Московский Государственный Университет им.
М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Кобельков Сергей Георгиевич

Некоторые задачи асимптотического анализа вероятностей высоких выбросов гауссовских процессов

специальность 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва, 2006

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей Механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В.И. Питербарг
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор М.А. Лифшиц
	доктор физико-математических наук, гл.н.с. В.Д. Конаков
Ведущая организация:	Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Защита диссертации состоится 1 декабря 2006 г. в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 1 ноября 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор Т.П. Лукашенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Задача асимптотического анализа вероятностей высоких выбросов гауссовских процессов является актуальной уже в течение длительного промежутка времени. Разработан ряд общих методов ее решения в дискретном и непрерывном случаях. К ним относятся метод сравнений, метод моментов[1], основанный на формуле Райса, и метод двойных сумм[2], базирующийся на лемме Пикандса и идее подсчета вероятности на измельчении параметрического множества. Многие задачи асимптотического анализа вероятностей могут быть сведены к задаче о разорении.

Пусть скорость поступлений доходов некоторой компании $c > 0$ а суммарные расходы представляют собой случайный процесс $X_t, t \geq 0, X_0 = 0$. Пусть также u — начальный капитал компании. Тогда в момент времени t капитал составляет величину $u + ct - X_t$. Разорение происходит, если в какой-либо момент выполняется соотношение $u + ct - X_t < 0$. Таким образом, вероятность разорения есть

$$\psi(u) = \mathbf{P}(\inf_{t\geq 0}(u + ct - X_t) < 0) = \mathbf{P}(\sup_{t\geq 0}(X_t - ct) > u).$$

Классическим примером задачи о разорении является модель страхования Крамера-Лундберга[3], в которой $c > 0$ — скорость поступления взносов, $X_t = \sum_{j=1}^{N_t} \eta_j$, N_t — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$, а η_j — независимые одинаково распределенные случайные величины, представляющие индивидуальные страховые выплаты такие, что $\mathbf{E}e^{v\eta_1} < \infty$ для любого $v > 0$

[1] Питербарг В.И. Метод Райса для гауссовских случайных полей. Фунд. и прикл. матем. 1996. **2**. 187–204

[2] Питербарг В.И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Изд-во МГУ, 1988

[3] Cramer H. Collective Risk Theory, Esselte, Stockholm (1955)

и $c > \lambda \mathbf{E}\eta_1$. Тогда для вероятности разорения выполняется оценка

$$\mathbf{P}(\sup_{t\geq 0} X_t - ct > u) \leq e^{-uv_0},$$

где $v_0 > 0$ — (единственный) корень уравнения $\lambda(\mathbf{E}e^{v\eta_1} - 1) = vc$.

Ряд вопросов, связанных со случайным блужданием с отрицательным сносом допускает интерпретацию в рамках задачи о разорении[4]. Также важными для приложений оказываются случаи зависимых выплат, выплат с тяжелыми хвостами распределений[5].

В теории очередей рассматривается величина

$$Q(t) = \sup_{0\leq s\leq t} (Q(0) + \xi(t) - \mu t, \xi(t) - \xi(s) - \mu(t-s)),$$

называемая загруженностью очереди, где $\xi(t)$ — суммарный объем входящего трафика на интервале $[0,t]$, а μ — скорость обработки данных. $Q(0)$ — загруженность в начальный момент времени. Задача нахождения вероятности переполнения $\mathbf{P}(Q(T) > u)$ также сводится к задаче о разорении[6].

Результаты исследований процесса передачи данных в сети интернет показали, что для процесса $\xi(t)$ характерна автомодельность[7]. Данное предположение было реализовано в модели $\xi(t) = B_H(t)$, где $B_H(t)$ — дробное броуновское движение с показателем Харста H. Точная асимптотика для вероятности (разорения) переполнения $\psi(u)$ при $u \to \infty$ была получена в работе Ю.Хюслера и В.Питербарга[8].

