Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Ярыкин Павел Николаевич

НЕЛИНЕЙНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И АНАЛИЗ СИСТЕМ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

(01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2006

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент А. Д. Манита
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Б. М. Гуревич
	кандидат физико-математических наук, с. н. с. С. В. Анулова
Ведущая организация:	Институт проблем передачи информации РАН

Защита диссертации состоится "____"________________ 2006 г. в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992 ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "____"________________ 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.85 в МГУ, доктор физико-математических наук, профессор — Т. П. Лукашенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

1. *Исторический контекст.* Математическая теория (классических) стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) возникла в 40-х годах XX века с работы Ито[1], в которой было введено понятие стохастического дифференциала и его свойства. С тех пор теория классических СДУ была значительно развита, и в настоящее время их решения изучены для широкого круга условий[2].

Широкий интерес представляют математические модели больших систем взаимодействующих броуновских частиц. С одной стороны, эти модели являются многомерными классическими СДУ. Но большая размерность сильно затрудняет получение конкретных результатов о поведении системы. В частности, интересны системы с парным взаимодействием типа среднего поля, когда влияние, оказываемое на частицу со стороны других частиц усреднено. То есть речь идет о системе частиц, которая может быть описана системой СДУ

$$dX_t^{i,N} = dW_t^i + \left(a\big(X_t^{i,N}\big) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b\big(X_t^{i,N}, X_t^{j,N}\big) \right) dt \qquad (1)$$

с начальными условиями X_0^i. Здесь $\{W_t^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — независимые стандартные броуновские движения, $a(x)$ задает снос частицы (процесса) под воздействием внешнего поля и $b(x,y)$ — функция попарного взаимодействия частиц. Предполагается, что начальные условия X_0^i являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами.

В 50-х годах при описании эволюции частиц разреженного газа (уравнение Больцмана) Кац[3] предположил, что частицы $X_t^{i,N}$ являются асимптотически независимыми при больших N. В силу симметрии, маргинальные распределения всех частиц совпадают. Соответственно, распределение каждой частицы в момент времени t близко к эмпирической мере $\widehat{\mu}_t^{N,X}(dx) =$

[1] Ito K. Stochastic integral. — Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1944, v. 20, p. 519–524.

[2] Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Стохастическое исчисление. — Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. ВИНИТИ, 1989. т. 49.

[3] Kac M. Foundation of kinetic theory. — Proc. Third Berkley Symp. on Math. Stat. and Prob. 1956, v. 3, p. 171–197.

$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{X_t^{i,N}}(dx)$, а поведение выделенной частицы можно аппроксимировать решением нелинейного СДУ

$$d\widetilde{X}_t = dW_t + \left(a(\widetilde{X}_t) + \int b(\widetilde{X}_t, y)\mu_t^{\widetilde{X}}(dy)\right)dt, \tag{2}$$

где мера $\mu_t^{\widetilde{X}}$ является распределением $\widetilde{X}_t$. Таким образом, нелинейные СДУ позволяют исследовать асимптотическое поведение физических систем.

Процессы со взаимодействием типа среднего поля и связанные с ними нелинейные случайные процессы образуют широкий класс случайных процессов и представляют научный интерес. В настоящее время, они исследуются многими авторами при различных предположениях[4,5,6].

Нелинейные СДУ оказались существенно сложнее классических СДУ для изучения, и их решения были исследованы в меньшей степени. В значительной мере это связано с тем, что решение нелинейного СДУ не является марковским процессом, хотя уравнение (2) и является обобщением однородного по времени классического СДУ.

2. *Актуальные результаты и задачи.* До недавнего времени основные результаты по теме исследования были получены в работах Шнитмана[7] и Тамуры[8,9]. Шнитман получил результаты о пределе среднего поля для системы взаимодействующих частиц (1) в случае ограниченного липшицевого взаимодействия. Результаты Тамуры о существовании, единственности и устойчивости стационарного решения нелинейного СДУ (2) были получены в случае, когда взаимодействие быстро убывает с ростом расстояния и имеется сильное полиномиальное «центростремительное» внешнее поле. Под устойчивостью стационарного распределения понимается слабая сходимость ре-

[4] Малышев В. А., Манита А. Д. Фазовые переходы в модели синхронизации времени. — Теория вероятн. и примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 150–158.

