формула* $\mathsf{F} = (\Phi, \mathsf{G})$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{O} \cap (\mathfrak{T}_{01} \cup \mathfrak{T}_0 \cup \mathfrak{T}_1)$, *порядок вхождения переменных в формулу* Φ *является лексикографическим,* $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ *— квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что для некоторого* $1 \leq i \leq k-1$ *набор* $\widetilde{\alpha}_i$ *имеет в лексикографическом порядке меньший (больший) номер, чем набор* $\widetilde{\alpha}_{i+1}$. *Тогда верно неравенство* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} \leq \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$ $(\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}} \geq \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}})$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k+1})$. В силу лемм 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 и включения $F \in \mathfrak{O} \cap (\mathfrak{T}_{01} \cup \mathfrak{T}_0 \cup \mathfrak{T}_1)$ верно $\Phi_{i+1}(\widetilde{\alpha}) = \Phi_i(\widetilde{\alpha})$. Поскольку рассматриваемая обобщенная формула F является формулой над $\mathfrak{L}$ и порядок вхождения переменных в начальную формулу обобщенной формулы F является лексикографическим, то, в силу того, что набор $\widetilde{\alpha}_i$ имеет в лексикографическом порядке меньший (больший) номер, чем набор $\widetilde{\alpha}_{i+1}$, верны следующие выкладки:

$$\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \Phi_i(\widetilde{\alpha}_i) = \Phi_{i+1}(\widetilde{\alpha}_i) \leq \Phi_{i+1}(\widetilde{\alpha}_{i+1}) = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$$

$$(\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \Phi_i(\widetilde{\alpha}_i) = \Phi_{i+1}(\widetilde{\alpha}_i) \geq \Phi_{i+1}(\widetilde{\alpha}_{i+1}) = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}).$$

Утверждение доказано. ■

2.4 Реализация функций из класса T_{01}

В этом разделе рассматриваются свойства обобщенных формул из множества $\mathfrak{F}$.

Через $\Phi_n^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем обозначать формулу

$$x_1 \vee (x_2 \vee \ldots x_n) \ldots),$$

а функцию, которую она реализует, будем обозначать через $f^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Через $\Phi_n^{\&}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем обозначать формулу

$$x_1\&(x_2\& \ldots x_n) \ldots),$$

а функцию, которую она реализует, будем обозначать через $f^{\&}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Два набора будем называть подряд идущими в некоторой квазипоследовательности наборов $\widetilde{B}$, если они имеют в этой последовательности номера i и $i+1$.

2.4.1 Пары наборов

Определим разбиение двоичных наборов длины n на пары. Запишем все двоичные наборы длины n в лексикографическом порядке, занумеруем их числами от 1 до 2^n (набор $(0, 0, \ldots, 0, 0)$ имеет номер 1) и разобьем их на пары следующим образом. *Парой* будем называть двухэлементное неупорядоченное множество, состоящее из двух наборов, имеющих в лексикографическом порядке номера $2n$ и $2n+1$, где $1 \leq n \leq 2^{n-1} - 1$.

Пример 2.4.1. *Парами являются*

$$\{(0, 0, \ldots, 0, 0, 0, 1), (0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 0)\},$$

$$\{(0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 1), (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0)\},$$

$$\{(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 1), (0, 0, \ldots, 0, 1, 1, 0)\},$$

$$\{(1, 1, \ldots, 1, 1, 0, 1), (1, 1, \ldots, 1, 1, 1, 0)\}.$$

Можно описать пары наборов следующим образом: у двух наборов одной пары совпадают все элементы, кроме последних m, где $2 \leq m \leq n$, последние же элементы это $\underbrace{0, 1, 1, \ldots, 1}_{m}$ и $\underbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}_{m}$. Заметим, что наборы $(0, 0, \ldots, 0, 0)$ и $(1, 1, \ldots, 1, 1)$ не входят ни в одну из пар.

Пары наборов $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$ *и* $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$ *будем называть последовательными*, если существуют такие $i, j, k, m \in \{1, 2\}$, что наборы $\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\beta}_k, \widetilde{\beta}_m$ являются подряд идущими в лексикографическом порядке.

Пусть дана некоторая последовательность C всех двоичных наборов длины n, и пусть множества $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$ и $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$ являются парами. Тогда *пару наборов* $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$ *будем называть вложенной в пару наборов* $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$, если в данной последовательности C наборов оба набора $\widetilde{\beta}_1$ и $\widetilde{\beta}_2$ расположены между наборами $\widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\alpha}_2$ (неважно в каком порядке идут наборы пар $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$ и $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$).

Определим индуктивно *последовательность вложенных пар наборов*, являющуюся подпоследовательностью последовательности C всех двоичных наборов длины n.

1. Пустая последовательность является последовательностью вложенных пар наборов.

2. Последовательности $((0, 0, \ldots, 0), (1, 1, \ldots, 1))$ и $((1, 1, \ldots, 1), (0, 0, \ldots, 0))$ наборов длины n являются последовательностями вложенных пар наборов.

3. Два подряд идущих набора одной пары являются последовательностью вложенных пар наборов.

4. Если все наборы, заключенные между двумя наборами одной пары $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$ являются конечным числом последовательностей вложенных пар наборов, то такая последовательность наборов является последовательностью вложенных пар наборов.

5. Конечное число подряд идущих последовательностей вложенных пар наборов является последовательностью вложенных пар наборов.

Если все наборы, заключенные между наборами пары $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$, являются последовательностью вложенных пар наборов, то пару $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$ будем называть *внешней парой для этой последовательности вложенных пар.*

Пример 2.4.2. *Пусть множества* $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$, $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$, $\{\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2\}$, $\{\widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2\}$, $\{\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2\}$, $\{\widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_2\}$ *являются парами. Тогда последовательность*

$$(\widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\delta}_1, \widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_2, \widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\delta}_2, \widetilde{\alpha}_1)$$

является последовательностью вложенных пар наборов с внешней парой $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$.

Иногда будем называть функциональные символы формулы вида

$$\Phi = H_1(x_1, H_2(x_2, \dots H_{n-1}(x_{n-1}, x_n)) \dots),$$

просто по номерам, т. е. *i-й функциональный символ формулы* Φ это H_i.

Лемма 2.4.1. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{F}$, $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ *— квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что множество* $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$ *является парой,* $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. *Тогда* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\beta}}$ *и* $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_3$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ и наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ отличаются только последними m элементами, где $2 \leq m \leq n$. Без ограничения общности будем считать, что $(\alpha_{n-m+1}, \alpha_{n-m+2}, \dots, \alpha_n) = (0, 1, 1, \dots, 1)$ и $(\beta_{n-m+1}, \beta_{n-m+2}, \dots, \beta_n) = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Пусть

$$\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} H_1(x_1, H_2(x_2, \dots H_{n-1}(x_{n-1}, x_n)) \dots).$$

Рассмотрим подформулу обобщенной формулы F вида $\mathsf{F}^1 = (\Psi_1, \mathsf{G}^*)$, где

$$\Psi_1 \underset{\Gamma}{=} H_{n+1-m}(x_{n+1-m}, H_{n+2-m}(x_{n+2-m}, \dots H_{n-1}(x_{n-1}, x_n)) \dots),$$

с квазипоследовательностью подаваемых наборов $\widetilde{B}^1 = (\widetilde{\alpha}^1, \widetilde{\beta}^1)$, где $(\widetilde{\alpha}^1, \widetilde{\beta}^1) = ((0, 1, 1, \dots, 1), (1, 0, 0, \dots, 0))$. Пусть $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}^1, \widetilde{B}^1) = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$. На функциональные символы формулы Ψ_1 и Ψ_2 с $n-1$ по $n-m+2$ подаются наборы $(1, 1)$ и $(0, 0)$, а значит, эти функциональные символы меняются дважды и, в силу их принадлежности к T_{01}, на внешний функциональный символ

формул Ψ_1 и Ψ_2 подаются наборы $(0,1)$ и $(1,0)$, а значит, $\mathsf{F}^1(\widetilde{B}^1)|_{\widetilde{\alpha}^1} = \mathsf{F}^1(\widetilde{B}^1)|_{\widetilde{\beta}^1}$ и $\Psi_1 \underset{\Gamma}{=} \Psi_3$.

Рассмотрим обобщенную формулу $\mathsf{F}^2 = (\Upsilon_1, G^*)$, где

$$\Upsilon_1 = H_1(x_1, H_2(x_2, \dots H_{n-m}(x_{n-m}, y)) \dots),$$

с квазипоследовательностью подаваемых наборов $\widetilde{B}^2 = (\widetilde{\alpha}^2, \widetilde{\beta}^2)$, где $(\widetilde{\alpha}^2, \widetilde{\beta}^2) = ((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-m}, \mathsf{F}^1(\widetilde{B}^1)|_{\widetilde{\alpha}^1}), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}, \mathsf{F}^1(\widetilde{B}^1)|_{\widetilde{\beta}^1}))$. Поскольку $\mathsf{F}^2 \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{T}_{01}$ и $\widetilde{\alpha}^2 = \widetilde{\beta}^2$, то к обобщенной формуле F^2 с квазипоследовательностью подаваемых наборов $\widetilde{B}^2$ можно применить лемму 2.3.1. Следовательно, $\mathsf{F}^2(\widetilde{B}^2)|_{\widetilde{\alpha}^2} = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}^2)|_{\widetilde{\beta}^2}$ и $\Upsilon_1 \underset{\Gamma}{=} \Upsilon_3$. А значит, верны цепочки равенств:

$$\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}} = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}^2)|_{\widetilde{\alpha}^2} = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}^2)|_{\widetilde{\beta}^2} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\beta}}$$

и

$$\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Upsilon_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \Psi_1) \underset{\Gamma}{=} \Upsilon_3(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \Psi_3) \underset{\Gamma}{=} \Phi_3.$$

Лемма доказана. ■

Заметим, что если обобщенная формула F принадлежит множеству $\mathfrak{F}$ и $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k+1})$, где k — длина квазипоследовательности $\widetilde{B}$, то $\Phi_i \in \mathcal{H}$ для всех $1 \leq i \leq k+1$. Поэтому верно следующее следствие из леммы 2.4.1.

Следствие 2.4.1. *Пусть обобщенная формула F принадлежит множеству $\mathfrak{F}$ и $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \dots, \widetilde{\alpha}_k)$ — квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ множество $\{\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}\}$ является парой, $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k+1})$. Тогда $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$ и $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$.*

Лемма 2.4.2. *Пусть обобщенная формула F принадлежит множеству $\mathfrak{F}$ и $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \dots, \widetilde{\alpha}_k)$ — квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что множество $\{\widetilde{\alpha}_p, \widetilde{\alpha}_{p+2l+1}\}$ является одной из пар некоторой последовательности вложенных пар для некоторых натуральных p и l, таких, что $p + 2l \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k+1})$. Тогда $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_p} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{p+2l+1}}$ и $\Phi_p \underset{\Gamma}{=} \Phi_{p+2l+2}$.*

Доказательство. Поскольку любая пара из последовательности вложенных пар сама является внешней парой для некоторой другой последовательности вложенных пар, то существует последовательность вложенных пар, для которой пара $\{\widetilde{\alpha}_p, \widetilde{\alpha}_{p+2l+1}\}$ является внешней. Докажем, лемму индукцией по числу пар наборов, расположенных между наборами пары $\{\widetilde{\alpha}_p, \widetilde{\alpha}_{p+2l+1}\}$.

База. Пусть последовательность вложенных пар состоит из одной пары, тогда утверждение следует из следствия 2.4.1.

Переход. Пусть утверждение верно для всех последовательностей вложенных пар длины не большей $2m$, где $1 \leq m \leq \frac{k}{2} - 4$, у которых внешней парой является пара $\{\widetilde{\alpha}_p, \widetilde{\alpha}_{p+2l+1}\}$. Докажем лемму для последовательности вложенных пар длины $2m+2$ с внешней парой $\{\widetilde{\alpha}_p, \widetilde{\alpha}_{p+2l+1}\}$. В последовательности вложенных пар обязательно найдутся два набора одной пары, стоящие рядом. Пусть это наборы $\widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_2$ и пусть они имеют в квазипоследовательности подаваемых наборов обобщенной формулы F номера $j, j+1$ соответственно. Из следствия 2.4.1, примененного к обобщенной формуле F, квазипоследовательности $\widetilde{B}$ и паре $\{\widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_2\}$, вытекает равенство $\Phi_j \underset{\Gamma}{=} \Phi_{j+2}$. Рассмотрим квазипоследовательность $\widetilde{B}_1 = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_k)$ подаваемых наборов, такую, что $\widetilde{\beta}_i = \widetilde{\alpha}_i$ при $1 \leq i \leq j-1$, $\widetilde{\beta}_i = \widetilde{\alpha}_{i+2}$ при $j \leq i \leq 2^n - 2$, $\widetilde{\beta}_{k-1} = \widetilde{\alpha}_j = \widetilde{\varepsilon}_1$, $\widetilde{\beta}_k = \widetilde{\alpha}_{j+1} = \widetilde{\varepsilon}_2$. Пусть $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}_1) = (\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{k+1})$. По построению последовательности $\widetilde{B}_1$ выполнены равенства $\Psi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_i$ и $\widetilde{\beta}_i = \widetilde{\alpha}_i$ при $1 \leq i \leq j-1$ и $\Psi_j \underset{\Gamma}{=} \Phi_j \underset{\Gamma}{=} \Phi_{j+2}$ и $\widetilde{\beta}_i = \widetilde{\alpha}_{i+2}$ при $j \leq i \leq 2^n - 2$. Значит, верны равенства $\Psi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$ при $j \leq i \leq 2^n - 2$. По построению в квазипоследовательности $\widetilde{B}_1$ пара $\{\widetilde{\alpha}_p, \widetilde{\alpha}_{p+2l+1}\}$ является внешней парой последовательности вложенных пар длины $2m$, а значит, к обобщенной формуле F, квазипоследовательности $\widetilde{B}_1$ и паре $\{\widetilde{\alpha}_p, \widetilde{\alpha}_{p+2l+1}\}$ можно применить предположение индукции. Наборы $\widetilde{\alpha}_p$ и $\widetilde{\alpha}_{p+2l+1}$ имеют в последовательности $\widetilde{B}_1$ номера p и $p+2l-1$ соответственно. По предположению индукции имеем: $\mathsf{F}(\widetilde{B}_1)|_{\widetilde{\alpha}_p} = \mathsf{F}(\widetilde{B}_1)|_{\widetilde{\alpha}_{p+2l+1}}$ и $\Psi_p \underset{\Gamma}{=} \Psi_{p+2l}$. Значит имеют

место следующие цепочки равенств:

$$\Phi_p \underset{\Gamma}{=} \Psi_p \underset{\Gamma}{=} \Psi_{p+2l} \underset{\Gamma}{=} \Phi_{p+2l+2};$$

$$\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_p} = \Phi_p(\widetilde{\alpha}_p) = \Psi_p(\widetilde{\alpha}_p) = \mathsf{F}(\widetilde{B}_1)|_{\widetilde{\alpha}_p} = \mathsf{F}(\widetilde{B}_1)|_{\widetilde{\alpha}_{p+2l+1}} =$$

$$= \Psi_{p+2l-1}(\widetilde{\alpha}_{p+2l+1}) = \Phi_{p+2l+1}(\widetilde{\alpha}_{p+2l+1}) = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{p+2l+1}}.$$

Лемма доказана. ■

Следствие 2.4.2. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{F}$ *и* $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2k})$ *— квазипоследовательность подаваемых наборов, являющаяся последовательностью вложенных пар,* $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2k+1})$. *Тогда* $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2k+1}$.

2.4.2 Отношение частичного порядка на множестве наборов

Введем обозначение. Пусть дана формула Φ из множества $\mathcal{H}$, т.е. Φ имеет вид

$$H_1(x_1, H_2(x_2, \ldots H_{n-1}(x_{n-1}, x_n)\ldots),$$

где $H_i(x, y) \in \{x \vee y, x\&y\}$, при $1 \leq i \leq n-1$.
Через $(\Phi)^m$, где $1 \leq m \leq n-1$, обозначим подформулу формулы Φ глубины m, т.е. $(\Phi)^m$ имеет вид $H_{n-m}(x_{n-m}, H_{n-m+1}(x_{n-m+1}, \ldots H_{n-1}(x_{n-1}, x_n)\ldots)$.

Будем говорить, что *пара наборов* $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$ *меньше пары наборов* $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$ или *пара наборов* $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$ *больше пары наборов* $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$, если оба набора пары $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$ идут раньше каждого из наборов пары $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$ в лексикографическом порядке. Обозначать будем следующим образом:

$$\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\} \underset{M}{\leq} \{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}.$$

Будем говорить, что *набор* $\widetilde{\alpha}_1$ *меньше набора* $\widetilde{\beta}_1$ или *набор* $\widetilde{\beta}_1$ *больше набора* $\widetilde{\alpha}_1$, если эти наборы принадлежат различным парам наборов и верно неравенство $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\} \underset{M}{\leq} \{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$. Обозначать будем следующим образом:

$$\widetilde{\alpha}_1 \underset{M}{\leq} \widetilde{\beta}_1.$$

Лемма 2.4.3. *Пусть* $\widetilde{\alpha}$ *и* $\widetilde{\beta}$ *являются двоичными наборами длины* n*, такими, что верно неравенство* $\widetilde{\alpha} \underset{M}{\leq} \widetilde{\beta}$ *и наборы* $\widetilde{\alpha}$ *и* $\widetilde{\beta}$ *принадлежат последовательным парам, формула* $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *принадлежит множеству* $\mathcal{H}$*, где* $n \geq 1$*. Тогда верно неравенство* $\Phi(\widetilde{\alpha}) \leq \Phi(\widetilde{\beta})$*.*

Доказательство. Возможны два случая. Во-первых, набор $\widetilde{\alpha}$ может иметь вид $(\ldots, a, a)$, где $a \in \{0, 1\}$, во-вторых, набор $\widetilde{\alpha}$ может иметь вид $(\ldots, a, b)$, где $a, b \in \{0, 1\}$ и $a \neq b$ (т. к. $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0}$ и $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{1}$).

- Пусть $\widetilde{\alpha} = (\ldots, a, a)$, где $a \in \{0, 1\}$. Тогда

  $$\widetilde{\alpha} = (\ldots, b, \underbrace{a, \ldots, a}_{m-3}, a, a),$$

  значит,

  $$\widetilde{\beta} = (\ldots, \underbrace{1, 1, \ldots, 1, 0, 1}_{m}) \quad \text{или} \quad \widetilde{\beta} = (\ldots, \underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1, 0}_{m}),$$

  где $a, b \in \{0, 1\}$, $a \neq b$ и $3 \leq m \leq n$. Все разряды наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ с 1-го по $n - m$-й совпадают.

  Рассмотрим значение формулы $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборе $\widetilde{\alpha}$. Функция, реализуемая формулой $(\Phi)^{m-2}$, принадлежит классу T_{01}. Значит, на $n - m + 1$-й функциональный символ формулы Φ подается набор (b, a).

  Теперь рассмотрим значение формулы $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборе $\widetilde{\beta}$. В любом случае на $n - m + 1$-й функциональный символ формулы Φ подается набор $(1, x)$, где $x \in \{0, 1\}$.

Все функциональные символы формулы $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежат множеству $\{\vee, \&\}$, то есть монотонны. Значит, значение формулы $(\Phi)^{m-1}$ на наборе $\widetilde{\alpha}$ не больше, чем значение формулы $(\Phi)^{m-1}$ на наборе $\widetilde{\beta}$.

Поскольку все разряды наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ с 1-го по $n-m$-й совпадают, то при подаче на формулу $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ набора $\widetilde{\alpha}$ на функциональные символы с $n-m$-го по 1-й формулы Φ подаются наборы не больше, чем на функциональные символы с $n-m$-го по 1-й формулы Φ при подаче на нее набора $\widetilde{\beta}$. Значит, $\Phi(\widetilde{\alpha}) \leq \Phi(\widetilde{\beta})$.

- Пусть $\widetilde{\alpha} = (\ldots, a, b)$, где $a, b \in \{0, 1\}$ и $a \neq b$. Тогда

$$\widetilde{\alpha} = (\ldots, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-3}, a, b),$$

значит,

$$\widetilde{\beta} = (\ldots, \underbrace{c, d, \ldots, d, d, d}_{m}),$$

где $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, $a \neq b$, $c \neq d$ и $3 \leq m \leq n$. Все разряды наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ с 1-го по $n-m$-й совпадают.

Рассмотрим значение формулы $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборе $\widetilde{\alpha}$. На $n-m+1$-й функциональный символ формулы Φ подается набор $(0, x)$, где $x \in \{0, 1\}$.

Теперь рассмотрим значение формулы $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборе $\widetilde{\beta}$. Функция, реализуемая формулой $(\Phi)^{m-2}$ принадлежит классу T_{01}. Значит, на $n-m+1$-й функциональный символ формулы Φ подается набор (c, d).

Все функциональные символы формулы $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежат множеству $\{\vee, \&\}$, то есть монотонны. Значит, значение формулы $(\Phi)^{m-1}$ на наборе $\widetilde{\alpha}$ не больше, чем значение формулы $(\Phi)^{m-1}$ на наборе $\widetilde{\beta}$.

Поскольку все разряды наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ с 1-го по $n-m$-й совпадают, то при подаче на формулу $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ набора $\widetilde{\alpha}$ на функциональные символы с $n-m$-го по 1-й формулы Φ подаются наборы не больше, чем

на функциональные символы с $n-m$-го по 1-й формулы Φ при подаче на нее набора $\widetilde{\beta}$. Лемма доказана. ■

Лемма 2.4.4. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{F}$ *и* $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ *— квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что множества* $\{\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+3}\}$ *и* $\{\widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2}\}$ *являются последовательными парами наборов и* $\{\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+3}\} \underset{M}{\leq} \{\widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2}\}$, *где* $1 \leq i \leq k-3$, $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k+1})$ *и* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = 1$. *Тогда* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+2}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}} = 1$ *и* $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+4}$.

Доказательство. Из следствия 2.4.1, примененного к паре $\{\widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2}\}$, следуют равенства $\Phi_{i+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+3}$ и $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+2}}$. Из леммы 2.4.2, примененной к последовательности $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2}, \widetilde{\alpha}_{i+3})$, следуют равенства $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = 1$ и $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+4}$. Из леммы 2.4.3, примененной к формуле $\Phi_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и наборам $\widetilde{\alpha}_{i+1}$ и $\widetilde{\alpha}_{i+3}$, следует неравенство $\Phi(\widetilde{\alpha}_{i+3}) \leq \Phi(\widetilde{\alpha}_{i+1})$. Поскольку выполнено

$$1 = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}} = \Phi_{i+3}(\widetilde{\alpha}_{i+3}) = \Phi_{i+1}(\widetilde{\alpha}_{i+3}) \leq \Phi_{i+1}(\widetilde{\alpha}_{i+1}) = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}},$$

то верны равенства $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+2}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = 1$. Лемма доказана. ■

Лемма 2.4.5. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{F}$ *и* $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ *— квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что множества* $\{\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}\}$ *и* $\{\widetilde{\alpha}_{i+2}, \widetilde{\alpha}_{i+3}\}$ *являются последовательными парами наборов и* $\{\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}\} \underset{M}{\leq} \{\widetilde{\alpha}_{i+2}, \widetilde{\alpha}_{i+3}\}$, *где* $1 \leq i \leq k-3$, $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k+1})$ *и* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = 1$. *Тогда* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+2}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}} = 1$ *и* $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+4}$.

Доказательство. Из следствия 2.4.1, примененного к паре $\{\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}\}$, следуют равенства $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+2}$ и $1 = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}$. Из следствия 2.4.1, примененного к паре $\{\widetilde{\alpha}_{i+2}, \widetilde{\alpha}_{i+3}\}$, следуют равенства $\Phi_{i+2} \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+4}$ и $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+2}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}}$. Из леммы 2.4.3, примененной к формуле

$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и наборам $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\alpha}_{i+2}$, следует неравенство $\Phi_i(\widetilde{\alpha}_i) \leq \Phi_i(\widetilde{\alpha}_{i+2})$. Поскольку выполнено

$$1 = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \Phi_i(\widetilde{\alpha}_i) \leq \Phi_i(\widetilde{\alpha}_{i+2}) = \Phi_{i+2}(\widetilde{\alpha}_{i+2}) = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+2}},$$

то верны равенства $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+2}} = 1$. Лемма доказана. ■

Лемма 2.4.6. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{F}$ *и* $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ *— квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что множества* $\{\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+3}\}$ *и* $\{\widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2}\}$ *являются парами наборов и* $\{\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+3}\} \underset{M}{\leq} \{\widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2}\}$, *где* $1 \leq i \leq k-3$, $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k+1})$ *и* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = 1$. *Тогда* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+2}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}} = 1$ *и* $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+4}$.

Доказательство. Пусть в лексикографическом порядке между парами наборов $\{\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+3}\}$ и $\{\widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2}\}$ стоят пары наборов $\{\widetilde{\gamma}_1^1, \widetilde{\gamma}_2^1\}, \ldots, \{\widetilde{\gamma}_1^m, \widetilde{\gamma}_2^m\}$, где $0 \leq m \leq 2^{n-1} - 3$. То есть, пары наборов $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$ и $\{\widetilde{\gamma}_1^1, \widetilde{\gamma}_2^1\}$, $\{\widetilde{\gamma}_1^j, \widetilde{\gamma}_2^j\}$ и $\{\widetilde{\gamma}_1^{j+1}, \widetilde{\gamma}_2^{j+1}\}$ при $1 \leq j \leq m-1$, $\{\widetilde{\gamma}_1^m, \widetilde{\gamma}_2^m\}$ и $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$ являются последовательными. Из леммы 2.4.2, примененной к паре наборов $\{\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+3}\}$ из подпоследовательности $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2}, \widetilde{\alpha}_{i+3})$ квазипоследовательности $\widetilde{B}$ следуют равенства

$$\Phi_i \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+4} \quad \text{и} \quad 1 = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}}. \tag{2.1}$$

Из леммы 2.4.2, примененной к паре наборов $\{\widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2}\}$ из подпоследовательности $(\widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2})$ квазипоследовательности $\widetilde{B}$ следуют равенства

$$\Phi_{i+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+3} \quad \text{и} \quad \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+2}}. \tag{2.2}$$

Из формул (2.1) и (2.2) следует, что для доказательства леммы достаточно доказать равенство $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = 1$.

Рассмотрим обобщенную формулу $\mathsf{F}^2 = (\Phi_i, \mathsf{G}^*)$. Рассмотрим квазипоследовательность

$$\widetilde{B}_2 = (\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\gamma}_1^1, \widetilde{\gamma}_2^1, \ldots, \widetilde{\gamma}_1^m, \widetilde{\gamma}_2^m, \widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2}, \widetilde{\alpha}_{i+3}) \tag{2.3}$$

Пусть $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}^2, \widetilde{B}_2) = (\Phi_1^2, \Phi_2^2, \ldots, \Phi_{2m+5}^2)$. Тогда

$$\Phi_1^2 \underset{\Gamma}{=} \Phi_i. \tag{2.4}$$

В силу равенств (2.4) и $\widetilde{\alpha}_1^2 = \widetilde{\alpha}_i$ следует равенство

$$\Phi_2^2 \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+1}. \tag{2.5}$$

В силу леммы 2.4.2, примененной к каждой из пар наборов

$$\{\widetilde{\gamma}_1^1, \widetilde{\gamma}_2^1\}, \ldots, \{\widetilde{\gamma}_1^m, \widetilde{\gamma}_2^m\}, \{\widetilde{\alpha}_{i+1}, \widetilde{\alpha}_{i+2}\}, \{\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+3}\}$$

из подпоследовательности $\widetilde{B}_2$, верны равенства

$$\Phi_{2k}^2 \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2k+2}^2 \text{ при всех } 1 \leq k \leq m+1, \tag{2.6}$$

$$\Phi_1^2 \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2m+5}^2, \tag{2.7}$$

$$\mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_i} = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}}, \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_{i+2}}, \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}_1^i} = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}_2^i}, \tag{2.8}$$

при всех $1 \leq i \leq m$. В силу равенств (2.5) и (2.6) можно ввести обозначение, через Φ будем обозначать формулу

$$\Phi \underset{\Gamma}{=} \Phi_{i+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_2^2 \underset{\Gamma}{=} \Phi_4^2 \underset{\Gamma}{=} \Phi_6^2 \underset{\Gamma}{=} \ldots \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2m+4}^2. \tag{2.9}$$

Из равенств (2.5) и (2.9) следуют равенства

$$\Phi_{i+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_2^2 \underset{\Gamma}{=} \Phi \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2m+2}^2. \tag{2.10}$$

Из равенств (2.10) следуют равенства

$$\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = \Phi_{i+1}(\widetilde{\alpha}_{i+1}) = \Phi_{2m+2}^2(\widetilde{\alpha}_{i+1}) = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}. \tag{2.11}$$

Из равенств $\Phi_{i+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2m+2}^2$ и $\widetilde{\alpha}_{i+1} = \widetilde{\alpha}_{2m+2}^2$ следует равенство

$$\Phi_{i+2} \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2m+3}^2. \tag{2.12}$$

Из равенств (2.12) следует

$$\Phi_{i+3} = \mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}_{i+2}}^*(\Phi_{i+2}) = \mathsf{G}_{\widetilde{\alpha}_{i+2}}^*(\Phi_{2m+3}^2) = \Phi_{2m+4}^2 \tag{2.13}$$

Из (2.13) следуют равенства

$$\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}} = \Phi_{i+3}(\widetilde{\alpha}_{i+3}) = \Phi^2_{2m+4}(\widetilde{\alpha}_{i+3}) = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}}. \tag{2.14}$$

В силу леммы 2.4.3, примененной к каждой из пар наборов

$$\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\gamma}^1_1\}, \{\widetilde{\gamma}^1_2, \widetilde{\gamma}^2_1\}, \ldots, \{\widetilde{\gamma}^{m-1}_2, \widetilde{\gamma}^m_1\}, \{\widetilde{\gamma}^m_2, \widetilde{\beta}_1\}$$

из подпоследовательности $\widetilde{B}_2$, верны неравенства

$$\mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_i} \le \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}^1_1}, \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}^m_2} \le \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}, \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}^i_2} \le \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}^{i+1}_1}, \tag{2.15}$$

при всех $1 \le i \le m-1$. Из равенств (2.8) и неравенств (2.15) следуют неравенства

$$\begin{aligned}\mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_2} = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_1} \le \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}^1_1} = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}^1_2} \le \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}^2_1} = \\ = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}^2_2} \le \cdots \le \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}^m_1} = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\gamma}^m_2} \le \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\beta}_1}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Из равенств (2.1), (2.11) и (2.14) и неравенств (2.4.2) следует

$$1 = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}} = \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_{i+3}} \le \mathsf{F}^2(\widetilde{B}_2)|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}}.$$

Откуда следует равенство $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = 1$. Лемма доказана. ■

Заметим, что если в условиях леммы 2.4.6 между наборами $\widetilde{\alpha}_{i+1}$ и $\widetilde{\alpha}_{i+2}$ стоит некоторая последовательность вложенных пар, то утверждение остается верным. Пусть обобщенная формула F принадлежит множеству $\mathfrak{F}$ и $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ — квазипоследовательность подаваемых наборов. Тогда значение $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i}$ не зависит от наборов, $\widetilde{\alpha}_j$ при $j > i$. Из этого соображения и леммы 2.4.6 можно вывести следствие.

Следствие 2.4.3. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{F}$ *и* $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ *— квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что* $\widetilde{\alpha}_i \underset{M}{\le} \widetilde{\alpha}_{i+1}$ *для некоторого* $i = 1, 2, \ldots, k-1$, *и* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = 1$. *Тогда* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = 1$.

Поскольку функции $x\&y$ и $x \vee y$ являются двойственными, то можно воспользоваться утверждением 2.3.3 и вывести из следствия 2.4.3 следующее утверждение.

Следствие 2.4.4. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{F}$ *и* $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ *— квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что* $\widetilde{\alpha}_i \underset{M}{\geq} \widetilde{\alpha}_{i+1}$ *для некоторого* $i = 1, 2, \ldots, k-1$, *и* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = 0$. *Тогда* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = 0$.

2.4.3 Различные допустимые последовательности

Последовательность $C = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_i)$ двоичных наборов длины n будем называть *допустимой*, если $i = 2^n$ и $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_i\} = \{0,1\}^n$.

Множество всех обобщенных формул из $\mathfrak{F}$ с начальной формулой $\Phi_n^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем обозначать через $\mathfrak{F}_{\vee}$, а множество всех обобщенных формул из $\mathfrak{F}$ с начальной формулой $\Phi_n^{\&}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем обозначать через $\mathfrak{F}_{\&}$.

Пусть M — некоторое m-элементное подмножество множества $\{0,1\}^n$, не содержащее наборов $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$. Обозначим через $C(M)$ множество всех последовательностей подаваемых наборов, таких, что

1) наборы $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$ являются подряд идущими в последовательности C;

2) в квазипоследовательности $\widetilde{B}$, полученной из последовательности C удалением наборов $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$, на первых m местах стоят наборы из множества M в лексикографическом порядке, а на местах с $m+1$ по 2^n-2 — наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash (M \cup \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\})$ в обратном лексикографическому порядке.

Последовательность C *подаваемых наборов будем называть правильной*, если выполнены следующие условия:

1) последовательность C является последовательностью вложенных пар;

2) если в последовательности C наборы пары $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$ находятся между наборами пары $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$, то верно неравенство $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\} \underset{M}{\leq} \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\}$.

Лемма 2.4.7. *Любая последовательность из множества $C(M)$ является правильной.*

Доказательство. Пусть последовательность C принадлежит множеству $C(M)$. Заметим, что справедливость утверждения леммы никак не зависит от положения в последовательности C подряд идущих наборов $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$. Поэтому для определенности будем рассматривать последовательность $C = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n})$ из множества $C(M)$ такую, что выполнены равенства $\widetilde{\alpha}_{2^n-1} = \widetilde{0}$ и $\widetilde{\alpha}_{2^n} = \widetilde{1}$. Докажем лемму индукцией по номерам пар наборов, упорядоченных в обратном лексикографическому порядке.

