Московский Государственный Университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511

Крахт Борис Вячеславович

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБОГО РЯДА И ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА ОДНОЙ МНОГОМЕРНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧИ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2006

Работа выполнена на кафедре математического анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В.Н. Чубариков
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор М.П. Минеев кандидат физико-математических наук, доцент Л.П. Постникова
Ведущая организация:	Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого

Защита диссертации состоится 15 декабря 2006 г. В 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан ___ ноября 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Метод тригонометрических сумм был разработан И.М. Виноградовым[1]. В основе его метода лежат оценки моментов тригонометрических сумм Г. Вейля. И.М. Виноградов поставил проблему оценки сверху кратных тригонометрических сумм[2]. Данная задача была решена Г.И. Архиповым в начале 70-х годов прошлого века. Г.И. Архипов получил первые оценки двукратных сумм Г. Вейля для многочленов общего вида. В 1975 г. Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков[3,4] дали обобщение результатов Г.И. Архипова на кратный случай.

К.К. Марджинишвили[5] и Хуа Ло-Кен[6] дали применение метода тригонометрических сумм к аддитивным задачам теории чисел. Это привело к новым постановкам задач, связанным с показателями сходимости особого ряда и особого интеграла рассматриваемых аддитивных проблем.

В 1976 г. В.Н. Чубариков[7,8] получил оценки кратных тригонометрических интегралов и кратных полных рациональных

---

[1] *Виноградов И. М.* Об одной общей теореме Варинга // Мат. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 490–507.

[2] *Виноградов И.М.* Новый метод в аналитической теории чисел // Тр. МИАН. – 1937. – Т. 10. – С. 5–122.

[3] *Архипов Г.И., Чубариков В.Н.* О кратных тригонометрических суммах //Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 222, № 5. – С. 1017–1019.

[4] *Архипов Г.И., Чубариков В.Н.* Кратные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – Т. 40. – С. 209–220.

[5] *Марджанишвили К.К.* Об одновременном представлении чисел суммами полных первых, вторых, …, n - ых степеней // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – Т. 1. – С. 609–631.

[6] *Хуа Ло - ген* Аддитивная теория простых чисел // Тр. МИАН. – 1947. – Т. 22.

[7] *Чубариков В.Н.* О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах // Мат. заметки. – 1976. 20, №1. 61–68.

[8] *Чубариков В.Н.* Об одном кратном тригонометрическом интеграле // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227, № 6. – С. 1308–1310.

тригонометрических сумм. Итоги данных исследований были подведены в его диссертации[9].

В 1978 г. Г.И. Архипов, А.А. Карацуба, В.Н. Чубариков[10] решили проблему Хуа Ло-Кена о точном значении показателя сходимости особого ряда и особого интеграла проблемы Терри. Итоги данных исследований по кратным тригонометрическим суммам были подведены в 1980 г.[11]

В 1952 г. Хуа Ло-Кен[12] нашел точное значение показателя сходимости особого ряда в проблеме Терри для полной системы уравнений. В 1981 г. В.Н. Чубариков нашел точное значение этого показателя для неполной системы уравнений[13].

В течение 80-х годов прошлого столетия Г.И. Архипов, А.А. Карацуба, и В.Н. Чубариков[14,15] продолжили исследования и получили первые оценки кратных тригонометрических сумм Г. Вейля, равномерные по всем параметрам (по длинам интервалов изменения переменных суммирования, по степени осреднения и по степени многочлена).

В 1987 г. результаты всех исследований по кратным тригонометрическим суммам Г. Вейля составили содержание монографии

---

[9] *Чубариков В.Н.* Кратные тригонометрические суммы: Дис. ... канд. физ.мат. наук. – М. – 1977.

[10] *Архипов Г. И., Карцуба А. А., Чубариков В. Н.* Показатель сходимости особого интеграла проблемы Терри // Докл. АН СССР. – 1979.– Т. 248, № 2. – С. 268–272.

[11] *Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н.* Кратные тригонометрические суммы. // Тр. МИАН. – 1980. – С. 151.