[5] Karpelevich F. I., Rybko A. N. Thermodynamic Limit for the Mean Field Model of Simple Symmetrical Closed Queueing Network. — Markov Processes and Related Fields. 2000, v. 6, p. 89–105.

[6] Manita A., Shcherbakov V. Asymptotic analysis of particle system with mean-field interaction. — Markov Processes and Related Fields. 2005, v. 11, p. 489–518.

[7] Sznitman A. S. Topics in propagation of chaos. — Lect. Notes in Math., Springer, Berlin. 1989, v. 1464, p. 165–250.

[8] Tamura Y. On asymptotic behaviors of the solution of a non-linear diffusion equation. — J. Fac. Sci. Univ. Tokio Sect. IA, Math. 1984, v. 31, p. 195–221.

[9] Tamura Y. Free energy and the convergence of distributions of diffusion processes of McKean type. — J. Fac. Sci. Univ. Tokio Sect. IA, Math. 1987, v. 34, p. 443–484.

шения (его распределения в момент времени t) с любыми начальными условиями к стационарному распределению при $t \to +\infty$.

В последнее время появился ряд работ, развивающих вышеуказанные результаты. Как правило[10,11], авторы предполагают наличие достаточно сильного «центростремительного» внешнего поля, подавляющего нелинейную составляющую сноса процесса. На этом фоне выделяются работы[12,13], в которых результат типа результата Тамуры получен для выпуклого ядра попарного взаимодействия в предположении отсутствия внешнего поля. Получение подобных результатов для других видов взаимодействия в предположении отсутствия внешнего поля является актуальной задачей.

Также заметим, что во всех изученных случаях накладывались ограничения, которые приводили к единственности инвариантного распределения. Интересной задачей является явное описание и изучение случая, когда имеется несколько стационарных распределений.

Цель работы. Целью данной работы является разностороннее изучение нелинейного случайного процесса $\widetilde{X}_t$ (решения нелинейного СДУ (2)) на вещественной прямой $\mathbb{R}$ и его связи с системой взаимодействующих частиц (решением системы СДУ (1)). Исследования ограничиваются случаем, когда внешнее воздействие на систему отсутствует, то есть $a(x) \equiv 0$, а ядро взаимодействия $\beta(x)$ состоит из двух компонент: линейно возрастающей силы притяжения и ограниченного липшицевого возмущения, то есть

$$\beta(x) = x + \beta_1(x).$$

В части работы на ядро взаимодействия β накладывается более сильное ограничение:

$$\beta(x) = x + \alpha \sin x.$$

[10] Veretennikov A. Yu. On ergodic measures for McKean-Vlasov stochastic equations. — Isaac Newton Inst. for Math. Sci. 2003, preprint NI03066.

[11] Carrillo J. A., McCann R. J., Villani C. Kinetic equilibration rates for granular media and relates equations: entropy dissipation and mass transportation estimates. — Revista Matematica Iberoamericana. 2003, v. 19, p. 1–48.

[12] Benachour S., Roynette B., Talay D., Vallois P. Nonlinear self-stabilizing processes — I: Existence, invariant probability, propagation of chaos. — Stochastic Processes and Appl. 1998, v. 75, p. 173–201.

[13] Benachour S., Roynette B., Vallois P. Nonlinear self-stabilizing processes — II: Convergence to invariant probability. — Stochastic Processes and Appl. 1998, v. 75, p. 203–224.

В рамках этого предположения решение нелинейного СДУ исследуется для всех значений параметра α.

Еще одной целью работы является явное указание такого взаимодействия, когда СДУ (2) имеет несколько стационарных решений, а также изучение свойств соответствующего нелинейного процесса и стационарных распределений. Эта цель выполняется в вышеуказанных рамках, поскольку искомым взаимодействием оказывается взаимодействие с ядром $\beta(x) = x + \alpha \sin x$ при достаточно больших α.