База. Докажем, что наборы $(1, 1, \ldots, 1, 1, 0, 1)$ и $(1, 1, \ldots, 1, 1, 1, 0)$ являются подряд идущими в последовательности C. Действительно, они являются подряд идущими в лексикографическом порядке. Значит, если они оба принадлежат или оба не принадлежат множеству M, то они являются подряд идущими в последовательности C. Теперь пусть для определенности набор $(1, 1, \ldots 1, 1, 0, 1)$ принадлежит множеству M, а набор $(1, 1, \ldots, 1, 1, 1, 0)$ ему не принадлежит. Тогда набор $(1, 1, \ldots, 1, 1, 0, 1)$ стоит на m-ом месте в последовательности C, поскольку он самый большой (в отношении частичного порядка) из наборов, принадлежащих множеству M, а набор $(1, 1, \ldots, 1, 1, 1, 0)$ является $m+1$-м, поскольку он самый большой (в отношении частичного порядка) из не принадлежащих множеству M наборов.

Переход. Рассмотрим наборы пары $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$ имеющие в обратном лексикографическому порядке номера $2k$ и $2k+1$, где $2 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$. Предположим, что для пар наборов, имеющих номера $2m$ и $2m+1$, где $m < k$ уже доказано, что они являются или подряд идущими или разделены парами наборов, имеющих меньшие номера в обратном лексикографическому

порядке. Если оба набора $\widetilde{\beta}_1$ и $\widetilde{\beta}_2$ принадлежат или оба не принадлежат множеству M, то они являются подряд идущими в последовательности C. Теперь пусть для определенности набор $\widetilde{\beta}_1$ принадлежит множеству M, а набор $\widetilde{\beta}_2$ ему не принадлежит. Тогда из множества M после набора $\widetilde{\beta}_1$ могут стоять только наборы, принадлежащие парам большим (в отношении частичного порядка), чем пара $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$. Из множества $\{0,1\}^n \backslash (M \cup \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\})$ перед набором $\widetilde{\beta}_2$ могут стоять только наборы, принадлежащие парам большим (в отношении частичного порядка), чем пара $\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$. Лемма доказана. ■

Лемма 2.4.8. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{F}_\vee$ *и* $C = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n})$ *— правильная последовательность подаваемых наборов,* $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2^n+1})$. *Тогда обобщенная формула* F *с последовательностью* C *реализует функцию* $f^\vee(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2^n+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_n^\vee(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Заметим, что справедливость утверждения леммы никак не зависит от положения в последовательности C подряд идущих наборов $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$. Поэтому для определенности будем считать, что $\widetilde{\alpha}_{2^n-1} = \widetilde{0}$ и $\widetilde{\alpha}_{2^n} = \widetilde{1}$. Поскольку C — правильная последовательность, то последовательность $(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n-2})$ является последовательностью вложенных пар.

Из леммы 2.4.2, примененной к последовательности вложенных пар $(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n-2})$, следует равенство $\Phi_{2^n-1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_n^\vee(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. На наборах $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$ меняются все функциональные символы формул. Значит, верно равенство

$$\Phi_{2^n+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2^n-1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_n^\vee(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

В силу принадлежности функций $x \vee y$ и $x\&y$ классу T_{01} и утверждения 2.3.1 выполнены следующие равенства $0 = \Phi_{2^n-1}(\widetilde{0}) = \mathsf{F}(C)|_{\widetilde{0}}$ и $1 = \Phi_{2^n}(\widetilde{1}) = \mathsf{F}(C)|_{\widetilde{1}}$.

Осталось доказать, что обобщенная формула F принимает значение 1 на всех наборах $\widetilde{\alpha}_i$, где $1 \leq i \leq 2^n - 2$. Докажем индукцией по номерам наборов в последовательности C.

База. Докажем, что на наборе $\widetilde{\alpha}_1$ обобщенная формула F принимает значение 1. По построению $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_n^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\widetilde{\alpha}_1 \neq \widetilde{0}$, значит, на наборе $\widetilde{\alpha}_1$ обобщенная формула F будет принимать значение 1.

Переход. Предположим, что на наборах $\widetilde{\alpha}_i$, где $1 \leq i \leq m \leq 2^n - 3$ обобщенная формула F принимает значение 1. Докажем, что на наборе $\widetilde{\alpha}_{m+1}$ обобщенная формула F также принимает значение 1.

Возможны два случая. Во-первых, существует такой номер набора j, что верны неравенства $1 \leq j \leq m$ и наборы $\widetilde{\alpha}_j$ и $\widetilde{\alpha}_{m+1}$ являются парой. В этом случае из леммы 2.4.2, примененного к паре $\{\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{m+1}\}$, будет следовать, что выполнено равенство $\mathsf{F}(C)|_{\widetilde{\alpha}_{m+1}} = 1$. Во-вторых, не существует такого номера. В этом случае возможны два подслучая. Во-первых, последовательность $(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_m)$ является последовательностью вложенных пар. Тогда из леммы 2.4.2 следует равенство $\Phi_{m+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_n^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. И поскольку $\widetilde{\alpha}_{m+1} \neq \widetilde{0}$, то верно равенство $\mathsf{F}(C)|_{\widetilde{\alpha}_{m+1}} = \Phi_{m+1}(\widetilde{\alpha}_{m+1}) = \Phi_n^{\vee}(\widetilde{\alpha}_{m+1}) = 1$. Во-вторых, последовательность $(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_m)$ не является последовательностью вложенных пар. Тогда поскольку последовательность C является правильной, то верно неравенство $\widetilde{\alpha}_m \underset{M}{\leq} \widetilde{\alpha}_{m+1}$. Применим к этим двум наборам следствие 2.4.3. Из него следует равенство $\mathsf{F}(C)|_{\widetilde{\alpha}_{m+1}} = 1$.

Значит, на первых $2^n - 2$ наборах последовательности C обобщенная формула F принимает значение 1. Лемма доказана. ■

Утверждение 2.4.1. *Пусть n — любое натуральное число, m — любое целое число, такое, что $0 \leq m \leq 2^n - 2$, M — m-элементное подмножество множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}$, C — последовательность из множества $C(M)$, F —*

обобщенная формула из $\mathfrak{F}_\vee$, $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2^n+1})$. *Тогда обобщенная формула* F *с последовательностью* C *реализует функцию* $f^\vee(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2^n+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_n^\vee(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Из леммы 2.4.7, примененной к последовательности C, следует, что последовательность C является правильной. Из леммы 2.4.8, примененной к обобщенной формуле F и последовательности C, следует, что обобщенная формула F с последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию $f^\vee(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2^n+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi_n^\vee(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Утверждение доказано. ■

Множество всех двоичных наборов длины n, первая компонента которых равна 1, будем обозначать через I_2^n. Пусть M — некоторое m-элементное подмножество множества $I_2^n \backslash \{\widetilde{1} \cup (1, 0, \ldots 0)\}$. Обозначим через $I(M)$ множество всех последовательностей C наборов из $I_2^n \backslash \{(1, 0, \ldots 0)\}$, таких, что

1) в последовательности C длины $2^{n-1} - 1$ на первых m местах стоят наборы из множества M в обратном лексикографическому порядке;

2) на $m + 1$-м месте стоит набор $\widetilde{1}$;

3) на местах с $m + 2$ по $2^{n-1} - 1$ — наборы из множества $I_2^n \backslash (M \cup \{\widetilde{1}\})$ в лексикографическом порядке.

Лемма 2.4.9. *Пусть* n *— любое натуральное число,* m *— любое целое число, такое, что* $0 \leq m \leq 2^{n-1} - 2$, M *— m-элементное подмножество множества* $I_2^n \backslash \{\widetilde{1} \cup (1, 0, \ldots 0)\}$, $\widetilde{B}$ *— квазипоследовательность из множества* $I(M)$, F *— обобщенная формула из* $\mathfrak{F}_\&$. *Тогда* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}} = 0$ *для любого* $\widetilde{\alpha} \in M$ *и* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\beta}} = 1$ *для любого* $\widetilde{\beta} \in I_2^n \backslash (M \cup (1, 0, \ldots 0)\})$

Доказательство. Пусть $\widetilde{B} = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^{n-1}-1})$ и пусть $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2^{n-1}})$. Поскольку $\mathsf{F} \in \mathfrak{F}_\&$, то $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_n^\&(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Будем считать, что M не пусто. (Случай $M = \emptyset$ является частным случаем

изложенного.) Тогда верно, что $\widetilde{\beta}_1 \in M$. Следовательно, $\widetilde{\beta}_1 \neq \widetilde{1}$. Значит, верно равенство $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\beta}_1} = \Phi_1(\widetilde{\beta}_1) = 0$. Рассмотрим обобщенную формулу F^2, являющуюся подформулой обобщенной формулы F и зависящую от переменных $x_2, x_3, \ldots x_n$. Так как все наборы квазипоследовательности $\widetilde{B}$ принадлежат множеству I_2^n, то можно рассматривать обобщенную формулу F^2 с квазипоследовательностью подаваемых наборов $\widetilde{B}$. Первые m наборов последовательности $\widetilde{B}$ стоят в обратном лексикографическому порядке в силу следствий 2.4.1 и 2.4.4 верно, что на всех наборах множества M обобщенная формула F^2 с квазипоследовательностью $\widetilde{B}$ принимает значение 0. Значит, на внешние функциональные символы формул $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_m$ подается набор $(1, 0)$. Следовательно, внешним функциональным символом у формул $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{m+1}$ является конъюнкция. Поскольку $\widetilde{\beta}_{m+1} = \widetilde{1}$, то внешним функциональным символом формулы Φ_{m+2} является дизъюнкция. Из этого и того, что $\widetilde{\beta}_{m+2} \in I_2^n$ следует равенство $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\beta}_{m+2}} = 1$. Далее из следствий 2.4.1 и 2.4.3 получаем, что обобщенная формула F принимает значение 1 на наборах $\widetilde{\beta}_{m+3}, \widetilde{\beta}_{m+4}, \ldots \widetilde{\beta}_{2^{n-1}-1}$. В силу принадлежности функций $x \vee y$ и $x\&y$ классу T_1 и утверждения 2.3.1 выполнено равенство $1 = \Phi_{m+1}(\widetilde{1}) = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{1}}$. Лемма доказана. ■

Множество всех двоичных наборов длины n, у которых первая компонента равна 0, будем обозначать через O_2^n. Пусть M — некоторое m-элементное подмножество множества $O_2^n \backslash \{\widetilde{0}\}$. Обозначим через $O(M)$ множество всех последовательностей C наборов из O_2^n, таких, что

1) в последовательности C длины 2^{n-1} на первых m местах стоят наборы из множества M в лексикографическом порядке;

2) на $m+1$-м месте стоит набор $\widetilde{0}$;

4) на местах с $m+2$ по 2^{n-1} — наборы из множества $O_2^n \backslash (M \cup \{\widetilde{0}\})$ в обратном лексикографическому порядке.

Лемма 2.4.10. *Пусть n — любое натуральное число, m — любое целое число, такое, что $0 \leq m \leq 2^{n-1}-1$, M — m-элементное подмножество множества $O_2^n \backslash \{\widetilde{0}\}$, $\widetilde{B}$ — квазипоследовательность из множества $O(M)$, F — обобщенная формула из $\mathfrak{F}_\vee$, $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, \widetilde{B}) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2^{n-1}+1})$. Тогда $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}} = 1$ для любого $\widetilde{\alpha} \in M$ и $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\beta}} = 0$ для любого $\widetilde{\beta} \in O_2^n \backslash M$ и верно равенство $\Phi_{2^{n-1}+1} \underset{\Gamma}{=} x_1 \& x_2 \vee x_3 \vee \cdots \vee x_n$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{B} = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^{n-1}})$. Предположим для определенности, что $(0, 1, \ldots 1) \notin M$ и $M \neq \emptyset$. Пусть $\mathsf{F}^2 = (\Phi_{n-1}^\vee(x_2, x_3, \ldots x_n), \mathsf{G}^*)$ — обобщенная формула, являющаяся подформулой обобщенной формулы F и зависящая от переменных $x_2, x_3, \ldots x_n$. Обозначим через $\widetilde{B}_0$ последовательность наборов длины $n-1$, полученную из последовательности $\widetilde{B}$ выкидыванием из всех наборов первого разряда. Последовательность $\widetilde{B}_0$ является правильной. Согласно утверждению 2.4.1 обобщенная формула F^2 с последовательностью $\widetilde{B}_0$ реализует функцию $f^\vee(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Пусть $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}^2, \widetilde{B}_0) = (\Phi_1^{B_0}, \Phi_2^{B_0}, \ldots, \Phi_{2^{n-1}+1}^{B_0})$. Поскольку обобщенная формула F^2 с последовательностью подаваемых наборов $\widetilde{B}_0$ реализует функцию $f^\vee(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, значит, на внешний функциональный символ формул $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ подается набор $(0, 1)$. Из чего следует, что внешним функциональным символом формул $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{m+1}$ является дизъюнкция. Значит, верны равенства $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\beta}_1} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\beta}_2} = \cdots = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\beta}_m} = 1$. Поскольку верно равенство $\widetilde{\beta}_{m+1} = \widetilde{0}$, то внешним функциональным символом формулы Φ_{m+2} является конъюнкция. Так как обобщенная формула F^2 с последовательностью подаваемых наборов $\widetilde{B}_0$ реализует функцию $f^\vee(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, значит, на внешний функциональный символ формул $\Phi_{m+2}, \Phi_{m+3}, \ldots \Phi_{2^{n-1}}$ подается набор $(0, 1)$. Значит, внешним функциональным символом формул $\Phi_{m+2}, \Phi_{m+3}, \ldots \Phi_{2^{n-1}}$ является конъюнкция. Значит, верны равенства

$$\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{0}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\beta}_{m+1}} = \mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\beta}_{m+2}} = \cdots = \mathsf{F}(\widetilde{E})|_{\widetilde{\beta}_{2^n-1}} = 0.$$

Из утверждения 2.4.1, примененного к обобщенной формуле F^2 и последовательности $\widetilde{B}_0$, следует что $\Phi^{B_0}_{2^{n-1}+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi^{\vee}_{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Значит, верно равенство $\Phi_{2^{n-1}+1} \underset{\Gamma}{=} x_1 \& x_2 \vee x_3 \vee \cdots \vee x_n$. Осталось заметить, что если набор $(0, 1, \ldots 1)$ принадлежит множеству M, то в последовательности $\widetilde{B}$ только поменяются местами наборы $(0, 1, \ldots 1)$ и $\widetilde{0}$ и все рассуждения останутся прежними. Лемма доказана. ■

2.4.4 Доказательства основных утверждений

Функциональные символы формулы вида

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = H_{i_{n-1}}(x_{i_1}, H_{i_{n-2}}(x_{i_2}, \ldots H_{i_1}(x_{i_{n-1}}, x_{i_n})) \ldots)$$

будем иногда называть просто по номерам, т. е. k-ым функциональным символом формулы $\Phi(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ является функциональный символ H_{i_k}, где $1 \leq k \leq n$.

Теорема 2.4.1. *Для любого $n \geq 1$, любой функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса $T_{01} \cap O^{\infty}$, любой обобщенной формулы F из $\mathfrak{F}_{\vee}$ существует такая допустимая последовательность C, что обобщенная формула F с последовательностью C реализует функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2^n+1}$, где $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, C) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2^n+1})$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что верно неравенство $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq x_1$. Рассмотрим все наборы длины n из множества O^n_2. Пусть M — множество всех двоичных наборов длины n из множества O^n_2, на которых функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значение 1. Заметим, что набор $\widetilde{0}$ не принадлежит множеству M. Положим $m = |M|$. Из утверждения 2.4.1 следует, что существует такая допустимая последовательность $B = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ из множества $C(M)$, что $\widetilde{\beta}_{2^n-1} = \widetilde{1}$, $\widetilde{\beta}_{2^n} = \widetilde{0}$ и обобщенная формула F с последовательностью B реализует функцию $f^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, B) = (\Phi_1^B, \Phi_2^B, \ldots, \Phi_{2^n+1}^B)$. Заметим, что $\widetilde{\beta}_r = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, где $r = 2^{n-1} + m - 1$.

Построим новую последовательность $D = (\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \ldots, \widetilde{\gamma}_{2^n})$ всех наборов длины n. Положим $\widetilde{\gamma}_i = \widetilde{\beta}_i$ для всех $1 \leq i \leq 2^{n-1} + m - 2$ и $2^{n-1} + m \leq i \leq 2^n - 2$, $\widetilde{\gamma}_{2^{n-1}+m-1} = \widetilde{0}$, $\widetilde{\gamma}_{2^n-1} = \widetilde{1}$, $\widetilde{\gamma}_{2^n} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Пусть $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, D) = (\Phi_1^D, \Phi_2^D, \ldots, \Phi_{2^n+1}^D)$. По построению $\mathsf{F}(D)|_{\widetilde{\gamma}_i} = 1$ при $1 \leq i \leq 2^{n-1} + m - 2$ и формула $\Phi^B_{2^{n-1}+m}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отличается от формулы $\Phi^D_{2^{n-1}+m}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ только внешним функциональным символом, для формулы $\Phi^D_{2^{n-1}+m}$ это — конъюнкция.

Если внешний функциональный символ формул Φ_i^D при $2^{n-1} + m \leq i \leq 2^n - 2$ является конъюнкцией, то верно равенство $\mathsf{F}(D)|_{\widetilde{\gamma}_i} = 0$ при $2^{n-1} + m \leq i \leq 2^n - 2$. Докажем, что внешний функциональный символ формул Φ_i^D при $2^{n-1} + m \leq i \leq 2^n - 2$ является конъюнкцией. По построению выполнены равенства $\mathsf{F}(B)|_{\widetilde{\beta}_i} = 1$ и наборы $\widetilde{\beta}_i$ принадлежат множеству O_2^n при $2^{n-1} + m \leq i \leq 2^n - 2$, следовательно, на внешний функциональный символ всех формул Φ_i^B при $2^{n-1} + m \leq i \leq 2^n - 2$ подается набор $(0, 1)$ и, следовательно, у всех формул Φ_i^B при $2^{n-1} + m \leq i \leq 2^n - 1$ внешним функциональным символом является дизъюнкция. Напомним, что формула $\Phi^B_{2^{n-1}+m}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отличается от формулы $\Phi^D_{2^{n-1}+m}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ только внешним функциональным символом и верно равенство $\widetilde{\gamma}_i = \widetilde{\beta}_i$ при $2^{n-1} + m \leq i \leq 2^n - 2$, а значит на внешний функциональный символ всех формул Φ_i^D при $2^{n-1} + m \leq i \leq 2^n - 2$ подается набор $(0, 1)$ и, следовательно, внешний функциональный символ формул Φ_i^D при $2^{n-1} + m \leq i \leq 2^n - 1$ является конъюнкцией.

Теперь покажем, что верно равенство $\mathsf{F}(D)|_{(1,0,0,\ldots,0)} = 1$, для этого достаточно показать, что внешний функциональный символ формулы $\Phi^D_{2^n}$ является дизъюнкцией. Действительно, внешний функциональный символ формулы $\Phi^C_{2^n-1}$ является конъюнкцией и верно равенство $\widetilde{\gamma}_{2^n-1} = \widetilde{1}$, значит, внешний функциональный символ формулы $\Phi^D_{2^n}$ является дизъюнкцией. Из вышеизложенного следует, что если положить $C = D$, то обобщенная формула F с по-

следовательностью C принимает значение 0 на всех наборах множества O_2^n не лежащих в M и значение 1 на всех наборах множества $M \cup I_2^n$.

Осталось показать, что верно равенство $\Phi^D_{2^n+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi^D_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi^\vee_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Поскольку $\widetilde{\gamma}_{2^n} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, то на внешний функциональный символ формулы $\Phi^D_{2^n}$ подается набор $(1, 0)$ и, т. к. внешний функциональный символ формулы $\Phi^D_{2^n}$ является дизъюнкцией, то внешний функциональный символ формулы $\Phi^D_{2^n+1}$ тоже является дизъюнкцией. Заметим, что функциональные символы с $n-2$-го по 1-й формул Φ^D_i, где $2 \leq i \leq 2^n+1$, зависят от начальной формулы Φ^D_1 и разрядов со 2-го по n-й наборов из последовательности D подаваемых наборов. Разряды с 2-го по n-й наборов последовательности D совпадают с разрядами с 2-го по n-й наборов последовательности B, а значит функциональные символы с $n-2$-го по 1-й формул Φ^D_i совпадают с функциональными символами с $n-2$-го по 1-й формул Φ^B_i, где $2 \leq i \leq 2^n+1$. Из утверждения 2.4.1 следует равенство $\Phi^B_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi^B_{2^n+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi^\vee_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, выполнены равенства $\Phi^D_{2^n+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi^B_{2^n+1} \underset{\Gamma}{=} \Phi^B_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi^\vee_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \underset{\Gamma}{=} \Phi^D_1$. Теорема доказана. ■

С помощью принципа двойственности для обобщенных формул (утверждение 2.3.3) из теоремы 2.4.1 можно получить следствие.

Следствие 2.4.5. *Для любого $n \geq 1$, любой функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса $T_{01} \cap \ 1^\infty$, любой обобщенной формулы F из $\mathfrak{F}_\&$ существует такая допустимая последовательность C, что обобщенная формула F с последовательностью C реализует функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_{2^n+1}$, где $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, C) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2^n+1})$.*

Теорема 2.4.2. *Для любого $n \geq 1$, любой функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса T_{01}, такой, что или $g(1, 0, \ldots 0) = 0$, или $g(0, 1, \ldots 1) = 0$, любой обобщенной формулы F из $\mathfrak{F}_\vee$ существует такая допустимая последовательность C, что обобщенная формула F с последовательностью C реализует функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Доказательство. Предположим для определенности, что $g(1,0,\dots 0)=0$. Рассмотрим все наборы длины n, у которых первая компонента равна 0. Пусть M — множество всех двоичных наборов длины n с первым элементом равным 0, на которых функция $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$ принимает значение 1. Из леммы 2.4.10 следует, что существует последовательность $B=(\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\dots,\widetilde{\beta}_{2^{n-1}})$, такая, что обобщенная формула F на последовательность B принимает на наборах множества M значение 1, а на наборах множества $O_2^n\backslash M$ значение 0. Пусть $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F},B)=(\Phi_1,\Phi_2,\dots,\Phi_{2^{n-1}+1})$ В силу леммы 2.4.10 верно равенство

$$\Phi_{2^{n-1}+1}\underset{\Gamma}{=}x_1\&x_2\vee x_3\vee\dots\vee x_n.$$

Добавим в последовательность B набор $\widetilde{\beta}_{2^{n-1}+1}=(1,0,\dots 0)$. Соответственно, в последовательность $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F},B)$ добавится формула $\Phi_{2^{n-1}+1}$. Тогда верно равенство $\Phi_{2^{n-1}+1}(\widetilde{\beta}_{2^{n-1}+1})=0$. Кроме того, верно равенство $\Phi_{2^{n-1}+2}\underset{\Gamma}{=}\Phi_n^{\&}(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Применим лемму 2.4.9. Переопределим множество M. Пусть M — множество всех двоичных наборов длины n с первым элементом равным 1, на которых функция $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$ принимает значение 0. Из леммы 2.4.9 следует, что существует последовательность $I(M)=(\widetilde{\delta}_1,\widetilde{\delta}_2,\dots,\widetilde{\delta}_{2^{n-1}-1})$. Положим $\widetilde{\beta}_{2^{n-1}+1+i}=\widetilde{\delta}_i$, где $1\le i\le 2^{n-1}-1$. Тогда обобщенная формула F с последовательностью подаваемых наборов $C=(\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\dots,\widetilde{\beta}_{2^n})$ реализует функцию $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Осталось заметить, что если $g(1,0,\dots 0)=1$, то достаточно в последовательности C подаваемых наборов поменять местами наборы $(0,1,\dots 1)$ и $(1,0,\dots 0)$ и все рассуждения останутся прежними. Теорема доказана. ■

С помощью принципа двойственности для обобщенных формул (утверждение 2.3.3) из теоремы 2.4.2 можно получить следствие.

Следствие 2.4.6. *Для любого $n\ge 1$, любой функции $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$ из класса T_{01}, такой, что или $g(1,0,\dots 0)=1$, или $g(0,1,\dots 1)=1$, любой обобщенной формулы F из $\mathfrak{F}_{\&}$ существует такая допустимая последовательность*

C, что обобщенная формула F с последовательностью C реализует функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Объединяя теорему 2.4.2 и следствие 2.4.6 получим следующую теорему.

Теорема 2.4.3. *Для любого $n \geq 1$, любой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса T_{01}, существует обобщенная формула F из $\mathfrak{F}_\vee \cup \mathfrak{F}_\&$ и допустимая последовательность C, такая, что обобщенная формула F с последовательностью C реализует функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

В силу теоремы 2.4.3 и того, что глубина и сложность формул $\Phi_n^\&(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\Phi_n^\vee(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равны $n-1$ и n соответственно, верно следующее замечание.

Замечание 2.4.1. *Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из множества T_{01} может быть реализована обобщенной формулой над $\{\vee, \&\}$ со сложностью начальной формулы n и глубиной $n-1$.*

2.5 Реализация функций из классов T_0 и T_1

Далее будут рассмотрены свойства обобщенных формул определенного вида. Обозначим через $\mathfrak{F}_0$ множество обобщенных формул над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$, имеющие линейные структуры, с правилом смены $\mathsf{G}_0 = \{g_{(0,0)}, g_{(0,1)}, g_{(1,0)}, g_{(1,1)}\}$, задаваемым следующей таблицей:

	$g_{(0,0)}$	$g_{(0,1)}$	$g_{(1,0)}$	$g_{(1,1)}$
$\vee^{(2)}$	$0^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$\vee^{(2)}$
$0^{(2)}$	$\vee^{(2)}$	$0^{(2)}$	$0^{(2)}$	$0^{(2)}$

Следующие леммы являются следствием утверждения 2.3.6.

Лемма 2.5.1. *Пусть обобщенная формула F принадлежит множеству $\mathfrak{F}_0$, $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ — квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что для некоторого $1 \leq i \leq k-1$ набор $\widetilde{\alpha}_i$ имеет в лексикографическом*

порядке меньший номер, чем набор $\widetilde{\alpha}_{i+1}$ *и* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = 1$. *Тогда верно равенство* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = 1$.

Лемма 2.5.2. *Пусть обобщенная формула* F *принадлежит множеству* $\mathfrak{F}_0$, $\widetilde{B} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ — *квазипоследовательность подаваемых наборов, такая, что для некоторого* $1 \leq i \leq k-1$ *набор* $\widetilde{\alpha}_i$ *имеет в лексикографическом порядке больший номер, чем набор* $\widetilde{\alpha}_{i+1}$ *и* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_i} = 0$. *Тогда верно равенство* $\mathsf{F}(\widetilde{B})|_{\widetilde{\alpha}_{i+1}} = 0$.

Теорема 2.5.1. *Для любого* $n \geq 2$, *для любой функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *из класса* T_0 *существует такая допустимая последовательность* C, *что обобщенная формула* $\mathsf{F} = (\Phi_n^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G}_0)$ *из* $\mathfrak{F}_0$ *с последовательностью* C *реализует функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Опишем процесс построения такой последовательности C всех двоичных наборов длины n, что обобщенная формула F реализует функцию f. В дальнейшем предполагается, что длина всех двоичных наборов равна n. Обозначим искомую последовательность C и обозначим $\widetilde{\Phi}(\mathsf{F}, C) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2^{n-1}+1})$.

Сначала записываем все наборы с первым нулевым разрядом, на которых функция f принимает значение 1, в лексикографическом порядке. Предположим, что таких наборов k_1 штук, $0 \leq k_1 \leq 2^{n-1} - 1$. На первом наборе обобщенная формула F принимает значение 1 в силу того, что $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} x_1 \vee (x_2 \vee \ldots (x_{n-2} \vee (x_{n-1} \vee x_n)) \ldots)$ и первый набор не является нулевым.

На наборах со второго по k_1-й формула F принимает значение 1 в силу леммы 2.5.1. При этом на внешний функциональный символ всех формул Φ_i при $1 \leq i \leq k_1$ будет подаваться набор $(0, 1)$, поэтому, в силу свойств правила смены обобщенной формулы F, формула Φ_{k_1+1} будет иметь вид $x_1 \vee B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, где $B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$.

Затем записываем все наборы с первым единичным разрядом, на которых функция f принимает значение 1, в произвольном порядке. Предположим, что таких наборов k_2 штук, $0 \leq k_2 \leq 2^{n-1}$. Поскольку $\Phi_{k_1+1} \underset{\Gamma}{=} x_1 \vee B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, где $B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$, то на k_1+1-ом наборе обобщенная формула F принимает значение 1. При этом на внешний функциональный символ всех формул Φ_i при $k_1 + 1 \leq i \leq k_1 + k_2$ будет подаваться набор $(1, a)$, где $a \in \{0, 1\}$, поэтому, в силу свойств правила смены обобщенной формулы F, при всех $k_1+2 \leq i \leq k_1+k_2+1$ выполнено $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} x_1 \vee B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, где $B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$. Следовательно, на всех наборах с $k_1 + 2$-го по $k_1 + k_2$-й формула F принимает значение 1.

Далее записываем набор $\widetilde{0}$. Поскольку все обобщенные формулы из множества $\mathfrak{F}_0$ являются обобщенными формулами над некоторым подмножеством функций из класса T_0, то на наборе $\widetilde{0}$ формула F принимает значение 0. В силу свойств правила смены обобщенной формулы F, верно $\Phi_{k_1+k_2+2} \underset{\Gamma}{=} 0(x_1, B(x_2, x_3, \ldots, x_n))$, где $B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$.

После этого записываем все наборы с первым единичным разрядом, на которых функция f принимает значение 0, в произвольном порядке. Таких наборов $2^{n-1} - k_2$ штук. Поскольку $\Phi_{k_1+k_2+2} \underset{\Gamma}{=} 0(x_1, B(x_2, x_3, \ldots, x_n))$, где $B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$, то на k_1+k_2+2-ом наборе обобщенная формула F принимает значение 0. При этом на внешний функциональный символ всех формул Φ_i при $k_1+k_2+2 \leq i \leq k_1+2^{n-1}+1$ будет подаваться набор $(1, a)$, где $a \in \{0, 1\}$, поэтому для всех $k_1+k_2+2 \leq i \leq k_1+2^{n-1}+2$ выполнено $\Phi_i \underset{\Gamma}{=} 0(x_1, B(x_2, x_3, \ldots, x_n))$, где $B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$. Следовательно, на всех наборах с $k_1 + k_2 + 3$-го по $k_1 + 2^{n-1} + 1$-й формула F принимает значение 0.

Затем записываем все наборы с первым нулевым разрядом, на которых функция f принимает значение 0, в обратном лексикографическому порядке. Таких наборов $2^{n-1}-k_1-1$ штук. На $k_1+2^{n-1}+2$-ом наборе обобщенная форму-

ла F принимает значение 0 в силу того, что $\Phi_{k_1+2^{n-1}+2} \underset{\Gamma}{=} 0(x_1, B(x_2, x_3, \ldots, x_n))$, где $B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$. На наборах с $k_1 + 2^{n-1} + 3$-го по 2^n-й формула F принимает значение 0 в силу леммы 2.5.2. Теорема доказана. ■

Теорему 2.5.1 можно обобщить на случай обобщенной формулы с начальной формулой, являющейся линейной дизъюнктивной формулой, в которую каждая переменная входит ровно один раз. Обозначим множество всех линейных дизъюнктивных формул над $\{x \vee y, 0(x, y)\}$, в которые каждая переменная из $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ входит ровно один раз, через $\mathfrak{P}_0(n)$, $n \geq 2$. Верна следующая теорема.

Теорема 2.5.2. *Для любого $n \geq 2$, для любой функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса T_0, для любой формулы Φ из множества $\mathfrak{P}_0(n)$ существует такая допустимая последовательность C, что обобщенная формула $\mathsf{F} = (\Phi, \mathsf{G}_0)$ из $\mathfrak{F}_0$ с последовательностью C реализует функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Напомним, что $[T_0]_{\mathsf{F}} = [T_0]_A = T_0$ (утверждение 2.3.1). Из этого, в частности, следует, что если булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не принадлежит множеству $T_0(n)$, то никакая обобщенная формула F из $\mathfrak{F}_0$ не может реализовать эту функцию, $n \geq 2$.

Поскольку для обобщенных формул выполнен принцип двойственности (утверждение 2.3.3), то верна теорема, двойственная к теореме 2.5.1.

Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ множество обобщенных формул над $\{x\&y, 1(x, y)\}$, имеющие линейные структуры, с правилом смены $\mathsf{G}_1 = \{g_{(0,0)}, g_{(0,1)}, g_{(1,0)}, g_{(1,1)}\}$, задаваемым следующей таблицей:

	$g_{(0,0)}$	$g_{(0,1)}$	$g_{(1,0)}$	$g_{(1,1)}$
$\&^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$\&^{(2)}$	$1^{(2)}$
$1^{(2)}$	$1^{(2)}$	$1^{(2)}$	$1^{(2)}$	$\&^{(2)}$

Теорема 2.5.3. *Для любого $n \geq 2$, для любой функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из класса T_1 существует такая допустимая последовательность C, что обоб-*

щенная формула $\mathsf{F} = (\Phi_n^{\&}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathsf{G}_1)$ *из* $\mathfrak{F}_1$ *с последовательностью* C *реализует функцию* $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Теорему 2.5.3 можно обобщить на случай обобщенной формулы с начальной формулой, являющейся линейной конъюнктивной формулой, в которую каждая переменная входит ровно один раз. Обозначим множество всех линейных конъюнктивных формул над $\{x\&y, 1(x, y)\}$, в которые каждая переменная из $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ входит ровно один раз, через $\mathfrak{P}_1(n)$, $n \geq 2$. Верна следующая теорема.