[12] *Hua Loo-keng.* On the number of solutions of Tarry's problem // Acta Sci. Sinica. – 1952. – V 1, N 1. – P. 1–76.

[13] *Чубариков В.Н.* Об асимптотических формулах для интеграла И.М. Виноградова и его обобщений // Тр. МИАН. – 1981. – Т. 157. – С. 214–232.

[14] *Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.* Равномерные оценки кратных тригонометрических сумм // Докл. АН СССР. – 1980. –Т. 252, № 6. – С. 1289–1291.

[15] *Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н.* Кратные тригонометрические суммы и их приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. –1980. – Т. 44. – С. 723–781.

«Теория кратных тригонометрических сумм»[16]. В середине 80-х годов прошлого века В.Н. Чубариков получил первые оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами с многочленом общего вида в экспоненте[17,18].

Исследования кратных тригонометрических интегралов были продолжены И.Ш. Джаббаровым[19], И.А. Икромовым[20], М.А. Чахкиевым[21] и др. Они получили оценки показателя сходимости особых интегралов для некоторых многомерных аддитивных задач.

Цель работы

Целью работы является нахождение оценок сверху и снизу показателей сходимости особых рядов и особых интегралов в многомерной аддитивной задаче с полной и неполной совокупностью простейших форм от двух переменных.

Методы исследования

В основу исследований был положен метод тригонометрических сумм.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

---

[16] *Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н.* Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит., 1987.

[17] *Чубариков В.Н.* Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 278, № 2. – С. 302—304.

[18] *Чубариков В.Н.* Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1985. – Т. 49, № 5. – С. 1031—1067.

[19] *Джаббаров И.Ш.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Тр. МИАН. – 1994. – Т. 207. – С. 82–92.

[20] *Икромов И.А.* On the convergence exponent of trigonometric integrals // Тр. МИАН. – 1997. – Т. 218. – С. 179–189.

[21] *Чахкиев М.А.* О показателе сходимости особого интеграла многомерного аналога проблемы Терри // Изв. Российской АН. Сер. мат. – 2003. – Т. 67 (2). – С. 211–224.

1. Найдены оценки сверху и снизу для показателя сходимости особого ряда в аддитивной задаче с полным набором простейших форм от двух переменных.
2. Найдено новое преобразование полной кратной рациональной тригонометрической суммы и получена оценка сверху ее абсолютной величины. Доказаны теоремы о полиномиальных сравнениях по модулю, равному степени простого числа. Изучены свойства цепочки показателей и свойства решений системы сравнений в частных производных по модулю, равному степени простого числа. Изучена арифметическая природа особого ряда, связывающая значения суммы особого ряда с предельными значениями нормированной величины числа решений системы сравнений по модулю, равному степени простого числа.
3. Доказана теорема об оценке сверху и об оценке снизу для показателя сходимости особого ряда в аддитивной задаче с неполной совокупностью простейших форм заданной степени от двух переменных.
4. Доказана теорема об оценке сверху показателя сходимости особого интеграла многомерной проблемы Терри для системы форм одной степени.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методы исследований могут быть применены к дальнейшим исследованиям тригонометрических сумм.

Апробация диссертации

Результаты диссертации неоднократно докладывались на научных семинарах по аналитической теории чисел под руководством Г.И. Архипова и В.Н. Чубарикова на механико-математическом факультете МГУ им. М.В.

Ломоносова, на Пятом Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике в Кисловодске в 2004 г. (2.05.2004 – 8.05.2004), а также были доложены на Четвертой Китайско-японской конференции по теории чисел, прошедшей в Академическом центре Шеньдунского университета в г. Вейхай (КНР) в 2006 г. (30.08.2006 – 3.09.2006).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в двух работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения и четырех глав, разбитых на параграфы. Текст диссертации изложен на 58 страницах. Список литературы включает в себя 73 библиографические ссылки.

Содержание работы

Во введении приведен краткий исторический обзор, даны постановки задач и изложены результаты диссертации.