Для $\xi(t) = \int_0^t Z(s)ds$, где $Z(s)$ — стационарный центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией $R(t)$, различают два случая:

---

[4]Mikosch T., Samorodnitsky G. The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps. Ann. Appl. Probab. 2000, V. 10., pp. 1025–1064

[5]Embrechts P., Veraverbeke N. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. Insurance: Mathematics and Economics, **1**, 55–72, 1982

[6]Gaussian fluid models; a survey. Symposium on Performance Models for Information Communication Networks. Sendai, 23-25.01.2000

[7]Norros I. A storage model with self-similar input. Queueing Systems. 1994. **16**. 387–396

[8]Hüsler J., Piterbarg V. Extremes of a certain class of Gaussian processes. Stochast. Proc. and Appl. 1999. **83**. 257–271

- длинной памяти $\int_0^\infty |R(t)|dt = \infty$,
- короткой памяти $\int_0^\infty |R(t)|dt < \infty$.

Модель с непрерывной, медленно меняющейся (случай длинной памяти) на бесконечности $R(t)$ с показателем $a = 2H-2,\ H \in (1/2, 1)$, рассмотрена Ю.Хюслером и В.Питербаргом[9], а также Т.Дьекером[10]. Для нее получена асимптотика вероятности разорения в следующем виде:

$$\psi(u) = (\sigma^4(1-a)(2-a)4/a^2)^{-1/(2-a)} \frac{\sqrt{\pi}\mathcal{H}_{B_{1-a/2}}\sqrt{R(u)}}{\sqrt{B}g(u)} \times$$
$$\Psi\left(\frac{1}{\sqrt{R(u)}\sigma_u}\right)(1+o(1)),$$

где $g = g(x)$ — минимальный корень уравнения

$$g^2R(gx) = R^2(x),$$
$$\sigma_u^2 = \sup \sigma_u^2(s) = (2/(1+cs)^2) \int_0^s (s-v)R(uv)/r(v)dv,$$
$$\sigma^2 = \lim_{u\to\infty} \sigma_u^2 = \frac{(2-a)^{1-a}a^a}{2c^{2-a}(1-a)}, \quad B = \frac{c^2a^3}{4(2-a)},$$

$\Psi(u)$ — хвост функции распределения стандартной гауссовской случайной величины.

Пусть $\zeta(t)$ — центрированный гауссовский процесс со стационарными приращениями. Определим обобщенную константу Пикандса как

$$\mathcal{H}(\zeta) = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathcal{H}(\zeta, T)}{T},$$

где

$$\mathcal{H}(\zeta, T) = \mathbf{E} \exp\{\max_{t\in[0,T]} \sqrt{2}\zeta(t) - \mathbf{E}\zeta^2(t)\}.$$

---

[9] Hüsler J., Piterbarg V. On the ruin probability for physical fractional Brownian motion. Stochast. Proc. and Appl. 2004. **113**. 315–332

[10] Dieker T. Extremes of Gaussian processes over an infinite horizon. Stochastic Processes and their Applications, 115, p. 207-248, 2005

К.Дебицки[11] показал, что константа определена и положительна, если дисперсия процесса $\zeta(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,\infty)$, строго возрастает, правильно меняется в нуле с показателем $\alpha_0 \in (0,2]$ и на бесконечности с показателем $\alpha_\infty \in (0,2)$. Кроме того, требуется, чтобы

$$\frac{\partial(\ln \mathbf{E}\zeta^2(t))}{\partial t} \le Ct^{-1}$$

при $t \to \infty$ для некоторого $C > 0$. Пусть для непрерывной ковариационной функции $R(t)$ процесса X_t выполнены условия

$$\begin{array}{l} \lim_{t\to\infty} tR(t) = 0, \\ \int_0^\infty |R(t)|dt < \infty, \\ \int_0^\infty t^2 R(t) < \infty, \int_0^\infty R(t)dt > 0. \end{array}$$

Тогда[12]

$$\psi(u) = \frac{\mathcal{H}(\frac{Gc}{\sqrt{2}}\zeta)}{Gc^2} e^{-c^2G^2B} e^{-Gcu}(1+o(1)),$$

где $G = \int_0^\infty R(t)dt, B = \int_0^\infty tR(t)dt$. К сожалению, точное значение обобщенной константы Пикандса известно для очень немногих процессов.