Методы исследования. В работе применены методы теории вероятностей и случайных процессов, в частности, теория марковских случайных процессов, характеристические функции, преобразования стохастических дифференциалов, сходимость вероятностных мер. Также были использованы методы функционального анализа. Еще одним важным инструментом является функционал свободной энергии.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1) доказаны существование и единственность сильного решения нелинейного СДУ (2);

2) доказан предел среднего поля для системы частиц (решения системы СДУ (1)) в случае возмущения $\beta_1(x)$ с константой Липшица $\widehat{\alpha} < 1/4$;

3) доказано существование стационарных решений нелинейного СДУ (2) и получены результаты об их количестве (в частности, при достаточно больших α получена неединственность стационарного распределения);

4) исследована устойчивость найденных стационарных распределений.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер. Работа относится к области случайных процессов. Ее результаты могут быть использованы для изучения больших систем частиц с парным взаимодействием типа среднего поля.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях и семинарах.

- Научно-исследовательский семинар «Теория вероятностей и статистическая физика» механико-математического факультета под руководством Оселедеца В. И. и Гуревича Б. М. МГУ, 2002 г.

- XXV Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Название доклада: Среднеполевая аппроксимация для одной системы взаимодействующих частиц. (МГУ, апрель 2003 г.)

- Научно-исследовательский семинар «Теория вероятностей и статистическая физика» механико-математического факультета под руководством Оселедеца В. И. и Гуревича Б. М. (МГУ, 2004 г.)

- Научно-исследовательский семинар «Вероятностные методы в биологии» механико-математического факультета МГУ под руководством Малышева В. А. (МГУ, 2004 г.)

- Ломоносовские чтения. Название доклада: Устойчивость нелинейного стохастического процесса, аппроксимирующего систему взаимодействующих частиц. (МГУ, апрель 2005 г.)

- Научно-исследовательский семинар Добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН под руководством Минлоса Р. А.(ИППИ РАН, 2005 г.)

- Большой Семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством Ширяева А. Н. (МГУ, октябрь 2005 г.)

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора [1–5], список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, дополнения и списка литературы. Общий объем работы составляет 85 страниц. Список литературы включает 45 наименований.

Поддержка. Исследования по теме диссертации частично были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 99-01-01140 и 02-01-00945).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** приводится исторический обзор развития теории нелинейных СДУ и систем взаимодействующих частиц. Там же сформулированы основные результаты данной работы, которые являются новыми.

Первая глава посвящена предварительному изучению нелинейного СДУ

$$\widetilde{X}_t = X_0 + W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^1} b\bigl(\widetilde{X}_s, y\bigr) \mu_s^{\widetilde{X}}(dy)\, ds \tag{3}$$

для симметричного трансляционно инвариантного взаимодействия $b(x,y) = -\beta(x-y) = -b(x,y)$ вида $\beta(x) = x + \beta_1(x)$, где $\beta_1(x)$ — ограниченная функция с константой Липшица $\widehat{\alpha}$.

В параграфе §1.1 приводится определение решения нелинейного СДУ (3) и доказывается теорема о его существовании. Попутно, как необходимая часть доказательства, получается свойство конечности первого момента.

В параграфе §1.2 выводится ряд свойств найденного решения, преимущественно касающихся его гладкости и различных оценок его плотности. Полученные оценки плотности будут активно использоваться в главе 3.

Теорема 1 является основным результатом первой главы.

Теорема 1. *Уравнение (3) при начальном условии* X_0 *с конечным первым моментом имеет единственное сильное решение* X_t *на промежутке* $t \in [0, \infty)$. *Более того, математическое ожидание* $\mathrm{E}\widetilde{X}_t$ *существует и ограничено.*

Решение нелинейного СДУ понимается в следующем смысле.

Определение. *Пусть имеется (расширенная* $\mathbf{P}$*-нулевыми событиями) фильтрация* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$, *винеровский процесс* $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ *относительно* $\mathbb{F}$ *и начальное условие* $\widetilde{X}_0 = X_0$, *измеримое относительно* $\mathcal{F}_0$. *Сильным решением нелинейного СДУ (3) на промежутке* $[0, \infty)$ *называется случайный процесс* $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}_t, t \geqslant 0\}$, *имеющий п. н. непрерывные траектории, согласованный с фильтрацией* $\mathbb{F}$ *и такой, что при подстановке его и семейства его распределений* $\{\mu_t^{\widetilde{X}}, t \geqslant 0\}$ *в левую и правую части формулы (3) при каждом* $t \geqslant 0$ *получается равенство с вероятностью единица.*

Найденное решение СДУ (3) обладает следующими свойствами:

- неизменность первого момента;
- абсолютная непрерывность распределения и гладкость его плотности;
- непрерывность по времени в слабой топологии;

- полиномиальная скорость убывания плотности (и ее производных по x) к нулю при $x \to \infty$.

