МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

*На правах рукописи*

ПРИХОДЬКО Максим Александрович

УДК 517.5

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(01.01.01.– математический анализ)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор В. Н. Сорокин

Москва – 2006

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук,<br>профессор В. Н. Сорокин |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>профессор В. А. Калягин |
| | кандидат физико-математических наук,<br>А. В. Червов |
| Ведущая организация: | Институт прикладной математики РАН<br>им. М. В. Келдыша |

Защита диссертации состоится 9 февраля 2007 г. в $16^{15}$ на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 9 января 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85
доктор физико-математических наук,
профессор Т. П. Лукашенко

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Диссертация относится к классическому разделу математического анализа — она посвящена изучению асимптотического поведения ортогональных систем, связанных с классическими ортогональными многочленами и другими классами специальных функций.

Дано приложение полученных асимптотических формул к задачам теоретической физики, а именно к теории водородоподобного атома и гармонического осциллятора в модели Козлова–Никишина.

В начале введения мы даем краткое описание этой модели, которая порождает ряд интересных ортогональных систем, изучению которых посвящена диссертация.

Затем формулируются основные результаты диссертации.

Предшествующие работы в этом направлении (см. ссылки ниже) были посвящены решению аналогичных задач, но в классических нерелятивистских моделях.

Исследование энтропии и энтропийного соотношения неопределенности различных систем привлекает все большее внимание.

Существует множество работ, написанных на эту тему[1] [2] [3] [4], однако все они ограничиваются нерелятивистским случаем. Один из способов исследования релятивистского случая предложили В. В. Козлов и Е. М. Никишин[5] для пространства Минковского с тремя пространственными и одной временной координатами.

В 1986 г. В. В. Козлов и Е. М. Никишин предложили модель взаимодействия релятивистских частиц, отличающуюся от общепринятых подходов Клейна–Гордона и Дирака. В частности, в рамках этой модели была получена формула Бора для энергетических уровней атома, а также волновая функция для координатного представления.

Дальнейшее исследование модели не проводилось.

**Цель работы.**

1. Исследовать асимптотическое поведение информационной энтропии ато-

---

[1] J. S. Dehesa, R. J. Yanez, A. I. Aptekarev and V. Buyarov. Strong asymptotics of Laguerre polynomials and information entropies of two-dimensional harmonic oscillator and one-dimensional Coulomb potentials. J. Math. Phys. Volume 39, Number 6. June 1998. P. 3050–3060.

[2] Yanez R. J., Van Assche W., Dehesa J. S. Position and momentum information entropies of the $D$-dimensional harmonic oscillator and hydrogen atom. Phys. Rev. 1994. A 50. P. 3065–3079.

[3] Dehesa J. S., Martinez-Finkelshtein A., Sorokin V. N. Quantum-information entropies for highly-excited states of single-particle systems with power-type potentials. Phys. Rev. 2002. A 66. P. 1–7.

[4] Dehesa J. S., Martinez-Finkelshtein A., Sorokin V. N. Asymptotics of information entropies of some Toda-like potentials. J. Math. Phys. 2003. V. 44. N 1. P. 36–47.

[5] Козлов В. В., Никишин Е. М. Релятивистский вариант гамильтонова формализма и волновые функции водородоподобного атома. Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика. Механика. №5. М., 1986. С. 11–20.

ма водорода и гармонического осциллятора в модели Козлова–Никишина при различных предельных переходах.
2. Исследовать соотношения неопределенности для этих переходов.
3. Получить общий вид волновой функции в импульсном представлении.

**Методы исследования.** В диссертации применяются асимптотические методы анализа, методы теории аналитических функций, методы теории специальных функций и дифференциальных уравнений.

**Научная новизна.** Основные результаты работы следующие.
1. Описано асимптотическое поведение волновых функций атома водорода и гармонического осциллятора в модели Козлова–Никишина как в координатном, так и импульсном представлениях при различных предельных переходах.
2. Получены волновые функции в импульсном представлении для произвольного центральносимметричного поля.
Все перечисленные результаты являются новыми.

**Практическая и теоретическая ценность.** Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории функций, функциональном анализе и квантовой механике. В дальнейшем они могут быть использованы специалистами, работающими в МГУ им. М. В. Ломоносова, МИАН им. В. А. Стеклова, ИПМ им. М. В. Келдыша, ИТЭФ им. А. И. Алиханова, Нижегородском филиале ВШЭ.