В главе I получены оценки сверху и снизу для показателя сходимости особого ряда в аддитивной задаче с полным набором простейших форм от двух переменных. Параграф 1 этой главы посвящен обзору предварительной оценки показателя сходимости особого ряда, полученный из оценки общей рациональной тригонометрической суммы, полученной В.Н. Чубариковым в 1976 г. Результат сформулирован в виде следующей теоремы:

Теорема 1. Особый ряд $\sigma_0 = \sum_{Q=1}^{\infty} A(Q)$ сходится при $2k > n(n+2)$.

Доказательство данной теоремы полностью вытекает из следующей леммы:

Лемма 1.1. Пусть $r \geq 1, n_1, \ldots, n_r \geq 1$ - натуральные числа, $\left(a\left(n_1, \ldots, n_r\right), \ldots, a(0, \ldots, 0)\right)$ – набор $m=\left(n_1+1\right) \ldots\left(n_r+1\right)$ целых чисел, $Q \geq 1$, и пусть $F\left(x_1, \ldots, x_r\right)=\sum_{t_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{t_r=0}^{n_r} a\left(t_1, \ldots, t_r\right) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}$ – многочлен, коэффициенты которого, исключая свободный член $a(0, \ldots, 0)$, в совокупности взаимно просты с Q.

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{x_1=0}^{Q} \ldots \sum_{x_r=0}^{Q} e^{2 \pi i \frac{F\left(x_1, \ldots, x_r\right)}{Q}} \leq e^{7 n r} 3^{r \nu(Q)} Q^{r-\frac{1}{n}}(\tau(Q))^{r-1}.$$

Во втором параграфе рассмотрено преобразование полной кратной рациональной тригонометрической суммы и получена оценка сверху ее абсолютной величины. Тригонометрическая сумма

$$S=S(Q ; \Phi(x, y))=\sum_{x=1}^{Q} \sum_{y=1}^{Q} \exp \left(\frac{2 \pi i \Phi(x, y)}{Q}\right),$$

где $\Phi(x, y)=\sum_{s=0}^{n} a_s x^{n-s} y^s,\left(a_0, a_1, \ldots, a_n, Q\right)=1$,

представляется в виде

$$S(Q, \Phi(x, y))=\prod_{p \mid Q} S\left(p^l, Q_p^{-1} \Phi\left(Q_p x, Q_p y\right)\right),$$

причем $Q=\prod_{p \mid Q} p^l$, $Q_p=Q / p^l$, $p^l \| Q$.

Ввиду мультипликативности суммы $S(Q, \Phi(x, y))$, особый ряд σ рассматриваемой задачи имеет вид $\sigma=\prod_p \sigma_p$, где $\sigma_p=1+\sum_{l=1}^{\infty} A\left(p^l\right)$,

$$A\left(p^l\right)=1+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\substack{a_0=0\\(a_0,p)=1}}^{p^l-1}\ldots\sum_{\substack{a_n=0\\(a_n,p)=1}}^{p^l-1}\left|p^{-2l}S\left(p^l,F\right)\right|^{2k},$$

$$S\left(p^l;F\right)=\sum_{x=1}^{p^l}\sum_{y=1}^{p^l}\exp\left(\frac{2\pi iF\left(x,y\right)}{p^l}\right),$$

где $F\left(x,y\right)=\sum_{s=0}^{n}a_s x^{n-s}y^s,\left(a_0,a_1,\ldots,a_n,p\right)=1.$

Полную рациональную тригонометрическую сумму можно представить так:

$$S\left(\zeta_0,\eta_0\right)=\exp\left\{2\pi i\frac{F\left(\zeta_0,\eta_0\right)}{p^l}\right\}p^{2(u_1-1)}S\left(p^{l-u_1};F_1\left(x,y\right)\right), \quad (1)$$

где $\left(\zeta_0,\eta_0\right)$ – любой корень системы сравнений

$$\begin{cases}p^{-\tau_1}F_x'\left(x;\ y\right)\equiv 0\left(\operatorname{mod}p\right),\\ p^{-\rho_1}F_y'\left(x;\ y\right)\equiv 0\left(\operatorname{mod}p\right),\end{cases}$$