Вторая глава посвящена изучению системы случайных частиц $\left\{X_t^{i,N}\right\}_{i=1}^{N}$ со взаимодействием типа среднего поля и ее связи с нелинейным случайным процессом $\widetilde{X}_t$. При этом многочастичный процесс удовлетворяет следующей системе СДУ, ассоциированной со СДУ (3):

$$X_t^{i,N} = X_0^i + W_t^i + \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} b(X_s^{i,N}, X_s^{j,N}) ds, \tag{4}$$

где X_0^i — независимые одинаково распределенные случайные величины, W_t^i — независимые реализации стандартного броуновского движения.

Результаты данной главы применимы при $\widehat{\alpha} < 1/4$. В частности, доказывается, что изучаемый процесс $\widetilde{X}_t$ действительно является пределом среднего поля для системы частиц $\left\{X_t^{i,N}\right\}_{i=1}^{N}$ (теорема 3).

Полученный результат также позволяет заключить, что стационарное распределение существует и единственно. Более того, любой процесс, удовлетворяющий нелинейному уравнению и имеющий второй момент, будет слабо сходиться при $t \to +\infty$ к стационарному распределению.

Основным результатом данной главы является теорема 3, которая заключается в следующем:

Теорема 3. *Пусть* $\mathrm{E}X_0$ *и* $\mathrm{E}X_0^2$ *конечны. Положим* $X_0^1 = X_0$ *и* $W_t^1 = W_t$. *Рассмотрим решение* $\widetilde{X}_t$ *СДУ (3) и решение* $\left\{X_t^{i,N}\right\}_{i=1}^{N}$ *системы СДУ (4). Тогда при* $\widehat{\alpha} < \frac{1}{4}$ *выполнено*

$$\mathrm{E}|\widetilde{X}_t - X_t^{1,N}|^2 \leqslant \frac{c(t)}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где $c(t)$ *является некоторым коэффициентом, зависящим от времени.*

Ключевую роль в этой главе играет лемма, которая устанавливает равномерную по времени оценку расстояния между случайными процессами, близкими к нелинейному и многочастичному соответственно.

Точнее, в лемме рассматриваются процессы $Y_t^{i,N}$ и $\widetilde{Y}_t^{i,N}$, задаваемые формулами:

$$\begin{aligned} Y_t^{i,N} &:= X_t^{i,N} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_t^{j,N}, \\ \widetilde{Y}_t^{i,N} &:= \widetilde{X}_t^{i} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \widetilde{X}_t^{j}, \end{aligned}$$

где $\widetilde{X}_t^i$ являются решениями СДУ (3) при $X_0 = X_0^i$ и $W_t = W_t^i$. Это преобразование позволяет избежать «размывания» многочастичного случайного процесса в пространстве путем перехода к системе отсчета, привязанной к его центру масс. Аналогичное преобразование N независимых реализаций нелинейного случайного процесса применяется для их согласования с многочастичным процессом.

Оказывается, что выделенная частица $Y_t^{i,N}$ многочастичного процесса в подвижной системе координат и нелинейный процесс $\widetilde{Y}_t^{i,N}$ в своей подвижной системе координат близки равномерно по времени, то есть

$$\sup_t \mathrm{E}\left|Y_t^{i,N} - \widetilde{Y}_t^{i,N}\right|^2 \leqslant \frac{c}{N}.$$

Кроме того, такое же неравенство выполнено для разности нелинейного процесса $\widetilde{X}_t \equiv \widetilde{X}_t^1$ и его модификации $\widetilde{Y}_t^{1,N}$.

$$\sup_t \mathrm{E}\left|\widetilde{X}_t - \widetilde{Y}_t^{1,N}\right|^2 \leqslant \frac{c}{N}.$$

Похожее, но не равномерное по времени неравенство связывает $X_t^{1,N}$ и $Y_t^{1,N}$:

$$\mathrm{E}\left|X_t^{1,N} - Y_t^{1,N}\right|^2 \leqslant \frac{c(t)}{N}.$$

Более того, процесс $\left\{Y_t^{i,N}\right\}_{i=1}^{N}$ является эргодическим, что позволяет получить теорему 4.