Теорема 2.5.4. *Для любого* $n \geq 2$, *для любой функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *из класса* T_1, *для любой формулы* Φ *из множества* $\mathfrak{P}_1(n)$ *существует такая допустимая последовательность* C, *что обобщенная формула* $\mathsf{F} = (\Phi, \mathsf{G}_1)$ *из* $\mathfrak{F}_1$ *с последовательностью* C *реализует функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Напомним, что $[T_1]_{\mathsf{F}} = [T_1]_A = T_1$ (утверждение 2.3.1). Из этого, в частности, следует, что если булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не принадлежит множеству $T_1(n)$, то никакая обобщенная формула F из $\mathfrak{F}_1$ не может реализовать эту функцию, $n \geq 2$.

В силу теорем 2.5.1, 2.5.3 и того, что глубина и сложность формул $\Phi_n^{\&}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\Phi_n^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равны $n-1$ и n соответственно, верно следующее замечание.

Замечание 2.5.1. *Любая булева функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *из множества* $T_0 \cup T_1$ *может быть реализована обобщенной формулой над* $\{0, 1, \vee, \&\}$ *со сложностью начальной формулы* n *и глубиной* $n - 1$.

Глава 3

Универсальные автоматы

3.1 Определения и различные постановки задачи

Пусть $V_{q_1} = (\{0,1\}, \{0,1\}, Q, F, G, q_1)$ — инициальный булев автомат с начальным состоянием q_1 и n входами. Обозначим через $P(V_{q_1})$ множество всех булевых функций из $P_2(n)$, реализуемых автоматом V_{q_1}. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq P_2(n)$. Автомат V_{q_1} называется *универсальным для множества* $\mathfrak{A}$, если $P(V_{q_1}) = \mathfrak{A}$. Аналогично, пусть $V = (\{0,1\}, \{0,1\}, Q, F, G)$ — неинициальный булев автомат с n входами. Обозначим через $P(V)$ множество всех булевых функций из $P_2(n)$, реализуемых автоматом V. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq P_2(n)$. Автомат V называется *универсальным для множества* $\mathfrak{A}$, если $P(V) = \mathfrak{A}$.

Пусть теперь $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_m)$ — упорядоченная последовательность двоичных наборов длины n, $n \geq 1$ и $m \geq 2^n$, такая, что в ней встречается каждый двоичный набор длины n. Будем говорить, что *автомат* V_{q_1} *с последовательностью* C *повторно реализует булеву функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при последовательной подаче на вход V_{q_1} наборов из C для каждого $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$ значение $f(\widetilde{\alpha})$ совпадает со значением, выдаваемом на выходе автомата V_{q_1}, при подаче на вход автомата V_{q_1} последнего вхождения набора $\widetilde{\alpha}$ в последовательность C. Будем также говорить, что V_{q_1} *повторно реализует функцию* f, если для некоторой последовательности наборов C автомат V_{q_1} с последовательностью C реализует f. Последовательность C будем называть *последовательностью подаваемых наборов с повторами*. Обозначим через $P^r(V_{q_1})$ множество

всех булевых функций из $P_2(n)$, повторно реализуемых автоматом V_{q_1}. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq P_2(n)$. Автомат V_{q_1} называется *повторно универсальным* для множества $\mathfrak{A}$, если $P^r(V_{q_1}) = \mathfrak{A}$.

В данной главе рассматриваются булевы автоматы над множеством константных булевых функций $\{0, 1\}$, т.е. функции выхода всех состояний данных автоматов являются константными функциями $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Будем называть такие состояния *константными*, а данные автоматы будем называть *автоматами с константными состояниями*. Под 0-*состоянием* булевого автомата V с константными состояниями будем понимать состояние с функцией выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а под 1-*состоянием* — состояние с функцией выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Нетрудно видеть, что такой автомат является автоматом Мура (см. [21]).

В данной главе изучаются вопросы, связанные с универсальностью булевых автоматов с константными состояниями.

3.1.1 Неинициальный автомат

Рассмотрим задачу построения неинициального булевого автомата с константными состояниями, универсального для множества $P_2(n)$.

Утверждение 3.1.1. *Существует неинициальный булев автомат с $2^n + 1$ константными состояниями, универсальный для множества $P_2(n)$.*

Доказательство. Рассмотрим булев автомат V с множеством состояний $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{2^n+1}\}$, который в состояниях $q_1, q_2, \ldots, q_{2^n}$ имеет функцию выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и в состоянии q_{2^n+1} имеет функцию выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ со следующей функцией перехода $g(q, \widetilde{\alpha})$:

$$\begin{cases} g(q_i, \widetilde{\alpha}) = q_{i+1}, \text{ для любого } \widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n \text{ и любого } i, 1 \leq i \leq 2^n \\ g(q_{2^n+1}, \widetilde{\alpha}) = q_{2^n+1}, \text{ для любого } \widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n. \end{cases}$$

Пусть дана булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающая значение 0 на k наборах, $0 \leq k \leq 2^n$. Определим начальное состояние q автомата V и последова-

тельность подаваемых наборов C таким образом, что V_q с последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию f. В качестве начального состояния возьмем состояние q_{2^n-k+1}, последовательность подаваемых наборов C определим следующим образом: в первые k моментов времени на вход автомата подаются наборы, на которых функция f принимает значение 0, затем подаются $2^n - k$ наборов, на которых функция f принимает значение 1. Автомат $V_{q_{2^n-k+1}}$ с последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию f. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.1.2. *Существует неинициальный булев автомат с 2 константными состояниями, универсальный для множества* $P_2(n)$.

Доказательство. Рассмотрим булев автомат V с множеством состояний $Q = \{q_1, q_2\}$, который в состоянии q_1 имеет функцию выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и в состоянии q_2 — функцию выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ со следующей функцией перехода $g(q, \widetilde{\alpha})$:

$$\begin{cases} g(q_i, \widetilde{\alpha}) = q_i, \text{ для любого } i \text{ и любого } \widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n, \widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0} \\ g(q_i, \widetilde{\alpha}) = q_j, \text{при } i \neq j \text{ и } \widetilde{\alpha} = \widetilde{0}. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая. Пусть дана булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающая значение 0 на наборе $\widetilde{0}$. Тогда в качестве начального состояния возьмем состояние q_1, последовательность подаваемых наборов C определим следующим образом: вначале этой последовательности находятся наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{0}\}$, на которых функция f принимает значение 0, затем идет набор $\widetilde{0}$, потом все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V_{q_1} последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию f. Пусть теперь дана булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающая значение 1 на наборе $\widetilde{0}$. Тогда в качестве начального состояния возьмем состояние q_2, последовательность подаваемых наборов C определим следующим образом: вначале этой последовательности находятся наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{0}\}$, на которых функция f принимает значение 1, затем идет набор $\widetilde{0}$, потом все наборы, на

которых функция f принимает значение 0. Автомат V_{q_2} последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию f. Утверждение доказано. ■

Поскольку неинициальный булев автомат с одним константным состоянием может реализовать только константу, то не существует неинициального булева автомата с одним состоянием, реализующего любую булеву функцию из $P_2(n)$.

3.1.2 Инициальный автомат с многократной подачей наборов

Рассмотрим теперь задачу построения инициального булевого автомата с константными состояниями, повторно универсального для множества $P_2(n)$, с минимально возможной длиной последовательности C подаваемых наборов с повторами и минимальным возможным количеством состояний.

Утверждение 3.1.3. *Существует инициальный булев автомат с* 2 *константными состояниями и длиной последовательности* C *подаваемых наборов с повторами, равной* $2^n + 1$*, повторно универсальный для множества* $P_2(n)$*.*

Доказательство. Рассмотрим булев автомат V_{q_1} с множеством состояний $Q = \{q_1, q_2\}$, который в состоянии q_1 имеет функцию выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и в состоянии q_2 имеет функцию выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ со следующей функцией перехода $g(q, \widetilde{\alpha})$:

$$\begin{cases} g(q_i, \widetilde{\alpha}) = q_i, \text{ для любого } \widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{0}\} \text{ и любого } i = 1, 2 \\ g(q_i, \widetilde{0}) = q_j, \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая. Пусть дана булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающая значение 0 на наборе $\widetilde{0}$. Тогда последовательность подаваемых наборов с повторами C определим следующим образом: в начале этой последовательности находятся наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{0}\}$, на которых функция f принимает значение 0, затем идет набор $\widetilde{0}$, потом все наборы, на которых функция f

принимает значение 1, причем один из них повторяется дважды. Автомат V_{q_1} с последовательностью подаваемых наборов с повторами C повторно реализует функцию f. Пусть теперь дана булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающая значение 1 на наборе $\widetilde{0}$. Тогда последовательность подаваемых наборов с повторами C определим следующим образом: в начале этой последовательности находятся наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{0}\}$, на которых функция f принимает значение 0, затем идет набор $\widetilde{0}$, потом все наборы, на которых функция f принимает значение 1 и, наконец, еще раз набор $\widetilde{0}$. Автомат V_{q_1} с последовательностью подаваемых наборов C повторно реализует функцию f. Утверждение доказано. ■

Поскольку булев автомат с одним константным состоянием может повторно реализовать только константу, то не существует булевого автомата с одним константным состоянием, повторно универсального для множества $P_2(n)$. Также не может быть уменьшена и длина последовательности подаваемых наборов, поскольку, если длина последовательности C подаваемых наборов с повторами инициального автомата равна 2^n и в начальном состоянии автомат имеет функцию выхода $a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $a = 0, 1$, то константу $\overline{a}$ он повторно реализовать не может.

3.1.3 Инициальный автомат с однократной подачей наборов

Рассмотрим задачу построения универсального инициального булевого автомата с константными состояниями для множества $P_2(n)$.

Заметим, что если в начальном состоянии автомат имеет функцию выхода $a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $a = 0, 1$, то константу $\overline{a}$ он реализовать не может. Поэтому верно следующее утверждение.

Утверждение 3.1.4. *Не существует инициального булевого автомата с константными состояниями, универсального для множества $P_2(n)$.*

Обозначим через $\mathfrak{W}_k(n)$ множество всех инициальных булевых автоматов с k константными состояниями и n входами. Инициальные булевы автоматы из $\mathfrak{W}_k(n)$, которые реализуют максимальное по мощности множество булевых функций, называются *квазиуниверсальными*. Положим $p_k(n) = \max_{V_{q_1} \in \mathfrak{W}_k(n)} |P(V_{q_1})|$. Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 3.1.5. *Для любого $n \geq 1$ и любого $k \geq 1$ верно $p_{k+1}(n) \geq p_k(n)$.*

Далее в работе рассматриваются вопросы, связанные с квазиуниверсальными автоматами из $\mathfrak{W}_k(n)$.

3.2 Булев автомат с двумя константными состояниями

В данном разделе рассматривается задача построения квазиуниверсальных инициальных булевых автоматов с двумя константными состояниями и n входами.

Без ограничения общности мы будем рассматривать инициальные булевы автоматы, содержащие ровно одно константное состояние с функцией выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ровно одно константное состояние с функцией выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Без существенного ограничения общности начальным состоянием будем считать состояние с функцией выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если не указано иначе. Эти ограничения не являются существенными для полученных ниже результатов. Множество всех таких инициальных булевых автоматов с двумя константными состояниями и n входами обозначим через $\mathfrak{V}_2(n)$.

Пусть V_{q_1} — инициальный булев автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$ с множеством состояний $Q = \{q_1, q_2\}$, где q_1 — начальное состояние, и $g : Q \times \{0,1\}^n \to Q$ — функция переходов автомата V_{q_1}. Обозначим через M множество наборов $\widetilde{\alpha}$, таких, что $g(q_1, \widetilde{\alpha}) = q_2$, а через N — множество наборов $\widetilde{\alpha}$, таких, что $g(q_2, \widetilde{\alpha}) = q_1$. Заметим, что автомат V_{q_1} однозначно задается множествами M и N.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функция, реализуемая автоматом V_{q_1}. Пусть D — некоторое подмножество множества $\{0,1\}^n$. Обозначим через D_f^0 подмножество множества D, состоящее из всех таких наборов $\widetilde{\alpha}$, для которых выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, а через D_f^1 — подмножество множества D, состоящее из всех таких наборов $\widetilde{\alpha}$, для которых выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. В соответствии с этими обозначениями положим

$$M_f^0 = \{\widetilde{\alpha} \mid \widetilde{\alpha} \in M, f(\widetilde{\alpha}) = 0\},$$

$$M_f^1 = \{\widetilde{\alpha} \mid \widetilde{\alpha} \in M, f(\widetilde{\alpha}) = 1\},$$

$$N_f^0 = \{\widetilde{\alpha} \mid \widetilde{\alpha} \in N, f(\widetilde{\alpha}) = 0\},$$

$$N_f^1 = \{\widetilde{\alpha} \mid \widetilde{\alpha} \in N, f(\widetilde{\alpha}) = 1\}.$$

3.2.1 Свойства автоматов из множества $\mathfrak{V}_2(n)$

Утверждение 3.2.1. *Для любого $n \geq 1$ и любого $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$ существует такой инициальный автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$, что любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такую, что $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, можно реализовать с помощью этого автомата.*

Доказательство. Рассмотрим инициальный автомат V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$, заданный множествами $M = \{\widetilde{\alpha}\}$ и $N = \emptyset$. Пусть дана некоторая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такая, что $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Опишем процесс построения последовательности подаваемых наборов C, такой, что автомат V_{q_1} с последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию f. Обозначим через S_0 множество наборов, на которых функция f принимает значение 0, а через S_1 — множество наборов, на которых функция f принимает значение 1. Построим последовательность C подаваемых наборов следующим образом: сначала запишем в некотором порядке все наборы из множества S_0 кроме набора $\widetilde{\alpha}$, затем

набор $\widetilde{\alpha}$, потом все наборы из множества S_1. Таким образом, автомат V_{q_1} с последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию f. Утверждение доказано. ■

Для автоматов из $\mathfrak{W}_2(n)$ с функцией выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в начальном состоянии верно аналогичное утверждение.

Утверждение 3.2.2. *Для любого $n \geq 1$ и любого $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$ существует такой инициальный булев автомат с двумя константными состояниями и функцией выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в начальном состоянии, что любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такую, что $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, можно реализовать с помощью этого автомата.*

Из утверждений 3.2.1 и 3.2.2 можно вывести следующее утверждение.

Следствие 3.2.1. *Для любого $n \geq 1$ существуют два инициальных булевых автомата $V^1_{q_1}$ и $V^2_{q_2}$ с двумя константными состояниями, такие, что $P(V^1_{q_1}) \cup P(V^2_{q_2}) = P_2(n)$.*

Утверждение 3.2.3. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V_{q_1} из множества $\mathfrak{V}_2(n)$ и любой реализуемой им булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполнено $|M^0_f| = |N^1_f|$ или $|M^0_f| = |N^1_f| + 1$.*

Доказательство. Пусть $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ — последовательность всех двоичных наборов длины n, такая, что автомат V_{q_1} с последовательностью C реализует f. Тогда при последовательной подаче наборов последовательности C на входы автомата V_{q_1}, автомат V_{q_1} перейдет из состояния q_1 в состояние q_2 ровно $|M^0_f|$ раз, а из состояния q_2 в состояние q_1 ровно $|N^1_f|$ раз. Утверждение доказано. ■

Лемма 3.2.1. *Для любого $n \geq 1$ и любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$ такого, что $|M| \leq 1$, выполнено $|P(V_{q_1})| \leq \frac{1}{2} \cdot |P_2(n)|$.*

Доказательство. Если $|M| = 0$, то автомат V_{q_1} может реализовать только одну функцию — константу 0. Пусть $|M| = 1$ и $\widetilde{\alpha}$ — такой двоичный набор, что $M = \{\widetilde{\alpha}\}$. Поскольку автомат V_{q_1} в начальном состоянии реализует функцию $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то он выдает значение 0 на наборе $\widetilde{\alpha}$ и может реализовать только такие функции, для которых $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Лемма доказана. ■

Докажем утверждение, которое является вспомогательным для доказательства многих последующих утверждений.

Утверждение 3.2.4. *Последовательность* $\{a_n\}$, *где* $a_n = \frac{C_{n+1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{2^n}$, *не возрастает. Кроме того,* $a_n \leq \frac{3}{4}$ *при* $n \geq 2$ *и* $a_n \leq \frac{5}{8}$ *при* $n \geq 4$.

Доказательство. Докажем, что последовательность $a_n = \frac{C_{n+1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{2^n}$ не возрастает. Рассмотрим отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{C_{n+1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{2^n}}{\frac{C_{n+2}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}}{2^{n+1}}} = \frac{C_{n+1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{C_{n+2}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}} = 2 \cdot \frac{C_{n+1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{C_{n+2}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}} = 2 \cdot \frac{\lceil \frac{n+2}{2} \rceil}{n+2} \geq 1.$$

Вычислим значение выражения при $n = 2$ и $n = 4$:

$$a_2 = \frac{C_3^{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor}}{2^2} = \frac{C_3^1}{4} = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{C_5^{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor}}{2^4} = \frac{C_5^2}{16} = \frac{5}{8}.$$

Значит, $a_n \leq \frac{3}{4}$, при $n \geq 2$ и $a_n \leq \frac{5}{8}$, при $n \geq 4$. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.2.5. *Для любого* $n \geq 1$ *и любого автомата* V_{q_1} *из* $\mathfrak{V}_2(n)$, *такого, что* $M = N$, *верно* $|P(V_{q_1})| \leq \frac{1}{2} \cdot |P_2(n)|$.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. Пусть $|M| \leq 1$. Тогда доказываемое утверждение верно в силу леммы 3.2.1.

2. Пусть $|M| \geq 2$. Пусть f — одна из функций, реализуемых автоматом V_{q_1}. В силу утверждения 3.2.3 верно одно из равенств $|M_f^0| = |N_f^1|$ или $|M_f^0| = |N_f^1| + 1$. Поскольку $M = N$, то выполнено $|M_f^0| = \lceil \frac{|M|}{2} \rceil$.

Следовательно, всего таких функций не больше, чем $C_{|M|}^{\lceil \frac{|M|}{2} \rceil} \cdot 2^{2^n - |M|}$. В силу утверждения 3.2.4 и неравенства $|M| \geq 2$, доля таких функций не превосходит

$$\frac{C_{|M|}^{\lceil \frac{|M|}{2} \rceil} \cdot 2^{2^n - |M|}}{2^{2^n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{|M|}^{\lceil \frac{|M|}{2} \rceil}}{2^{|M|-1}} \leq \frac{1}{2} \cdot a_1 = \frac{1}{2}.$$

Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.2.6. *Пусть $n \geq 1$ и для инициального автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$ существует последовательность подаваемых наборов C, такая, что автомат V_{q_1} с последовательностью наборов C реализует константу. Тогда $|P(V_{q_1})| \leq \frac{1}{2} \cdot |P_2(n)|$.*

Доказательство. Пусть автомат V_{q_1} реализует в начальном состоянии q_1 функцию $a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $a \in \{0, 1\}$. Тогда автомат V_{q_1} не может реализовать константу $\overline{a}$. Пусть существует последовательность подаваемых наборов C, такая, что автомат V_{q_1} с последовательностью наборов C реализует константу a. Обозначим через $\widetilde{\alpha}$ последний набор последовательности C. Тогда функция перехода g автомата V_{q_1} удовлетворяет следующему условию:

$$g(q_1, \widetilde{\beta}) = q_1 \text{ при } \widetilde{\beta} \neq \widetilde{\alpha}.$$

Следовательно, верно неравенство $|M| \leq 1$. Если $g(q_1, \widetilde{\alpha}) = q_1$, то автомат V_{q_1} реализует ровно одну булеву функцию. Если $g(q_1, \widetilde{\alpha}) = q_2$, то в силу леммы 3.2.1 автомат V_{q_1} не может реализовывать больше, чем $\frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$ различных булевых функций. Утверждение доказано. ■

Из утверждения 3.2.6 можно сделать следующий вывод.

Следствие 3.2.2. *Для любого $n \geq 1$ и автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$ верно $|P(V_{q_1})| \leq 2^{2^n} - 2$.*

Доказательство. Если существует последовательность подаваемых наборов C, такая, что автомат V_{q_1} с последовательностью наборов C реализует

константу, то в силу утверждения 3.2.6 верно $|P(V_{q_1})| \leq \frac{1}{2} \cdot |P_2(n)|$. Если такой последовательности C не существует, то автомат V_{q_1} не реализует по крайней мере две булевы функции — константы. Следствие доказано. ■

Утверждение 3.2.7. *Для любого $n \geq 1$ и любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$, такого, что $M \cup N = \{0,1\}^n$ и $M \cap N = \emptyset$, верно $|P(V_{q_1})| \leq \frac{9}{16} \cdot |P_2(n)|$.*

Доказательство. Пусть f — одна из функций, реализуемых автоматом V_{q_1}. В силу утверждения 3.2.3 верно одно из равенств $|M_f^0| = |N_f^1|$ или $|M_f^0| = |N_f^1| + 1$. Оценим мощность множества наборов, на которых функция f принимает значение 1. Верно одно из равенств $|M_f^1| + |N_f^1| = |M_f^1| + |M_f^0| = |M|$ или $|M_f^1| + |N_f^1| = |M_f^1| + |M_f^0| - 1 = |M| - 1$. Оценим количество функций, принимающих значение 1 на $|M|$ наборах или на $|M|-1$ наборе: таких функций $C_{2^n}^{|M|} + C_{2^n}^{|M|-1} = C_{2^n+1}^{|M|}$. Доля таких функций равна

$$\frac{C_{2^n+1}^{|M|}}{2^{2^n}} \leq \frac{C_{2^n+1}^{\lceil \frac{2^n+1}{2} \rceil}}{2^{2^n}}.$$

В силу монотонности последовательности $\{a_n\}$ из утверждения 3.2.4, при $n \geq 3$ доля функций, которые может реализовать автомат V_{q_1}, не больше, чем

$$\frac{C_{2^n+1}^{\lceil \frac{2^n+1}{2} \rceil}}{2^{2^n}} \leq a_8 = \frac{C_9^{\lceil \frac{9}{2} \rceil}}{256} \leq \frac{1}{2}.$$

Осталось рассмотреть случаи $1 \leq n \leq 2$. Разобьем их на пять подслучаев.

1. При $|M| \leq 1$ доказываемое утверждение верно в силу леммы 3.2.1.

2. При $n = 1$ и $|M| = 2$ автомат V_{q_1} может реализовать ровно две функции $f(x) = x$ и $f(x) = \overline{x}$. Доля этих функций равна $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3. При $n = 2$ и $|M| = 2$ автомат V_{q_1} может реализовать только 9 различных булевых функций. Пусть $\{0,1\}^2 = \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$ и пусть $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2\} = M$, тогда $N = \{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\}$ и автомат V_{q_1} не может реализовать булевы функции, принимающие на наборах из $\{0,1\}^2$ значения

$$\begin{array}{c|cccc} \widetilde{\alpha}_1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \widetilde{\alpha}_2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \widetilde{\beta}_1 & * & 1 & 1 & 0 \\ \widetilde{\beta}_2 & * & 1 & 1 & 0 \end{array},$$

где на месте символа $*$ может стоять значение 0 или 1, и может реализовать остальные функции из $P_2(n)$. Для указанных булевых функций не выполнены соотношения из утверждения 3.2.3, следовательно, автомат V_{q_1} не может их реализовать. Для любой другой функции из $P_2(n)$ нетрудно указать последовательность подаваемых наборов C, такую, что автомат V_{q_1} с последовательностью наборов C реализует эту функцию.

4. При $n = 2$ и $|M| = 3$ автомат V_{q_1} может реализовать только 9 различных булевых функций. Пусть $\{0,1\}^2 = \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3, \widetilde{\beta}_1\}$ и пусть $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3\} = M$, тогда $N = \{\widetilde{\beta}_1\}$ и автомат V_{q_1} может реализовать только булевы функции, принимающие на наборах из $\{0,1\}^2$ значения

$$\begin{array}{c|ccccccccc} \widetilde{\alpha}_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \widetilde{\alpha}_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \widetilde{\alpha}_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \widetilde{\beta}_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array},$$

и не может реализовать остальные функции из $P_2(n)$ (рассуждения аналогичны пункту 3).

5. При $n = 2$ и $|M| = 4$ автомат V_{q_1} может реализовать только 4 различных булевых функции. Пусть $\{0,1\}^2 = \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3, \widetilde{\alpha}_4\}$ и пусть $\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3, \widetilde{\alpha}_4\} = M$, тогда $N = \emptyset$ и автомат V_{q_1} может реализовать только булевы функции, принимающие на наборах из $\{0,1\}^2$ значения

$$\begin{array}{c|cccc} \widetilde{\alpha}_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \widetilde{\alpha}_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \widetilde{\alpha}_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \widetilde{\alpha}_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array},$$

и не может реализовать остальные функции из $P_2(n)$ (рассуждения аналогичны пункту 3).

Утверждение доказано. ■

3.2.2 Верхняя оценка числа функций, реализуемых квазиуниверсальным автоматом из $\mathfrak{V}_2(n)$

Теорема 3.2.1. *Для любого $n \geq 1$ и для любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$ верно $|P(V_{q_1})| \leq \frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$.*

Доказательство этой теоремы разбивается на три случая, при доказательстве которых используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3.2.2. *Для любого $n \geq 1$ и любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$, такого, что $|N| \leq 1$ и $N \subseteq M$, верно $|P(V_{q_1})| \leq \frac{1}{2} \cdot |P_2(n)|$.*

Доказательство. Пусть $|N| = 0$ и пусть автомат V_{q_1} реализует булеву функцию f. В силу утверждения 3.2.3 выполнено неравенство $|M_f^0| \leq |N_f^1| + 1 \leq 1$. Если $M = \emptyset$ или $|M| = 1$, то доказываемое утверждение верно в силу леммы 3.2.1. Пусть $|M| \geq 2$. Поскольку мы считаем, что в начальном состоянии автомат V_{q_1} реализует константу 0, то равенство $|M_f^0| = 0$ невозможно при непустом M. Следовательно, $|M_f^0| = 1$. Рассмотрим возможные значения функции f на множестве всех наборов из M. Функция f принимает значение 0 ровно на одном наборе множества M, а на остальных наборах из M принимает значение 1, значит, таких функций не больше, чем $C_{|M|}^1 \cdot 2^{2^n - |M|}$. Следовательно, доля функций, которые может реализовать автомат V_{q_1}, не пре-

восходит

$$\frac{C^1_{|M|} \cdot 2^{2^n-|M|}}{2^{2^n}} = \frac{C^1_{|M|}}{2^{|M|}} = \frac{|M|}{2^{|M|}} \leq \frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство выполнено в силу неравенства $|M| \geq 2$ и монотонности функции $\frac{x}{2^x}$ при $x > \log_2 e$.

Пусть $|N| = 1$ и автомат V_{q_1} реализует булеву функцию f. Если $|M| \leq 1$, то доказываемое утверждение верно в силу леммы 3.2.1. Пусть $|M| \geq 2$. Напомним, что по условию леммы $N \subseteq M$. Рассмотрим значения функции f на множестве наборов из M. По утверждению 3.2.3 выполнено неравенство $|M^0_f| \leq |N^1_f| + 1 \leq 2$. Учитывая, что $|N| = 1$ и $N \subseteq M$ получаем, что возможны два подслучая.

a. Если функция f на единственном наборе множества N принимает значение 0, то на остальных наборах множества M функция f принимает значение 1, т. е. $|N^1_f| = 0, |M^0_f| = 1$.

b. Если функция f на единственном наборе множества N принимает значение 1, то, поскольку $M^0_f \neq \emptyset$, f принимает значение 0 на одном или двух наборах множества $M \backslash N$.

Функций, удовлетворяющих хотя бы одному из этих подслучаев, не больше, чем

$$(1 + C^1_{|M|-1} + C^2_{|M|-1}) \cdot 2^{2^n-|M|} = (1 + |M| - 1 + \frac{(|M|-1)(|M|-2)}{2}) \cdot 2^{2^n-|M|} =$$

$$(2 \cdot |M| + (|M|-1)(|M|-2)) \cdot 2^{2^n-|M|-1} = (2 \cdot |M| + |M|^2 - 3 \cdot |M| + 2) \cdot 2^{2^n-|M|-1} =$$

$$= (|M|^2 - |M| + 2) \cdot 2^{2^n-|M|-1}.$$

Доля таких функций не превосходит

$$\frac{(|M|^2 - |M| + 2) \cdot 2^{2^n-|M|-1}}{2^{2^n}} = \frac{|M|^2 - |M| + 2}{2^{|M|+1}} \leq \frac{1}{2},$$

последнее неравенство верно в силу того, что $|M| \geq 2$ и монотонности функции $\frac{x^2-x+2}{2^{x+1}}$ при $x > 3$. Лемма доказана. ■

Лемма 3.2.3. *Для любого $n \geq 1$ и любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$, такого, что $|N| \leq 1$, верно $|P(V_{q_1})| \leq \frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$.*

Доказательство. Если $N \subseteq M$, то утверждение леммы следует из леммы 3.2.2. Пусть теперь $N \nsubseteq M$ и автомат V_{q_1} реализует булеву функцию f. Рассмотрим значения функции f на множестве наборов из $M \cup N$. По утверждению 3.2.3 выполнено неравенство $|M_f^0| \leq |N_f^1| + 1 \leq 2$. Учитывая, что $|N| = 1$ и $N \cap M = \emptyset$ получаем, что возможны два подслучая.

a. Если функция f на единственном наборе множества N принимает значение 0, то $|N_f^1| = 0$ и $|M_f^0| = 1$.

b. Если функция f на единственном наборе множества N принимает значение 1, то она принимает значение 0 на одном или двух наборах множества M.

Функций, удовлетворяющих хотя бы одному из этих подслучаев, не больше, чем

$$(2 \cdot C_{|M|}^1 + C_{|M|}^2) \cdot 2^{2^n - |M \cup N|} = (2 \cdot |M| + \frac{|M|(|M|-1)}{2}) \cdot 2^{2^n - |M| - 1} =$$

$$= (4 \cdot |M| + |M|^2 - |M|) \cdot 2^{2^n - |M| - 2} = (|M|^2 + 3 \cdot |M|) \cdot 2^{2^n - |M| - 2}.$$

Доля таких функций не превосходит

$$\frac{(|M|^2 + 3 \cdot |M|) \cdot 2^{2^n - |M| - 2}}{2^{2^n}} = \frac{|M|^2 + 3|M|}{2^{|M|+2}} \leq \frac{5}{8}, \tag{3.1}$$

последнее неравенство верно в силу того, что $|M| \geq 2$ и монотонности функции $\frac{x^2+3x}{2^{x+2}}$ при $x \geq 2$. Лемма доказана. ■

Лемма 3.2.4. *Для любого $n \geq 1$ и любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$ такого, что $M \cap N = \emptyset$, выполнено $|P(V_{q_1})| \leq \frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$.*

Доказательство. Если $|M| \leq 1$, то доказываемое утверждение следует из леммы 3.2.1. Если $|N| \leq 1$, то утверждение следует из леммы 3.2.3. Поэтому

будем считать, что $|M| \geq 2$ и $|N| \geq 2$. Пусть автомат V_{q_1} реализует булеву функцию f. Тогда в силу утверждения 3.2.3 выполнено одно из равенств $|M_f^0| = |N_f^1|$ или $|M_f^0| = |N_f^1| + 1$. Пусть $|M_f^0| = k$, тогда выполнено одно из равенств $|N_f^1| = k$ или $|N_f^1| = k - 1$, $k \geq 1$. Поэтому количество различных функций, которые может реализовать автомат V_{q_1}, учитывая соотношение $M \cap N = \emptyset$, не превосходит

$$2^{2^n-|M|-|N|} \cdot \sum_{k=0}^{\min(|M|,|N|+1)} C_{|M|}^k \cdot (C_{|N|}^k + C_{|N|}^{k-1}) \leq$$

$$\leq 2^{2^n-|M|-|N|} \cdot \sum_{k=0}^{\min(|M|,|N|+1)} (C_{|M|}^k \cdot C_{|N|+1}^k) =$$

$$= 2^{2^n-|M|-|N|} \cdot \sum_{k=0}^{\min(|M|,|N|+1)} (C_{|M|}^k \cdot C_{|N|+1}^{|N|+1-k}) \leq 2^{2^n-|M|-|N|} \cdot C_{|M|+|N|+1}^{|N|+1}.$$

Последнее неравенство верно в силу свертки Вандермонда. Доля таких функций не превосходит

$$\frac{2^{2^n-|M|-|N|} \cdot C_{|M|+|N|+1}^{|N|+1}}{2^{2^n}} \leq \frac{C_{|M|+|N|+1}^{\lfloor \frac{|M|+|N|+1}{2} \rfloor}}{2^{|M|+|N|}} \leq \frac{5}{8}. \tag{3.2}$$

Последнее неравенство верно по утверждению 3.2.4 поскольку $|M| + |N| \geq 4$. Лемма доказана. ■

В дальнейшем будет использоваться следующий комбинаторный факт.

Утверждение 3.2.8. *Для любого $n \geq 1$ верны следующие равенства:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Лемма 3.2.5. *Для любого $n \geq 1$ и любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$, такого, что $M \subseteq N$ или $N \subseteq M$, выполнено $|P(V_{q_1})| \leq \frac{1}{2} \cdot |P_2(n)|$.*

Доказательство. Если $|M| \leq 1$, то доказываемое утверждение следует из леммы 3.2.1. Пусть верно $|M| \geq 2$. Тогда если $|N| = 1$, то верно включение

$N \subseteq M$, а значит, утверждение верно в силу леммы 3.2.2. Пусть $|M| \geq 2$ и $|N| \geq 2$. Рассмотрим два случая.