причем для корня $\left(\zeta_0,\eta_0\right)$ данной системы сравнений наибольший общий делитель коэффициентов многочлена

$$F\left(\zeta_0+px,\eta_0+py\right)-F\left(\zeta_0,\eta_0\right)$$

делится в точности на p^{u_1}, т.е. коэффициенты многочлена

$$F_1\left(x,y\right)=p^{-u_1}\left(F\left(\zeta_0+px,\eta_0+py\right)-F\left(\zeta_0,\eta_0\right)\right)$$

в совокупности взаимно просты с p, а величины τ_1 и ρ_1 определяются из соотношений:

$$p^{\tau_1}\left\|\left(na_0,\left(n-1\right)a_1,\ldots,a_{n-1}\right)\right.$$
$$p^{\rho_1}\left\|\left(a_1,2a_2,\ldots,na_n\right)\right.$$

Далее по той же схеме получаем

$$S\left(p^{l-u_1};F_1(x,y)\right)=\sum_{(\zeta_1,\eta_1)}S(\zeta_1,\eta_1);$$

$$S(\zeta_1,\eta_1)=\exp\left\{2\pi i\frac{F(\zeta_1,\eta_1)}{p^{l-u_1}}\right\}p^{2(u_2-1)}S\left(p^{l-u_1-u_2};F_2(x,y)\right)$$

$$F_2(x,y)=p^{-u_2}\left(F_1(\zeta_1+px,\eta_1+py)-F_1(\zeta_1,\eta_1)\right),$$

где p^{u_2} в точности делит коэффициенты многочлена

$$F_1(\zeta_1+px,\eta_1+py)-F_1(\zeta_1,\eta_1),$$

причем (ζ_1,η_1) является корнем системы сравнений

$$\begin{cases} p^{-\tau_2}\left(F_1(x;\ y)\right)_x' \equiv 0 \pmod p \\ p^{-\rho_2}\left(F_1(x;\ y)\right)_y' \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

Наконец, определим число t, зависящее от наборов $(\zeta_0,\eta_0),(\zeta_1,\eta_1),\ldots,(\zeta_t,\eta_t)$, корней соответствующих систем сравнений, определяется следующим образом:

$$\begin{cases} p^{-\tau_s}\left(F_{s-1}(x;\ y)\right)_x' \equiv 0 \pmod p \\ p^{-\rho_s}\left(F_{s-1}(x;\ y)\right)_y' \equiv 0 \pmod p, \end{cases}$$

причем $1\le s\le t$, и удовлетворяющее условиям

$$l-u_1-\ldots-u_{t+1}<2\omega+1\le l-u_1-\ldots-u_t.$$

Сумму $S\left(p^l;F\right)$ можно записать в следующем виде

$$S\left(p^l;F\right)=$$

$$=\sum_{(\zeta_0,\eta_0)}\ldots\sum_{(\zeta_t,\eta_t)}\exp\left\{2\pi i\left(\frac{F(\zeta_0,\eta_0)}{p^l}+\frac{F_1(\zeta_1,\eta_1)}{p^{l-u_1}}+\ldots+\frac{F_t(\zeta_t,\eta_t)}{p^{l-u_1-\ldots-u_t}}\right)\right\}\times$$

$$\times S\left(p^{l-u_1-\ldots-u_t};F_t\right)p^{2(u_1+\ldots+u_t)-2t}.$$

Третий параграф содержит леммы о полиномиальных сравнениях по модулю равному степени простого числа, изучены свойства цепочки показателей $u_1, u_2, \ldots, u_t$ и свойства решений системы сравнений в частных производных по модулю равному степени простого числа.

Лемма 3.1. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_t$ - величины, введенные в §2. Тогда справедливы неравенства

$$n \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_t \geq 2.$$

Лемма 3.2 Пусть $F(x, y)$ – форма степени n с целыми коэффициентами, в совокупности взаимно простыми с p. Тогда количество наборов показателей $(u_1, \ldots, u_t)$ формы $F(x, y)$ не превосходит np^t.