$$\begin{tikzcd} \mu_t^{N,Y} \arrow[r, Rightarrow, "t\geqslant 0", "N\to\infty"'] \arrow[d, "t\to\infty"] & \mu_t^{\widetilde{X}} \arrow[d, "t\to\infty"] \\ \mu_\infty^{N,Y} \arrow[r, "N\to\infty"] & \mu_\infty^{\widetilde{X}} \end{tikzcd}$$

Теорема 4. *Пусть* $\mathrm{E}X_0$ *и* $\mathrm{E}X_0^2$ *конечны и* $\widehat{\alpha} < 1/4$. *Тогда имеется слабая сходимость распределений*

$$\mu_t^{\widetilde{X}} \xrightarrow[t\to\infty]{w} \mu_\infty^{\widetilde{X}},$$

где $\mu_\infty^{\widetilde{X}}$ *— (одномерное) распределение стационарного решения СДУ (3).*

В **третьей главе** изучается предельное поведение решения нелинейного уравнения при $\beta = x + \alpha \sin x$. Основные результаты этой главы относятся к случаю отрицательных α и случаю больших положительных α.

В случае $\alpha \leqslant 1/2$ доказывается, что стационарное решение единственно и что решение с любым начальным условием слабо сходится к стационарному решению (при $t \to \infty$). При малых $|\alpha|$ получена также скорость этой сходимости.

Для больших положительных α доказывается, что существует два устойчивых стационарных распределения и что остальные стационарные распределения неустойчивы. Здесь устойчивость стационарного распределения понимается в смысле сходимости решения стохастического дифференциального уравнения с близким начальным условием к соответствующему стационарному распределению (локальная устойчивость). Эта часть результатов получена в инвариантном (замкнутом относительно динамики процесса) подмножестве четных распределений $\mathcal{P}_{sym}(\mathbb{R})$ множества вероятностных распределений $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Глава разбита на 5 параграфов.

Параграф §3.1 содержит результаты о стационарных распределениях процесса. В нем находится в явном виде двухпараметрическое семейство распределений, которое содержит в себе все стационарные распределения.

Теорема 5. *Любое стационарное решение уравнения (3) в классе вероятностных плотностей с нулевым средним имеет вид*

$$v_\alpha(y) \equiv v_{(a,b)(\alpha)}(y) \equiv \frac{e^{-y^2 + a\cos y + b \sin y}}{\int e^{-x^2 + a \cos x + b \sin x} dx},$$

причем решение существует для любого α. *Для* $\alpha \leqslant 1/2$ *решение единственно и соответствует паре вида* $(a,b)(\alpha) = (a(\alpha), 0)$.

Более того, для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ находятся (уже в неявном виде) значения параметров, задающие в классе четных распределений $\mathcal{P}_{sym}(\mathbb{R})$ стационарное (или стационарные, если их несколько) распределение. Также доказывается единственность стационарного решения при $\alpha < \alpha_0$ (где $\alpha_0 > \frac{1}{2}$) и существование нескольких стационарных решений при $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Заметим, что в классе $\mathcal{P}_{sym}(\mathbb{R})$ стационарное распределение задается одним параметром a, поскольку параметр b равен 0.

Теорема 6. *Рассмотрим стационарные распределения СДУ (3) в классе $\mathcal{P}_{sym}(\mathbb{R})$. Тогда существуют $\alpha_0 > \frac{1}{2}$ и $\widehat{a}_0 < 0$ такие, что:*

а) при $\alpha < \alpha_0$ существует ровно одно стационарное распределение, соответствующее значению $a_1(\alpha) > 0$;

б) при $\alpha = \alpha_0$ существует два стационарных распределения, соответствующих значениям $a_1(\alpha) > 0$ и $a_2(\alpha) = \widehat{a}_0$;

в) при $\alpha > \alpha_0$ существует три стационарных распределения, соответствующих значениям $a_1(\alpha) > 0$, $a_2(\alpha) < \widehat{a}_0$ и $\widehat{a}_0 < a_3(\alpha) < 0$.