**Апробация.** Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры теории функций и функционального анализа в МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. А. И. Аптекарева, проф. В. Н. Сорокина и доц. В. С. Буярова, в отделе комплексного анализа МИАН им. В. А. Стеклова под руководством ак. РАН А. А. Гоначара, чл.-к. РАН Е. М. Чирки и проф. А. И. Аптекарева.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 2 работах автора, список которых приводится в конце автореферата.

**Структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 13 наименований. Общий объем работы 51 страница.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** сформулированы основные результаты диссертации. Приводится кратко описание модели Козлова–Никишина.

Конфигурационное пространство системы — это четырехмерное пространство Минковского $\mathsf{Q} = \mathbb{R}^4$ с декартовыми координатами $\{s = (ct, x, y, z)\}$ и с иденфинитной метрикой

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{1}$$

Здесь $c$ — скорость света; $x$, $y$, $z$ — пространственные координаты частицы относительно центра взаимодействия, $t$ — рассогласование собственных времен частицы и центра.

Обозначим

$$\mathcal{K} = \{s \in \mathsf{Q} : s^2 < 0\}$$

*пространственноподобный конус* в конфигурационном пространстве.

Для того, чтобы частица могла взаимодействовать с центром, рассогласование времен должно быть "достаточно мало". Формально, это условие сводится к тому, что точка $s$ принадлежит пространственноподобному конусу

$$\mathcal{K} = \{s : s^2 < 0\}.$$

Таким образом, состояние системы описывает волновая функция $\Psi : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая лоренц-инвариантному уравнению Шредингера

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m_0c^2}\Box + U(\rho)\right)\Psi = E\Psi, \tag{2}$$

где

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

— оператор Даламбера, т. е. кинетическая энергия частицы, $U$ — потенциальная энергия, $E$ — полная энергия (не включающая в себя внутреннюю энергию $m_0c^2$). Здесь $\hbar$ — постоянная Планка, $m_0$ — масса частицы. В общем случае полагают

$$U = U(\rho), \qquad \rho > 0,$$

где $\rho^2 = -s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 > 0$.

В атомной системе единиц рассматриваемое уравнение принимает вид

$$\left(-E + \Box + U(\rho)\right)\Psi = 0, \tag{3}$$

Это уравнение инвариантно относительно *группы Лоренца*, т. е. группы линейных преобразований конфигурационного пространства, сохраняющих квадратичную форму (1).

Наряду с конфигурационным пространством $\mathsf{Q}$ рассмотрим сопряженное *пространство импульсов* $\mathsf{P} = \mathsf{Q}^* = \mathbb{R}^4$ с декартовыми координатами

$s^* = (ct^*, x^*, y^*, z^*)$, которые имеют смысл энергии и трех импульсов соответственно, и с иденфинитной метрикой, аналогичной (1). Обозначим $\mathcal{K}^*$ пространственноподобный конус в сопряженном пространстве.

Переход от координатного представления к импульсному осуществляет *преобразование Фурье*, которое в безразмерных единицах имеет вид

$$\Psi^*(s^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^4 \int\limits_{\mathsf{Q}} \Psi(s) e^{iss^*} d\,\mu(s), \tag{4}$$

где

$$ss^* = c^2tt^* - xx^* - yy^* - zz^*$$

иденфинитное скалярное произведение, а $d\,\mu(s) = c\;dt\;dx\;dy\;dz$ — элемент объема. Тогда $\Psi^*$ будет волновой функцией в импульсном представлении. Напомним, что мы рассматриваем волновые функции $\Psi$, определенные в конусе $\mathcal{K}$, тем самым в (4) полагаем $\Psi = 0$ вне $\mathcal{K}$.

Определим гильбертово пространство $\mathcal{H}$ — подпространство в $L^2(\mathcal{K}, d\,\mu)$, состоящее из функций, носители преобразований Фурье которых принадлежат $\mathcal{K}^*$. Аналогичным образом определим сопряженное пространство $\mathcal{H}^*$. Тогда преобразование Фурье будет унитарным оператором

$$* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^*.$$

В модели Козлова-Никишина ищутся решения стационарного уравнения Шредингера (3) с потенциалом $U(\rho) = -\frac{2}{\rho}$, принадлежащие гильбертову пространству $\mathcal{H}$. Ищутся связные состояния системы, т. е. решения уравнения (3), интегрируемые с квадратом: $\Psi \in L^2(\mathcal{K})$.