Четвертый параграф посвящен арифметической природе особого ряда, в данном параграфе связываются значения суммы особого ряда с предельными значениями нормированной величины числа решений системы сравнений по модулю равному степени простого числа.

Лемма 4.1. Имеет место равенство

$$p^{-r(4k-n-1)} N\left(p^r\right) = \sum_{l=0}^{r} \sum_{a_0=0}^{p^l-1} \underset{p \nmid (a_0, \ldots, a_n)}{\ldots} \sum_{a_n=0}^{p^l-1} \left| p^{-2l} S\left(p^l, F\right) \right|^{2k},$$

где $N\left(p^r\right)$ – количество решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1^n + \ldots x_k^n \equiv x_{k+1}^n + \ldots x_{2k}^n \left(\operatorname{mod} p^r\right), \\ x_1^{n-1} y_1 + \ldots x_k^{n-1} y_k \equiv x_{k+1}^{n-1} y_{k+1} + \ldots x_{2k}^{n-1} y_{2k} \left(\operatorname{mod} p^r\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 y_1^{n-1} + \ldots x_k y_k^{n-1} \equiv x_{k+1} y_{k+1}^{n-1} + \ldots x_{2k} y_{2k}^{n-1} \left(\operatorname{mod} p^r\right), \\ y_1^n + \ldots y_k^n \equiv y_{k+1}^n + \ldots y_{2k}^n \left(\operatorname{mod} p^r\right), \end{cases}$$

где неизвестные $x_1,\ldots,x_{2k},y_1,\ldots,y_{2k}$ пробегают полную систему сравнений по модулю p^r,

$$S\left(p^l,F\right)=\sum_{x=1}^{p^l}\sum_{y=1}^{p^l}\exp\left\{2\pi i\frac{F\left(x,y\right)}{p^l}\right\},$$

$$F\left(x,y\right)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n.$$

Лемма 4.2. Справедливо следующее предельное соотношение

$$\sigma_p=\lim_{r\to\infty}p^{-r(4k-n-1)}N\left(p^r\right).$$

Пятый параграф данной главы посвящен сходимости особого ряда. В нем определяется мера множества рациональных тригонометрических сумм с заданной оценкой, дается уточнение теоремы 1, которое сформулировано в виде основной теоремы о сходимости особого ряда, определяющая сверху показатель сходимости.

Теорема 2. Особый ряд σ сходится при

$$4k>n\left(n+3\right)+6.$$

В шестом параграфе содержится оценка снизу показателя сходимости особого ряда:

Теорема 3. Особый ряд σ расходится при

$$4k\le n^2+2.$$

В главе II проводятся исследования оценок сверху и снизу для показателя сходимости особого ряда в аддитивной задаче с неполной совокупностью простейших форм заданной степени от двух переменных. В первом параграфе описываются полные рациональные тригонометрические суммы с выщербленной формой, рассматриваются предварительные оценки. Система уравнений в рассматриваемой задаче определяется следующим образом.

Пусть $0 \le m < r < \ldots < s \le n$ – натуральные числа и количество чисел $m, r, \ldots, s$ равно λ и пусть $\lambda \ne n+1$. Рассмотрим следующую систему из λ уравнений

$$\begin{cases} x_1^m y_1^{n-m} + \ldots + x_k^m y_k^{n-m} = x_{k+1}^m y_{k+1}^{n-m} + \ldots + x_{2k}^m y_{2k}^{n-m} \\ x_1^r y_1^{n-r} + \ldots + x_k^r y_k^{n-r} = x_{k+1}^r y_{k+1}^{n-r} + \ldots + x_{2k}^r y_{2k}^{n-r} \\ \ldots \\ x_1^s y_1^{n-s} + \ldots + x_k^s y_k^{n-s} = x_{k+1}^s y_{k+1}^{n-s} + \ldots + x_{2k}^s y_{2k}^{n-s} \end{cases}$$