Основные результаты данной главы находятся в параграфах §3.4, §3.5 и содержатся в теоремах 12–14. При этом, теорема 12 аналогична классическим результатам о предельном поведении нелинейных процессов, в то время как теоремы 13 и 14 относятся к принципиально иному случаю, когда существует несколько стационарных решений СДУ (3).

Теорема 12. *При $\alpha \leqslant 1/2$ существует единственное стационарное решение СДУ (3) с заданным математическим ожиданием. При этом оно глобально устойчиво в классе распределений с тем же математическим ожиданием, то есть любое решение СДУ (3) с таким X_0, что существуют $\mathrm{E}X_0$ и $\mathrm{E}X_0^2$, слабо сходится при $t \to +\infty$ к стационарному распределению с тем же математическим ожиданием.*

Обозначим стационарные плотности из класса $\mathcal{P}_{sym}(\mathbb{R})$, соответствующие параметру a_i, через p_{a_i}.

Теорема 13. *Стационарная плотность p_{a_3} неустойчива, то есть для любой окрестности в слабой топологии $U_{p_{a_3}} \subset \mathcal{P}_{sym}(\mathbb{R})$ существует $p \in U_{p_{a_3}}$ такое, что решение СДУ (3) с начальным распределением p **не** сходится к стационарному решению с плотностью p_{a_3}.*

Теорема 14. *Стационарные плотности p_{a_1} и p_{a_2} локально устойчивы. То есть существуют окрестности точек p_{a_1} и p_{a_2} в $\mathcal{P}_{sym}(\mathbb{R})$ со слабой топологией такие, что решение СДУ (3) с начальным распределением из этих окрестностей сходится слабо при $t \to +\infty$ к соответствующему стационарному решению.*

Заметим также, что ключевым понятием этого раздела является функционал свободной энергии

$$F(p) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\int p(x)\ln p(x)dx + \frac{1}{2}\iint \mathrm{B}(x-y)p(x)p(y)dxdy.$$

В частности, результаты теорем 12–14 получены исходя из пространственно-временных свойств данного функционала, сформулированных в нескольких теоремах и леммах.

По своей сути функционал свободной энергии является аналогом функции Ляпунова в теории дифференциальных уравнений. Его основные свойства получены в параграфе §3.3. К ним относятся:

- значение функционала от распределения $\widetilde{X}_t$ убывает как функция от t (кроме случаев, когда одномерное распределение $\widetilde{X}_t$ является стационарным);
- функционал свободной энергии ограничен снизу;
- стационарные распределения СДУ (3) в точности соответствуют критическим точкам функционала свободной энергии;
- стационарное распределение СДУ (3) является (локально) устойчивым тогда и только тогда, когда оно соответствует (локальному) минимуму функционала свободной энергии.

В параграфе §3.2 при малых по модулю α с помощью преобразования Фурье показана экспоненциальная скорость слабой сходимости решения СДУ (3) с произвольным начальным условием к его стационарному решению.

В **дополнение** вынесены вспомогательные замечания и доказательства.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Анатолию Дмитриевичу Маните за постановку задач, постоянное внимание, многочисленные ценные советы и помощь в работе.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *П. Н. Ярыкин.* Устойчивость нелинейного стохастического процесса, аппроксимирующего систему взаимодействующих частиц. — Теория вероятностей и ее применения, 2006, т. 51, вып. 2, с. 400–409.

[2] *П. Н. Ярыкин.* Предельные свойства нелинейного стохастического процесса, аппроксимирующего систему взаимодействующих броуновских частиц. — Деп. в ВИНИТИ 07.12.05 №1606–В2005, 2005, 41 с.

[3] *П. Н. Ярыкин.* Поведение нелинейного случайного процесса в окрестности его стационарных распределений. — Успехи математических наук, 2006, т. 61, вып. 4, с. 199–200.

[4] *П. Н. Ярыкин.* Поведение стохастического процесса, описывающего систему частиц со взаимодействием среднего поля. — Вестник Московского Университета, Сер. 1, 2004, № 2, с. 55–58.

[5] *П. Н. Ярыкин.* Среднеполевая аппроксимация для одной системы взаимодействующих частиц. — Труды XXV Конференции молодых ученых (31 марта – 5 апреля 2003 г.), 2004, т. II, с. 251–255.