Д.Пикандс[13] предложил способ вычисления асимптотики вероятности

$$\mathbf{P}(\max_{t\in T} X(t) > u)$$

для стационарного процесса $X(t)$ при $u \to \infty$, а именно, если $X(t)$ — стационарный центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией $R(t)$, такой что $R(t) < 1, t > 0$ и $R(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha)$ при $t \to 0$, то

$$\mathbf{P}(\max_{t\in[0,p]} X(t) > u) = \mathcal{H}_\alpha p u^{2/\alpha}\Psi(u)(1+o(1)), \quad u \to \infty.$$

[11] Debicki, K. (2001), Generalized Pickands constants, CWI Report PNA-R0105

[12] Debicki K. Ruin probabilities for Gaussian integrated processes. Stochast. Proc. and Appl. 2002. **98**. 151–174

[13] J. Pickands, Asymptotic properties of the maximum in a stationary Gaussian process, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969) 75—86

Здесь $\Psi(u)$ — хвост функции распределения стандартной гауссовской случайной величины, $\mathcal{H}_\alpha$ — константа Пикандса, определяемая следующим образом.

Пусть $B_\alpha(t)$ — дробное броуновское движение (т.е. гауссовский действительнозначный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $r(t,s) = \frac{1}{2}(|t|^\alpha + |s|^\alpha - |t-s|^\alpha), \alpha \in (0,2]$). Тогда существует предел

$$\mathcal{H}_\alpha = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathcal{H}_\alpha(T)}{T},$$
$$\mathcal{H}_\alpha(T) = \mathbf{E}\exp(\max_{0\le t\le T} \sqrt{2}B_\alpha(t) - |t|^\alpha).$$

$H = \alpha/2$ называют параметром Харста и иногда используется обозначение $B_H(t)$ для дробного броуновского движения с показателем Харста H. Для $H = 1/2$ мы получаем обычный винеровский процесс.

Данный метод нахождения асимптотики был обобщен на широкий класс гауссовских полей и процессов и получил название метода двойных сумм[14]. Во **второй главе** настоящей работы предложено обобщение данного метода, которое применяется для решения задачи о пересечении движущегося барьера. Данной задачей, т.е. задачей нахождения вероятности $\mathbf{P}(\sup_{[0,T]} X_t - f(t) > u)$, занимались М. Лидбеттер[15], Дж. Крайер, и др. Важной работой является статья С. Бермана[16], где показано, что

$$\mathbf{P}(\max_{0\le t\le T} X(t) - f(t) > u) = F'(0)(v/w)(2\pi)^{-1/2}u^{-1}e^{-u^2/2}(1+o(1))$$

при $u \to \infty$ для стационарного центрированного гауссовского процесса $X(t)$ с единичной дисперсией и ковариационной функцией $r(t)$. Здесь предполагается, что $r(t) \neq 1$ для $t > 0$ и правильно меняется в нуле с показате-

[14] Питербарг В.И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Изд-во МГУ, 1988

[15] Leadbetter R. On crossings of arbitrary curves by certain Gaussian processes. Proc. Amer. Math. Soc. **16**, 60–68, 1965

[16] С. Берман. Выбросы стационарного гауссовского процесса за высокий движущийся барьер. Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения. Изд. "Мир", 133–164, 1978

лем $2 \geq \alpha > 0$, кроме того, существует предел $p = \lim\limits_{t \to 0+} f(t)/(1 - r(t))^{1/2}$; $f(t)$ строго положительна при $t > 0$ и $1 - f(t)$ правильно меняется в нуле с показателем $\beta \geq \alpha/2$; v и w суть наибольшие решения уравнений $u^2(1 - r(1/v)) = 1$, $uf(1/w) = 1$. $F(x)$ — некоторая функция, которая выражается в явном виде через α, β, p.

Цель работы.

Целью настоящей работы является получение точной асимптотики вероятности разорения в модели, где убытки описываются проинтегрированным гауссовским стационарным процессом, а доходы - детерминированной неотрицательной функцией (и в частности, линейной), получение асимптотического распределения момента разорения, а также обобщение метода двойных сумм для семейства гауссовских процессов с плоским максимумом дисперсии.

Научная новизна.

Результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Получена точная асимптотика вероятности разорения в модели, где убытки описываются проинтегрированным гауссовским стационарным процессом, а доходы - неотрицательной линейной, степенной, или правильно меняющейся на бесконечности функцией.

2. Доказана предельная теорема для момента разорения в данной модели.

3. Найдена обобщенная константа Пикандса для некоторого класса гауссовских процессов.

4. Найдена асимптотика вероятности превышения уровня семейством гауссовских процессов с плоским максимумом дисперсии (т.е. дисперсией, зависящей от уровня, и сходящейся к константе).

5. Найдена асимптотика вероятности пересечения движущегося барьера для барьеров, нелинейно зависящих от уровня.

Методы исследования.

В диссертации используются современные методы теории максимумов случайных процессов (метод сравнений, метод моментов, метод двойных сумм), методы асимптотического анализа (метод Лапласа).

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут получить применение собственно в теории вероятностей, теории случайных процессов, а также в теории очередей.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на международной конференции "Extreme value analysis", Гетебург, Швеция, 2005, на семинаре под руководством Булинского А.В., Питербарга В.И., Шашкина А.П. в 2004, 2005, 2006 гг., Большом Кафедральном Семинаре в 2006 г. и на семинаре "Статистика экстремальных событий" под руководством Маркович Н.М. в ИПУ РАН, 2006 г. Тематика работы была поддержана грантом РФФИ 04-01-00700.

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приведен в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Объем диссертации 85 страниц, список литературы включает 41 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Во **введении** приводится обзор литературы на тему результатов диссертации и мотивируется актуальность выбранной темы по главам. Кроме того, во **введении** сформулированы основные результаты диссертации, а также описана ее структура.

В **первой главе** диссертации рассматривается задача о разорении для гауссовского стационарного центрированного процесса $X(t)$:

$$\mathcal{P}(u) = \mathbf{P}(\sup_{t \geq 0}(\int_0^t X_s ds - ct^\theta) > u),$$

где $\theta > 1/2, c > 0$.

Предположим, что $R(t)$ — действительная, дважды дифференцируемая ковариационная функция процесса $X(t)$, удовлетворяющая условиям:
(i) $G = \int_0^\infty R(s)\, ds > 0$;
(ii) интеграл $H = \int_0^\infty sR(s)\, ds$ конечен;
(iii) $u^{2-2/\theta} \int_{u^{1/\theta}}^\infty sR(s)\, ds \to 0, u \to \infty$.
(Если $R(s) = s^\gamma(1 + o(1))$ при $s \to \infty$, то последнее условие означает, что $\gamma < -2\theta$.) Тогда справедлива

Теорема 1. *В вышеприведенных условиях*
1) функция

$$v(\tau) = \frac{(1 + \tau^\theta(2\theta - 1)^{-1})^2}{4G(2\theta - 1)^{-1/\theta} c^{-1/\theta} \tau - 4Hu^{-1/\theta}}.$$

имеет единственную точку минимума $\tau_{\min} = \tau_{\min}(u)$ *в окрестности* $\tau = 1$ *для достаточно больших* u*;*
2)

$$\mathcal{P}(u) = \frac{\sqrt{R(0)}}{\sqrt{2\pi}} u^{-1+1/\theta} (2\theta - 1)^{1/2 - 1/\theta} c^{-1/\theta} \theta^{-1} \times$$
$$\times \exp\left\{ -u^{2-1/\theta} \frac{(1 + \tau_{\min}^\theta (2\theta - 1)^{-1})^2}{4G(2\theta - 1)^{-1/\theta} c^{-1/\theta} \tau_{\min} - 4Hu^{-1/\theta}} \right\} (1 + o(1))$$

при $u \to \infty$.

Для $1/2 < \theta \leq 1$ получены следствия, в которых указанный минимум найден.