Пусть $|N| \leq |M|$, тогда $N \subseteq M$. Оценим количество различных функций f, которые может реализовать автомат V_{q_1}. Пусть $|N_f^1| = k$, тогда $|N_f^0| = |N| - k$ и $M_f^0 = N_f^0 \cup (M \backslash N)_f^0$, где через $(M \backslash N)_f^0$ обозначено множество наборов из $M \backslash N$, на которых функция f принимает значение 0. Поскольку в силу утверждения 3.2.3 выполнено одно из равенств $|M_f^0| = |N_f^1|$ или $|M_f^0| = |N_f^1| + 1$, то или $|(M \backslash N)_f^0| = |M_f^0| - |N_f^0| = k - (|N| - k) = 2k - |N|$, или $|(M \backslash N)_f^0| = |M_f^0| - |N_f^0| = k + 1 - (|N| - k) = 2k - |N| + 1$. Значит, число функций, которые может реализовать автомат V_{q_1} не больше, чем

$$2^{2^n - |M|} \cdot \sum_{k=0}^{|N|} C_{|N|}^k \cdot (C_{|M|-|N|}^{2k-|N|} + C_{|M|-|N|}^{2k-|N|+1}) \leq 2^{2^n - |M|} \cdot \sum_{k=0}^{|N|} (C_{|N|}^k \cdot C_{|M|-|N|+1}^{2k-|N|+1}) \leq$$

$$\leq 2^{2^n - |M|} \cdot C_{|N|}^{\lfloor \frac{|N|}{2} \rfloor} \cdot \sum_{k=0}^{|N|} C_{|M|-|N|+1}^{2k-|N|+1} \leq 2^{2^n - |M|} \cdot C_{|N|}^{\lfloor \frac{|N|}{2} \rfloor} \cdot 2^{|M|-|N|} = 2^{2^n - |N|} \cdot C_{|N|}^{\lfloor \frac{|N|}{2} \rfloor}.$$

Последнее неравенство верно в силу утверждения 3.2.8. Доля таких функций не превосходит

$$\frac{2^{2^n - |N|} \cdot C_{|N|}^{\lfloor \frac{|N|}{2} \rfloor}}{2^{2^n}} = \frac{C_{|N|}^{\lfloor \frac{|N|}{2} \rfloor}}{2^{|N|}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{|N|}^{\lfloor \frac{|N|}{2} \rfloor}}{2^{|N|-1}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{C_2^1}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Предпоследнее неравенство верно в силу утверждения 3.2.4 и неравенства $|N| \geq 2$.

Пусть теперь $|N| \geq |M|$, тогда $M \subseteq N$. Оценим количество различных функций, которые может реализовать автомат V_{q_1}. Пусть $|M_f^0| = k$, тогда $|M_f^1| = |M| - k$ и $N_f^1 = M_f^1 \cup (N \backslash M)_f^1$, где через $(N \backslash M)_f^1$ обозначено множество наборов из $N \backslash M$, на которых функция f принимает значение 1. Поскольку в силу утверждения 3.2.3 выполнено одно из равенств $|M_f^0| = |N_f^1|$ или $|M_f^0| = |N_f^1| + 1$, то или $|(N \backslash M)_f^1| = |N_f^1| - |M_f^1| = k - (|M| - k) = 2k - |M|$, или $|(N \backslash M)_f^1| = |N_f^1| - |M_f^1| = k - 1 - (|M| - k) = 2k - |M| - 1$. Значит, число

функций, которые может реализовать автомат V_{q_1}, не больше, чем

$$2^{2^n-|N|}\cdot\sum_{k=0}^{|M|}C_{|M|}^{k}\cdot(C_{|N|-|M|}^{2k-|M|}+C_{|N|-|M|}^{2k-|M|-1})\le 2^{2^n-|N|}\cdot\sum_{k=0}^{|M|}(C_{|M|}^{k}\cdot C_{|N|-|M|+1}^{2k-|M|})\le$$

$$\le 2^{2^n-|N|}\cdot C_{|M|}^{\lfloor\frac{|M|}{2}\rfloor}\cdot\sum_{k=0}^{|M|}C_{|N|-|M|+1}^{2k-|M|}\le 2^{2^n-|N|}\cdot C_{|M|}^{\lfloor\frac{|M|}{2}\rfloor}\cdot 2^{|N|-|M|}=2^{2^n-|M|}\cdot C_{|M|}^{\lfloor\frac{|M|}{2}\rfloor}.$$

Последнее неравенство верно в силу утверждения 3.2.8. Доля таких функций не превосходит

$$\frac{2^{2^n-|M|}\cdot C_{|M|}^{\lfloor\frac{|M|}{2}\rfloor}}{2^{2^n}}=\frac{C_{|M|}^{\lfloor\frac{|M|}{2}\rfloor}}{2^{|M|}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{|M|}^{\lfloor\frac{|M|}{2}\rfloor}}{2^{|M|-1}}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{C_2^1}{2}\le\frac{1}{2}.$$

Предпоследнее неравенство верно в силу утверждения 3.2.4 и неравенства $|M|\ge 2$. Лемма доказана. ■

Лемма 3.2.6. *Для любого $n\ge 1$ и любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$, такого, что $M\cap N\ne\emptyset$, $M\backslash N\ne\emptyset$ и $N\backslash M\ne\emptyset$, выполнено $|P(V_{q_1})|\le\frac{1}{2}\cdot|P_2(n)|$.*

Доказательство. Заметим, что неравенства $|M|\le 1$ или $|N|\le 1$ невозможны в силу условий $M\cap N\ne\emptyset$, $M\backslash N\ne\emptyset$ и $N\backslash M\ne\emptyset$. Значит, выполнены неравенства $|M|\ge 2$ и $|N|\ge 2$. Пусть автомат V_{q_1} реализует некоторую булеву функцию f. Из условия леммы следует, что $N_f^1=(N\backslash M)_f^1\cup(M\cap N)_f^1$. Отсюда в силу утверждения 3.2.3 выполнено одно из равенств: $|(N\backslash M)_f^1|=|M_f^0|-|(M\cap N)_f^1|$ или $|(N\backslash M)_f^1|=|M_f^0|-|(M\cap N)_f^1|-1$. Обозначим через k количество наборов множества $(M\cap N)_f^0$, а через r — количество наборов множества $(M\backslash N)_f^0$. Тогда верно одно из равенств

$$|(N\backslash M)_f^1|=|M_f^0|-|(M\cap N)_f^1|=|(M\backslash N)_f^0|+|(M\cap N)_f^0|-|(M\cap N)_f^1|=$$

$$=r+k-(|M\cap N|-k)=2\cdot k+r-|M\cap N|$$

или

$$|(N\backslash M)_f^1|=|M_f^0|-|(M\cap N)_f^1|-1=|(M\backslash N)_f^0|+|(M\cap N)_f^0|-|(M\cap N)_f^1|-1=$$

$$= r + k - (|M \cap N| - k) - 1 = 2 \cdot k + r - |M \cap N| - 1.$$

Поэтому количество различных функций, которые может реализовать автомат V_{q_1}, не больше, чем

$$2^{2^n - |M \cup N|} \cdot \sum_{k=0}^{|M \cap N|} (C_{|M \cap N|}^k \cdot \sum_{r=0}^{|M \setminus N|} (C_{|M \setminus N|}^r \cdot (C_{|N \setminus M|}^{2k+r-|M \cap N|} + C_{|N \setminus M|}^{2k+r-|M \cap N|-1}))) \leq$$

$$\leq 2^{2^n - |M \cup N|} \cdot \sum_{k=0}^{|M \cap N|} (C_{|M \cap N|}^k \cdot \sum_{r=0}^{|M \setminus N|} (C_{|M \setminus N|}^r \cdot C_{|N \setminus M|+1}^{2k+r-|M \cap N|})) =$$

$$= 2^{2^n - |M \cup N|} \cdot \sum_{k=0}^{|M \cap N|} (C_{|M \cap N|}^k \cdot \sum_{r=0}^{|M \setminus N|} (C_{|M \setminus N|}^r \cdot C_{|N \setminus M|+1}^{|N \setminus M|+1-2k-r+|M \cap N|})) =$$

$$= 2^{2^n - |M \cup N|} \cdot \sum_{k=0}^{|M \cap N|} (C_{|M \cap N|}^k \cdot \sum_{r=0}^{|M \setminus N|} (C_{|M \setminus N|}^r \cdot C_{|N \setminus M|+1}^{|N|-2k-r+1})) =$$

$$= 2^{2^n - |M \cup N|} \cdot \sum_{k=0}^{|M \cap N|} (C_{|M \cap N|}^k \cdot C_{|M \setminus N|+|N \setminus M|+1}^{|N|-2k+1}) =$$

$$= 2^{2^n - |M \cup N|} \cdot \sum_{k=0}^{|M \cap N|} (C_{|M \cap N|}^k \cdot C_{|M \triangle N|+1}^{|N|-2k+1}) \leq$$

$$\leq 2^{2^n - |M \cup N|} \cdot C_{|M \cap N|}^{\lfloor \frac{|M \cap N|}{2} \rfloor} \cdot \sum_{k=0}^{|M \cap N|} C_{|M \triangle N|+1}^{|N|-2k+1} \leq$$

$$\leq 2^{2^n - |M \cup N|} \cdot C_{|M \cap N|}^{\lfloor \frac{|M \cap N|}{2} \rfloor} \cdot 2^{|M \triangle N|} = 2^{2^n + |M \triangle N| - |M \cup N|} \cdot C_{|M \cap N|}^{\lfloor \frac{|M \cap N|}{2} \rfloor} = 2^{2^n - |M \cap N|} \cdot C_{|M \cap N|}^{\lfloor \frac{|M \cap N|}{2} \rfloor}.$$

Последнее неравенство верно в силу утверждения 3.2.8. Доля таких функций не превосходит

$$\frac{2^{2^n - |M \cap N|} \cdot C_{|M \cap N|}^{\lfloor \frac{|M \cap N|}{2} \rfloor}}{2^{2^n}} = \frac{C_{|M \cap N|}^{\lfloor \frac{|M \cap N|}{2} \rfloor}}{2^{|M \cap N|}} \leq \frac{C_1^0}{2^1} \leq \frac{1}{2}.$$

Предпоследнее неравенство верно в силу утверждения 3.2.4 и неравенства $|M \cap N| \geq 1$. Лемма доказана. ■

Доказательство теоремы 3.2.1. Пусть V_{q_1} — произвольный автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$. Доказательство теоремы разбивается на три случая. Если $M \cap N = \emptyset$,

то утверждение теоремы следует из леммы 3.2.4. Если $M \subseteq N$ или $N \subseteq M$, то утверждение теоремы следует из леммы 3.2.5. Если $M \cap N \neq \emptyset$, $M \backslash N \neq \emptyset$ и $N \backslash M \neq \emptyset$, то утверждение теоремы следует из леммы 3.2.6. Теорема доказана. ■

Из лемм 3.2.5 и 3.2.6 можно вывести следующее утверждение.

Замечание 3.2.1. *Для любого $n \geq 1$ и любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$, для которого выполнено хотя бы одно из условий $M \cap N \neq \emptyset$ или $M = \emptyset$, или $N = \emptyset$, верно $|P(V_{q_1})| \leq \frac{1}{2} \cdot |P_2(n)|$.*

3.2.3 Условия квазиуниверсальности автомата из $\mathfrak{V}_2(n)$

Напомним, что автоматы из $\mathfrak{V}_2(n)$, которые реализуют максимальное по мощности множество булевых функций, называются квазиуниверсальными. Покажем, что верхняя оценка для числа функций, реализуемых автоматом из $\mathfrak{V}_2(n)$, доказанная в теореме 3.2.1, достигается, и опишем множество функций, которые не может реализовать квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$.

Пусть $n \geq 2$ и V_{q_1} — автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$, определяемый множествами M и N, такими, что $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \emptyset$. Обозначим через $\mathfrak{A}_1(V_{q_1})$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на всех трех наборах множества $M \cup N$, через $\mathfrak{A}_2(V_{q_1})$ — множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 1 на обоих наборах множества M, а через $\mathfrak{A}(V_{q_1})$ множество $\mathfrak{A}_1(V_{q_1}) \cup \mathfrak{A}_2(V_{q_1})$. Заметим, что $|\mathfrak{A}(V_{q_1})| = \frac{3}{8} \cdot 2^{2^n}$. Обозначим через $\overline{P(V_{q_1})}$ множество всех функций из $P_2(n)$, которые не могут быть реализованы автоматом V_{q_1}. Верна следующая теорема.

Утверждение 3.2.9. *Для любого $n \geq 2$ и автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$, такого, что $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \emptyset$ выполнено $\overline{P(V_{q_1})} = \mathfrak{A}(V_{q_1})$.*

Доказательство. Рассмотрим инициальный автомат V_{q_1} с двумя состояниями, который имеет функцию выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в состоянии q_1 и функ-

цию выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в состоянии q_2, определяемый следующими множествами: $M = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$ и $N = \{\widetilde{\gamma}\}$, где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ — различные наборы из $\{0,1\}^n$. Пусть дана некоторая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Имеется восемь вариантов распределения значений f на наборах $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$. Если автомат V_{q_1} реализует функцию f, то должны выполняться условия:

1. $|M_f^0| \neq 0$, следовательно, случай $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = 1$ невозможен;
2. $|M_f^0| = |N_f^1|$ или $|M_f^0| = |N_f^1| + 1$, следовательно, случай $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\gamma}) = 0$ невозможен.

Для каждого из остальных 5 вариантов значений f на наборах $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ построим последовательность подаваемых наборов C так, что автомат V_{q_1} с последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию f. Отсюда будет следовать искомое равенство $\overline{P(V_{q_1})} = \mathfrak{A}(V_{q_1})$.

1. Пусть выполнены равенства $f(\widetilde{\alpha}) = 0, f(\widetilde{\beta}) = 0, f(\widetilde{\gamma}) = 1$. Построим последовательность C подаваемых наборов следующим образом: сначала запишем в некотором порядке все наборы из множества $(\{0,1\}^n)_f^0 \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, затем набор $\widetilde{\alpha}$, потом все наборы из множества $(\{0,1\}^n)_f^1 \backslash \{\widetilde{\gamma}\}$, далее набор $\widetilde{\gamma}$, затем набор $\widetilde{\beta}$. Автомат V_{q_1} с последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию f.
2. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 0, f(\widetilde{\beta}) = 1, f(\widetilde{\gamma}) = 0$. Построим последовательность C следующим образом: сначала запишем в некотором порядке все наборы из множества $(\{0,1\}^n)_f^0 \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, затем набор $\widetilde{\alpha}$, потом все наборы из множества $(\{0,1\}^n)_f^1$. Автомат V_{q_1} с последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию f.
3. Случай $f(\widetilde{\alpha}) = 1, f(\widetilde{\beta}) = 0, f(\widetilde{\gamma}) = 0$ рассматривается аналогично случаю 2.

4. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 0, f(\widetilde{\beta}) = 1, f(\widetilde{\gamma}) = 1$. Построим последовательность C следующим образом: сначала запишем в некотором порядке все наборы из множества $(\{0,1\}^n)^0_f \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, затем набор $\widetilde{\alpha}$, потом все наборы из множества $(\{0,1\}^n)^1_f \backslash \{\widetilde{\gamma}\}$, далее набор $\widetilde{\gamma}$. Автомат V_{q_1} с последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию f.

5. Случай $f(\widetilde{\alpha}) = 1, f(\widetilde{\beta}) = 0, f(\widetilde{\gamma}) = 1$ рассматривается аналогично случаю 4.

Утверждение доказано. ■

Из утверждения 3.2.9 можно извлечь сформулированное ниже следствие.

Следствие 3.2.3. *Для любого $n \geq 2$ и любого автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$, такого, что $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \emptyset$, выполнено $|P(V_{q_1})| = \frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$.*

В силу теоремы 3.2.1 и следствия 3.2.3 автомат V из $\mathfrak{V}_2(n)$ является квазиуниверсальным тогда и только тогда, когда $|P(V)| = \frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$. Опишем все квазиуниверсальные автоматы.

Теорема 3.2.2. *Пусть V_{q_1} — автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$, где $n \geq 2$. Тогда равенство $|P(V_{q_1})| = \frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$ достигается в том и только том случае, когда $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть для автомата V_{q_1} справедливо $|P(V_{q_1})| = \frac{5}{8} \cdot 2^{2^n}$. Тогда в силу замечания 3.2.1 можно рассматривать только случай $M \cap N = \emptyset$ и $M \neq \emptyset$, и $N \neq \emptyset$. Разобьем этот случай на несколько подслучаев.

1. Пусть $|M| = 1$. В этом случае равенство $|P(V_{q_1})| = \frac{5}{8} \cdot 2^{2^n}$ не достигается в силу леммы 3.2.1.

2. Пусть $|M| = 2$ и $|N| = 1$. Из следствия 3.2.3 следует, что такой автомат реализует ровно $\frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$ функций, при $n \geq 2$.

3. Пусть $|M| \geq 3$ и $|N| = 1$. В силу соотношения (3.1) из доказательства леммы 3.2.3 верно, что доля функций, реализуемых автоматом V_{q_1}, не превосходит

$$\frac{|M|^2 + 3|M|}{2^{|M|+2}}.$$

Эта величина в силу монотонности и неравенства $|M| \geq 3$ не превосходит $\frac{9}{16}$.

4. Пусть $|N| = 2$ и $|M| \geq 2$. В силу соотношения (3.2) из доказательства леммы 3.2.4 верно, что доля функций, реализуемых автоматом V_{q_1}, не превышает

$$\frac{2^{2^n-|M|-|N|} \cdot C_{|M|+|N|+1}^{|N|+1}}{2^{2^n}}.$$

Рассмотрим эту величину:

$$\frac{2^{2^n-|M|-|N|} \cdot C_{|M|+|N|+1}^{|N|+1}}{2^{2^n}} = \frac{C_{|M|+|N|+1}^{|N|+1}}{2^{|M|+|N|}} = \frac{C_{|M|+3}^{3}}{2^{|M|+2}} =$$

$$= \frac{(|M|+3)(|M|+2)(|M|+1)}{6 \cdot 2^{|M|+2}}.$$

Равенство $\frac{(|M|+3)(|M|+2)(|M|+1)}{6 \cdot 2^{|M|+2}} = \frac{5}{8}$ достигается только при $|M| = 2$ и $|M| = 3$. Рассмотрим эти случаи подробнее. Пусть f — некоторая функция, реализуемая автоматом V_{q_1}. Тогда в силу утверждения 3.2.3 верно одно из равенств $|M_f^0| = |N_f^1|$ или $|M_f^0| = |N_f^1| + 1$. Кроме того, при $M \neq \emptyset$ верно $|M_f^0| > 0$.

а) Пусть $|N| = 2$ и $|M| = 2$. Если $|N_f^1| = 0$, то $|M_f^0| = 1$. Если $|N_f^1| = 1$, то $|M_f^0| = 1$ или $|M_f^0| = 2$. Если $|N_f^1| = 2$, то $|M_f^0| = 2$ или $|M_f^0| = 3$. Поскольку верно равенство $|M| = 2$, то равенство $|M_f^0| = 3$ невозможно. Таким образом, количество функций, которые может реализовать автомат V_{q_1}, не превосходит

$$2^{2^n-4} \cdot (C_2^1 + C_2^1 \cdot (C_2^1 + C_2^2) + C_2^2 \cdot C_2^2) = 2^{2^n-4} \cdot (2 + 2 \cdot 3 + 1) = 2^{2^n-4} \cdot 9.$$

Доля таких функций не больше, чем

$$\frac{2^{2^n-4}\cdot 9}{2^{2^n}} = \frac{9}{2^4} = \frac{9}{16} < \frac{5}{8}.$$

b) Пусть $|N| = 2$ и $|M| = 3$. Если $|N_f^1| = 0$, то $|M_f^0| = 1$. Если $|N_f^1| = 1$, то $|M_f^0| = 1$ или $|M_f^0| = 2$. Если $|N_f^1| = 2$, то $|M_f^0| = 2$ или $|M_f^0| = 3$. Таким образом, количество функций, которые может реализовать автомат V_{q_1}, не превосходит

$$2^{2^n-5}\cdot(C_3^1+C_2^1\cdot(C_3^1+C_3^2)+C_2^2\cdot(C_3^2+C_3^3)) = 2^{2^n-5}\cdot(3+2\cdot 6+4) = 2^{2^n-5}\cdot 19.$$

Доля таких функций не больше, чем

$$\frac{2^{2^n-5}\cdot 19}{2^{2^n}} = \frac{19}{2^5} = \frac{19}{32} < \frac{5}{8}.$$

5. Пусть $|N| = 3$ и $|M| \geq 2$. В силу соотношения (3.2) из доказательства леммы 3.2.4 верно, что доля функций, реализуемых автоматом V_{q_1}, не превышает

$$\frac{2^{2^n-|M|-|N|}\cdot C_{|M|+|N|+1}^{|N|+1}}{2^{2^n}}.$$

Рассмотрим эту величину. Нетрудно проверить, что равенство

$$\frac{C_{|M|+|N|+1}^{|N|+1}}{2^{|M|+|N|}} = \frac{C_{|M|+4}^4}{2^{|M|+3}} = \frac{(|M|+4)(|M|+3)(|M|+2)(|M|+1)}{24\cdot 2^{|M|+3}} = \frac{5}{8}$$

не достигается ни при каких целых значениях $|M|$.

6. Пусть $|N| \geq 4$ и $|M| \geq 2$. В силу соотношения (3.2) из доказательства леммы 3.2.4 верно, что доля функций, реализуемых автоматом V_{q_1}, не превышает

$$\frac{2^{2^n-|M|-|N|}\cdot C_{|M|+|N|+1}^{|N|+1}}{2^{2^n}}.$$

Используя утверждение 3.2.4 и неравенство $|M \cup N| \geq 6$, оценим эту величину:

$$\frac{C_{|M|+|N|+1}^{|N|+1}}{2^{|M|+|N|}} \leq \frac{C_{|M|+|N|+1}^{\lfloor\frac{|M|+|N|+1}{2}\rfloor}}{2^{|M|+|N|}} \leq \frac{C_7^3}{2^6} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 2^6} = \frac{35}{64} < \frac{5}{8}.$$

В обратную сторону утверждение теоремы следует из следствия 3.2.3. Теорема доказана. ■

Из теорем 3.2.1 и 3.2.2 можно получить сформулированное ниже следствие.

Следствие 3.2.4. *Для любого* $n \geq 2$ *максимальная мощность множества* $P(V_{q_1})$ *для автомата* V_{q_1} *из* $\mathfrak{V}_2(n)$ *равна* $\frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$.

Из теоремы 3.2.2 и утверждения 3.2.9 можно извлечь сформулированное ниже следствие.

Следствие 3.2.5. *Для любого* $n \geq 2$ *и автомата* V_{q_1} *из* $\mathfrak{V}_2(n)$, *такого, что* $|P(V_{q_1})| = \frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$ *выполнено* $\overline{P(V_{q_1})} = \mathfrak{A}(V_{q_1})$.

Из теорем 3.2.1 и 3.2.2 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 3.2.3. *При* $n \geq 2$ *автомат* V *из* $\mathfrak{V}_2(n)$ *является квазиуниверсальным тогда и только тогда, когда* $|M| = 2$, $|N| = 1$ *и* $M \cap N = \emptyset$.

3.3 Булев автомат с тремя константными состояниями

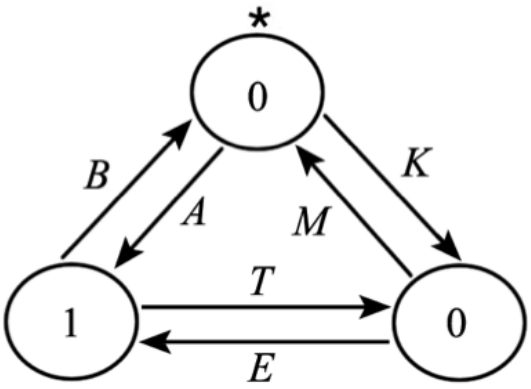


рис. 1

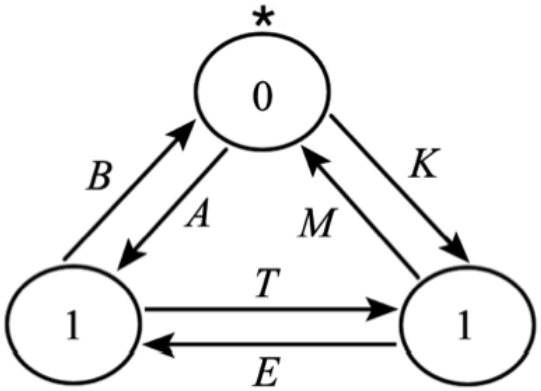


рис. 2

В данном параграфе рассматриваются инициальные булевы автоматы с тремя константными состояниями. Напомним, что под 0-состоянием иници-

ального булевого автомата V с константными состояниями понимается состояние с функцией выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а под 1-состоянием — состояние с функцией выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Без существенного ограничения общности мы будем рассматривать инициальные булевы автоматы, содержащие хотя бы одно 0-состояние и хотя бы одно 1-состояние, при этом начальным состоянием является 0-состояние. Множество всех таких автоматов с n входами будем обозначать через $\mathfrak{V}_3(n)$. Рассматриваемые автоматы очевидным образом разбиваются на два подмножества: множество всех инициальных булевых автоматов с тремя константными состояниями и n входами, содержащих ровно одно 1-состояние, обозначаемое через $\mathfrak{V}_3^0(n)$, $n \geq 1$, и множество всех инициальных булевых автоматов с тремя константными состояниями и n входами, содержащих ровно одно 0-состояние, являющееся начальным, обозначаемое через $\mathfrak{V}_3^1(n)$, $n \geq 1$. Автоматы из множеств $\mathfrak{V}_3^0(n)$ и $\mathfrak{V}_3^1(n)$ можно схематично изобразить с помощью диаграмм, изображенных на рис. 1 и рис. 2, где $A, B, K, M, T, E \subseteq \{0,1\}^n$. В кружочках, обозначающих состояния, написаны символы, соответствующие функции выхода в этом состоянии, а на стрелках — множества всех наборов, при подаче которых на вход автомата автомат из состояния, из которого идет стрелка, переходит в состояние, на которое указывает стрелка. Звездочкой помечено начальное состояние автомата.

3.3.1 Примеры и оценка снизу

Утверждение 3.3.1. *Для любого $n \geq 1$ существует инициальный булев автомат V с тремя константными состояниями, такой, что $|P(V)| = 2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^{n-1}} + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = B = M = T = \emptyset$, K и E, такими, что $K \cap E = \emptyset$ и $|K| = |E| = 2^{n-1}$ и $K \cup E = \{0,1\}^n$. Такой автомат V не может реализовать функцию f из $P_2(n)$, такую, что f принимает значение 1 на всех наборах множества K или принима-

ет значение 1 на всех наборах множества E. Докажем, что все другие функции из $P_2(n)$ реализуются данным автоматом. Пусть дана функция $f \in P_2(n)$, такая, что существует набор $\widetilde{\varkappa} \in K$, такой, что $f(\widetilde{\varkappa}) = 0$ и набор $\widetilde{\varepsilon} \in E$, такой, что $f(\widetilde{\varepsilon}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем все наборы из множества E, на которых функция f принимает значение 0, затем набор $\widetilde{\varkappa}$, потом все наборы из множества K, на которых функция f принимает значение 0, далее набор $\widetilde{\varepsilon}$ и, наконец, все наборы из множества $K \cup E$, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f. Оценим количество функций, которые не могут быть реализованы автоматом V:

$$2^{2^n} \cdot (\frac{1}{2^{|K|}} + \frac{1}{2^{|E|}} - \frac{1}{2^{|K \cup E|}}) = 2^{2^n} \cdot (\frac{1}{2^{2^{n-1}}} + \frac{1}{2^{2^{n-1}}} - \frac{1}{2^{2^n}}) = 2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}} - 1 = 2 \cdot 2^{2^{n-1}} - 1.$$

Значит, автомат V может реализовать $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^{n-1}} + 1$ различных булевых функций от n переменных. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.3.2. *Для любого $n \geq 1$ существует инициальный булев автомат V с тремя константными состояниями, такой, что $|P(V)| = 2^{2^n} - \frac{3}{2} \cdot 2^{2^{n-1}} + 2^{n-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $B = M = \emptyset$, $T = E = \{\widetilde{\beta}\}$, A и K, такими, что $A \cap K = \emptyset$, $\widetilde{\beta} \notin A, K$ и $|A| = 2^{n-1}$, $|K| = 2^{n-1} - 1$ и $A \cup K \cup E = \{0,1\}^n$, где $\widetilde{\beta}$ — некоторый двоичный набор длины n. Такой автомат V не может реализовать функцию f из $P_2(n)$, такую, что f принимает значение 1 на всех наборах множества A и значение 1 на наборе $\widetilde{\beta}$ или f принимает значение 1 на всех наборах множества K и значение 0 на наборе $\widetilde{\beta}$ и хотя бы на двух наборах множества A, или f принимает значение 1 на всех наборах множества $A \cup K$. Докажем, что все другие функции из $P_2(n)$ реализуются данным автоматом. Пусть дана функция $f \in P_2(n)$, такая, что $f(\widetilde{\beta}) = 0$. Тогда возможны два случая. Пусть существует набор $\widetilde{\varkappa} \in K$, такой, что $f(\widetilde{\varkappa}) = 0$. Тогда определим последовательность подаваемых

наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\varkappa}$, затем все наборы из множества $A \cup K$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\beta}$ и, наконец, все наборы из множества $A \cup K$, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f. Пусть теперь $f(\widetilde{\beta}) = 0$, $|K_f^0| = 0$ и $|A_f^0| = 1$. Тогда определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\beta}$, затем тот набор из множества A, на котором функция f принимает значение 0, и, наконец, все остальные наборы. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f. Теперь пусть дана $f \in P_2(n)$, такая, что $f(\widetilde{\beta}) = 1$, тогда по предположению существует набор $\widetilde{\alpha} \in A$, такой, что $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Тогда определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $A \cup K$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\beta}$ и, наконец, все наборы из множества $A \cup K$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f. Оценим количество функций, которые не могут быть реализованы автоматом V:

$$2^{2^n} \cdot \left(\frac{1}{2^{|A|+1}} + \frac{2^{|A|} - |A|}{2^{|A|+|K|+1}}\right) = 2^{2^n} \cdot \left(\frac{1}{2^{2^{n-1}+1}} + \frac{2^{2^{n-1}} - 2^{n-1}}{2^{2^n}}\right) =$$

$$= 2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^{n-1}} - 2^{n-1} = \frac{3}{2} \cdot 2^{2^{n-1}} - 2^{n-1}.$$

Значит, автомат V может реализовать $2^{2^n} - \frac{3}{2} \cdot 2^{2^{n-1}} + 2^{n-1}$ различных булевых функций от n переменных. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.3.3. *Для любого $n \geq 2$ существует инициальный булев автомат V с тремя константными состояниями, такой, что $|P(V)| = 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} - 1$.*

Доказательство. Рассмотрим инициальный автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = B = M = T = \emptyset$, K и E, такими, что $K \cap E = \{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2\}$, где $\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2$ — некоторые двоичные наборы длины n,

$|K| = |E| = 2^{n-1} + 1$ и $K \cup E = \{0,1\}^n$. Такой автомат V не может реализовать функцию f из $P_2(n)$, такую, что f принимает значение 1 на всех наборах множества K или принимает значение 1 на всех наборах множества E, а также если она принимает значение 1 на всех наборах длины n, кроме одного набора $\widetilde{\varkappa}_i$, где $i \in \{1,2\}$. Докажем, что все другие функции из $P_2(n)$ реализуются данным автоматом.

Пусть дана функция $f \in P_2(n)$, такая, что $f(\widetilde{\varkappa}_1) = f(\widetilde{\varkappa}_2) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем все наборы из множества $E\backslash\{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2\}$, на которых функция f принимает значение 0, затем набор $\widetilde{\varkappa}_1$, потом все наборы из множества $K\backslash\{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2\}$, на которых функция f принимает значение 0, далее набор $\widetilde{\varkappa}_2$ и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f.

Пусть дана функция $f \in P_2(n)$, такая, что $f(\widetilde{\varkappa}_i) = 0$ и $f(\widetilde{\varkappa}_j) = 1$, где $i, j \in \{1,2\}, i \neq j$. В этом случае существует набор $\widetilde{\varkappa} \in K\backslash\{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2\}$, такой, что $f(\widetilde{\varkappa}) = 0$ или набор $\widetilde{\varepsilon} \in E\backslash\{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2\}$, такой, что $f(\widetilde{\varepsilon}) = 0$. Данные случаи рассматриваются аналогично, рассмотрим один из них. Для определенности будем считать, что существует набор $\widetilde{\varkappa} \in K\backslash\{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2\}$, такой, что $f(\widetilde{\varkappa}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем все наборы из множества $E\backslash\{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2\}$, на которых функция f принимает значение 0, затем набор $\widetilde{\varkappa}$, потом все наборы из множества $K\backslash\{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2, \widetilde{\varkappa}\}$, на которых функция f принимает значение 0, далее набор $\widetilde{\varkappa}_i$ и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f.

Пусть дана функция $f \in P_2(n)$, такая, что $f(\widetilde{\varkappa}_1) = f(\widetilde{\varkappa}_2) = 1$. В этом случае существует набор $\widetilde{\varkappa} \in K\backslash\{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2\}$, такой, что $f(\widetilde{\varkappa}) = 0$ и набор $\widetilde{\varepsilon} \in E\backslash\{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2\}$, такой, что $f(\widetilde{\varepsilon}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем все наборы из множества $E\backslash\{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2, \widetilde{\varepsilon}\}$, на которых функция f принимает значение 0, затем набор $\widetilde{\varkappa}$, по-

том все наборы из множества $K\backslash\{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2, \widetilde{\varkappa}\}$, на которых функция f принимает значение 0, далее набор $\widetilde{\varepsilon}$ и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f.

Оценим количество функций, которые не могут быть реализованы автоматом V:

$$2^{2^n} \cdot (\frac{1}{2^{|K|}} + \frac{1}{2^{|E|}} - \frac{1}{2^{|K \cup E|}}) + 2 = 2^{2^n} \cdot (\frac{1}{2^{2^{n-1}+1}} + \frac{1}{2^{2^{n-1}+1}} - \frac{1}{2^{2^n}}) + 2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}} + 1 = 2^{2^{n-1}} + 1.$$

Значит, автомат V может реализовать $2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} - 1$ различных булевых функций от n переменных. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.3.4. *Для любого $n \geq 2$ существует инициальный булев автомат V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$, такой, что $|P(V)| = 2^{2^n} - 2^n$.*

Доказательство. Рассмотрим инициальный автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $K = T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = E = \{\widetilde{\beta}\}$, $A = \{0,1\}^n\backslash\{\widetilde{\alpha}\}$, $M = \emptyset$, где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ — некоторые различные двоичные наборы длины n, $n \geq 2$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из $P_2(n)$, $n \geq 2$. Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n\backslash\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\beta}$, и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-2} функций, удовлетворяющих случаю 1.

2. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, $f(\widetilde{\beta}) = 1$. Если на всех наборах множества $\{0,1\}^n\backslash\{\widetilde{\alpha}\}$ функция f принимает значение 1, то автомат V не может реализовать f.

Пусть теперь $\widetilde{\gamma}$ — набор из множества A, на котором функция f принимает значение 0. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\gamma}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\beta}$, далее набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f. Таким образом, автомат V реализует $2^{2^n-2}-1$ функций, удовлетворяющих случаю 2.

3. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, $f(\widetilde{\beta}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\beta}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-2} функций, удовлетворяющих случаю 3.

4. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = 1$. Если функция f принимает значение 0 меньше, чем на 2 наборах множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, то автомат V не может реализовать f. Пусть теперь $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ — различные наборы из множества A, на которых функция f принимает значение 0. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\gamma}_1$, далее набор $\widetilde{\beta}$, затем набор $\widetilde{\gamma}_2$, потом все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, далее набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f. Таким образом, автомат V реализует $2^{2^n-2} - 1 - (2^n - 2) = 2^{2^n-2} - 2^n + 1$ функций, удовлетворяющих случаю 4.

Суммируя количество функций из каждого случая, которые может реализовать автомат V, получаем, что V может реализовать ровно $2^{2^n} - 2^n$ различных булевых функций от n переменных, $n \geq 2$. Утверждение доказано. ■

Таким образом, построенный в утверждении 3.3.4 пример автомата показывает, что в отличие от случая инициальных автоматов с двумя состояниями, среди инициальных булевых автоматов с тремя константными состояниями существуют автоматы с n входами, доля функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, реализуемых которыми, стремится к 1 с ростом n.

3.3.2 Оценка сверху, первый случай

Далее рассматриваются инициальные булевы автоматы из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$, $n \geq 1$. Напомним, что такие автоматы можно схематично представить в виде диаграммы, изображенной на рис. 1.

Можно доказать следующую оценку сверху на мощность множества функций, реализуемых инициальным булевым автоматом из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$.

Теорема 3.3.1. *Для любого $n \geq 6$ и любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ верно $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^n$.*

В отличие от случая для инициального булева автомата с двумя константными состояниями, для автомата с тремя состояниями максимальная мощность множества реализуемых автоматом функций не может достигаться для любого n при фиксированной мощности множеств A, B, K, M, T, E. В частности, верно следующее утверждение.

Утверждение 3.3.5. *Для любого $n \geq 1$ и автомата V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ верно $|P(V)| \leq \max\left(1, 2^{2^n} - \max\left(2^{2^n - |A \cup K|}, 2^{2^n - |A \cup E|}\right)\right)$.*

Доказательство. Пусть верно одно из равенств $A \cup E = \emptyset$ или $A \cup K = \emptyset$. В этом случае автомат V может реализовать только константу 0, а значит

выполнено

$$|P(V)| = 1 \leq \max\left(1, 2^{2^n} - \max\left(2^{2^n-|A\cup K|}, 2^{2^n-|A\cup E|}\right)\right).$$

Пусть теперь $A \cup E \neq \emptyset$ или $A \cup K \neq \emptyset$. Тогда автомат V не может реализовать функцию $f \in P_2(n)$, которая принимает значение 1 на всех наборах множества $A \cup K$ или принимает значение 1 на всех наборах множества $A \cup E$, следовательно, доказываемое неравенство верно. ■

Следствие 3.3.1. *Если $n \geq 1$ и автомат V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ таков, что $|A \cup K| \leq 2^n - n - 1$ или $|A \cup E| \leq 2^n - n - 1$, то $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$.*

Утверждение 3.3.6. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ и любой реализуемой им булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполнено*[1] $|(A \cap E)_f^0| - 1 \leq |(B \cup T)_f^1| \leq |(A \cup E)_f^0|$.

Доказательство. Пусть $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ — последовательность всех двоичных наборов длины n, такая, что автомат V с последовательностью C реализует f. Тогда при последовательной подаче наборов последовательности C на входы автомата V, автомат V перейдет из 1-состояния в одно из 0-состояний ровно $|(B \cup T)_f^1|$ раз, а из 0-состояний в 1-состояние не больше, чем $|(A \cup E)_f^0|$ раз. Кроме того, автомат V перейдет из 0-состояний в 1-состояние не меньше, чем $|(A \cap E)_f^0|$ раз. Число переходов из 0-состояний в 1-состояние либо совпадает с числом переходов из 1-состояния в 0-состояния, либо на единицу больше этого числа, что и завершает доказательство. ■

Утверждение 3.3.7. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ выполнено $|P(V)| \leq \max\left(1, 2^{2^n} - 2^{|K\cap M|}\right)$.*

Доказательство. Пусть $A \cup E = \emptyset$. Тогда автомат V может реализовать только функцию, тождественно равную 0. Следовательно, доказываемое неравенство верно. Пусть теперь $A \cup E \neq \emptyset$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество

[1] обозначения D_f^0 и D_f^1 см. на стр. 88.

всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 1 на всех наборах множества $\{0,1\}^n \backslash (K \cap M)$. Поскольку $A \cup E \subseteq \{0,1\}^n \backslash (K \cap M)$, то функции из $\mathfrak{S}$ принимают значение 1 на всех наборах множества $A \cup E$. Отметим, что любая функция, отличная от константы 0 и реализуемая автоматом V, принимает значение 1 хотя бы на одном наборе из $A \cup E$. Поэтому из $A \cup E \neq \emptyset$ следует, что ни одна функция из $\mathfrak{S}$ не может быть реализована автоматом V. Значит, в этом случае верно $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^{|K \cap M|}$. Утверждение доказано. ■

Следствие 3.3.2. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$, такого, что $|K \cap M| > n$, верно неравенство $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$.*

Утверждение 3.3.8. *Для любого $m \geq 1$, верно неравенство $\sum_{i=0}^{\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1} C_m^i \geq 2^{m-2}$.*

Доказательство. Пусть $m \geq 1$ нечетное. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1} C_m^i = 2^{m-1} > 2^{m-2}.$$

Пусть теперь $m \geq 1$ четное. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1} C_m^i = 2^{m-1} - \frac{1}{2} \cdot C_m^{\frac{m}{2}} \geq 2^{m-1} - \frac{1}{2} \cdot 2^{m-1} = 2^{m-2}.$$

Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.3.9. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ выполнено $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^{|B \cup T| - 2}$.*

Доказательство. Пусть $B \cup T = \emptyset$. Поскольку автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$ не может реализовать по крайней мере одну функцию, равную константе 1, то доказываемое неравенство верно. Пусть теперь $|B \cup T| \geq 1$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 1 на всех наборах множества $\{0,1\}^n \backslash (B \cup T)$. Если функция из $\mathfrak{S}$ может быть реализована автоматом V, то в силу утверждения 3.3.6 верно неравенство $|(B \cup T)_f^1| \leq |(A \cup E)_f^0|$.

Следовательно, автомат V не может реализовать все функции из $\mathfrak{S}$, которые принимают значение 0 меньше, чем на $\lceil\frac{|B\cup T|}{2}\rceil$ наборе. Используя утверждение 3.3.8, оценим количество a функций из $\mathfrak{S}$, которые не может реализовать автомат V:

$$a \geq \sum_{i=0}^{\lceil\frac{|B\cup T|}{2}\rceil-1} C^i_{|B\cup T|} \geq 2^{|B\cup T|-2}.$$

Тем самым, верно искомое неравенство $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^{|B\cup T|-2}$. Утверждение доказано. ■

Следствие 3.3.3. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}^0_3(n)$, такого, что $|B\cup T| \geq n+3$, верно неравенство $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$.*

Утверждение 3.3.10. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}^0_3(n)$, такого, что $|A\cap E| \geq 2$, выполнено $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^{2^n-|B\cup T|-2}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на всех наборах множества $B\cup T$ и хотя бы на двух наборах множества $A\cap E$. Ни одна функция из $\mathfrak{S}$ не может быть реализована автоматом V. Значит, верно неравенство $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^{2^n-|B\cup T|-2}$. Утверждение доказано. ■

Следствие 3.3.4. *Если $n \geq 4$ и автомат V из множества $\mathfrak{V}^0_3(n)$ таков, что $|A\cap E| \geq 2$, то $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $|P(V)| \geq 2^{2^n} - 2^n$, $n \geq 1$. Тогда из следствия 3 вытекает, что $|B\cup T| < n+3$, а из утверждения 9 следует, что

$$2^{2^n} - 2^n \leq |P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^{2^n-|B\cup T|-2} < 2^{2^n} - 2^{2^n-n-5}.$$

Отсюда следует неравенство $2^n \geq 2^{2^n-n-5}$. Последнее неравенство не верно при всех $n \geq 4$. Данное противоречие завершает доказательство следствия. ■

Утверждение 3.3.11. *Если $n \geq 4$ и автомат V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ таков, что $|B \cup T| \geq 3$, то $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$.*

Доказательство. Если $|A \cup E| \leq 2^n - n - 1$, то утверждение верно в силу следствия 3.3.1. Пусть $|A \cup E| \geq 2^n - n$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 1 на трех фиксированных наборах множества $B \cup T$. В силу утверждения 3.3.6 для любой функции f из $\mathfrak{S}$, реализуемой автоматом V, верно $3 \leq |(B \cup T)_f^1| \leq |(A \cup E)_f^0|$. Следовательно, автомат V не может реализовать функцию из $\mathfrak{S}$, принимающую значение 0 меньше, чем на трех наборах множества $A \cup E$. Оценим число a булевых функций из $\mathfrak{S}$, которые не может реализовать автомат V:

$$a \geq C^0_{|A\cup E|-3} + C^1_{|A\cup E|-3} + C^2_{|A\cup E|-3} \geq C^0_{2^n-n-3} + C^1_{2^n-n-3} + C^2_{2^n-n-3} =$$

$$= 1 + 2^n - n - 3 + \frac{(2^n - n - 3)(2^n - n - 4)}{2} =$$

$$= 2^n - n - 2 + 2^{2\cdot n-1} - n \cdot 2^n - 7 \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{7}{2} \cdot n + 6 =$$

$$= 2^{2\cdot n-1} - n \cdot 2^n - 5 \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{7}{2} \cdot n + 4.$$

Заметим, что

$$2^{2\cdot n-1} - n\cdot 2^n - 5\cdot 2^{n-1} + \frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{7}{2}\cdot n + 4 > 2^n \Leftrightarrow (2^{n-1} - n - \frac{7}{2})\cdot 2^n + \frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{7}{2}\cdot n + 4 > 0.$$

Кроме того отметим, что для всех $n \geq 4$ выполнено $2^{n-1} - n - \frac{7}{2} \geq 0$. Из приведенных неравенств следует, что

$$a \geq 2^{2\cdot n-1} - n \cdot 2^n - 5 \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{7}{2} \cdot n + 4 > 2^n.$$

Следовательно, $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.3.12. *Если $n \geq 6$ и автомат V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ таков, что $|A| \leq 2^{n-1}$, то $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$.*

Доказательство. Если верно хотя бы одно из неравенств $|A \cup K| \leq 2^n - n - 1$ или $|A \cup E| \leq 2^n - n - 1$, то утверждение верно в силу следствия 3.3.1. Пусть $|A \cup K| \geq 2^n - n$ и $|A \cup E| \geq 2^n - n$. Если $|B \cup T| \geq 3$, то доказываемое утверждение верно в силу утверждения 3.3.11. Пусть $|B \cup T| \leq 2$. Учитывая, что $A \cap K = \emptyset$, оценим мощность множества $K \cap E$:

$$|K \cap E| = |A \cup K| - |A| - |K \backslash E| \geq |A \cup K| - |A| - |\{0,1\}^n \backslash (A \cup E)| \geq$$

$$\geq 2^n - n - 2^{n-1} - (2^n - (2^n - n)) = 2^{n-1} - 2 \cdot n.$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 1 на всех наборах множества $\{0,1\}^n \backslash (K \cap E)$. Поскольку $A \cup M \subseteq \{0,1\}^n \backslash (K \cap E)$, то функции из $\mathfrak{S}$ принимают значение 1 на всех наборах множества $A \cup M$. Тем самым для любой функции f из $\mathfrak{S}$ верно $|A_f^0| = 0$ и $|M_f^0| = 0$. Пусть $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ — последовательность всех двоичных наборов длины n, такая, что автомат V с последовательностью C реализует функцию f из $\mathfrak{S}$. Тогда при последовательной подаче наборов последовательности C на входы автомата V, автомат V перейдет из 1-состояния в одно из 0-состояний ровно $|(B \cup T)_f^1|$ раз, а из 0-состояний в 1-состояние не менее $\lfloor \frac{1}{2} \cdot |(K \cap E)_f^0| \rfloor$ раз. Число переходов из 0-состояний в 1-состояние либо совпадает с числом переходов из 1-состояния в 0-состояния, либо на единицу больше этого числа. Следовательно, $|(K \cap E)_f^0| \leq 2 \cdot (|(B \cup T)_f^1| + 1) + 1$. В силу условия $|B \cup T| \leq 2$ имеем $|(K \cap E)_f^0| \leq 7$. Следовательно, автомат V не может реализовать функции из $\mathfrak{S}$, принимающие значение 0 больше, чем на семи наборах множества $K \cap E$. Оценим число a функций из $\mathfrak{S}$, которые не может реализовать автомат V:

$$a \geq \sum_{i=8}^{|K \cap E|} C_{|K \cap E|}^i \geq \sum_{i=8}^{2^{n-1}-2 \cdot n} C_{2^{n-1}-2 \cdot n}^i.$$

При всех $n \geq 6$ верно $2^{n-1} - 2 \cdot n \geq 20$, значит, выполнено

$$a \geq \sum_{i=8}^{2^{n-1}-2 \cdot n} C_{2^{n-1}-2 \cdot n}^i \geq \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}-2 \cdot n} = 2^{2^{n-1}-2 \cdot n - 1}.$$

Заметим, что верны следующие эквивалентности

$$2^{2^{n-1}-2\cdot n-1} > 2^n \Leftrightarrow 2^{n-1} - 2 \cdot n - 1 > n \Leftrightarrow 2^{n-1} > 3 \cdot n + 1.$$

Последнее неравенство выполнено при всех $n \geq 6$. Следовательно, $a > 2^n$, поэтому $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.3.13. *Если $n \geq 6$ и автомат V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ таков, что $|K \cap T| = 0$, то $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$.*

Доказательство. Если $|B \cup T| \geq 3$, то доказываемое утверждение верно в силу утверждения 3.3.11. Пусть $|B \cup T| \leq 2$. Если $|A \cup K| \leq 2^n - n - 1$, то доказываемое утверждение верно в силу следствия 3.3.1. Пусть $|A \cup K| > 2^n - n - 1$. Если $|A| \leq 2^{n-1}$, то доказываемое утверждение верно в силу утверждения 3.3.12. Пусть $|A| > 2^{n-1}$. Заметим, что $|T| \leq |B \cup T| \leq 2$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех функций из $P_2(n)$, таких, что они принимают значение 1 на всех наборах множества K и значение 0 на всех наборах множества T. Пусть $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ — последовательность всех двоичных наборов длины n, такая, что автомат V с последовательностью C реализует функцию f из $\mathfrak{S}$. В силу условий $|K_f^0| = |T_f^1| = 0$, автомат V не переходит в 0-состояние отличное от начального. При последовательной подаче наборов последовательности C на входы автомата V, автомат перейдет из начального 0-состояния в 1-состояние ровно $|A_f^0|$ раз и из 1-состояния в начальное 0-состояние ровно $|B_f^1|$ раз. Число переходов из 0-состояний в 1-состояние либо совпадает с числом переходов из 1-состояния в 0-состояния, либо на единицу больше этого числа. Значит, верно одно из равенств $|A_f^0| - 1 = |B_f^1|$ или $|A_f^0| = |B_f^1|$. Поскольку $|B| \leq |B \cup T| \leq 2$, то верно неравенство $|A_f^0| \leq 3$. Следовательно, автомат V не может реализовать функции из $\mathfrak{S}$, принимающие значение 0 больше, чем на трех наборах множества A. Учитывая, что $n \geq 6$, $|T| \leq 2$ и $|A| > 2^{n-1} \geq 32$, оценим число a функций из $\mathfrak{S}$, которые не могут быть реализованы автоматом V:

$$a \geq 2^{|A|-2} - C_{|A|-2}^0 - C_{|A|-2}^1 - C_{|A|-2}^2 - C_{|A|-2}^3 \geq \frac{1}{2} \cdot 2^{|A|-2} > \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}-2} = 2^{2^{n-1}-3} > 2^n.$$

Следовательно, $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$. Утверждение доказано. ■

Следствие 3.3.5. *Если $n \geq 6$ и автомат V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ таков, что $|T| = 0$, то $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$.*

Утверждение 3.3.14. *Если $n \geq 1$ и автомат V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ таков, что $|B \cup T| = 2$, то $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^n$.*

Доказательство. Если $|K \cap T| = 0$, то доказываемое утверждение верно в силу утверждения 3.3.13. Пусть $|K \cap T| \neq 0$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех функций из $P_2(n)$, таких, что они принимают значение 1 на обоих наборах множества $B \cup T$. Если функция f из $\mathfrak{S}$ может быть реализована автоматом V, то в силу утверждения 5 верно неравенство $|(A \cup E)_f^0| \geq |(B \cup T)_f^1| = 2$. Следовательно, автомат V не может реализовать функции из $\mathfrak{S}$, принимающие значение 0 меньше, чем на двух наборах из $\{0,1\}^n$. Оценим число a функций из $\mathfrak{S}$, которые не может реализовать автомат V:

$$a \geq C_{2^n-2}^0 + C_{2^n-2}^1 = 1 + 2^n - 2 = 2^n - 1.$$

Покажем, что автомат V не может реализовать по крайней мере еще одну функцию из $P_2(n)$. Поскольку $|K \cap T| \neq 0$, можно рассмотреть произвольный набор $\widetilde{\alpha}$ из $K \cap T$. Заметим, что если функция, реализуемая автоматом V, принимает значение 0 на наборе $\widetilde{\alpha}$, то такая функция должна принимать значение 0 на хотя бы еще одном наборе. Значит, автомат V не может реализовать такую булеву функцию g, которая принимает значение 0 только наборе $\widetilde{\alpha}$. Отметим также, что, поскольку $\widetilde{\alpha} \in B \cup T$, то $g \notin \mathfrak{S}$. Следовательно, автомат V не может реализовать по крайней мере 2^n булевых функций, т. е. верно неравенство $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^n$. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.3.15. *Если $n \geq 6$ и автомат V из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ таков, что $|B \cup T| = 1$, то $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$.*

Доказательство. Если $|A\cap E|\geq 2$, то доказываемое утверждение верно в силу следствия 3.3.4. Пусть $|A\cap E|\leq 1$. Если $K\cap T=\emptyset$, то доказываемое утверждение верно в силу утверждения 3.3.13. Пусть $K\cap T\neq\emptyset$. Тогда из $|B\cup T|=1$ вытекает, что $B=\emptyset$, $|T|=1$ и $T\subseteq K$. Обозначим через $\widetilde{\alpha}$ единственный набор множества $T\cap K$. Обозначим через $\mathfrak{S}_1$ множество всех функций из $P_2(n)$, таких, что они принимают значение 1 на всех наборах множества $(K\cup M\cup E)\backslash\{\widetilde{\alpha}\}$ и значение 0 на наборе $\widetilde{\alpha}$. Пусть $C=(\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\ldots,\widetilde{\beta}_{2^n})$ — последовательность всех двоичных наборов длины n, такая, что автомат V с последовательностью C реализует функцию f из $\mathfrak{S}_1$. Поскольку $B=\emptyset$ и $|T_f^1|=0$, то если автомат V в момент времени t, где $t\geq 1$, переходит в 1-состояние, то во все последующие моменты времени V находится в том же 1-состоянии. В 0-состояние, отличное от начального, автомат может перейти только из начального 0-состояния при подаче набора $\widetilde{\alpha}$. Поскольку $|((K\cup M\cup E)\backslash\{\widetilde{\alpha}\})_f^0|=0$, то если автомат V в момент времени t переходит в отличное от начального 0-состояние, то во все последующие моменты времени V находится в том же 0-состоянии, где $t\geq 1$. В силу условия $f(\widetilde{\alpha})=0$ автомат V в некоторый момент времени переходит в отличное от начального 0-состояние. Следовательно, автомат V при подаче на него последовательности C не переходит в 1-состояние. Значит, если функция из $\mathfrak{S}_1$ может быть реализована автоматом V, то она равна тождественному нулю. Учитывая, что $A\cap K=\emptyset$ и $\widetilde{\alpha}\in K$, оценим число a функций из $\mathfrak{S}_1$, которые не может реализовать автомат V:

$$a\geq 2^{2^n-|K\cup M\cup E\cup\{\widetilde{\alpha}\}|}-1\geq 2^{|A\backslash(M\cup E)|}-1\geq 2^{|A\backslash M|-1}-1.$$

Если $|A\backslash M|\geq n+2$, то автомат V не может реализовать по крайней мере $2^{n+1}-1$ булевых функций и утверждение доказано. Пусть $|A\backslash M|\leq n+1$. Если $|A|\leq 2^{n-1}$, то доказываемое утверждение верно в силу утверждения 11. Пусть $|A|>2^{n-1}$. Тогда $|A\cap M|=|A|-|A\backslash M|>2^{n-1}-n-1$. Обозначим через $\mathfrak{S}_2$ множество всех функций из $P_2(n)$, таких, что они принимают значение 1 на всех наборах множества $\{0,1\}^n\backslash(A\cap M)$. Пусть $C=(\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\ldots,\widetilde{\beta}_{2^n})$ — последователь-

ность всех двоичных наборов длины n, такая, что автомат V с последовательностью C реализует функцию f из $\mathfrak{S}_2$. Поскольку $T \subseteq K \subseteq \{0,1\}^n \backslash (A \cap M)$, то верно $|T_f^1| = 1$ и $|K_f^0| = 0$. Следовательно, при последовательной подаче наборов последовательности C на входы автомата V, автомат V перейдет из 1-состояния в одно из 0-состояний ровно $|T_f^1| = 1$ раз. Если автомат V находился в 0-состоянии, не являющимся начальным, и на него подали набор из множества $A \cap M$, то V перейдет в начальное 0-состояние, если же автомат V находился в начальном 0-состоянии, то V перейдет в 1-состояние. Учитывая вышеприведенное рассуждение и равенство $|K_f^0| = 0$ получаем, что V перейдет из 0-состояний в 1-состояние не менее $1 + \lfloor \frac{1}{2} \cdot (|(A \cap M)_f^0| - 1) \rfloor$ раз. Число переходов из 0-состояний в 1-состояние либо совпадает с числом переходов из 1-состояния в 0-состояния, либо на единицу больше этого числа. Следовательно, $2 \geq 1 + \lfloor \frac{1}{2} \cdot (|(A \cap M)_f^0| - 1) \rfloor$. Из данного неравенства вытекает, что $5 \geq |(A \cap M)_f^0|$. Следовательно, автомат V не может реализовать функции из $\mathfrak{S}_2$, принимающие значение 0 больше, чем на пяти наборах множества $A \cap M$. Учитывая неравенство $|A \cap M| > 2^{n-1} - n - 1$, оценим число b функций из $\mathfrak{S}_2$, которые не может реализовать автомат V:

$$b \geq 2^{|A \cap M|} - \sum_{i=0}^{5} C_{|A \cap M|}^i > 2^{2^{n-1}-n-1} - \sum_{i=0}^{5} C_{2^{n-1}-n-1}^i$$

При всех $n \geq 6$ верно $2^{n-1} - n - 1 \geq 25$ и $2^{n-1} - n - 2 > n + 1$, значит, выполнено

$$b > 2^{2^{n-1}-n-1} - \sum_{i=0}^{5} C_{2^{n-1}-n-1}^i > \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}-n-1} = 2^{2^{n-1}-n-2} > 2^{n+1} > 2^n.$$

Следовательно, $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n$. Утверждение доказано. ■

Доказательство теоремы 3.3.1. Доказательство теоремы разбивается на четыре случая в зависимости от мощности множества $B \cup T$. Если $|B \cup T| \geq 3$, то теорема верна в силу утверждения 3.3.11. Если $|B \cup T| = 2$, то теорема верна в силу утверждения 3.3.14. Если $|B \cup T| = 1$, то теорема верна в силу утверждения 3.3.15. Если $|B \cup T| = 0$, то теорема верна в силу следствия 3.3.5. Теорема доказана. ■

3.3.3 Оценка сверху, второй случай

Далее рассматриваются инициальные булевы автоматы из множества $\mathfrak{V}_3^1(n)$, $n \geq 1$. Напомним, что такие автоматы можно схематично изобразить с помощью диаграммы, изображенной на рис. 2 на стр. 106.

В отличие от случая для инициального булева автомата с двумя константными состояниями, для автомата с тремя состояниями максимальная мощность множества реализуемых автоматом функций не может достигаться для любого n при фиксированной мощности множеств A, B, K, M, T, E. В частности, верно следующее утверждение.

Утверждение 3.3.16. *Для любого $n \geq 1$ и автомата V из множества $\mathfrak{V}_3^1(n)$, верно $|P(V)| \leq \max(1, 2^{2^n} - \max(2^{2^n-|A\cup K|}, 2^{2^n-|B\cup M|-1}))$.*

Доказательство. Пусть $A \cup K = \emptyset$. Тогда автомат V может реализовать только константу 0 и доказываемое неравенство верно. Пусть теперь $A \cup K \neq \emptyset$ и пусть $f \in P_2(n)$ такова, что она принимает значение 1 на всех наборах множества $A \cup K$. Автомат V не может реализовать такую функцию f. Следовательно, верна оценка $|P(V)| \leq \max(1, 2^{2^n} - 2^{2^n-|A\cup K|})$. Для доказательства утверждения осталось доказать неравенство $|P(V)| \leq \max(1, 2^{2^n} - 2^{2^n-|B\cup M|-1})$. Пусть сначала $|A \cup K| = 1$. Тогда верно неравенство $2^{2^n-|B\cup M|-1} \leq 2^{2^n-|A\cup K|} = 2^{2^n-1}$ и утверждение верно в силу доказанного неравенства $|P(V)| \leq \max(1, 2^{2^n} - 2^{2^n-|A\cup K|})$. Пусть теперь $|A \cup K| \geq 2$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на всех наборах множества $B \cup M$. Учитывая неравенство $A \cup K \neq \emptyset$, получаем, что если функция f из $\mathfrak{S}$ реализуется автоматом V, то f принимает значение 0 ровно на одном наборе множества $A \cup K$. Оценим число a функций, которые не может реализовать автомат V. Рассмотрим три случая. Пусть $|(B \cup M) \cap (A \cup K)| \geq 2$, тогда автомат V не может реализовать ни одну функцию из множества $\mathfrak{S}$. Следовательно,

$a \geq 2^{2^n-|B\cup M|}$. Пусть $|(B \cup M) \cap (A \cup K)| = 1$, тогда автомат V не может реализовать все функции из $\mathfrak{S}$, принимающие значение 0 по крайней мере на одном наборе множества $(A \cup K)\backslash(B \cup M)$. Следовательно, $a \geq 2^{2^n-|B\cup M|-1}$. Пусть, наконец, $|(B \cup M) \cap (A \cup K)| = 0$, тогда автомат V не может реализовать все функции из $\mathfrak{S}$, принимающие значение 0 по крайней мере на двух наборах множества $A \cup K$, а также функцию из $\mathfrak{S}$, не принимающую значение 0 ни на одном наборе множества $A \cup K$. Учитывая $|A \cup K| \geq 2$, получаем $a \geq 2^{2^n-|B\cup M|-|A\cup K|} \cdot (2^{|A\cup K|} - |A \cup K|) \geq 2^{2^n-|B\cup M|} \cdot (1 - \frac{|A\cup K|}{2^{|A\cup K|}}) \geq 2^{2^n-|B\cup M|-1}$. Тем самым, во всех случаях верно неравенство $|P(V)| \leq \max(1, 2^{2^n} - 2^{2^n-|B\cup M|-1})$, что и завершает доказательство утверждения. ■

Утверждение 3.3.17. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_3^1(n)$ и любой реализуемой им булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполнено*[2] $|(A \cup K)_f^0| - 1 \leq |(B \cup M)_f^1|$.

Доказательство. Пусть $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ — последовательность всех двоичных наборов длины n, такая, что автомат V с последовательностью C реализует f. Тогда при последовательной подаче наборов последовательности C на входы автомата V, автомат V перейдет из 0-состояния в одно из 1-состояний ровно $|(A \cup K)_f^0|$ раз, а из 1-состояний в 0-состояние не больше, чем $|(B \cup M)_f^1|$ раз. Число переходов из 0-состояния в 1-состояния не более, чем на 1 превосходит число переходов из 1-состояний в 0-состояние, что и завершает доказательство. ■

Сформулируем несколько различных оценок сверху на мощность множества функций, реализуемых автоматом из множества $\mathfrak{V}_3^1(n)$, демонстрирующие различные методы оценки.

Теорема 3.3.2. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_3^1(n)$ верно $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^{\frac{1}{3}\cdot 2^n - 2}$.*

Сформулируем вспомогательное утверждение.

[2] обозначения D_f^0 и D_f^1 см. на стр. 88.

Утверждение 3.3.18. *Для любого $n \geq 1$ и автомата V из множества $\mathfrak{V}_3^1(n)$ верно $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^{\frac{|A \cup K|}{2} - 3}$.*

Доказательство. Положим $a = |(A \cup K) \cap (B \cup M)|$. Если $A \cup K = \emptyset$, то автомат V может реализовать только одну булеву функцию — константу 0, и утверждение верно для любого $n \geq 1$. Далее будем считать, что $A \cup K \neq \emptyset$. Рассмотрим функцию f, реализуемую автоматом V и принимающую значение 0 на всех наборах множества $B \cup M$. В силу утверждения 3.3.17 выполнено $|(A \cup K)_f^0| - 1 \leq |(B \cup M)_f^1| = 0$. Следовательно, поскольку $A \cup K \neq \emptyset$, имеем $|(A \cup K)_f^0| = 1$. Оценим количество функций f, которые не может реализовать автомат V:

$$2^{2^n - |B \cup M|} \cdot \frac{2^{|A \cup K| - a} - (|A \cup K| - a)}{2^{|A \cup K| - a}} \geq 2^{|A \cup K| - a} - (|A \cup K| - a).$$

Рассмотрим функцию f, реализуемую автоматом V и принимающую значение 0 на всех наборах множества $(B \cup M) \backslash (A \cup K)$ и значение 1 на всех наборах множества $(A \cup K) \backslash (B \cup M)$. В силу утверждения 3.3.17 выполнено

$$|((A \cup K) \cap (B \cup M))_f^0| - 1 = |(A \cup K)_f^0| - 1 \leq |(B \cup M)_f^1| = |((A \cup K) \cap (B \cup M))_f^1|.$$

Кроме того, поскольку $A \cup K \neq \emptyset$, имеем $|(A \cup K)_f^0| \neq 0$. Поэтому при $a \geq 1$ количество функций, которые не может реализовать автомат V, не меньше

$$\max\left(C_a^0, C_a^0 + C_a^1 + \cdots + C_a^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor - 1}\right) \geq 2^{a-3}.$$

Последнее неравенство выполнено при всех $a \geq 1$. Случай $a = 0$ рассмотрим отдельно. Таким образом, при $a \geq 1$ количество функций, которые не может реализовать автомат V, не меньше, чем

$$\max\left(2^{|A \cup K| - a} - (|A \cup K| - a), 2^{a-3}\right).$$

В силу условия $0 \leq a \leq |A \cup K|$, функция $2^{|A \cup K| - a} - (|A \cup K| - a)$ убывает с ростом a. Функция 2^{a-3} возрастает с ростом a. Возьмем $a = \frac{|A \cup K|}{2}$. Тогда

количество функций, которые не может реализовать автомат V, не меньше, чем

$$\min\,(2^{\frac{|A\cup K|}{2}}-\frac{|A\cup K|}{2},2^{\frac{|A\cup K|}{2}-3})=2^{\frac{|A\cup K|}{2}-3}.$$

Последнее равенство верно в силу $|A\cup K|\geq 1$.

Осталось рассмотреть случай $a=0$. Оценим количество функций, которые не могут быть реализованы автоматом V:

$$2^{|A\cup K|-a}-(|A\cup K|-a)=2^{|A\cup K|}-(|A\cup K|)\geq 2^{\frac{|A\cup K|}{2}-3}.$$

Последнее равенство верно в силу $|A\cup K|\geq 1$. Утверждение доказано. ■

Доказательство теоремы 3.3.2. В силу утверждения 3.3.18 верно

$$|P(V)|\leq 2^{2^n}-2^{\frac{|A\cup K|}{2}-3}.$$

В силу утверждения 3.3.16 верно

$$|P(V)|\leq \max\,(1,2^{2^n}-2^{2^n-|A\cup K|}).$$

Значит,

$$|P(V)|\leq \min\,(2^{2^n}-2^{\frac{|A\cup K|}{2}-3},2^{2^n}-2^{2^n-|A\cup K|}+1)=$$

$$=2^{2^n}-\max\,(2^{\frac{|A\cup K|}{2}-3},2^{2^n-|A\cup K|}-1).$$

Отметим, что, очевидно, верно неравенство

$$|P(V)|\leq \min\,(2^{2^n}-2^{\frac{y}{2}-3},2^{2^n}-2^{2^n-y}+1),$$

при вещественных $y\in[1,2^n]$. Положим $y=\frac{2}{3}\cdot 2^n+2$. Тогда

$$\max\,(2^{\frac{2^n}{3}-2},2^{\frac{2^n}{3}-2}-1)=2^{\frac{2^n}{3}-2}.$$

Значит,

$$|P(V)|\leq 2^{2^n}-2^{\frac{2^n}{3}-2}.$$

Теорема доказана. ■

Эту теорему можно усилить, а именно верна следующая теорема.