В работе[5] было показано, что дискретный спектр уравнения (3) состоит из энергитических уровней, определенных формулой Бора:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Соответствующие собственные функции $\Psi_{n,\nu,l,m}$ нумеруются четырьмя квантовыми числами, а именно:
- $n = 1, 2, 3, \ldots$ — *главное квантовое число*,
- $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, n - \frac{1}{2}$ — *квантовое число*, не имеющее аналога в классическом случае и связанное с *временной координатой*,
- $l = \nu, \nu + 1, \nu + 2, \ldots$ — *орбитальное квантовое число*,
- $m = -l, -l + 1, \ldots, l$ — *магнитное квантовое число.*

Выбор связных состояний с фиксированными квантовыми числами обусловлен законами сохранения соответствующих физических величин.

Для квантовых чисел $n$, $l$, $m$ мы используем стандартную терминологию. Квантовое число $\nu$ не имеет аналога в нерелятивистской теории, оно появляется из-за временной координаты. Но фактически, число $\nu$ также, как числа $l$ и $m$, связано с законами сохранения вращательного момента и его проекций.

Волновые функции $\Psi_{n,\nu,l,m}$ были получены в работе[5] методом разделения переменных в *псевдосферических координатах*. А именно, в пространственноподобном конусе $\mathcal{K}$ вводятся следующие криволинейные координаты:

$$\begin{aligned}
t &= \rho \operatorname{sh} \psi, && 0 < \rho < +\infty, \\
z &= \rho \operatorname{ch} \psi \cos\theta, && -\infty < \psi < +\infty, \\
y &= \rho \operatorname{ch} \psi \sin\theta \cos\varphi, && 0 \le \theta \le \pi, \\
x &= \rho \operatorname{ch} \psi \sin\theta \sin\varphi, && -\infty < \varphi < +\infty \pmod{2\pi},
\end{aligned} \tag{5}$$

Элемент объема в псевдосферических координатах равен

$$d\,\mu = \rho^3 \operatorname{ch}^2 \psi \sin\theta \, d\,\rho \, d\,\psi \, d\,\theta \, d\,\varphi.$$

Тогда

$$\Psi_{n,\nu,l,m} = \tilde{A}_{n,\nu}(\rho) \tilde{T}_{\nu,l}(\psi) \tilde{Y}_{l,m}(\theta, \varphi).$$

Радиальная составляющая выражается через многочлен Лагерра:

$$\tilde{A}_{n,\nu}(\rho) = \frac{C_A}{\rho^{\frac{3}{2}}} A_{n,\nu}(\rho), \qquad A_{n,\nu}(\rho) = \rho^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{n}} L_k^{(2\nu)}\left(\frac{2\rho}{n}\right), \tag{6}$$

где $k = n - \nu - \frac{1}{2} = 0, 1, 2, \ldots$.

Временная составляющая выражается через собственные функции потенциала Пешля–Теллера[6]

$$\frac{d^2}{d\psi^2} T + \frac{l(l+1)}{\operatorname{ch}^2 \psi} T = \nu^2 T,$$

а именно

$$\tilde{T}_{\nu,l}(\psi) = \frac{C_T}{\operatorname{ch} \psi} T_{\nu,l}(\psi),$$

где

$$T_{\nu,l}(\psi) = \frac{1}{(\operatorname{ch} \psi)^{\nu}} \sum_{k=0}^{l-\nu} \frac{(\nu - l)_k \, (\nu + l + 1)_k}{(\nu + 1)_k k!} \frac{1}{(e^{2\psi} + 1)^k},$$

и $(p)_k = p(p+1) \cdot \ldots \cdot (p+k-1)$ — символ Похгаммера.

Угловая составляющая — это сферическая функция

$$\tilde{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) = \tilde{\Theta}_{l,m}(\theta) e^{im\varphi}, \qquad \tilde{\Theta}_{l,m}(\theta) = C_Y \sin^{|m|} \theta \, C_{l-|m|}^{|m|+\frac{1}{2}}(\cos\theta),$$

[6]Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Мир, М., 1974

где $C_{l-|m|}^{|m|+\frac{1}{2}}$ — многочлен Гегенбауэра.

Здесь $C_A, C_T, C_Y$ — положительные нормировочные постоянные.

**В первой главе** в дополнение к работе[5] вычислены волновые функции в импульсном представлении.

Для произвольного центрально-симметричного потенциала волновая функция в импульсном представлении, как и в координатном представлении, разделяется по переменным и фактически состоит двух частей — не зависящей от вида потенциала угловой составляющей и радиальной функции, которая зависит от вида потенциала $U(\rho)$ и вычисляется с помощью интегрального преобразованием, ядром которого является функция Бесселя. При этом угловая составляющая отличается от нерелятивистского случая добавлением функции $T_{\nu,l}(\psi)$, отвечающей за временную координату.