Следствие 1. Пусть $1/2 < \theta < 1$. Тогда при $u \to \infty$

$$\mathcal{P}(u) = \frac{\sqrt{R(0)}}{\sqrt{2\pi}} u^{-1+1/\theta} (2\theta - 1)^{1/2-1/\theta} c^{-1/\theta} \times$$
$$\times \exp\left\{-u^{2-1/\theta} \theta^2 \left(2\theta - 1\right)^{(-2+1/\theta)} c^{1/\theta} G^{-1}\right\} (1 + o(1)).$$

Следствие 2. Пусть $\theta = 1$. Тогда при $u \to \infty$

$$\mathcal{P}(u) = \frac{\sqrt{R(0)}}{\sqrt{2\pi}} c^{-1} \exp\{-\frac{Hc^2}{G^2}\} \exp\{-uc/G\} (1 + o(1)).$$

Проводя аналогию с теоремой К.Дебицкого[17] в случае $\theta = 1$, находим, что обобщенная константа Пикандса процесса $\eta(t) = \dfrac{c}{G\sqrt{2}} \int_0^t X_t\, dt$ в случае непрерывно дифференцируемой $R(t)$ (и удовлетворяющей условиям интегрируемости) равна $(\sqrt{R(0)}c)/(\sqrt{2\pi}G)$.

Теорема доказывается применением метода Райса и методов асимптотического анализа. Это позволяет не только установить точную асимптотику вероятности разорения, но и получить предельную теорему для момента разорения.

Введем момент разорения следующей формулой

$$\tau_u = \inf\{t \geq 0 : u - (\int_0^t X_s ds - ct^\theta) \leq 0\}.$$

Обозначим

$$\kappa(x) = t_{\max} + u^{3/(2\theta)-1} c^{-3/(2\theta)} (2\theta - 1)^{1/2-3/(2\theta)} \sqrt{2G} \theta^{-1} x,$$

где $t_{\max} = \left(u(2\theta - 1)^{-1}/c\right)^{1/\theta} \tau_{\min}$, $\tau_{\min}$ определено в теореме 1.

Теорема 3. *В условиях теоремы 1*

$$\mathbf{P}\left(\tau_u < \kappa(x) \middle|\, \tau_u < \infty\right) \to \Phi(x)$$

[17] Debicki K. Ruin probabilities for Gaussian integrated processes. Stochast. Proc. and Appl. 2002. **98**. 151–174

при $u \to \infty$, где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной гауссовской случайной величины.

Рассмотрим обобщение теоремы 1 на случай, когда доходы представлены правильно меняющейся функцией в смысле Карамата. Заметим, что такое обобщение не полностью включает в себя уже доказанное утверждение — например, важный случай $\theta = 1$.

Определение. *Положительная измеримая функция $f(x)$ называется правильно меняющейся в смысле Карамата на бесконечности, если $\lim_{x\to\infty} f(\lambda x)/f(x) = \lambda^\rho$ для любого $\lambda > 0$.*

Пусть для некоторого $t_0 > 0$

$$f(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{x} L(r)dr\,dx,$$

где $L(r)$ — правильно меняющаяся измеримая локально ограниченная функция порядка ρ, $\rho > -1$, т.е. $L(r) = r^\rho l(r)$, где $l(r)$ — медленно меняющаяся функция, или

$$f(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{x}^{\infty} L(r)dr\,dx,$$

где $L(r)$ — правильно меняющаяся измеримая локально ограниченная функция порядка $-1 \geq \rho > -3/2$ (при $\rho = 1$ требуется, чтобы интеграл $\int_{t_0}^{\infty} L(r)$ сходился). Обозначим $\theta = 2 + \rho$ и рассмотрим модель $Y_t = \int_0^t X_s ds - f(t)$, где ковариационная функция $R(t)$ стационарного гауссовского центрированного процесса X_s по-прежнему действительная, дважды дифференцируемая, удовлетворяющая условиям (i), (ii).

Теорема 2. *В вышеприведенных условиях*

1) для достаточно больших u существует единственное решение $u^{1/\theta}q(u)$ уравнения

$$Gu + Gf(t) - 2tf'(t)G + 2f'(t)H = 0.$$

Если ковариационная функция удовлетворяет модифицированному условию (iii'):

$$u^{2-2/\theta}q(u)^{-2}\int_{u^{1/\theta}q(u)}^{\infty} sR(s)\,ds \to 0, u \to \infty,$$

то

2) функция

$$S_3(\tau) = \frac{u^{2-1/\theta}(1+f(u^{1/\theta}q(u)\tau)/u)^2}{4Gq(u)\tau - 4Hu^{-1/\theta}}$$

имеет единственную точку минимума $\tau_{\min} = \tau_{\min}(u)$ в окрестности $\tau = 1$ для достаточно больших u;

3)

$$\mathcal{P}(u) = \frac{\sqrt{R(0)}}{\sqrt{2\pi}}u^{-1+1/\theta}(2\theta-1)^{1/2}\theta^{-1}q(u)\exp\{-S_3(\tau_{\min})\}(1+o(1))$$

при $u \to \infty$.