Теорема 3.3.3. *Для любого $n \geq 3$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_3^1(n)$ верно $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n}$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая. Пусть верно неравенство $|A \cup K| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^n$. Тогда в силу утверждения 3.3.16 верна оценка

$$|P(V)| \leq \max\left(1, 2^{2^n} - 2^{2^n - |A\cup K|}\right) \leq 2^{2^n} - 2^{2^n - \frac{1}{2}\cdot 2^n} = 2^{2^n} - 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n}.$$

Пусть теперь $|A\cup K| \geq \frac{1}{2}\cdot 2^n+1$. Зафиксируем $\frac{1}{2}\cdot 2^n+1$ наборов множества $|A\cup K|$. Рассмотрим функции из $P_2(n)$, такие, что они принимают значение 0 ровно на $\frac{1}{2} \cdot 2^n$ из зафиксированных наборов множества $A \cup K$. Обозначим множество всех таких функций через $\mathfrak{S}$. Если функция f из $\mathfrak{S}$ реализуется автоматом V, то в силу утверждения 3.3.17 верно неравенство $|(A \cup K)_f^0| - 1 \leq |(B \cup M)_f^1|$. Следовательно, автомат V не может реализовать такие функции из $\mathfrak{S}$, которые принимают значение 1 меньше, чем на $\frac{1}{2} \cdot 2^n - 1$ наборе. Обозначим через a количество функций из $\mathfrak{S}$, которые не может реализовать автомат V. Тогда выполнено

$$a \geq C^1_{\frac{1}{2}\cdot 2^n+1} \cdot (2^{2^n-(\frac{1}{2}\cdot 2^n+1)} - C^0_{\frac{1}{2}\cdot 2^n-1} - C^1_{\frac{1}{2}\cdot 2^n-1}) = (\frac{1}{2}\cdot 2^n+1)\cdot(2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n-1} - 1 - \frac{1}{2}\cdot 2^n+1) =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n+n-2} + 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n-1} - 2^{2\cdot n-2} - 2^{n-1} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n} \cdot (2^{n-2} + 2^{-1}) - 2^{2\cdot n-2} - 2^{n-1}. \quad (3.3)$$

Заметим, что

$$2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n} \cdot (2^{n-2} + \frac{1}{2}) - 2^{2\cdot n-2} - 2^{n-1} \geq 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n} \cdot (2^{n-2} - \frac{1}{2}) \geq 2^{2\cdot n-2} + 2^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n} \geq 2^n + 4 + \frac{4}{2^{n-1}-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^n \geq \log_2\left(2^n + 4 + \frac{4}{2^{n-1}-1}\right). \quad (3.4)$$

Кроме того, отметим, что при $n \geq 3$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{2} \cdot 2^n \geq n + 1 \geq \log_2(2^n + 6) \geq \log_2\left(2^n + 4 + \frac{4}{2^{n-1}-1}\right).$$

Из данных неравенств и соотношений (3.3), (3.4) вытекает неравенство

$$a \geq 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n} \cdot (2^{n-2} + \frac{1}{2}) - 2^{2\cdot n-2} - 2^{n-1} \geq 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n},$$

что и завершает доказательство теоремы. ■

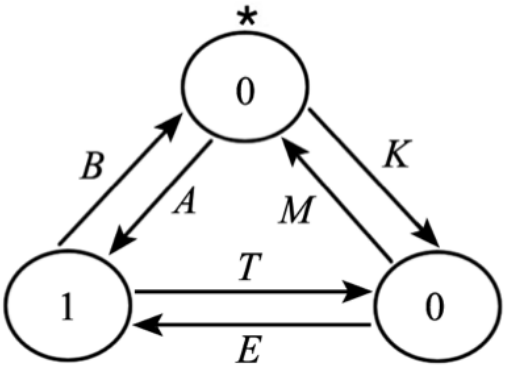
Из утверждения 3.3.4 и теорем 3.3.1 и 3.3.3 можно вывести следствие.

Следствие 3.3.6. *Для любого* $n \geq 6$ *максимальная мощность множества* $P(V)$ *для автомата* V *из* $\mathfrak{V}_3(n)$ *равна* $2^{2^n} - 2^n$.

3.3.4 Условия квазиуниверсальности автомата с тремя константными состояниями

Напомним, что автоматы из $\mathfrak{V}_3(n)$, которые реализуют максимальное по мощности множество булевых функций, называются квазиуниверсальными. В силу следствия 3.3.6 автомат V из $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным тогда и только тогда, когда $|P(V)| = 2^{2^n} - 2^n$.

Напомним, что через $\mathfrak{V}_3^0(n)$ обозначается множество всех инициальных булевых автоматов с тремя константными состояниями и n входами с начальным 0-состоянием, содержащих ровно одно 1-состояние, $n \geq 1$. Автоматы из множества $\mathfrak{V}_3^0(n)$ можно схематично изобразить с помощью следующей диаграммы:



где $A, B, K, M, T, E \subseteq \{0,1\}^n$. В кружочках, обозначающих состояния, написаны символы, соответствующие функции выхода в этом состоянии, а на стрелках — множества всех наборов, при подаче которых на вход автомата автомат из состояния, из которого идет стрелка, переходит в состояние, на которое указывает стрелка. Звездочкой помечено начальное состояние автомата.

Сформулируем некоторые необходимые условия для квазиуниверсального автомата, основываясь на утверждениях, доказанных в предыдущих параграфах.

Утверждение 3.3.19. *Если $n \geq 6$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным, то для него выполнены следующие условия:*

1. $V \in \mathfrak{V}_3^0(n)$;
2. $|B \cup T| = 2$;
3. $|K \cap T| \geq 1$;
4. $|A \cap E| \leq 1$;

Доказательство.

- В силу теоремы 3.3.3 квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{V}_3(n)$ не может принадлежать множеству $\mathfrak{V}_3^1(n)$. Значит, квазиуниверсальные автоматы принадлежат множеству $\mathfrak{V}_3^0(n)$.

- Если $|B \cup T| \geq 3$, то автомат не является квазиуниверсальным в силу утверждения 3.3.11. Если $|B \cup T| = 1$, то автомат не является квазиуниверсальным в силу утверждения 3.3.15. Если $|B \cup T| = 0$, то автомат не является квазиуниверсальным в силу следствия 3.3.5. Значит, для квазиуниверсального автомата выполнено равенство $|B \cup T| = 2$.

- Если $K \cap T = \emptyset$, то автомат не является квазиуниверсальным в силу утверждения 3.3.13. Значит, для квазиуниверсального автомата выполнено неравенство $|K \cap T| \geq 1$.

- Если $|A \cap E| \geq 2$, то автомат не является квазиуниверсальным в силу следствия 3.3.4. Значит, для квазиуниверсального автомата выполнено неравенство $|A \cap E| \leq 1$.

Утверждение доказано. ■

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения, дающие дополнительные ограничения для квазиуниверсальных автоматов.

Утверждение 3.3.20. *Если $n \geq 6$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$ таков, что $|K \cap (B \cup T)| = 2$, то автомат V не является квазиуниверсальным.*

Доказательство. Пусть автомат V является квазиуниверсальным, тогда в силу утверждения 3.3.19 и условия $|K \cap (B \cup T)| = 2$ имеем $B \cup T = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \subseteq K$, где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \{0,1\}^n$. Обозначим через $\mathfrak{S}$[3] множество всех функций из $P_2(n)$, таких, что они принимают значение 1 на обоих наборах $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$. Если функция f из $\mathfrak{S}$ может быть реализована автоматом V, то в силу утверждения 3.3.6 верно неравенство $|(A \cup E)_f^0| \geq |(B \cup T)_f^1| \geq 2$. Следовательно, автомат V не может реализовать функции из $\mathfrak{S}$, принимающие значение 0 меньше, чем на двух наборах из $\{0,1\}^n$. Оценим число a функций из $\mathfrak{S}$, которые не может реализовать автомат V:

$$a \geq C_{2^n-2}^0 + C_{2^n-2}^1 = 1 + 2^n - 2 = 2^n - 1.$$

Обозначим через f_1 функцию из $P_2(n)$, такую, что f_1 принимает значение 1 на всех наборах из $\{0,1\}^n$ кроме набора $\widetilde{\alpha}$, а через f_2 функцию из $P_2(n)$, такую, что f_2 принимает значение 1 на всех наборах из $\{0,1\}^n$ кроме набора $\widetilde{\beta}$. Пусть C_1 и C_2 такие последовательности подаваемых наборов, что автомат V с последовательностями C_1 и C_2 реализует функции f_1 и f_2 соответственно. Поскольку $|(\{0,1\}^n)_{f_1}^0| = |(\{0,1\}^n)_{f_2}^0| = 1$ и автомат V выдает значение 0 на первом наборе из последовательности подаваемых наборов, то в последовательности C_1 первым является набор $\widetilde{\alpha}$, а в последовательности C_2 первым является набор $\widetilde{\beta}$. Из того, что $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in K$ следует, что на втором наборе последовательностей C_1 и C_2 автомат V тоже выдает значение 0, что противоречит определению функций f_1 и f_2. Значит, автомат V не может реализовать функции $f_1, f_2 \notin \mathfrak{S}$, поэтому V не может реализовать по крайней мере $2^n + 1$ булеву функцию. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения. ■

[3]Избегая двусмысленности, множества булевых функций из доказательств последующих утверждений будем обозначать одним и тем же символом $\mathfrak{S}$, а функции — символом f в некоторых случаях с нижними числовыми индексами.

Утверждение 3.3.21. *Если $n \geq 6$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$ таков, что $|A \cup E \cup B \cup T| < 2^n$, то автомат V не является квазиуниверсальным.*

Доказательство. Пусть автомат V является квазиуниверсальным, тогда в силу утверждения 3.3.19 имеем $B \cup T = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \{0,1\}^n$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех функций из $P_2(n)$, таких, что они принимают значение 1 на обоих наборах $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$. Если функция f из $\mathfrak{S}$ может быть реализована автоматом V, то в силу утверждения 3.3.6 верно неравенство $|(A \cup E)_f^0| \geq |(B \cup T)_f^1| = 2$. Следовательно, автомат V не может реализовать функции из $\mathfrak{S}$, принимающие значение 0 меньше, чем на двух наборах из $A \cup E$. Оценим число a функций из $\mathfrak{S}$, которые не может реализовать автомат V:

$$a \geq 2^{|\{0,1\}^n \setminus (A \cup E \cup \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\})|} \cdot (C^0_{|(A\cup E)\setminus\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\}|} + C^1_{|(A\cup E)\setminus\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\}|}) \geq 2^{2^n} \cdot \frac{1 + |(A \cup E)\setminus\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}|}{2^{|(A\cup E)\cup\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\}|}}.$$

Заметим, что функция $\frac{1+x}{2^x}$ убывает при $x \geq 1$. Используя этот факт и неравенство $|(A \cup E)\setminus\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}| \leq 2^n - 3$, вытекающее из $|A \cup E \cup B \cup T| < 2^n$, получаем:

$$2^{2^n} \cdot \frac{1 + |(A \cup E)\setminus\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}|}{2^{|(A\cup E)\cup\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\}|}} \geq 2^{2^n} \cdot \frac{1 + 2^n - 3}{2^{2^n - 3 + 2}} = \frac{2^n - 2}{2^{-1}} = 2 \cdot (2^n - 2) = 2^{n+1} - 4.$$

Заметим, что при $n \geq 6$ выполняется $2^{n+1} - 4 > 2^n$, поэтому $a > 2^n$. Полученное противоречие с квазиуниверсальностью автомата V завершает доказательство. ■

Из утверждений 3.3.19 и 3.3.21 можно получить следующее следствие.

Следствие 3.3.7. *Если $n \geq 6$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$ таков, что $|A \cup E| < 2^n - 2$, то автомат V не является квазиуниверсальным.*

Таким образом, если автомат V из $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным, то в силу утверждений 3.3.19, 3.3.20, 3.3.21 для V выполнены следующие ограничения:

1. $V \in \mathfrak{V}_3^0(n)$;
2. $|B \cup T| = 2$;

3. $|K \cap B| = 0$;

4. $|K \cap T| = 1$;

5. $|A \cap E| \leq 1$;

6. $|A \cup E \cup B \cup T| = 2^n$;

Обозначим множество всех автоматов из $\mathfrak{V}_3(n)$, для которых выполнены вышеперечисленные условия через $\mathfrak{V}_3^q(n)$. Таким образом, для любого автомата V из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ выполнено $|K \cap T| = 1$ и $|(B \cup T) \backslash K| = 1$. Обозначим через $\widetilde{\alpha}(V)$ единственный набор множества $K \cap T$, а через $\widetilde{\beta}(V)$ единственный набор множества $(B \cup T) \backslash K$. Отметим, что $B \cup T = \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)\}$. Опишем все функции, которые не может реализовать квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{V}_3^q(n)$. Обозначим через $\mathfrak{A}^q(V)$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на не более, чем одном наборе, кроме функции, принимающей значение 0 на наборе $\widetilde{\beta}(V)$. Заметим, что $|\mathfrak{A}^q(V)| = 2^n$. Напомним, что через $\overline{P(V)}$ обозначается множество всех функций из $P_2(n)$, которые не могут быть реализованы автоматом V.

Теорема 3.3.4. *Если $n \geq 6$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ является квазиуниверсальным, то $\overline{P(V)} = \mathfrak{A}^q(V)$.*

Доказательство. Покажем, что квазиуниверсальный автомат V не может реализовать все функции из $\mathfrak{A}^q(V)$. Пусть дана некоторая функция f из $\mathfrak{A}^q(V)$. Рассмотрим два случая. Пусть f принимает значение 1 на наборах $\widetilde{\alpha}(V)$ и $\widetilde{\beta}(V)$. Если функция f может быть реализована автоматом V, то в силу утверждения 3.3.6 верно неравенство $|(A \cup E)_f^0| \geq |(B \cup T)_f^1| \geq 2$. Поскольку все функции из $\mathfrak{A}^q(V)$ принимают значение 0 меньше, чем на двух наборах, то получаем, что автомат V не может реализовать функцию f. Пусть теперь $f(\widetilde{\alpha}(V)) = 0$. Пусть C такая последовательность подаваемых наборов, что автомат V с последовательностью C реализует функцию f. Поскольку

$|(\{0,1\}^n)^0_f| = 1$ и автомат V выдает значение 0 на первом наборе последовательности C, то первым набором последовательности C является набор $\widetilde{\alpha}(V)$. Из того, что $\widetilde{\alpha}(V) \in K$, следует, что на втором наборе последовательности C автомат V тоже выдает значение 0, что противоречит определению функции f. Таким образом, $\mathfrak{A}^q(V) \subseteq \overline{P(V)}$. Поэтому в силу $|\mathfrak{A}^q(V)| = 2^n$ и следствия 3.3.6 получаем, что $\mathfrak{A}^q(V) = \overline{P(V)}$. Теорема доказана. ■

Из теоремы 3.3.4 можно извлечь следующее следствие.

Следствие 3.3.8. *Если $n \geq 6$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ является квазиуниверсальным, то для любого набора $\widetilde{y} \in \{0,1\}^n \backslash \widetilde{\beta}(V)$ автомат V реализует ровно $2^{2^n-1} - (2^n - 1)$ функций из $P_2(n)$, таких, что $f(\widetilde{y}) = 1$.*

Доказательство. Всего имеется ровно 2^{2^n-1} функций f из $P_2(n)$, таких, что $f(\widetilde{y}) = 1$. Из них множеству $\mathfrak{A}^q(V)$ принадлежит $2^n - 1$ функций. Поэтому в силу теоремы 3.3.4 и квазиуниверсальности автомата V, автомат V реализует ровно $2^{2^n-1} - (2^n - 1)$ функций из $P_2(n)$, таких, что $f(\widetilde{y}) = 1$. Следствие доказано. ■

Утверждение 3.3.22. *Если $n \geq 6$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ таков, что $|A \cup E| < 2^n - 1$, то автомат V не является квазиуниверсальным.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть автомат V является квазиуниверсальным и выполнено $|A \cup E| < 2^n - 1$. Обозначим через $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$ два различных набора из $\{0,1\}^n \backslash (A \cup E)$. Обозначим через f_1 функцию из $P_2(n)$, такую, что f_1 принимает значение 0 только на наборах $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$. Пусть C_1 такая последовательность подаваемых наборов, что автомат V с последовательностью C_1 реализует функцию f_1. Поскольку $|(A \cup E)^0_{f_1}| = 0$, то при подаче на входы автомата V наборов последовательности C_1, автомат V ни разу не перейдет в 1-состояние. Значит, автомат V не может реализовать функцию f_1. Поскольку $f_1 \notin \mathfrak{A}^q(V)$, то в силу теоремы 3.3.4 автомат V не является квазиуниверсальным. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Утверждение 3.3.23. *Если $n \geq 6$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ таков, что $|A \cup K| < 2^n - 1$, то автомат V не является квазиуниверсальным.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть автомат V является квазиуниверсальным и выполнено $|A \cup K| < 2^n - 1$. Обозначим через $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$ два различных набора из $\{0,1\}^n \backslash (A \cup K)$. Обозначим через f_1 функцию из $P_2(n)$, такую, что f_1 принимает значение 0 только на наборах $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$. Пусть C_1 такая последовательность подаваемых наборов, что автомат V с последовательностью C_1 реализует функцию f_1. Поскольку $|(A \cup K)_{f_1}^0| = 0$, то при подаче на входы автомата V наборов последовательности C_1, автомат V ни разу не перейдет из начального 0-состояния в другие состояния. Значит, автомат V не может реализовать функцию f_1. Поскольку $f_1 \notin \mathfrak{A}^q(V)$, то в силу теоремы 3.3.4 автомат V не является квазиуниверсальным. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Утверждение 3.3.24. *Если $n \geq 6$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ таков, что $|K| \geq 3$, то автомат V не является квазиуниверсальным.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть автомат V является квазиуниверсальным и выполнено $|K| \geq 3$. Поскольку $|K| \geq 3$, то найдутся два различных набора $\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2$ из множества $K \backslash \{\widetilde{\alpha}(V)\}$. Обозначим через f функцию из $P_2(n)$, такую, что она принимает значение 0 только на наборах $\widetilde{\varkappa}_1$ и $\widetilde{\varkappa}_2$. Пусть C такая последовательность подаваемых наборов, что автомат V с последовательностью C реализует функцию f. Поскольку автомат V выдает значение 0 на первом наборе последовательности подаваемых наборов, то в последовательности C первым является один из наборов $\widetilde{\varkappa}_1$ или $\widetilde{\varkappa}_2$. Поскольку $\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2 \in K$, то в первый момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 0-состояние, не являющееся начальным. Значит, автомат V во второй момент времени так же будет выдавать значение 0, следовательно, вторым набором последовательности C является один из наборов $\widetilde{\varkappa}_1$ или $\widetilde{\varkappa}_2$. Поскольку на всех остальных наборах автомат V выдает значение 1, значит,

при подаче на входы автомата V наборов последовательности C, автомат V перейдет в из 0-состояний в 1-состояние не больше одного раза. Поскольку $B \cup T = \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)\}$ и $K \cap (B \cup T) = \{\widetilde{\alpha}(V)\}$, то $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V) \notin \{\widetilde{\varkappa}_1, \widetilde{\varkappa}_2\}$. Следовательно, $f(\widetilde{\alpha}(V)) = f(\widetilde{\beta}(V)) = 1$. Значит, при подаче на входы автомата V наборов последовательности C, автомат V перейдет из 1-состояния в одно из 0-состояний два раза. Следовательно, автомат V не может реализовать функцию f. Поскольку $f \notin \mathfrak{A}^q(V)$, то в силу теоремы 3.3.4 автомат V не является квазиуниверсальным. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Из утверждений 3.3.23 и 3.3.24 можно вывести следующее следствие.

Следствие 3.3.9. *Если $n \geq 6$ и автомат V из множества $\mathfrak{V}_3^q(n)$ является квазиуниверсальным, то $|A| \geq 2^n - 3$.*

Утверждение 3.3.25. *Если $n \geq 6$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ таков, что $\widetilde{\beta}(V) \notin A \cap E$, то автомат V не является квазиуниверсальным.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть автомат V является квазиуниверсальным и выполнено $\widetilde{\beta}(V) \notin A \cap E$. Возможны два случая: $\widetilde{\beta}(V) \notin E$ или $\widetilde{\beta}(V) \in E$ и $\widetilde{\beta}(V) \notin A$.

Пусть $\widetilde{\beta}(V) \notin E$. Обозначим через f_1 функцию из $P_2(n)$, такую, что f_1 принимает значение 0 только на наборах $\widetilde{\alpha}(V)$ и $\widetilde{\beta}(V)$. Пусть C_1 такая последовательность подаваемых наборов, что автомат V с последовательностью C_1 реализует функцию f_1. Поскольку автомат V выдает значение 0 на первом наборе последовательности подаваемых наборов, то в последовательности C_1 первым является один из наборов $\widetilde{\alpha}(V)$ или $\widetilde{\beta}(V)$. Пусть первым набором последовательности C_1 является набор $\widetilde{\alpha}(V)$. Тогда в первый момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 0-состояние, не являющееся начальным. Значит, автомат V во второй момент времени так же будет выдавать значение 0, следовательно, вторым набором последовательности C_1 является набор $\widetilde{\beta}(V)$. Поскольку $\widetilde{\beta}(V) \notin E$, то в третий момент времени V также должен выдавать значение 0, что противоречит определению функции f_1. Пусть теперь первым

набором последовательности C_1 является набор $\widetilde{\beta}(V)$. Тогда в первый момент времени V или перейдет из начального 0-состояния в 1-состояние, или останется в начальном 0-состоянии. Если в первый момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 1-состояние, то во все дальнейшие моменты времени V останется в 1-состоянии, что противоречит $f_1(\widetilde{\alpha}(V)) = 0$. Если же в первый момент времени V останется в начальном 0-состоянии, то автомат V во второй момент времени так же будет выдавать значение 0, следовательно, вторым набором последовательности C_1 является набор $\widetilde{\alpha}(V)$. Поскольку $\widetilde{\alpha}(V) \in K$, то в третий момент времени V также должен выдавать значение 0, что противоречит определению функции f_1. Значит, автомат V не может реализовать функцию f_1. Поскольку $f_1 \notin \mathfrak{A}^q(V)$, то в силу теоремы 3.3.4 автомат V не является квазиуниверсальным.

Пусть теперь $\widetilde{\beta}(V) \in E$ и $\widetilde{\beta}(V) \notin A$. Обозначим через f_2 функцию из $P_2(n)$, такую, что f_2 принимает значение 0 только на наборе $\widetilde{\beta}(V)$. Поскольку $|(A \cup K)^0_{f_2}| = 0$ и $A \cup K \neq \emptyset$, то автомат V не может реализовать функцию f_2. Поскольку $f_2 \notin \mathfrak{A}^q(V)$, то в силу теоремы 3.3.4 автомат V не является квазиуниверсальным. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Поскольку для автоматов из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ выполнено неравенство $|A \cap E| \leq 1$, то из утверждения 3.3.25 можно получить следствие.

Следствие 3.3.10. *Если $n \geq 6$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ таков, что $\{\widetilde{\beta}(V)\} \neq A \cap E$, то автомат V не является квазиуниверсальным.*

Утверждение 3.3.26. *Если $n \geq 9$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ таков, что $|B| = 0$, то автомат V не является квазиуниверсальным.*

Доказательство. В силу условия $|B| = 0$ верно $T = B \cup T = \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)\}$. В силу следствия 3.3.9 верно $|A| \geq 2^n - 3$. Поскольку $V \in \mathfrak{V}_3^q(n)$, то верно $|A \cap E| \leq 1$. Следовательно,

$$|E| \leq |(\{0,1\}^n \backslash A) \cup (A \cap E)| \leq |(\{0,1\}^n \backslash A)| + |A \cap E| \leq 3 + 1 = 4.$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех функций из $P_2(n)$, таких, что они принимают значение 1 на наборах $\widetilde{\alpha}(V)$, $\widetilde{\beta}(V)$ и всех наборах множества E. Пусть функция f из $\mathfrak{S}$ может быть реализована автоматом V с последовательностью подаваемых наборов C. Поскольку $|B| = 0$ и $|T_f^1| = 2$, то при подаче наборов последовательности C автомат V два раза переходит из 1-состояния в 0-состояние, не являющееся начальным. Поскольку $|E_f^0| = 0$, то при подаче наборов последовательности C автомат V из 0-состояния, не являющегося начальным, не может перейти в 1-состояние. Значит, V выдает значение 0 по крайней мере на трех наборах. Следовательно, автомат V не может реализовать функции из $\mathfrak{S}$, принимающие значение 0 меньше, чем на трех наборах из $\{0,1\}^n$. Учитывая, что $|E| \leq 4$ и $\widetilde{\beta}(V) \in E$ в силу утверждения 3.3.25, оценим число a функций из $\mathfrak{S}$, которые не может реализовать автомат V:

$$a \geq C^0_{2^n-|E\cup\{\widetilde{\alpha}(V),\widetilde{\beta}(V)\}|} + C^1_{2^n-|E\cup\{\widetilde{\alpha}(V),\widetilde{\beta}(V)\}|} + C^2_{2^n-|E\cup\{\widetilde{\alpha}(V),\widetilde{\beta}(V)\}|} \geq$$

$$\geq C^0_{2^n-5} + C^1_{2^n-5} + C^2_{2^n-5} = 1 + 2^n - 5 + \frac{1}{2}\cdot(2^n-5)\cdot(2^n-6) =$$

$$= 2^n - 4 + 2^{2\cdot n-1} - 11\cdot 2^{n-1} + 15 = 2^{2\cdot n-1} - 9\cdot 2^{n-1} + 11.$$

При $n \geq 9$ верно неравенство $2^{2\cdot n-1} - 9\cdot 2^{n-1} + 11 > 2^n$. Следовательно, при $n \geq 9$ верно $a > 2^n$. Значит, при $n \geq 9$ автомат V не может реализовать по крайней мере 2^n+1 булеву функцию. Полученное противоречие с квазиуниверсальностью автомата V завершает доказательство. ■

Следствие 3.3.11. *Если $n \geq 9$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ является квазиуниверсальным, то выполнено $T = \{\widetilde{\alpha}(V)\}$ и $B = \{\widetilde{\beta}(V)\}$.*

Утверждение 3.3.27. *Если $n \geq 9$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3^q(n)$ таков, что $|A \cap M| \geq 2$, то автомат V не является квазиуниверсальным.*

Доказательство. В силу утверждения 3.3.25 верно $\widetilde{\beta}(V) \in A \cap E$. Поэтому поскольку $\widetilde{\alpha}(V) \in K$, $M \cap E = \emptyset$, $A \cap K = \emptyset$ и $|A \cap M| \geq 2$, то $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V) \notin A \cap M$, поэтому в $A \cap M$ найдутся два набора $\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2$ отличные от наборов $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)$.

Поскольку $\widetilde{\beta}(V), \widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2 \in A$ и $A \cap K = \emptyset$, то $\widetilde{\beta}(V), \widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2 \notin K$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех функций из $P_2(n)$, таких, что они принимают значение 0 на наборах $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V), \widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2$ и значение 1 на наборах множества $K \backslash \{\widetilde{\alpha}(V)\}$. Пусть функция f из $\mathfrak{S}$ может быть реализована автоматом V с последовательностью подаваемых наборов C. Поскольку автомат V выдает значение 0 на первом наборе из последовательности подаваемых наборов, то в последовательности C первым набором является один из наборов $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V), \widetilde{\mu}_1$ или $\widetilde{\mu}_2$. Если первым набором последовательности C является один из наборов $\widetilde{\beta}(V), \widetilde{\mu}_1$ или $\widetilde{\mu}_2$, то в первый момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 1-состояние. Поскольку $|(B \cup T)^1_f| = 0$, то V выдаст значение 1 на всех наборах последовательности C кроме первого, что противоречит определению функции f. Пусть теперь первым набором последовательности C является набор $\widetilde{\alpha}(V)$. Тогда в первый момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 0-состояние, не являющееся начальным. Значит, автомат V во второй момент времени так же выдаст значение 0, следовательно, вторым набором последовательности C является один из наборов $\widetilde{\beta}(V), \widetilde{\mu}_1$ или $\widetilde{\mu}_2$. Если вторым набором последовательности C является набор $\widetilde{\beta}(V)$, то во второй момент времени V перейдет из 0-состояния, не являющегося начальным, в 1-состояние. Поскольку $|(B \cup T)^1_f| = 0$, то V выдаст значение 1 на всех наборах последовательности C кроме первых двух, что противоречит определению функции f. Пусть теперь вторым набором последовательности C является один из наборов $\widetilde{\mu}_1$ или $\widetilde{\mu}_2$. Тогда во второй момент времени V перейдет из 0-состояния, не являющегося начальным, в начальное 0-состояние. Значит, автомат V в третий момент времени так же выдаст значение 0, следовательно, третьим набором последовательности C является один из наборов $\widetilde{\beta}(V)$ или $\widetilde{\mu}_i$, $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, в третий момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 1-состояние. Поскольку $|(B \cup T)^1_f| = 0$, то V выдаст значение 1 на всех наборах последовательности C кроме первых трех, что противоречит определению функции f. Значит, автомат V не может реализовать все функции из $\mathfrak{S}$. Учитывая, что $|K| \leq 2$ в

силу утверждения 3.3.24, оценим число a функций, которые не может реализовать автомат V: $a \geq |\mathfrak{S}| \geq 2^{2^n-5}$. Заметим, что при $n \geq 9$ верно $2^{2^n-5} > 2^n$. Полученное противоречие с квазиуниверсальностью автомата V завершает доказательство. ■

Таким образом, если автомат V из $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным, то V принадлежит множеству $\mathfrak{V}_3^q(n)$, и в силу утверждений 3.3.22, 3.3.23, 3.3.24, 3.3.27 и следствий 3.3.10 и 3.3.11 для V выполнены следующие ограничения:

1. $V \in \mathfrak{V}_3^q(n)$;
2. $B = \{\widetilde{\beta}(V)\}$;
3. $T = \{\widetilde{\alpha}(V)\}$;
4. $A \cap E = \{\widetilde{\beta}(V)\}$;
5. $|A \cup E| \geq 2^n - 1$;
6. $|A \cup K| \geq 2^n - 1$;
7. $|A \cap M| \leq 1$;
8. $|K| \leq 2$;

Обозначим множество всех автоматов из $\mathfrak{V}_3(n)$, для которых выполнены вышеперечисленные условия через $\mathfrak{W}^q(n)$. Пусть V — произвольный автомат из $\mathfrak{W}^q(n)$. Поскольку $\widetilde{\alpha}(V) \in K$, то для автоматов из $\mathfrak{W}^q(n)$ равенство $|K| = 0$ невозможно. Заметим, что в силу пункта 8 определения множества $\mathfrak{W}^q(n)$ неравенство $|K| \geq 3$ также невозможно. Значит, возможны два случая: $|K| = 1$ и $|K| = 2$. Обозначим через $\mathfrak{W}_1^q(n)$ и $\mathfrak{W}_2^q(n)$ множество всех автоматов из $\mathfrak{W}^q(n)$, для которых верно $|K| = 1$ и $|K| = 2$ соответственно. Таким образом, верно следующее утверждение.

Утверждение 3.3.28. *Если автомат из $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным, то V принадлежит одному из множеств $\mathfrak{W}_1^q(n)$ или $\mathfrak{W}_2^q(n)$.*

Утверждение 3.3.29. *Если V — квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{W}_1^q(n)$, такой, что $|A| = 2^n - 2$, то множество $\{0,1\}^n \backslash (A \cup K)$ состоит из единственного набора, принадлежащего множеству E, $n \geq 6$.*

Доказательство. Пусть автомат V является квазиуниверсальным, $|K| = 1$, $|A| = 2^n - 2$, где $n \geq 6$. Тогда множество $\{0,1\}^n \backslash (A \cup K)$ состоит из единственного набора, обозначим его через $\widetilde{x}$. Пусть $\widetilde{x} \notin E$. Обозначим через f булеву функцию, принимающую значение 0 на наборах $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{x}$ и значение 1 на всех остальных наборах. Пусть функция f может быть реализована автоматом V с последовательностью подаваемых наборов C. Поскольку автомат V выдает значение 0 на первом наборе последовательности C, то в последовательности C первым набором является один из наборов $\widetilde{\alpha}(V)$ или $\widetilde{x}$. Пусть первым набором последовательности C является набор $\widetilde{x}$. Поскольку $\widetilde{x} \notin A \cup K$, то в первый момент времени V останется в начальном 0-состоянии. Значит, автомат V во второй момент времени так же выдаст значение 0, следовательно, вторым набором последовательности C является набор $\widetilde{\alpha}(V)$. Поскольку $\widetilde{\alpha}(V) \in K$, то во второй момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 0-состояние, не являющегося начальным. Поэтому в третий момент времени V также выдаст значение 0, что противоречит определению функции f. Пусть теперь первым набором последовательности C является набор $\widetilde{\alpha}(V)$. Поскольку $\widetilde{\alpha}(V) \in K$, то в первый момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 0-состояние, не являющееся начальным. Значит, автомат V во второй момент времени так же выдаст значение 0, следовательно, вторым набором последовательности C является набор $\widetilde{x}$. Поскольку $\widetilde{x} \notin E$, то во второй момент времени V либо останется в 0-состоянии, не являющимся начальным, либо перейдет в начальное 0-состояние. Поэтому в третий момент времени V также выдаст значение 0, что противоречит определению функции f. Следовательно, $f \in \overline{P(V)}$. Поскольку $f \notin \mathfrak{A}^q(V)$, то в силу теоремы 3.3.4 автомат V не является квазиуниверсальным. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Утверждение 3.3.30. *Если V — квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{W}_2^q(n)$, то $|A| = 2^n - 2$, $n \geq 6$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть автомат V является квазиуниверсальным, $|K| = 2$, $|A| \neq 2^n - 2$, $n \geq 6$. В силу следствия 3.3.9 верно $|A| \geq 2^n - 3$. Поскольку $A \cap K = \emptyset$, то выполнено $|A| = 2^n - 3$. Обозначим через $\widetilde{\varkappa}$ единственный набор множества $K \backslash \{\widetilde{\alpha}(V)\}$, а через $\widetilde{x}$ единственный набор множества $\{0,1\}^n \backslash (A \cup K)$. Поскольку $\widetilde{\beta}(V) \notin K$, то набор $\widetilde{\varkappa}$ не может совпасть ни с одним из наборов $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)$. Поскольку $\widetilde{\beta}(V) \in A$ и $\widetilde{\alpha}(V) \in K$, то набор $\widetilde{x}$ не может совпасть ни с одним из наборов $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)$. Обозначим через f функцию из $P_2(n)$, такую, что f принимает значение 0 на наборах $\widetilde{x}, \widetilde{\varkappa}$ и значение 1 на всех остальных наборах. Пусть C такая последовательность подаваемых наборов, что автомат V с последовательностью C реализует функцию f. Поскольку автомат V выдает значение 0 на первом наборе из последовательности подаваемых наборов, то в последовательности C первым является один из наборов $\widetilde{x}$ или $\widetilde{\varkappa}$.