**Теорема 1**. *Волновые функции в импульсном представлении имеют вид*

$$\Phi^*_{n,\nu,l,m} = \pm i^l \tilde{A}^*_{n,\nu}(p)\tilde{T}_{\nu,l}(\psi')\tilde{Y}_{l,m}(\theta', \varphi'),$$

*где*

$$\tilde{A}^*_{n,\nu}(p) = \int\limits_0^\infty \tilde{A}_{n,\nu}(\rho)\frac{J_\nu(\rho p)}{\rho p}\rho^3\, d\,\rho. \tag{7}$$

Для радиальной волновой функции в импульсном представлении вычислена равномерная асимптотика при $n \to \infty$.

**Теорема 2**. *При $n \to \infty$ имеет место равномерная асимптотическая формула*

$$\tilde{A}^*_{n,\nu}(p) = (-1)^n \frac{8}{\sqrt{\pi}} n^2 \frac{\cos^5\phi}{\sin^{\frac{3}{2}} 2\phi} \cos\left(2n\phi + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{8}$$

*где*

$$\phi = \operatorname{arctg}(np).$$

Вычислена энтропия волновой функции в координатном и импульсном представлении при различных предельных переходах. Наибольший интерес помимо очевидного перехода $n \to \infty$ представляют случаи $l \to \infty$ при фиксированных $m$ и $\nu$ и $l = \nu \to \infty$.

**Теорема 3**. *Для энтропии волновой функции в координатном и импульсном представлении верны следующие выражения*:

*1). При $n \to \infty$, $l = \nu = m = \frac{1}{2}$*:

$$S_\Phi = 8\ln n + 2\ln 2 + 4\ln\pi + \frac{1}{2} + o(1),$$

$$S_{\Phi^*} = -4\ln n + 7\ln 2 + 4\ln\pi - \frac{13}{2} + o(1).$$

*2a). При $l \to \infty$, $\nu = m = \frac{1}{2}$, $n = 1$:*

$$S_\Phi = 2\ln l + 3\ln 2 + 2\ln\pi + \frac{5}{2} + o(1),$$
$$S_{\Phi^*} = 2\ln l + 9\ln 2 + 3\ln\pi + \gamma - \frac{17}{3} + o(1).$$

*2b). При $\nu = l \to \infty$, $n = \nu + \frac{1}{2}$:*

$$S_\Phi = 7\ln l + 3\ln 2 + 2\ln\pi + \frac{1}{2} + o(1),$$
$$S_{\Phi^*} = -4\ln l + 3\ln 2 + \ln\pi + o(1).$$

Здесь и далее $\gamma$ — постоянная Эйлера.

Для доказательства теоремы 1 была доказана лемма об интегральном преобразовании временной составляющей волновой функции — функции $T_{\nu,l}(\psi)$, которое является частью преобразования Фурье, следствием интеграла Сонина–Гегенбауэра и с точностью до константы совпадает с самой функцией $T_{\nu,l}(\psi)$.

**Лемма 1**. *Справедлива формула*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{\nu,l}(\psi)}{\operatorname{ch}\psi} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(a\operatorname{ch}\psi)}{\sqrt{a\operatorname{ch}\psi}} e^{-ib\operatorname{sh}\psi} \operatorname{ch}^2\psi\, d\psi$$
$$= (-1)^{\left[\frac{l-\nu}{2}\right]} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\operatorname{ch}\psi'}} T_{\nu,l}(\psi') \frac{J_\nu(\rho p)}{\sqrt{\rho p}},$$

где

$$a = \rho p \operatorname{ch}\psi', \qquad b = \rho p \operatorname{sh}\psi'.$$

В дополнение к основным результатам вычислены вакуумные волновые функции для основного состояния в координатном и импульсном представлениях, после чего вычислена их энтропия и исследована с точки зрения соотношения неопределенности.