Рассмотрим обобщение теоремы 3 на случай медленно меняющихся функций. Пусть выполнены условия теоремы 2.

Обозначим

$$\kappa(x) = t_{\max} + \sqrt{2G}u^{3/(2\theta)-1}q^{3/2}(u)(2\theta-1)^{1/2}\theta^{-1}x,$$

где $t_{\max} = u^{1/\theta}\tau_{\min}$, $\tau_{\min}$ определено в теореме 2.

Теорема 4. *В условиях теоремы 2*

$$\mathbf{P}\left(\tau_u < \kappa(x) \middle| \, \tau_u < \infty\right) \to \Phi(x)$$

при $u \to \infty$, где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной гауссовской случайной величины, а

$$\tau_u = \inf\{t \geq 0 : u - \left(\int_0^t X_s\,ds - f(t)\right) < 0\}$$

— момент разорения.

Во **второй главе** изучается асимптотика вероятности превышения высокого уровня семейством гауссовских процессов с плоским максимумом дисперсии.

Лемма. *Пусть* $X(t), t \in [0, T]$ *— гауссовский центрированный стационарный процесс с ковариационной функцией* $r(t)$*, удовлетворяющей условиям* $r(t) = 1 - |t|^\gamma + o(|t|^\gamma), t \to 0$ *для некоторого* $\gamma > 0$ *и* $r(t) < 1$ *для всех* $t > 0$*. Тогда*

$$\mathbf{P}(\max_{t\in[0,Tu^{-2/\gamma}]} X(t) > u) = \Psi(u)H_\alpha(T)(1 + o(1)), u \to \infty,$$

где $\Psi(u)$ *— функция распределения стандартной гауссовской случайной величины;*

для любой $p(u) \leq T, u^{-2/\gamma} = o(p(u))$ *выполнено*

$$\mathbf{P}(\max_{t\in[0,p(u)]} X(t) > u) = H_\alpha p(u) u^{2/\gamma}\Psi(u)(1 + o(1)), u \to \infty;$$

для любой $\kappa(u) = o(u^{-2/\gamma})$

$$\mathbf{P}(\max_{t\in[0,\kappa(u)]} X(t) > u) = \Psi(u)(1 + o(1)), u \to \infty;$$

если $f_\theta(u) > 0$*, причем* $u^2 f_\theta(u)u^{-2\theta/\gamma} \to c > 0$ *при* $u \to \infty$*, то для любого* $S > 0$

$$\mathbf{P}(\max_{t\in[-Su^{-2/\gamma},Su^{-2/\gamma}]} X(t)\sqrt{1 - f_\theta(u)t^\theta} > u) = H^\theta_\gamma(S)\Psi(u)(1 + o(1)),$$

где

$$H^\theta_\gamma(S) = \mathbf{E}\exp(\max_{-S\leq t\leq S}(\sqrt{2}\chi(t) - |t|^\gamma - c|t|^\theta/2)), \tag{1}$$

$\chi(t)$ *— дробное броуновское движение с показателем Харста* γ*. Существует* $H^\theta_\gamma = \lim_{S\to\infty} H^\theta_\gamma(S)$*.*