Пусть первым набором последовательности C является набор $\widetilde{x}$. Поскольку $\widetilde{x} \in \{0,1\}^n \backslash (A \cup K)$, то в первый момент времени V останется в начальном 0-состоянии. Значит, автомат V во второй момент времени так же выдаст значение 0, следовательно, вторым набором последовательности C является набор $\widetilde{\varkappa}$. Поскольку $\widetilde{\varkappa} \in K$, то во второй момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 0-состояние, не являющееся начальным. Следовательно, в третий момент времени V также должен выдавать значение 0, что противоречит определению функции f.

Пусть теперь первым набором последовательности C является набор $\widetilde{\varkappa}$. Поскольку $\widetilde{\varkappa} \in K$, то в первый момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 0-состояние, не являющееся начальным. Значит, автомат V во второй момент времени так же выдаст значение 0, следовательно, вторым набором последовательности C является набор $\widetilde{x}$. Поскольку функция f при-

нимает значение 0 только на двух наборах, то во второй момент времени V перейдет в 1-состояние. По крайней мере один из наборов $\widetilde{\alpha}(V)$ или $\widetilde{\beta}(V)$ не является последним набором последовательности C. Предположим для определенности, что это набор $\widetilde{\alpha}(V)$ и он имеет в последовательности C номер t, $3 \leq t \leq 2^n - 1$. Поскольку $\widetilde{\alpha}(V) \in B \cup T$, то в момент времени t автомат V перейдет из 1-состояния в одно из 0-состояний, а значит, в момент времени $t+1$ автомат V выдаст значение 0, что противоречит определению функции f.

Следовательно, автомат V не может реализовать функцию f. Поскольку $f \notin \mathfrak{A}^q(V)$, то в силу теоремы 3.3.4 автомат V не является квазиуниверсальным. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Утверждение 3.3.31. *Если $n \geq 6$ и V — квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{W}_2^q(n)$, то множество $K \backslash T$ состоит из единственного набора, принадлежащего множеству E, и $|E| = 2$.*

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{\varkappa}$ единственный набор множества $K \backslash T$. Пусть автомат V является квазиуниверсальным, $|K| = 2$ и $\widetilde{\varkappa} \notin E$ или $|E| \neq 2$. Предположим вначале, что $\widetilde{\varkappa} \notin E$. В силу утверждения 3.3.30 и неравенства $n \geq 6$ верно $|A| \geq 3$. Обозначим через $\widetilde{\gamma}$ один из наборов множества $A \backslash \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)\}$. Обозначим через f_1 булеву функцию, принимающую значение 0 на наборах $\widetilde{\varkappa}, \widetilde{\gamma}$ и значение 1 на всех остальных наборах. Если функция f_1 может быть реализована автоматом V, то в силу утверждения 3.3.6 верно неравенство $|(A \cup E)^0_{f_1}| \geq |(B \cup T)^1_{f_1}| = 2$. Поскольку $\widetilde{\varkappa} \notin A \cup E$, то $|(A \cup E)^0_{f_1}| = 1$. Следовательно, автомат V не может реализовать функцию f_1. Поскольку $f_1 \notin \mathfrak{A}^q(V)$, то в силу теоремы 3.3.4 автомат V не является квазиуниверсальным. Следовательно, $\widetilde{\varkappa} \in E$. Значит, поскольку $\widetilde{\beta}(V) \in E$, то $|E| \geq 2$. В силу утверждения 3.3.30 верно $|A| = 2^n - 2$. Поскольку $V \in \mathfrak{W}^q(n)$, то $A \cap E = \{\widetilde{\beta}(V)\}$. Следовательно, $|E| \leq 3$. Предположим, что $|E| \neq 2$, тогда $|E| = 3$ и $K \subseteq E$, следовательно, $E = \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V), \widetilde{\varkappa}\}$. Обозначим через f_2 булеву функцию, принимающую значение 0 на наборах $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V), \widetilde{\varkappa}$ и значение 1

на всех остальных наборах. Пусть C_2 такая последовательность подаваемых наборов, что автомат V с последовательностью C_2 реализует функцию f_2. Поскольку автомат V выдает значение 0 на первом наборе из последовательности подаваемых наборов, то в последовательности C первым является один из наборов $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)$ или $\widetilde{\varkappa}$. Если первым набором последовательности C_2 является набор $\widetilde{\beta}(V)$, то в первый момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 1-состояние. Поскольку $|(B \cup T)^1_{f_2}| = 0$, то V выдаст значение 1 на всех наборах последовательности C_2 кроме первого, что противоречит определению функции f_2. Пусть теперь первым набором последовательности C_2 является набор $\widetilde{\alpha}(V)$ или $\widetilde{\varkappa}$. Тогда в первый момент времени V перейдет из начального 0-состояния в 0-состояние, не являющееся начальным. Значит, автомат V во второй момент времени так же выдаст значение 0, следовательно, вторым набором последовательности C_2 является один из наборов $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)$ или $\widetilde{\varkappa}$. Поскольку $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V), \widetilde{\varkappa} \in E$, то во второй момент времени V перейдет в 1-состояние. Поскольку $|(B \cup T)^1_{f_2}| = |\{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)\}^1_{f_2}| = 0$, то V выдаст значение 1 на всех наборах последовательности C_2 кроме первых двух, что противоречит определению функции f_2. Значит, автомат V не может реализовать функцию f_2. Поскольку $f_2 \notin \mathfrak{A}^q(V)$, то в силу теоремы 3.3.4 автомат V не является квазиуниверсальным. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Опираясь на доказанные выше утверждения, опишем все возможные случаи инициальных булевых квазиуниверсальных автоматов с тремя константными состояниями.

Утверждение 3.3.32. *Если $n \geq 9$ и автомат V из $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным, то V принадлежит $\mathfrak{V}^0_3(n)$ и задается одним из следующих наборов условий:*

1. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M = \emptyset$;
2. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}\}$;

3. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M = \{\widetilde{\mu}\}$;

4. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\mu}\}$;

5. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, $M = \emptyset$;

6. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, $M = \{\widetilde{\mu}\}$;

7. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M = \emptyset$;

8. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}\}$;

9. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M = \{\widetilde{\mu}\}$;

10. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\mu}\}$;

11. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M = \emptyset$;

12. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M = \{\widetilde{\mu}\}$;

13. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M = \emptyset$;

14. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}\}$;

15. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M = \{\widetilde{\mu}\}$;

16. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\mu}\}$.

где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}$ — *различные наборы из* $\{0,1\}^n$.

Доказательство. Согласно утверждению 3.3.28 любой квазиуниверсальный автомат V из $\mathfrak{V}_3(n)$ содержится в одном из множеств $\mathfrak{W}_1^q(n)$, $\mathfrak{W}_2^q(n)$.

I. Пусть $V \in \mathfrak{W}_1^q(n)$. Тогда $T = K = \{\widetilde{\alpha}(V)\}$, $B = A \cap E = \{\widetilde{\beta}(V)\}$. В силу условий $A \cap K = \emptyset$, $|A \cup K| \geq 2^n - 1$ и $|K| = 1$ выполнено одно из равенств $|A| = 2^n - 1$, т. е. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}(V)\}$, или $|A| = 2^n - 2$, т. е. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{x}\}$ для некоторого $\widetilde{x} \in \{0,1\}^n$.

I.a. Пусть сначала $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}(V)\}$. Тогда в силу условия $A \cap E = \{\widetilde{\beta}(V)\}$ возможны два случая: $E = \{\widetilde{\beta}(V)\}$ или $E = \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)\}$.

I.a.1. Пусть $E = \{\widetilde{\beta}(V)\}$. Тогда в силу условий $E \cap M = \emptyset$ и $|A \cap M| \leq 1$ возможны следующие случаи: $M = \emptyset$ или $M = \{\widetilde{\alpha}(V)\}$, или $M = \{\widetilde{\mu}\}$, или $M = \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}(V)\}$, где $\widetilde{\mu}$ — некоторый набор, не совпадающий с наборами $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)$. Эти случаи соответствуют случаям 1–4 формулировки доказываемого утверждения.

I.a.2. Пусть теперь $E = \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)\}$. Тогда в силу условий $E \cap M = \emptyset$ и $|A \cap M| \leq 1$ возможны следующие случаи: $M = \emptyset$ или $M = \{\widetilde{\mu}\}$, где $\widetilde{\mu}$ — некоторый набор, не совпадающий с наборами $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)$. Эти случаи соответствуют случаям 5–6 формулировки доказываемого утверждения.

I.b. Пусть теперь $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{x}\}$, где $\widetilde{x}$ — некоторый набор, не совпадающий с наборами $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V)$. Тогда в силу утверждения 3.3.29 выполнено $\widetilde{x} \in E$. В силу условия $A \cap E = \{\widetilde{\beta}(V)\}$ возможны два случая: $E = \{\widetilde{\beta}(V), \widetilde{x}\}$ или $E = \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V), \widetilde{x}\}$.

I.b.1. Пусть $E = \{\widetilde{\beta}(V), \widetilde{x}\}$. Тогда в силу условий $E \cap M = \emptyset$ и $|A \cap M| \leq 1$ возможны следующие случаи: $M = \emptyset$ или $M = \{\widetilde{\alpha}(V)\}$, или $M = \{\widetilde{\mu}\}$, или $M = \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}(V)\}$, где $\widetilde{\mu}$ — некоторый набор, не совпадающий с наборами $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V), \widetilde{x}$. Эти случаи соответствуют случаям 7–10 формулировки доказываемого утверждения.

I.b.2. Пусть $E = \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V), \widetilde{x}\}$. Тогда в силу условий $E \cap M = \emptyset$ и $|A \cap M| \leq 1$ возможны следующие случаи: $M = \emptyset$ или $M = \{\widetilde{\mu}\}$, где $\widetilde{\mu}$ — некоторый на-

бор, не совпадающий с наборами $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V), \widetilde{x}$. Эти случаи соответствуют случаям 11–12 формулировки доказываемого утверждения.

II. Пусть теперь $V \in \mathfrak{W}_2^q(n)$. Обозначим через $\widetilde{\varkappa}$ единственный набор множества $K \backslash T$. Тогда $T = \{\widetilde{\alpha}(V)\}, K = \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\varkappa}\}$, $B = A \cap E = \{\widetilde{\beta}(V)\}$. В силу утверждений 3.3.30, 3.3.31 для V верно $|A| = 2^n - 2$, $\widetilde{\varkappa} \in E$ и $|E| = 2$. В силу условий $|A| = 2^n - 2$, $A \cap K = \emptyset$ и $K = \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\varkappa}\}$ выполнено $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\varkappa}\}$. Поскольку $\widetilde{\varkappa} \in E$, $A \cap E = \{\widetilde{\beta}(V)\}$, $|E| = 2$ и $\widetilde{\varkappa} \neq \widetilde{\beta}(V)$, то $E = \{\widetilde{\beta}(V), \widetilde{\varkappa}\}$. В силу условий $E \cap M = \emptyset$ и $|A \cap M| \leq 1$ возможны следующие случаи: $M = \emptyset$ или $M = \{\widetilde{\alpha}(V)\}$, или $M = \{\widetilde{\mu}\}$, или $M = \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}(V)\}$, где $\widetilde{\mu}$ — некоторый набор, не совпадающий с наборами $\widetilde{\alpha}(V), \widetilde{\beta}(V), \widetilde{\varkappa}$. Эти случаи соответствуют случаям 13–16 формулировки доказываемого утверждения.

Утверждение доказано. ■

Таким образом, мы перечислили все возможные случаи квазиуниверсальных автоматов из $\mathfrak{V}_3(n)$. Докажем квазиуниверсальность всех таких автоматов. Доказательство следующего утверждения дословно повторяет доказательство утверждения 3.3.4, поэтому приводиться не будет.

Утверждение 3.3.33. *Пусть V — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющий одному из условий $1, 2, 5$ утверждения 3.3.32, $n \geq 9$. Тогда V является квазиуниверсальным.*

Утверждение 3.3.34. *Пусть V — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющий одному из условий $3, 4, 6$ утверждения 3.3.32, $n \geq 9$. Тогда V является квазиуниверсальным.*

Доказательство. Рассмотрим инициальный автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющий одному из условий $3, 4, 6$ утверждения 3.3.32. Заметим, что V определяется множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, а также множествами $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$ и $M = \{\widetilde{\mu}\}$, или $E = \{\widetilde{\beta}\}$ и $M = \{\widetilde{\mu}\}$ или $M = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\mu}\}$,

где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}$ — некоторые различные двоичные наборы длины n, $n \geq 9$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из $P_2(n)$, $n \geq 2$. Рассмотрим восемь случаев.

1. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\mu}$, затем набор $\widetilde{\beta}$, и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-3} функций, удовлетворяющих случаю 1.

2. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = 0$, $f(\widetilde{\mu}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\beta}$, и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-3} функций, удовлетворяющих случаю 2.

3. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\mu}) = 0$, $f(\widetilde{\beta}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\mu}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\beta}$, далее набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-3} функций, удовлетворяющих случаю 3.

4. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = 1$. Если на всех наборах множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$ функция f принимает значение 1, то автомат V не может реализовать f. Пусть теперь $\widetilde{\gamma}$ — такой набор из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$, что $f(\widetilde{\gamma}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\gamma}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\beta}$, далее набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует $2^{2^n-3}-1$ функций, удовлетворяющих случаю 4.

5. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\beta}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\alpha}$, далее все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0 и, наконец, набор $\widetilde{\mu}$. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-3} функций, удовлетворяющих случаю 5.

6. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\mu}) = 1$, $f(\widetilde{\beta}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\beta}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-3} функций, удовлетворяющих случаю 6.

7. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = 1$, $f(\widetilde{\mu}) = 0$. Если на всех наборах множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$ функция f принимает значение 1, то автомат V не может реализовать f. Пусть теперь $\widetilde{\gamma}$ — такой набор из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$, что $f(\widetilde{\gamma}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\gamma}$, далее набор $\widetilde{\beta}$, затем набор $\widetilde{\mu}$, потом все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, далее набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\gamma}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует $2^{2^n-3} - 1$ функций, удовлетворяющих случаю 7.

8. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = 1$. Если функция f принимает значение 0 меньше, чем на 2 наборах множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$, то автомат V не может реализовать f. Пусть теперь $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ — различные наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\gamma}_1$, далее набор $\widetilde{\beta}$, затем набор $\widetilde{\gamma}_2$, потом все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, далее набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует $2^{2^n-3} - 1 - (2^n - 3) = 2^{2^n-3} - 2^n + 2$ функций, удовлетворяющих случаю 8.

Суммируя количество функций, которые может реализовать автомат V, получаем, что V может реализовать ровно $2^{2^n} - 2^n$ различных булевых функций от n переменных, $n \geq 2$. Утверждение доказано. ■

Сопоставим каждому автомату W из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющему одному из условий $7, 8, 11$ утверждения 3.3.32, автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющий

одному из условий $1, 2, 5$ утверждения 3.3.32, следующим образом. Пусть дан автомат W из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M = \emptyset$, поставим ему в соответствие автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M = \emptyset$. Пусть дан автомат W из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}\}$, поставим ему в соответствие автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}\}$. Пусть дан автомат W из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M = \emptyset$, поставим ему в соответствие автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, $M = \emptyset$. Сопоставленные таким образом автоматы V и W назовем соответственными. Верно следующее утверждение.

Утверждение 3.3.35. *Для любого $n \geq 9$ функция f из $P_2(n)$ может быть реализована автоматом W из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющим одному из условий $7, 8, 11$ утверждения 3.3.32, тогда и только тогда, когда f может быть реализована автоматом V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, являющимся соответственным автомату W, $n \geq 1$.*

Доказательство. Пусть V — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, где $n \geq 9$, удовлетворяющий одному из условий $1, 2, 5$ утверждения 3.3.32. В силу утверждения 3.3.33 верно $|P(V)| = 2^{2^n} - 2^n$. Пусть W — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, являющийся соответственным автомату V. В силу теоремы 3.3.1 верно $|P(W)| \leq 2^{2^n} - 2^n$. Следовательно, для доказательства утверждения 3.3.35 достаточно доказать, что любая функция, реализуемая автоматом V, может быть реализована автоматом W. Пусть дана функция f из $P_2(n)$, такая, что автомат V с некоторой последовательностью подаваемых наборов C_V реализует f. Отметим, что автомат W отличается от автомата V только переходами из 0-состояний при подаче входного набора $\widetilde{x}$. При реализации автоматами функции f, такой, что $f(\widetilde{x}) = 1$, данные

переходы не осуществляются. Поэтому если $f(\widetilde{x}) = 1$, то автомат W с последовательностью подаваемых наборов C_V реализует f. Пусть теперь $f(\widetilde{x}) = 0$. Построим такую последовательность подаваемых наборов C_W, что автомат W с последовательностью подаваемых наборов C_W реализует f.

1. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: первым подаем набор $\widetilde{x}$, потом подаем набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\beta}$, и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат W с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f.

2. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, $f(\widetilde{\beta}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{x}$, далее все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1 и, наконец, набор $\widetilde{\beta}$. Автомат W с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f.

3. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, $f(\widetilde{\beta}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{x}$, далее набор $\widetilde{\beta}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат W с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f.

4. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = 1$. В силу теоремы 3.3.4 и того, что автомат V является квазиуниверсальным и реализует функцию f, верно $f \notin \mathfrak{A}^q(V)$, а значит, существует набор $\widetilde{\gamma}$ из $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$ такой, что $f(\widetilde{\gamma}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\gamma}$, потом все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$,

на которых функция f принимает значение 1, далее набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\gamma}, \widetilde{x}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{x}$, и, наконец, набор $\widetilde{\beta}$. Автомат W с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию f.

Утверждение доказано. ■

Из утверждений 3.3.33 и 3.3.35 можно вывести следующее утверждение.

Утверждение 3.3.36. *Пусть V — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющий одному из условий $7, 8, 11$ утверждения 3.3.32, $n \geq 9$. Тогда V является квазиуниверсальным.*

Утверждение 3.3.37. *Пусть V — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющий одному из условий $9, 10, 12$ утверждения 3.3.32, $n \geq 9$. Тогда V является квазиуниверсальным.*

Доказательство. Рассмотрим инициальный автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющий одному из условий $9, 10, 12$ утверждения 3.3.32. Заметим, что V определяется множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, а также множествами $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$ и $M = \{\widetilde{\mu}\}$, или $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$ и $M = \{\widetilde{\mu}\}$ или $M = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\mu}\}$, где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}, \widetilde{x}$ — некоторые различные двоичные наборы длины n, $n \geq 9$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из $P_2(n)$, $n \geq 2$. Рассмотрим шестнадцать случаев.

1. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = f(\widetilde{x}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{x}$, потом набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\mu}$, затем набор $\widetilde{\beta}$, и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 1.

2. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = 0$, $f(\widetilde{x}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\mu}$, затем набор $\widetilde{\beta}$, и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 2.

3. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{x}) = 0$, $f(\widetilde{\mu}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{x}$, потом набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\beta}$, и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 3.

4. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = 0$, $f(\widetilde{\mu}) = f(\widetilde{x}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\beta}$, и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 4.

5. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\mu}) = f(\widetilde{x}) = 0$, $f(\widetilde{\beta}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{x}$, потом набор $\widetilde{\mu}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\beta}$, далее набор $\widetilde{\alpha}$, и, на-

конец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 5.

6. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\mu}) = 0$, $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{x}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\mu}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\beta}$, далее набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 6.

7. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{x}) = 0$, $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\alpha}$, далее все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, на которых функция f принимает значение 0, затем набор $\widetilde{x}$, потом все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, и, наконец, набор $\widetilde{\beta}$. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 7.

8. Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = f(\widetilde{x}) = 1$. Если на всех наборах множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}, \widetilde{x}\}$ функция f принимает значение 1, то автомат V не может реализовать f. Пусть теперь $\widetilde{\gamma}$ — такой набор из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}, \widetilde{x}\}$, что $f(\widetilde{\gamma}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\gamma}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\beta}$, далее набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множе-

ства $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует $2^{2^n-4}-1$ функций, удовлетворяющих случаю 8.

9. Пусть $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = f(\widetilde{x}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{x}$, потом набор $\widetilde{\beta}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\alpha}$, далее все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0 и, наконец, набор $\widetilde{\mu}$. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 9.

10. Пусть $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{x}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\beta}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\alpha}$, далее все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0 и, наконец, набор $\widetilde{\mu}$. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 10.

11. Пусть $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{x}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\mu}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{x}$, потом набор $\widetilde{\beta}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализо-

вать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 11.

12. Пусть $f(\widetilde{\beta}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\mu}) = f(\widetilde{x}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\beta}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 12.

13. Пусть $f(\widetilde{\mu}) = f(\widetilde{x}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\mu}$, далее все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, затем набор $\widetilde{\alpha}$, потом все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\mu}, \widetilde{x}\}$, на которых функция f принимает значение 0, далее набор $\widetilde{x}$, и, наконец, набор $\widetilde{\beta}$. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 13.

14. Пусть $f(\widetilde{\mu}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{x}) = 1$. Если на всех наборах множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}, \widetilde{x}\}$ функция f принимает значение 1, то автомат V не может реализовать f. Пусть теперь $\widetilde{\gamma}$ — такой набор из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}, \widetilde{x}\}$, что $f(\widetilde{\gamma}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\mu}$, далее все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, затем набор $\widetilde{\beta}$, далее набор $\widetilde{\gamma}$, затем набор $\widetilde{\alpha}$ и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов бу-

дет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует $2^{2^n-4}-1$ функций, удовлетворяющих случаю 14.

15. Пусть $f(\widetilde{x})=0$, $f(\widetilde{\alpha})=f(\widetilde{\beta})=f(\widetilde{\mu})=1$. Если на всех наборах множества $\{0,1\}^n\backslash\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\mu},\widetilde{x}\}$ функция f принимает значение 1, то автомат V не может реализовать f. Пусть теперь $\widetilde{\gamma}$ — такой набор из множества $\{0,1\}^n\backslash\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\mu},\widetilde{x}\}$, что $f(\widetilde{\gamma})=0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\gamma}$, далее все наборы из множества $\{0,1\}^n\backslash\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 1, затем набор $\widetilde{\alpha}$, потом все наборы из множества $\{0,1\}^n\backslash\{\widetilde{x}\}$, на которых функция f принимает значение 0, далее набор $\widetilde{x}$, и, наконец, набор $\widetilde{\beta}$. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует $2^{2^n-4}-1$ функций, удовлетворяющих случаю 15.

16. Пусть $f(\widetilde{\alpha})=f(\widetilde{\beta})=f(\widetilde{\mu})=f(\widetilde{x})=1$. Если функция f принимает значение 0 меньше, чем на 2 наборах множества $\{0,1\}^n\backslash\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\mu},\widetilde{x}\}$, то автомат V не может реализовать f. Пусть теперь $\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2$ — различные наборы из множества $\{0,1\}^n\backslash\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\mu},\widetilde{x}\}$, на которых функция f принимает значение 0. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\gamma}_1$, далее набор $\widetilde{\beta}$, затем набор $\widetilde{\gamma}_2$, потом все наборы из множества $\{0,1\}^n\backslash\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, далее набор $\widetilde{\alpha}$, и, наконец, все наборы из множества $\{0,1\}^n\backslash\{\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2\}$, на которых функция f принимает значение 0. Автомат V с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат V реализует $2^{2^n-4}-1-(2^n-4)=2^{2^n-4}-2^n+3$ функций, удовлетворяющих случаю 16.

Суммируя количество функций, которые может реализовать автомат V, получаем, что V может реализовать ровно $2^{2^n}-2^n$ различных булевых функций от n переменных. Утверждение доказано. ■

Сопоставим каждому автомату W из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющему одному из условий $13, 14, 15, 16$ утверждения 3.3.32, автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющий одному из условий $1, 2, 3, 4$ утверждения 3.3.32, следующим образом. Пусть дан автомат W из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M = \emptyset$, поставим ему в соответствие автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M = \emptyset$. Пусть дан автомат W из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}\}$, поставим ему в соответствие автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}\}$. Пусть дан автомат W из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M = \{\widetilde{\mu}\}$, поставим ему в соответствие автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M = \{\widetilde{\mu}\}$. Пусть дан автомат W из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\mu}\}$, поставим ему в соответствие автомат V из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, определяемый множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\mu}\}$. Сопоставленные таким образом автоматы V и W назовем соответственными. Верно следующее утверждение.

Утверждение 3.3.38. *Пусть W — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, где $n \geq 9$, удовлетворяющий одному из условий $13, 14, 15, 16$ утверждения 3.3.32, V — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, являющийся соответственным автомату W, а f — функция из $P_2(n)$, такая, что $f(\widetilde{\varkappa}) = 1$, где $\{\widetilde{\varkappa}\} = K \cap E$, ($E$ и K — множества, относящиеся к автомату W). Тогда функция f может быть реализована автоматом W тогда и только тогда, когда f может быть реализована автоматом V.*

Доказательство. Пусть V — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, где $n \geq 9$, удовлетворяющий одному из условий $1, 2, 3, 4$ утверждения 3.3.32. Пусть W — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, являющийся соответственным автомату V. Отметим, что автомат W отличается от автомата V только переходами из 0-состояний при подаче входного набора $\widetilde{\varkappa}$. При реализации автоматами функции f, такой, что $f(\widetilde{\varkappa}) = 1$, данные переходы не осуществляются. Докажем сначала, что любая функция f, реализуемая автоматом V, и такая, что $f(\widetilde{\varkappa}) = 1$, может быть реализована автоматом W. Пусть дана функция f из $P_2(n)$, такая, что $f(\widetilde{\varkappa}) = 1$, и автомат V с некоторой последовательностью подаваемых наборов C_V реализует f. Поскольку $f(\widetilde{\varkappa}) = 1$, то автомат W с последовательностью подаваемых наборов C_V также реализует функцию f. Докажем теперь, что любая функция f, реализуемая автоматом W, и такая, что $f(\widetilde{\varkappa}) = 1$, может быть реализована автоматом V. Пусть дана функция f из $P_2(n)$, такая, что $f(\widetilde{\varkappa}) = 1$, и автомат W с некоторой последовательностью подаваемых наборов C_W реализует f. Поскольку $f(\widetilde{\varkappa}) = 1$, то автомат V с последовательностью подаваемых наборов C_W также реализует функцию f. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.3.39. *Пусть W — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, удовлетворяющий одному из условий $13, 14, 15, 16$ утверждения 3.3.32, $n \geq 9$. Тогда W является квазиуниверсальным.*

Доказательство. Рассмотрим инициальный автомат W из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, где $n \geq 9$, удовлетворяющий одному из условий $13, 14, 15, 16$ утверждения 3.3.32. Заметим, что W определяется множествами $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, а также множеством $M \subseteq \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\mu}\}$, где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}$ — некоторые различные двоичные наборы длины n. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из $P_2(n)$. Рассмотрим девять случаев.

1. Пусть $f(\widetilde{\varkappa}) = 1$. Пусть V — автомат из $\mathfrak{V}_3^0(n)$, являющийся соответственным автомату W. В силу утверждений 3.3.33 и 3.3.34 автомат V является квазиуниверсальным. Поэтому из следствия 3.3.8 вытекает, что

автомат V реализует $2^{2^n-1} - (2^n - 1)$ функций, удовлетворяющих случаю 1. Следовательно, в силу утверждения 3.3.38 автомат W также реализует $2^{2^n-1} - (2^n - 1)$ функций, удовлетворяющих случаю 1.

2. Пусть автомат W удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\varkappa}) = f(\widetilde{\mu}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\mu}$, затем набор $\widetilde{\varkappa}$ далее набор $\widetilde{\beta}$, и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат W с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат W реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 2.

3. Пусть автомат W удовлетворяет одному из условий $13, 14$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\varkappa}) = 0$ или автомат V удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\varkappa}) = 0$, $f(\widetilde{\mu}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\varkappa}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\beta}$, и, наконец, все наборы, на которых функция f принимает значение 1. Автомат W с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, если автомат W удовлетворяет одному из условий $13, 14$ утверждения 3.3.32, то W реализует все 2^{2^n-3} функций, удовлетворяющих случаю 3. Если автомат W удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32, то W реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 3.

4. Пусть автомат W удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\varkappa}) = f(\widetilde{\mu}) = 0$, $f(\widetilde{\beta}) = 1$. Определим последователь-

ность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\mu}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\beta}$, далее набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0, и, наконец, набор $\widetilde{\varkappa}$. Автомат W с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат W реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 4.

5. Пусть автомат W удовлетворяет одному из условий $13, 14$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\varkappa}) = 0$, $f(\widetilde{\beta}) = 1$ или автомат V удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\varkappa}) = 0$, $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, на которых функция f принимает значение 0, потом набор $\widetilde{\varkappa}$, далее все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, и, наконец, набор $\widetilde{\beta}$. Автомат W с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, если автомат W удовлетворяет одному из условий $13, 14$ утверждения 3.3.32, то W реализует все 2^{2^n-3} функций, удовлетворяющих случаю 5. Если автомат W удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32, то W реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 5.

6. Пусть автомат W удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\varkappa}) = f(\widetilde{\mu}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\beta}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\alpha}$, далее все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0, затем набор $\widetilde{\mu}$, и, наконец, набор $\widetilde{\varkappa}$. Автомат W с такой последовательно-

стью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат W реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 6.

7. Пусть автомат W удовлетворяет одному из условий $13, 14$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\varkappa}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = 1$ или автомат V удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\varkappa}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\mu}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\beta}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, на которых функция f принимает значение 1, потом набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, на которых функция f принимает значение 0, и, наконец, набор $\widetilde{\varkappa}$. Автомат W с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, если автомат W удовлетворяет одному из условий $13, 14$ утверждения 3.3.32, то W реализует все 2^{2^n-3} функций, удовлетворяющих случаю 7. Если автомат W удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32, то W реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 7.

8. Пусть автомат W удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\varkappa}) = f(\widetilde{\mu}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = 1$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\mu}$, потом все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, далее набор $\widetilde{\alpha}$, затем все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\varkappa}, \widetilde{\mu}\}$, на которых функция f принимает значение 0, затем набор $\widetilde{\varkappa}$, и, наконец, набор $\widetilde{\beta}$, Автомат W с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, автомат W реализует все 2^{2^n-4} функций, удовлетворяющих случаю 8.

9. Пусть автомат W удовлетворяет одному из условий $13, 14$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\varkappa}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = 1$ или автомат V удовле-

творяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32 и $f(\widetilde{\varkappa}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\mu}) = 1$. Если V удовлетворяет одному из условий $13, 14$ утверждения 3.3.32 и на всех наборах множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$ функция f принимает значение 1, то автомат V не может реализовать f. Если V удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32 и на всех наборах множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}, \widetilde{\mu}\}$ функция f принимает значение 1, то автомат V не может реализовать f. Пусть теперь V удовлетворяет одному из условий $13, 14$ $(15, 16)$ утверждения 3.3.32 и $\widetilde{\gamma}$ — такой набор из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$ ($\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}, \widetilde{\mu}\}$ соответственно), что $f(\widetilde{\gamma}) = 0$. Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор $\widetilde{\gamma}$, далее все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, на которых функция f принимает значение 1, затем набор $\widetilde{\alpha}$, потом все наборы из множества $\{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\gamma}, \widetilde{\varkappa}\}$, на которых функция f принимает значение 0, затем набор $\widetilde{\varkappa}$, и, наконец, набор $\widetilde{\beta}$. Автомат W с такой последовательностью подаваемых наборов будет реализовать функцию f. Таким образом, если автомат W удовлетворяет одному из условий $13, 14$ утверждения 3.3.32, то W реализует $2^{2^n-3} - 1$ функций, удовлетворяющих случаю 9. Если автомат W удовлетворяет одному из условий $15, 16$ утверждения 3.3.32, то W реализует $2^{2^n-4} - 1$ функций, удовлетворяющих случаю 9.

Суммируя количество функций, которые может реализовать автомат W, получаем, что W может реализовать ровно $2^{2^n} - 2^n$ различных булевых функций от n переменных. Утверждение доказано. ■

Из утверждений 3.3.32, 3.3.33, 3.3.34, 3.3.36, 3.3.37, 3.3.39 можно вывести следующее следствие.

Теорема 3.3.5. *При $n \geq 9$ автомат V из $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным тогда и только тогда, когда V принадлежит $\mathfrak{V}_3^0(n)$ и задается одним из следующих наборов условий:*

1. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$;

2. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}\}$;

3. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$;

4. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}\}$;

5. $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$.

где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}$ *— различные наборы из* $\{0,1\}^n$.