**Лемма 2**. *В основном состоянии*

$$\Phi_V = \frac{2e^{-\rho}}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}}\psi} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\sin\theta} \cdot \frac{e^{\pm i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$
$$\Phi_V^* = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{p}(1+p^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}}\psi'} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\sin\theta'} \cdot \frac{e^{\pm i\frac{\varphi'}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

**Лемма 3**. *Энтропийные соотношения неопределенности выполнены.*

$$S_{\Phi_V} + S_{\Phi_V^*} = 7\ln\pi + 8\ln 2 - \frac{1}{6} - \gamma \approx 12.4811 \geq 4(1+\ln\pi) \approx 8.57892.$$

$$S_\Phi + S_{\Phi^*} \sim 4\ln n, \qquad n \to \infty.$$

$$S_\Phi + S_{\Phi^*} \sim 4\ln l, \qquad l \to \infty, \nu = \mathrm{const}.$$

$$S_\Phi + S_{\Phi^*} \sim 3\ln l, \qquad l = \nu \to \infty.$$

**Во второй главе** диссертации изучен случай гармонического осциллятора.

Найден вид радиальной составляющей волновой функции в координатном представлении, а также уровни энергии.

**Теорема 4**. *Для гармонического осциллятора $U = \rho^2$ радиальная составляющая волновой функции имеет вид*

$$A(\rho) = e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{\nu+\frac{1}{2}} L^{(\nu)}_{\frac{E-2(\nu+1)}{4}}(\rho^2),$$

*где $L_n^\alpha$ — многочлен Лагерра.*

*Уровни энергии:*

$$E_n = 4n + 2(\nu+1), \quad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

Вычислена волновая функция в импульсном представлении, которая с точностью до константы совпадает с волновой функцией в координатном представлении.

**Теорема 5**. *Радиальная составляющая волновой функции в импульсном представлении с точностью до константы совпадает с координатным представлением.*

$$I(p) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{\nu+\frac{1}{2}} L_n^{(\nu)}\left(\rho^2\right)}{\rho^{\frac{3}{2}}} \frac{J_\nu(p\rho)}{p\rho} \rho^3 \, d\,\rho = \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}} (-1)^n e^{-\frac{p^2}{2}} p^{\nu+\frac{1}{2}} L_n^{(\nu)}(p^2).$$

Вычислена асимптотика волновой функции в координатном и импульсном представлениях для различных предельных переходов. Исследованы предельные переходы, аналогичные тем, что были рассмотрены в первой главе.

**Теорема 6**. *Для асимптотики волновой функции в координатном и импульсном представлении верны следующие выражения*:

*1). При $n \to \infty$, $l = \nu = m = \frac{1}{2}$:*

$$S_\Phi = S_{\Phi^*} = 2\ln n + 4\ln 2 + 4\ln \pi - \frac{3}{2} + o(1).$$

*2a). При $l \to \infty$, $\nu = m = \frac{1}{2}$, $n = 0$:*

$$S_\Phi = S_{\Phi^*} = 2\ln l + \ln 2 + \frac{7}{2}\ln \pi + 1 + \frac{\gamma}{2} + o(1).$$

*2b). При $\nu = l \to \infty$, $n = 0$:*

$$S_\Phi = S_{\Phi^*} = \ln l + 2\ln\pi + \frac{5}{2}\ln 2 + 2 + o(1).$$

Вычислены вакуумные волновые функции в основном состоянии в координатном и импульсном представлениях. Также вычислена их энтропия и исследована с точки зрения выполнения соотношений неопределенности.

**Лемма 4**. *В основном состоянии*

$$\Phi_V = \Phi_V^* = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}}\psi} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\sin\theta} \cdot \frac{e^{\pm\frac{i\varphi}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}.$$

**Лемма 5**. *Энтропийные соотношения неопределенности выполнены.*

$$S_{\Phi_V} + S_{\Phi_V^*} = 4 - \gamma + 2\ln 2 + 7\ln\pi \approx 12.8222 \geq 4(1+\ln\pi) \approx 8.57892.$$

$$S_\Phi + S_{\Phi^*} \sim 4\ln n, \qquad n \to \infty.$$

$$S_\Phi + S_{\Phi^*} \sim 4\ln l, l \to \infty, \nu = \mathrm{const}.$$

$$S_\Phi + S_{\Phi^*} \sim 2\ln l, l = \nu \to \infty, n = 0.$$

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю В. Н. Сорокину за постоянное внимание, искреннюю заинтересованность, постановку интересной задачи, многочисленные обсуждения и ценные советы, а также всестороннюю поддержку в течение всего диссертационного исследования.

## Работы автора по теме диссертации

[1] Приходько М. А. Асимптотика информационной энтропии для двумерного аналога релятивистского атома водорода в модели Козлова–Никишина. Математические заметки. Т. 78. Вып. 5. Ноябрь 2005. Стр. 727-744.

[2] Приходько М. А. Информационная энтропия релятивистской модели Козлова-Никишина. Теоретическая и математическая физика. Т. 148. Вып. 3. Сентябрь 2006. Стр. 444-458.