Пусть $\xi_u(t), t \in [0,T], u \in [0,\infty)$ — семейство действительнозначных гауссовских процессов с нулевым средним и п.н. непрерывными траекториями, такое что дисперсия

$$\mathbf{E}\xi_u(t)^2 = \sigma_u^2(t) = 1 - f(u,t)(1+o(1))$$

при $u \to \infty$ равномерно по $t \in [0,T]$, где функция $f(t,u) \geq 0$ определена для $u > 0$, $0 \leq t \leq T$ и непрерывна на этом множестве; $f(t,u) \to 0$ при $u \to \infty$ равномерно по t. Пусть существует единственное $t_0 = t_0(u)$, такое что $f(t_0,u) = 0$, $t_0 \in (0,T)$ для всех u, и для некоторого $\theta > 0$ и $t \to t_0$

$$f(u,t) - f_\theta(u)|t-t_0|^\theta = o(|t-t_0|^\theta), \ f_\theta(u) > 0$$

при $t \to t_0$ равномерно по u (т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое что для всех u, для всех $|t-t_0| < \delta(\varepsilon)$ выполнено $\dfrac{|f(u,t) - f_\theta(u)|t-t_0|^\theta|}{|t-t_0|^\theta} < \varepsilon$). Пусть также корреляционная функция $\mathbf{E}\xi_u(t)\xi_u(s)/(\sigma_u(t)\sigma_u(s)) = r_u(t,s) < 1$ при $t \neq s$, непрерывна, и для любого положительного ε существуют $\delta(\varepsilon) > 0, u_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $u > u_0, |t-s| \leq \delta$ и некоторого $\gamma \in (0,2]$ выполнено

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1 - r_u(t,s)}{|t-s|^\gamma} \leq 1 + \varepsilon.$$

Предположим также, что существует $\lim_{u\to\infty} t_0(u)(u^2 f_\theta(u))^{1/\theta} = t_\infty$, $t_\infty \in [0,\infty]$.

Теорема 1. *Пусть выполнены вышеприведенные условия. Тогда*

1) если для некоторого $D_1 > 0$ выполнено $\min\limits_{|t-t_0|\geq D_1}(1-\sigma_u^2(t))u^2 \to \infty$, $u^2 f_\theta(u) \to \infty$ $(u \to \infty)$, то при $u \to \infty$

для $u^2 f_\theta(u) u^{-2\theta/\gamma} \to 0$:

$$\mathbf{P}(\max_{t\in[0,T]} \xi_u(t) > u) = \frac{H_\gamma}{u^{1+2/\theta-2/\gamma}(f_\theta(u))^{1/\theta}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_\infty}^{\infty} e^{-|t|^\theta/2}\, dt\,(1+o(1));$$

для $u^2 f_\theta(u) u^{-2\theta/\gamma} \to c > 0$ (если $t_\infty = 0$, то в правой части следует добавить множитель $1/2$):

$$\mathbf{P}(\max_{t\in[0,T]} \xi_u(t) > u) = \frac{H_\gamma^\theta}{\sqrt{2\pi}u} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}(1+o(1)).$$

для $u^2 f_\theta(u) u^{-2\theta/\gamma} \to \infty$:

$$\mathbf{P}(\max_{t\in[0,T]} \xi_u(t) > u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}(1+o(1));$$

2) если $u^2 f(u,t) \to f_0(t)$ при $u \to \infty$ равномерно по $t \in [0,T]$, то

$$\mathbf{P}(\max_{t\in[0,T]} \xi_u(t) > u) = \frac{H_\gamma}{\sqrt{2\pi}u^{1-2/\gamma}} \left(\int_0^T \exp\{-f_0(t)/2\}dt\right) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}(1+o(1));$$

3) если $u^2 f(u,t) \to 0$, при $u \to \infty$ равномерно по $t \in [0,T]$, то

$$\mathbf{P}(\max_{t\in[0,T]} \xi_u(t) > u) = \frac{T H_\gamma}{\sqrt{2\pi}u^{1-2/\gamma}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}(1+o(1)).$$

Доказанная теорема применяется для решения задачи о движущемся барьере.