3.4 Булев автомат с k константными состояниями, $k \geq 3$

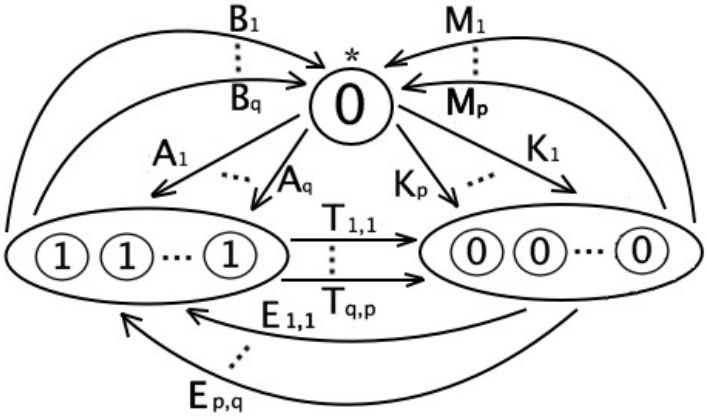


рис. 3

В данном параграфе рассматриваются инициальные булевы автоматы с k константными состояниями, где $k \geq 3$. Напомним, что под 0-состоянием инициального булевого автомата с константными состояниями понимается состояние с функцией выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а под 1-состоянием — состояние с функцией выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Без ограничения общности мы будем рассматривать инициальные булевы автоматы, содержащие хотя бы одно 0-состояние и хотя

бы одно 1-состояние, при этом начальным состоянием является 0-состояние. Множество таких автоматов с k константными состояниями и n входами обозначается через $\mathfrak{V}_k(n)$. Автомат V из $\mathfrak{V}_k(n)$ можно схематично изобразить с помощью диаграммы, изображенной на рис. 3, где p — количество 0-состояний автомата V отличных от начального, q — количество 1-состояний автомата V, $A_i, B_i, K_j, M_j, T_{i,j}, E_{j,i} \subseteq \{0,1\}^n$, $i \in \{1, 2, \cdots, q\}$, $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$, через A_i обозначено множество наборов, при подаче которых на входы автомата V автомат из начального 0-состояния переходит в i-ое 1-состояние; через B_i обозначено множество наборов, при подаче которых на входы автомата V автомат из i-ого 1-состояния переходит в начальное 0-состояние; через K_j обозначено множество наборов, при подаче которых на входы автомата V автомат из начального 0-состояния переходит в j-ое 0-состояние, не являющееся начальным; через M_j обозначено множество наборов, при подаче которых на входы автомата V автомат из j-ого 0-состояния переходит в начальное 0-состояние; через $T_{i,j}$ обозначено множество наборов, при подаче которых на входы автомата V автомат из i-ого 1-состояния переходит в j-ое 0-состояние, не являющееся начальным; через $E_{j,i}$ обозначено множество наборов, при подаче которых на входы автомата V автомат из j-ого 0-состояния, не являющегося начальным, переходит в i-ое 1-состояние. В кружочках написаны символы, соответствующие функции выхода в этом состоянии, звездочкой помечено начальное состояние автомата.

3.4.1 Свойства автоматов с k состояниями

Напомним, что через $P(V)$ обозначается множество всех булевых функций, реализуемых автоматом V.

В отличие от случая для инициального булева автомата с двумя константными состояниями, для автомата с k состояниями, где $k \geq 3$, максимальная мощность множества реализуемых автоматом функций не может достигаться для любого n при фиксированной мощности множеств

$A_i, B_i, K_j, M_j, T_{i,j}, E_{j,i} \subseteq \{0,1\}^n$, $i \in \{1,2,\cdots,q\}$, $j \in \{1,2,\cdots,p\}$. В частности, верно следующее утверждение, обобщающее утверждения 3.3.5 и 3.3.16 для автоматов из множества $\mathfrak{V}_3(n)$.

Утверждение 3.4.1. *Для любого $n \geq 1$ и автомата V из множества $\mathfrak{V}_k(n)$ верно $|P(V)| \leq \max(1, 2^{2^n} - \max(2^{2^n - |(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{j=1}^{p} K_j)|}, 2^{2^n - |(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{i=1,j=1}^{q,p} E_{j,i})|}))$.*

Доказательство. Автомат V не может реализовать функцию $f \in P_2(n)$, которая принимает значение 1 на всех наборах множества $(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{j=1}^{p} K_j)$ или принимает значение 1 на всех наборах множества $(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{i=1,j=1}^{q,p} E_{j,i})$. В случае, когда хотя бы одно из множеств $(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{i=1,j=1}^{q,p} E_{j,i})$, $(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{j=1}^{p} K_j)$ является пустым, в силу того, что автомат V в этом случае может реализовать только константу 0, верно равенство

$$\max(1, 2^{2^n} - \max(2^{2^n - |(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{j=1}^{p} K_j)|}, 2^{2^n - |(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{i=1,j=1}^{q,p} E_{j,i})|})) = 1.$$

Утверждение доказано. ■

Следствие 3.4.1. *Если $n \geq 1$ и автомат V из множества $\mathfrak{V}_k(n)$ таков, что $|(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{j=1}^{p} K_j)| \leq 2^n - n - 1$ или $|(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{i=1,j=1}^{q,p} E_{j,i})| \leq 2^n - n - 1$, то $|P(V)| < 2^{2^n} - 2^n - 1$.*

Утверждение 3.4.2. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_k(n)$, верно $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^n + |\cup_{i=1}^{q} A_i|$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{O}_0$ все булевы функции от n переменных, принимающие значение 0 ровно на одном наборе. Тогда автомат V не может реализовать функции $f \in \mathfrak{O}_0$, такие, что они принимают значение 0 на одном из наборов множества $\{0,1\}^n \backslash (\cup_{i=1}^{q} A_i)$. Таким образом, имеется по крайней мере $2^n - |\cup_{i=1}^{q} A_i|$ функций, которые V не может реализовать. Следовательно, верно неравенство $|P(V)| \leq 2^{2^n} - (2^n - |\cup_{i=1}^{q} A_i|)$. Утверждение доказано. ■

Поскольку верно равенство $(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cap (\cup_{i=1}^{q} K_i) = \emptyset$, то имеет место следствие из утверждения 3.4.2.

Следствие 3.4.2. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_k(n)$, верно $|P(V)| \leq 2^{2^n} - |\cup_{i=1}^{q} K_i|$.*

Утверждение 3.4.3. *Для любого $n \geq 3$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_k(n)$, такого, что $|(\cap_{i=1,j=1}^{q,p} T_{i,j}) \cup (\cap_{i=1}^{q} B_i)| \geq 3$, верно $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^n - 1$.*

Доказательство. Автомат V не может реализовать булевы функции, принимающие значение 1 хотя бы на трех наборах множества $(\cap_{i=1,j=1}^{q,p} T_{i,j}) \cup (\cap_{i=1}^{q} B_i)$ и значение 0 меньше, чем на трех наборах. Таким образом, имеется по крайней мере $C_{2^n-3}^{2} + C_{2^n-3}^{1} + C_{2^n-3}^{0} = 2^{2 \cdot n-1} - 5 \cdot 2^{n-1} + 4$ функций, которые V не может реализовать. Следовательно, при всех $n \geq 3$ верны неравенства $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^{2 \cdot n-1} + 5 \cdot 2^{n-1} - 4 \leq 2^{2^n} - 2^n - 1$. Утверждение доказано. ■

Напомним, что автоматы из $\mathfrak{V}_k(n)$, которые реализуют максимальное по мощности множество булевых функций, называются квазиуниверсальными. В силу утверждения 3.1.5 и следствия 3.3.6 для всех $k \geq 3$ и $n \geq 6$ верны соотношения $p_k(n) \geq p_3(n) = 2^{2^n} - 2^n$. Значит, из следствия 3.4.1 и утверждения 3.4.3 можно вывести следующее следствие.

Следствие 3.4.3. *Если $n \geq 3$, $k \geq 3$ и инициальный булев автомат V из $\mathfrak{V}_k(n)$ является квазиуниверсальным, то для него выполнены следующие условия:*

1. $|(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{j=1}^{p} K_j)| \geq 2^n - n$;
2. $|(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{i=1,j=1}^{q,p} E_{j,i})| \geq 2^n - n$;
3. $|(\cap_{i=1,j=1}^{q,p} T_{i,j}) \cup (\cap_{i=1}^{q} B_i)| \leq 2$.

3.4.2 Оценка сверху для автоматов из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$

Через $\mathfrak{V}_k^1(n)$ будем обозначать множество всех инициальных булевых автоматов с k константными состояниями и n входами, содержащих ровно одно

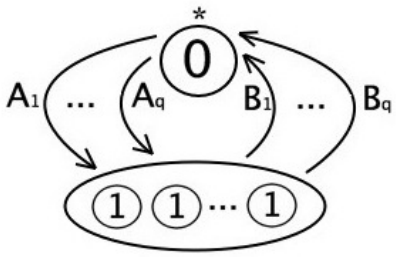


рис. 4

0-состояние, являющееся начальным, $n \geq 1$. Такие автоматы можно схематично изобразить с помощью диаграммы, изображенной на рис. 4, где q — это количество 1-состояний автомата V, $A_i, B_i \subseteq \{0,1\}^n$, $i \in \{1, 2, \cdots, q\}$, через A_i обозначено множество наборов, при подаче которых на входы V автомат из начального 0-состояния переходит в i-ое 1-состояние; через B_i обозначено множество наборов, при подаче которых на входы V автомат из i-ого 1-состояния переходит в начальное 0-состояние. В кружочках написаны символы, соответствующие функции выхода в этом состоянии, звездочкой помечено начальное состояние автомата.

Для автоматов из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$ верна следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 3.3.3 для автоматов из $\mathfrak{V}_3^1(n)$.

Теорема 3.4.1. *Для любого $n \geq 4$, любого $k \geq 3$ и любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$ верно $|P(V)| \leq 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}$.*

Сформулируем вспомогательное утверждение.

Утверждение 3.4.4. *Для любого $n \geq 1$, любого автомата V из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$ и любой реализуемой им булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполнено*[4] $|(\cup_{i=1}^q A_i)_f^0| - 1 \leq |(\cup_{i=1}^q B_i)_f^1|$.

Доказательство. Пусть $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ — последовательность всех двоичных наборов длины n, такая, что автомат V с последовательностью C реализует f. Тогда при последовательной подаче наборов последовательности C

[4]обозначения D_f^0 и D_f^1 для произвольного множества $D \subseteq \{0,1\}^n$ см. на стр. 88.

на входы автомата V, автомат V перейдет из 0-состояния в одно из 1-состояний ровно $|(\cup_{i=1}^{q} A_i)_f^0|$ раз, а из 1-состояний в 0-состояние не больше, чем $|(\cup_{i=1}^{q} B_i)_f^1|$ раз. Число переходов из 0-состояния в 1-состояния не более, чем на 1 превосходит число переходов из 1-состояний в 0-состояние, что и завершает доказательство. ■

Доказательство теоремы 3.4.1. Рассмотрим два случая.

- Пусть верно неравенство $|\cup_{i=1}^{q} A_i| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^n$. Тогда в силу утверждения 3.4.1 и равенства $\cup_{j=1}^{p} K_j = \emptyset$ верна оценка

$$|P(V)| \leq \max(1, 2^{2^n} - 2^{2^n - |(\cup_{i=1}^{q} A_i) \cup (\cup_{j=1}^{p} K_j)|}) = \max(1, 2^{2^n} - 2^{2^n - |(\cup_{i=1}^{q} A_i)|}) \leq$$

$$\leq \max\left(1, 2^{2^n} - 2^{2^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n}\right) = 2^{2^n} - 2^{\frac{1}{2} \cdot 2^n}.$$

- Пусть теперь $|\cup_{i=1}^{q} A_i| \geq \frac{1}{2} \cdot 2^n + 1$. Зафиксируем $\frac{1}{2} \cdot 2^n + 1$ наборов множества $|\cup_{i=1}^{q} A_i|$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех функций из $P_2(n)$, таких, что они принимают значение 0 ровно на $\frac{1}{2} \cdot 2^n$ из зафиксированных наборов множества $\cup_{i=1}^{q} A_i$. Пусть функция f из $\mathfrak{S}$ может быть реализована автоматом V. Тогда в силу утверждения 3.4.4 верно неравенство $|(\cup_{i=1}^{q} A_i)_f^0| - 1 \leq |(\cup_{i=1}^{q} B_i)_f^1|$. Следовательно, автомат V не может реализовать функции из $\mathfrak{S}$, принимающие значение 1 меньше, чем на $\frac{1}{2} \cdot 2^n - 1$ наборе. Обозначим через a количество функций из $\mathfrak{S}$, которые не может реализовать автомат V. Тогда выполнено

$$a \geq C^1_{\frac{1}{2} \cdot 2^n + 1} \cdot (2^{2^n - (\frac{1}{2} \cdot 2^n + 1)} - C^0_{\frac{1}{2} \cdot 2^n - 1} - C^1_{\frac{1}{2} \cdot 2^n - 1}) =$$

$$= (\frac{1}{2} \cdot 2^n + 1) \cdot (2^{\frac{1}{2} \cdot 2^n - 1} - 1 - \frac{1}{2} \cdot 2^n + 1) =$$

$$= 2^{\frac{1}{2} \cdot 2^n + n - 2} + 2^{\frac{1}{2} \cdot 2^n - 1} - 2^{2 \cdot n - 2} - 2^{n-1} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2} \cdot 2^n} \cdot (2^{n-2} + 2^{-1}) - 2^{2 \cdot n - 2} - 2^{n-1}. \quad (3.5)$$

Заметим, что

$$2^{\frac{1}{2} \cdot 2^n} \cdot (2^{n-2} + \frac{1}{2}) - 2^{2 \cdot n - 2} - 2^{n-1} \geq 2^{\frac{1}{2} \cdot 2^n} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2} \cdot 2^n} \cdot (2^{n-2} - \frac{1}{2}) \geq 2^{2 \cdot n - 2} + 2^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n} \geq 2^n + 4 + \frac{4}{2^{n-1}-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 2^n \geq \log_2 (2^n + 4 + \frac{4}{2^{n-1}-1}). \quad (3.6)$$

Кроме того, отметим, что при $n \geq 3$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{2}\cdot 2^n \geq n+1 \geq \log_2 (2^n + 6) \geq \log_2 (2^n + 4 + \frac{4}{2^{n-1}-1}).$$

Из данных неравенств и соотношений (3.5), (3.6) вытекает неравенство

$$a \geq 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n} \cdot (2^{n-2} + \frac{1}{2}) - 2^{2\cdot n-2} - 2^{n-1} \geq 2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n},$$

что и завершает доказательство теоремы. ■

Из следствия 3.3.6 и теоремы 3.4.1 можно вывести следствие.

Следствие 3.4.4. *Для любого $n \geq 4$ и любого $k \geq 3$ никакой автомат V из множества $\mathfrak{V}_k^1(n)$ не является квазиуниверсальным.*

3.4.3 Пример автомата с $2^n + 2$ состояниями, реализующего все булевы функции кроме констант

Утверждение 3.4.5. *Любой инициальный булев автомат с константными состояниями не может реализовать по крайней мере две функции алгебры логики.*

Доказательство. Пусть дан инициальный булев автомат с константными состояниями и n входами, $n \geq 1$. Без ограничения общности будем предполагать, что в начальном состоянии автомата функцией выхода является константа 0. Такой автомат заведомо не может реализовать булеву константу 1, поскольку выдает значение 0 по крайней мере на одном входном наборе. Рассмотрим множество $\mathfrak{E}$ наборов, при подаче которых автомат переходит из начального 0-состояния в одно из 1-состояний. Если это множество совпадает с множеством $\{0,1\}^n$, то автомат не может реализовать булеву константу 0, поскольку выдает значение 1 по крайней мере на одном входном наборе (втором

наборе подаваемой последовательности), следовательно, утверждение доказано. Пусть теперь существует набор $\widetilde{\alpha}$, не содержащийся в $\mathfrak{E}$. В таком случае автомат не может реализовать булеву функцию, принимающую значение 0 только на наборе $\widetilde{\alpha}$ и значение 1 на всех других наборах. Утверждение доказано. ■

Приведем пример инициального булевого автомата V_{all} с 2^n+2 константными состояниями, реализующего все булевы функции из $P_2(n)$ кроме констант. Обозначим через V_{all} автомат с двумя 0-состояниями, одно из которых является начальным, и 2^n 1-состояниями, имеющий следующую функцию переходов. Пусть $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n}$ — некоторая последовательность всех наборов из $\{0,1\}^n$. Опишем функцию переходов автомата V_{all}. Автомат V_{all} переходит из начального 0-состояния в i-ое 1-состояние при подаче набора $\widetilde{\alpha}_i$ и из i-ого 1-состояния в 0-состояние, не являющееся начальным, при подаче набора $\widetilde{\alpha}_{i+1}$, где $\widetilde{\alpha}_i \in \{0,1\}^n$, $i \in \{1, 2, \cdots, 2^n\}$, $\widetilde{\alpha}_{2^n+1} = \widetilde{\alpha}_1$. При подаче на вход автомата V_{all}, находящегося в i-ом 1-состоянии, любого набора, кроме набора $\widetilde{\alpha}_{i+1}$, автомат остается в том же состоянии. При подаче на вход автомата V_{all}, находящегося в 0-состоянии, не являющемся начальным, любого набора автомат остается в том же состоянии. Диаграмма переходов автомата V_{all} схематично изображена на рис. 5. В кружочках написаны символы, соответствующие функции выхода в этом состоянии, а на стрелках — наборы, при подаче которых на вход автомата автомат из состояния, из которого идет стрелка, переходит в состояние, на которое указывает стрелка. Звездочкой помечено начальное состояние автомата.

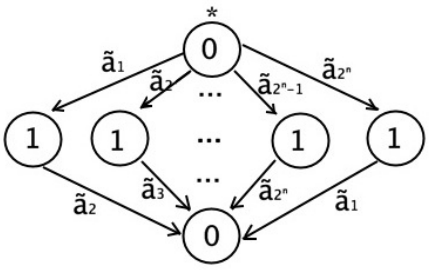


рис. 5

Утверждение 3.4.6. *Для любого $n \geq 1$ автомат V_{all} реализует все булевы функции из $P_2(n)$ кроме констант.*

Доказательство. Пусть f — некоторая булева функция из множества $P_2(n)\backslash\{0,1\}$. Поскольку $f \neq 0, 1$, то существует такое i, $1 \leq i \leq 2^n$, что верны равенства: $f(\widetilde{\alpha}_i) = 1$ и $f(\widetilde{\alpha}_{i-1}) = 0$, где мы считаем $\widetilde{\alpha}_0$ равным $\widetilde{\alpha}_{2^n}$. Построим последовательность подаваемых наборов C, такую, что автомат V_{all} с последовательностью C реализует функцию f. Первым набором последовательности C является набор $\widetilde{\alpha}_{i-1}$. Затем идут все наборы, на которых f принимает значение 1, кроме набора $\widetilde{\alpha}_i$. Потом идет набор $\widetilde{\alpha}_i$. Затем подаются все наборы, на которых функция f принимает значение 0, кроме набора $\widetilde{\alpha}_{i-1}$. Автомат V_{all} с такой последовательностью подаваемых наборов C реализует функцию f. Утверждение доказано. ■

Из утверждений 3.4.5 и 3.4.6 можно извлечь следующие следствия.

Следствие 3.4.5. *Для любого $n \geq 1$ и любого $k \geq 1$ верно неравенство $p_k(n) \leq 2^{2^n} - 2$.*

Следствие 3.4.6. *Для любого $n \geq 1$ и любого $m \geq 2^n + 2$ верно $p_m(n) = 2^{2^n} - 2$.*

Заключение

В диссертации введены понятия автоматного замыкания и обобщенного замыкания множества булевых функций. Показано, что обобщенные формулы являются в выразительном плане ослабленным вариантом автоматных формул. Получено описание всех автоматно замкнутых классов булевых функций. Исследована проблема реализации булевых функций обобщенными формулами специального вида, а именно, обобщенными α-формулами (то есть такими формулами, в которых каждая подформула имеет не более одной подформулы, отличной от символа переменной). Для замкнутых классов T_0, T_1 и $T_0 \cap T_1$ найдены конечные системы булевых функций, полные в классе обобщенных α-формул. Показано, что для этих систем автоматное замыкание совпадает с замыканием в классе обобщенных формул.

Исследован частный случай операции автоматного замыкания с точки зрения «выразительной силы» этой операции: рассмотрена задача о реализации булевых функций от n переменных булевыми автоматами с константными состояниями и с n входами, то есть такими автоматами с входным и выходным алфавитами $\{0, 1\}$, у которых в каждом состоянии функция выхода — это одна из функций $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при условии возможности произвольного порядка подачи наборов значений входных переменных на входы автомата. Получено точное значение максимальной мощности множества булевых функций, которые могут быть реализованы одним инициальным булевым автоматом с двумя или тремя константными состояниями. Получена точная оценка максимального числа булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых инициальным булевым автоматом с произвольным количеством константных состояний, где $n > 1$.

В то же время, изучение выразительной силы обобщенных формул произвольного вида остается открытым для дальнейших исследований. Перспективной для дальнейших исследований представляется задача об описании автоматно замкнутых и обобщенно замкнутых классов функций многозначной логики.

Также следует отметить ряд нерешенных задач, связанных с изучением свойств универсальных и квазиуниверсальных автоматов: получение оценок мощности множеств функций, реализуемых одним автоматом с произвольным числом константных состояний, описание квазиуниверсальных автоматов с произвольным числом состояний, оценка минимального числа состояний автомата, реализующего максимально возможное число $(2^{2^n}-2)$ булевых функций. Кроме того, представляет интерес решение аналогичных задач для автоматов, в состояниях которых реализуются булевы функции, отличные от констант.

Таким образом, область исследований задач, которым посвящена данная работа, представляется достаточно обширной и заслуживает дальнейшего изучения и развития.

Литература

1. *Аманжаев Г. Г.* О замыкании ненулевого инвариантного класса Яблонского по операции отождествления переменных // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 3. С. 76–79.

2. *Бабин Д. Н.* Неразрешимость проблемы полноты и A-полноты некоторых систем автоматных функций // Дискретная математика. 1995. Т. 7, № 2 С. 52–65.

3. *Байрамов Р. А.* Об одной серии предполных классов в k-значной логике // Кибернетика. 1967. № 1. С. 7–9.

4. *Буевич В. А.* О τ-полноте в классе автоматных отображений // Доклады Академии наук. 1980. Т. 252, № 5. С. 221–224.

5. *Буевич В. А.* О τ-полноте в классе детерминированных функций // Доклады Академии наук. 1992. Т. 326, № 3. С. 399–403.

6. *Буевич В. А.* Построение универсальной о.-д. функции от двух входных переменных // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 15. С. 249–252.

7. *Буевич В. А.* Построение универсальной о.-д. функции от двух входных переменных, имеющей два внутренних состояния // Проблемы кибернетики. 1970. Вып. 22. С. 75–83.

8. *Буевич В. А.* Условия A-полноты для конечных автоматов, ч.1. Москва : Изд-во МГУ, 1986. 101 с.

9. *Буевич В. А.* Условия A-полноты для конечных автоматов, ч.2. Москва : Изд-во МГУ, 1987. 108 с.

10. *Бурле Г. А.* Классы k-значной логики, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. 1967. Вып. 10. С. 3–7.

11. *Глухов М. М.* Об α-замкнутых классах и α-полных системах функций k-значной логики // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 1. С. 16–21.

12. *Голунков Ю. В.* Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции k-значной логики // Вероятностные методы и кибернетика. 1980. Вып. 17. С. 23–24.

13. *Данильченко А. Ф.* О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397–416.

14. *Захарова Е. Ю.* Об одном достаточном условии полноты в P_k // Проблемы кибернетики. 1966. Вып. 16. С. 239–244.

15. *Захарова Е. Ю.* Критерий полноты системы функций из P_k // Проблемы кибернетики. 1967. Вып. 18. С. 5–10.

16. *Касим-Заде О. М.* О классах функций, инвариантных относительно подстановки функций от одной переменной // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 3. С. 79–82.

17. *Касим-Заде О. М.* О метрических свойствах обобщенных инвариантных классов // Математические вопросы кибернетики. 2006. Вып. 15. С. 9–34.

18. *Касим-Заде О. М.* О неявной выразимости булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 2. С. 44–49.

19. *Касим-Заде О. М.* О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Доклады Академии наук. 1996. Т. 348, № 3. С. 299–301.

20. *Кибкало М. А.* Автоматная сложность булевых функций из классов Поста : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 / Кибкало Мария Александровна. Москва, 2013. 22 с.

21. *Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А.* Введение в теорию конечных автоматов. М. : Физматгиз, 1962. 404 с.

22. Конспект лекций О. Б. Лупанова по курсу "Введение в математическую логику"// Отв. ред. А. Б. Угольников. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, 2007. 192 с.

23. *Кратко М. И.* Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 155, № 1. С. 35–37.

24. *Кудрявцев В. Б.* Алгебры автоматов // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. С. 37–66.

25. *Кудрявцев В. Б.* Вопросы полноты для систем автоматов // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 130, № 6. С. 1190–1192.

26. *Кудрявцев В. Б.* О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 13. С. 45–74.

27. *Кудрявцев В. Б.* Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей // Проблемы кибернетики. 1962. Вып. 8. С. 91–115.

28. *Кудрявцев В. Б.* Функциональные системы. М. : Изд-во МГУ, 1982. 158 с.

29. *Кудрявцев В. Б.* Функциональные системы автоматов // Интеллектуальные системы. М. : Изд-во РГГУ, 2006. Т. 10, вып. 1-4. С. 565–602.

30. *Кудрявцев В. Б, Алёшин С. В., Подколзин А. С.* Введение в теорию автоматов. Москва : Москва, 1985. 320 с.

31. *Кузнецов А. В.* Алгебра логики и ее обобщения // Математика в СССР за 40 лет (1917–1957). М. : Физматгиз, 1959. Т. 1. С. 102–115.

32. *Кузнецов А. В.* О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. - М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 145–146.

33. *Кузнецов А. В.* О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.

34. *Кузнецов Ю. В.* Исследование инвариантных классов, связанных с функциональными системами : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 / Кузнецов Юрий Владимирович. Москва, 1987. 12 с.

35. *Кузнецов Ю. В.* О классах булевых функций, инвариантных относительно отождествления переменных // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290, № 4. С. 780-785.

36. *Кузьмин В. А.* Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 13. С. 75–96.

37. *Мартынюк В. В.* Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. 1960. Вып. 3. С. 49–60.

38. *Марченков С. С.* Замкнутые классы булевых функций. М. : Физмат-лит, 2000. 126 с.

39. *Марченков С. С.* Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискретная математика. 1996. Т. 8, № 1. С. 99–128.

40. *Марченков С. С.* S-классификация идемпотентных алгебр с конечными носителями // Доклады РАН. 1996. Т. 348, № 5. С. 587–589.

41. *Марченков С. С.* S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. 1997. Т. 9, № 3. С. 125–152.

42. *Марченков С. С., Угольников А. Б.* Замкнутые классы булевых функций. М. : ИПМ им. М.В. Келдыша, 1990. 148 с.

43. *Нгуен Ван Хоа.* О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики в P_3 // Дискретная математика. 1992. Т. 4, № 4. С. 82–95.

44. *Нгуен Ван Хоа.* О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 87–108.

45. *Нгуен Ван Хоа.* Описание замкнутых классов в k-значной логике, сохраняемых всеми автоморфизмами // Доклады АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 3. С. 16–29.

46. *Орехова Е. А.* Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. М. : Физматлит, 2003. Вып. 12. С. 27–75.

47. *Орлов В. А.* О сложности реализации ограниченно-детерминированных операторов схемами в автоматных базисах // Проблемы кибернетики. 1973. Вып. 26. С. 141–182.

48. *Соловьев В. Д.* Замкнутые классы в k-значной логике с операцией разветвления по предикатам // Дискретная математика. 1990. Т. 2, вып. 4. С. 18–25.

49. *Тайманов В. А.* О функциональных системах k-значной логики операциями программного типа // Доклады Академии наук СССР. 1983. Т. 268, № 6. С. 1307–1310.

50. *Тайманов В. А.* Функциональные системы с операциями замыкания программного типа : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 / Тайманов Владимир Асанович. Москва, 1983. 142 с.

51. *Тарасова О. С.* Классы k-значной логики, замкнутые относительно расширенной операции суперпозиции // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2001. Вып. 6. С. 54–57.

52. *Тарасова О. С.* Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановок // Математические вопросы кибернетики. 2004. Вып. 13. С. 59–112.

53. *Тарасова О. С.* Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановки // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2004. Вып. 1. С. 25–29.

54. *То Суан Зунг.* Об асимптотических закономерностях сложности автоматов из некоторых классов // Проблемы кибернетики. 1970. Вып. 22. С. 5–44.

55. *Трущин Д. В.* О глубине α-пополнения систем булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2009. № 2 С. 72–75.

56. *Трущин Д. В.* Об оценках глубины α-пополнений систем функций трехзначной логики // Проблемы теоретической кибернетики: Материалы XVI международной конференции. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2011. С. 484–487.

57. *Угольников А. Б.* О замкнутых классах Поста // Известия вузов. Математика. 1988. № 7. С. 79–88.

58. *Угольников А. Б.* О некоторых задачах в области многозначных логик. // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля, 2010 г.) / Под редакцией О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. С. 18–34.

59. *Угольников А. Б.* Классы Поста. М. : Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, 2008. 64 с.

60. *Чернышов А. Л.* Условия α-полноты систем функций многозначной логики // Дискретная математика. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 117–130.

61. *Шабунин А. Л.* Примеры α-полных систем k-значной логики при $k = 3, 4$ // Дискретная математика. 2006. Т. 18, вып. 4. С. 45–55.

62. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М. : Высшая школа, 2008. 384 с.

63. *Яблонский С. В.* Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. 1959. Вып. 2. С. 75–121.

64. *Яблонский С. В.* Об одном семействе классов функций алгебры логики, допускающих простую схемную реализацию. Труды III Всесоюзного съезда, 1956. Т. 2. С. 149.

65. *Яблонский С. В.* О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Доклады Академии наук СССР. 1954. Т. 95, № 6. С. 1152–1156.

66. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института АН СССР им. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

67. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М. : Наука, 1966. 120 с.

68. *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.

69. *Barris S., Willard R.* Finitely many primitive positive clones // Proc. of the American Mathematical Society. 1987. 101. P. 427–430.

70. *Kuntzman J.* Algebra de Boole. Bibliothegue de l'Ingenieur // Automaticien. - Paris : Dunod. 1965. № 1.

71. *Lau D.* On closed subsets of Boolean functions (A new proof for Post's theorem) // J. Process. Cybern. EIK. 1991. Bd. 23, 3. P. 167–178.

72. *Lo Czu-Kai.* On the precompleteness of the classes of functions preserving a partition // Acta. Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1963. V. 2. P. 105–116 (Chinese).

73. *Lo Czu-Kai., Lju Sjui Hua.* Precomplete classes defined by binary relations in many-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1963. V. 4 (Chinese).

74. *Lo Czu-Kai.* Precomplete classes defined by normal k-ary relations in k-valued logics // Acta. Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1964. V.3. P. 39–50 (Chinese).

75. *Lo Czu-Kai.* The precompleteness of a set and rings of linear functions // Acta. Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1963. V. 2. P. 1–14 (Chinese).

76. *Pan Jun-Cze.* A solving method for finding all precomplete classes in many-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1962. V. 2 (Chinese).

77. *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. V. 43, № 3. P. 163–185.

78. *Post E. L.* The two-valued iterative systems of mathematical logic. Annals of Math. Studies. Princeton University Press, 1941. V. 5.

79. *Reschke M., Denecke K.* Ein neuer Beweis für die Ergebnisse von E. L. Post über abgeschlossene Klassen Boolescher Funktionen // J. Process. Cybern. EIK. 1989. Bd. 7. P. 361–380.

80. *Rosenberg I. G.* La structure des functions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris, Group 5. 1965. V. 260. P. 3817–3819.

81. *Rosenberg I. G.* Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přiv. Věd., Praha. 1970. V. 80. P. 3–93.

82. *Slupecki J.* Kriterium pélnosci wielowartosciowych systemow logiki zdań // C. R. Séanc. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III. 1939. V. 32. P. 102–109.

Публикации автора по теме диссертации

83. *Сысоева Л. Н.* О некоторых свойствах обобщенных α-формул // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2013. № 4. С. 51–55.

Sysoeva L. N. Certain properties of generalized α-formulas / Пер. с рус. // Moscow University Mathematics Bulletin. 2013. V. 68, № 4. P. 211–214.

84. *Сысоева Л. Н.* О реализации булевых функций обобщенными α-формулами // Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки. 2014. Т. 156, № 3. С. 116–122.

85. *Сысоева Л. Н.* Максимальное число булевых функций, реализуемых инициальным булевым автоматом с двумя константными состояниями // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2016. № 4. С. 12–17.

Sysoeva L. N. Maximal number of Boolean functions realized by an initial Boolean automaton with two constant states / Пер. с рус. // Moscow University Mathematics Bulletin. 2016. V. 71, № 4. P. 140–145.

86. *Сысоева Л. Н.* Максимальные множества булевых функций, реализуемых инициальным булевым автоматом с двумя или тремя константными состояниями // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. Т. 20, вып. 4. С. 95–99.

87. *Сысоева Л. Н.* Универсальные множества обобщенных формул // Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.). / Под редакцией О. М. Касим-Заде. М. : Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. С. 218–220.

88. *Сысоева Л. Н.* О реализации булевых функций обобщенными формулами // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVII междуна-

родной конференции (Казань, 16–20 июня 2014 г.). / Под редакцией Ю. И. Журавлева. Казань : Отечество, 2014. С. 268–270.

89. *Сысоева Л. Н.* Максимальное число булевых функций, порождаемых инициальным автоматом с двумя константными состояниями // IX Международная конференция, Москва и Подмосковье, 20–22 мая 2015 г.: Труды / Отв. ред. В. Б. Алексеев, Д. С. Романов, Б. Р. Данилов. М. : МАКС Пресс, 2015. С. 239–241.

90. *Сысоева Л. Н.* Оценки на число булевых функций, реализуемых инициальным константным булевым автоматом с тремя состояниями // Материалы X молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 5–11 октября 2015 г.). / Под редакцией А. В. Чашкина. М. : ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015. С. 74–78.

91. *Сысоева Л. Н.* Квазиуниверсальные инициальные булевы автоматы с константными состояниями // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2016 г.). / Под редакцией О. М. Касим-Заде. М. : Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2016. С. 229–232.