причем неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}, y_1, y_2, \ldots, y_{2k}$ этой системы уравнений могут принимать значения натуральных чисел от 1 до P. Данная система уравнений называется неполной. Форма $f(x,y) = a_m x^m y^{n-m} + a_r x^r y^{n-r} + \ldots + a_s x^s y^{n-s}$ степени n называется выщербленной, если число λ мономов в ней, отлично от $n+1$. Также в данном параграфе доказывается предварительная оценка показателя сходимости соответствующего особого ряда

Теорема 4. Пусть $0 \le m < r < \ldots < s \le n$ - натуральные числа и количество чисел $m, r, \ldots, s$ равно λ, причем $\lambda \ne n+1$. Тогда особый ряд $\sigma' = \sum_{Q=1}^{\infty} A_1(Q)$ сходится при

$$2k > \nu(\lambda+1),$$

где $\nu = \max(s, n-m) \le n$.

Второй параграф содержит доказательство теоремы об оценке снизу показателя сходимости особого ряда для неполной совокупности простейших форм от двух переменных. Данная оценка является новой для многомерных аддитивных задач.

Теорема 5.

1. Пусть $m = 0, s = n$. Тогда особый ряд σ' расходится при $4k \leq \lambda n - \lambda + 3$.
2. Пусть $m = 0$. Тогда особый ряд σ' расходится при $2k \leq \lambda n - m - \ldots - r - t - \ldots - s + 1$.
3. Пусть $s = n$. Тогда особый ряд σ' расходится при $2k \leq m + \ldots + r + t + \ldots + s + 1$.
4. Пусть $m \neq 0, s \neq n, 0 < m < \ldots < r \leq \dfrac{n}{2} < t < \ldots < s < n$.

Тогда особый ряд σ' расходится при

$$2k \leq m + \ldots + r + (n - t) + \ldots + (n - s) + 1.$$

Глава III посвящена исследованию особого интеграла многомерной аддитивной проблемы варинговского типа об исследовании асимптотической формулы для количества решений системы уравнений. Доказана теорема об оценке сверху показателя сходимости особого интеграла для многочлена определенного вида.

Глава IV содержит асимптотическую формулу для количества $J_{k,n}(P)$ решений системы уравнений рассматриваемой многомерной аддитивной задачи. Данная формула как раз выражается через особый ряд и особый интеграл, которые рассматриваются в предыдущих главах данной работы, т.е. при фиксированном $n \geq 2$ и $k \geq k_0$, где $k_0 = k_0(n)$ – некоторое натуральное число, имеющее порядок $n^{3\ln n}$, справедлива асимптотическая формула

$$J_{k,n}(P) = P^{4k - n(n+1)} \sigma_0 \theta_0 + O\left(P^{4k - n(n+1) - \delta}\right),$$

где $\delta = \delta(n) > 0$.

$$\theta_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i f(x,y)} dxdy \right|^{2k} da_0 da_1 \ldots da_n,$$

$$f(x,y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n;$$

$$\sigma_0 = \sum_{Q=1}^{\infty} \sum_{[q_0,\ldots,q_n]=Q} \sum_{\substack{a_0=0 \\ (a_0,q_0)=1}}^{q_0-1} \ldots \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n,q_n)=1}}^{q_n-1} \left| Q^{-2} S\left(\frac{a_o}{q_0}, \ldots, \frac{a_n}{q_n} \right) \right|^{2k} = \sum_{Q=1}^{\infty} A(Q),$$

$$S\left(\frac{a_0}{q_0}, \ldots, \frac{a_n}{q_n} \right) = \sum_{x=1}^{Q} \sum_{y=1}^{Q} e^{2\pi i \Phi(x,y)}, \Phi(x,y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{a_m}{q_m} x^{n-m} y^m.$$

Автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.Н. Чубарикову за постановку задач и большое внимание к работе, а также профессору Г.И. Архипову за ценные советы.

Публикации автора по теме диссертации

[1]. Крахт Б.В. О показателе сходимости особого ряда в аддитивной проблеме варинговского типа // Евразийский мат. журнал. 2005. №3. С. 52 – 73.

[2]. Крахт Б.В. Об одной кратной полной рациональной тригонометрической сумме // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 2006. №6. С. 48-51.