Следствие 2. *(задача о движущемся барьере)*

Пусть $\xi_t, t \in [0,T]$ — гауссовский центрированный стационарный процесс с единичной дисперсией, п.н. непрерывными траекториями и ковариационной функцией $R(t)$, $R(t) = 1 - Ct^\gamma + o(t^\gamma)$ при $t \to 0$, $C > 0, \gamma \in (0,2]$ и $|R(t)| < 1$ при $t > 0$. Функция $f(t,u)$ определена для $u > 0$, $0 \le t \le T$ и непрерывна на этом множестве. Обозначим $m(u) = \min_{0\le t\le T} f(t,u)$, $m(u) = o(u)$ при $u \to \infty$. Пусть выполнено одно из условий:

1) для каждого u существует единственная точка $t_0 = t_0(u)$, $t_0 \in (0,T)$ минимума функции $f(u,t)$ по t, причем для некоторого, не зависящего *от* t_0, $D_1 > 0$ *выполняются соотношения* $\min\limits_{|t-t_0|\ge D_1} u(f(u,t)-m(u)) \to \infty$, $f(t,u)/u \to 0$ *при* $u \to \infty$ *равномерно по* t, *и*

$$\frac{f(u,t)}{u} - \frac{m(u)}{u} - f_\theta(u)|t-t_0|^\theta = o(|t-t_0|^\theta),\ f_\theta(u) > 0$$

при $t \to t_0$ *равномерно по* u *(т.е. для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$, *такое что для всех* u, *для всех* $|t-t_0| < \delta(\varepsilon)$ *выполнено* $\dfrac{|f(u,t)/u - f_\theta(u)|t-t_0|^\theta|}{|t-t_0|^\theta} < \varepsilon$*), где* $u^2 f_\theta(u) \to \infty$ $(u \to \infty)$, *и существует предел* $t_\infty = \lim_{u\to\infty}(u^2 f_\theta(u))^{1/\theta} t_0(u)$;

2) $uf(t,u) \to f_0(t)$ *при* $u \to \infty$ *равномерно по* t;

3) $uf(t,u) \to 0$ *при* $u \to \infty$ *равномерно по* t. *Тогда в случае 1) для* $P_f(u) = \mathbf{P}(\max\limits_{0\le t\le T} \xi_t - f(u,t) > u)$
если $u^2 f_\theta(u) u^{-2\theta/\gamma} \to 0$, *то*

$$P_f(u) = \frac{H_\gamma C^{1/\gamma}}{(u+m(u))^{1+2/\theta-2/\gamma}(2f_\theta(u))^{1/\theta}} \exp\left\{-\frac{(u+m(u))^2}{2}\right\} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_\infty}^{\infty} e^{-|t|^\theta/2}\, dt\,(1+o(1));$$

если $u^2 f_\theta(u) u^{-2\theta/\gamma} \to c > 0$, *то (если* $t_\infty = 0$, *то в правую часть следует добавить множитель* $1/2$*)*

$$P_f(u) = \frac{H_\gamma^\theta C^{1/\gamma}}{\sqrt{2\pi}(u+m(u))} \exp\left\{-\frac{(u+m(u))^2}{2}\right\}(1+o(1));$$

если $u^2 f_\theta(u) u^{-2\theta/\gamma} \to \infty$, *то*

$$P_f(u) = \frac{C^{1/\gamma}}{\sqrt{2\pi}(u+m(u))} \exp\left\{-\frac{(u+m(u))^2}{2}\right\}(1+o(1));$$

в случае 2)

$$P_f(u) = \frac{H_\gamma}{\sqrt{2\pi}(u+m(u))^{1-2/\gamma}} \left(\int_0^{TC^{-1/\gamma}} \exp\{-2f_0(t)\} dt\right) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(u+m(u))^2}{2}\right\}(1+o(1));$$

в случае 3)

$$P_f(u) = \frac{TC^{-1/\gamma}H_\gamma}{\sqrt{2\pi}(u+m(u))^{1-2/\gamma}} \exp\left\{-\frac{(u+m(u))^2}{2}\right\}(1+o(1)).$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Питербаргу В.И. за постановки задач, ценные советы и обсуждения.

Публикации автора по теме диссертации:

1. Кобельков С.Г. О задаче разорения для гауссовского стационарного процесса. Теория вероятн. и ее примен. 2004. **49**. 171–178.

2. Кобельков С.Г. О задаче разорения со степенными убытками для гауссовского стационарного процесса. Вестник МГУ. Сер. матем. 2005. **6**. 23–29.

3. Кобельков С.Г. О выходах гауссовского процесса с переменной дисперсией за неограниченно растущий барьер. Математические заметки. **80**, вып. 3. 2006. 386–394.