МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.2+517.9

Карапетян Артем Александрович

ГИРОСКОПИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ: СЛУЧАЙНАЯ МАТРИЦА ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ, ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва 2006

Работа выполнена на кафедре математической статистики и теории случайных процессов Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, академик РАН В.В. Козлов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор А.И. Нейштадт доктор физико-математических наук, профессор А.А. Шкаликов
Ведущая организация:	Математический институт имени В.А. Стеклова РАН

Защита состоится 9 февраля 2007 года в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 9 января 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
професссор Т.П. Лукашенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

При рассмотрении задачи устойчивости движения механической системы, линеаризованной в окрестности положения равновесия и находящейся под действием гироскопических и потенциальных сил, исследование сводится к анализу дифференциального уравнения вида:

$$Q\ddot{x} + G\dot{x} + Rx = 0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, матрицы Q и R – симметрические матрицы размера $n \times n$ ($Q^t = Q$, $R^t = R$), матрица Q положительно определена, т. е. скалярное произведение (Qx, x) неотрицательно для любого $x \in \mathbf{R}^n$ и обращается в нуль лишь при $x = 0$; матрица G – кососимметрическая матрица ($G^t = -G$). Точка означает дифференцирование по времени t; так что $\dot{x}$ – скорость системы, а $\ddot{x}$ – ее ускорение.

В механике симметрическая матрица Q определяет инерционные свойства системы; более точно, квадратичная форма по скоростям $(1/2)(Q\dot{x}, \dot{x})$ – кинетическая энергия системы. Симметрическая матрица R задает потенциальную энергию $(1/2)(Rx, x)$. Кососимметрическая матрица G в механике обычно называется матрицей гироскопических сил.

Гироскопические силы появляются при переходе во вращающуюся систему отсчета, при понижении порядка системы методом Рауса, а также при описании движения заряженных частиц в магнитных полях[1].

[1] *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР. 1962. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС. 2002.

Систему (1) можно привести к более простому виду:

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + Px = 0, \tag{2}$$

где $\Gamma = -\Gamma^t$, $P = P^t$. Слагаемое $-\Gamma\dot{x}$ называется гироскопической, а слагаемое $-Px$ – потенциальной силой, действующей на рассматриваемую систему с n степенями свободы. Заметим, что вид системы (2) можно сделать еще более простым, добившись того, чтобы матрица потенциальных сил стала диагональной.

Важнейшее свойство гироскопических сил состоит в том, что их наличие не влияет на сохранность полной энергии (т. е. на существование интеграла энергии). Интеграл энергии системы (2) имеет вид:

$$(1/2)(\dot{x}, \dot{x}) + (1/2)(Px, x) = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Указанный интеграл соответствует также системе вида

$$\ddot{x} + Px = 0; \tag{4}$$

таким образом вклад гироскопических сил в интеграл энергии равен нулю.

Пример (сила Лоренца). Движение частицы массы m заряда e в электромагнитном поле описывается уравнением

$$m\ddot{x} = e(\mathbf{E} + [\dot{x}, \mathbf{H}]),$$

здесь $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля. Сила, действующая на частицу, называется слой Лоренца. Считаем магнитное поле $\mathbf{H}$ постоянным. Тогда, согласно уравнениям Максвелла получаем, что $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, и поэтому напряженность электрического поля можно представить в виде $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Ясно, что положение равновесия заряда совпадает с критической (стационарной) точкой потенциала φ. Пусть, например, $x = 0$ – одно из равновесий. Положим $\varphi = (1/2)(Px, x) + o(|x|^2)$, $P = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$. Записывая линеаризованное уравнение, получим систему вида:

$$m\ddot{x}_1 = -d_1 x_1 + \dot{x}_2 H_3 - \dot{x}_3 H_2$$

$$m\ddot{x}_2 = -d_2 x_2 - \dot{x}_1 H_3 + \dot{x}_3 H_1$$

$$m\ddot{x}_3 = -d_3 x_3 + \dot{x}_1 H_2 - \dot{x}_2 H_1$$

или, что тоже самое:

$$m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + Px = 0,$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -H_3 & H_2 \\ H_3 & 0 & -H_1 \\ -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*

Рассмотрим систему (4), которая соответствует системе (2) в отсутствие гироскопических сил.

Напомним, что решение $x(t) \equiv 0$ линейной системы, называемое положением равновесия, устойчиво в том и только том случае, если все его решения $x(t)$ ограничены. Если же найдется хотя бы одно неограниченное решение, то положение равновесия будет неустойчивым.

Критерий устойчивости Лагранжа утверждает, что положение равновесия системы (4) устойчиво тогда и только тогда, когда квадратичная форма $(1/2)(Px, x)$ положительно определена. Достаточное условие следует из вида интеграла энергии (3). Поэтому для системы (2) справедливо следующее утверждение (достаточное условие устойчивости): если квадратичная форма $(1/2)(Px, x)$ положительно определена, то решение $x(t) \equiv 0$ системы (2) также устойчиво.

Это утверждение можно понимать следующим образом. Если положение равновесия "исходной" системы (4) устойчиво, то при добавлении гироскопических сил – при рассмотрении "расширенной" системы (2) – положение равновесия останется устойчивым. Предположим теперь, что положение равновесия системы (4) неустойчиво. Если при добавлении гироскопических сил положение равновесия станет устойчивым, то говорят, что имеет место гироскопическая стабилизация.

Отрицательный индекс инерции квадратичной формы $(1/2)(Px, x)$ называется степенью неустойчивости по Пуанкаре. Для линейной системы (4) ее степень неустойчивости по Пуанкаре равна в точности количеству вещественных положительных точек спектра этой системы (т. е. числу точек спектра, лежащих в правой комплексной полуплоскости).

Напомним, что при любом способе приведения произвольной квадратичной формы $\sum m_{ij}x_ix_j$ к сумме квадратов $\sum b_iy_i^2$ посредством невырожденной линейной замены переменных число i^+ (соответственно i^-) таких индексов i, что $b_i > 0$ (соответственно $b_i < 0$), остается неизменным и называется положительным (соответственно отрицательным) индексом инерции квадратичной формы. Пара (i^+, i^-) называется сигнатурой этой квадратичной формы.

Томсоном было отмечено следующее необходимое условие гироскопической стабилизации[2]. Если степень неустойчивости нечетна,

[2] *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР. 1962.

то положение равновесия системы (2) будет неустойчивым для любой матрицы Γ, т. е. гироскопическая стабилизация невозможна. Если же степень неустойчивости четна, то существует матрица Γ, для которой положение равновесия соответствующей системы (2) устойчиво, т. е. гироскопическая стабилизация возможна.

Пусть $P < 0$, т. е. матрица потенциальных сил P отрицательно определена. Из теоремы Томсона следует, что при нечетных n положение равновесия системы (2) неустойчиво, а при четных n положение равновесия этой системы может быть устойчиво (гироскопическая стабилизация возможна). Пусть n четно. В работах Г.К. Пожарицкого[3], С.В. Болотина и В.В. Козлова[4] показано, что если $4P - \Gamma^2 \leq 0$, то положение равновесия системы (2) неустойчиво. С другой стороны[5], если $P\Gamma = \Gamma P$, то положение равновесия системы (2) устойчиво тогда и только тогда, когда $4P - \Gamma^2 > 0$. За дальнейшими результатами по теории устойчивости таких систем следует обратиться к работе Р.М. Булатовича[6].

При изучении задачи о гироскопической стабилизации полезно рассмотреть случай, при котором гироскопические силы, действующие на систему, очень велики. Другими словами, матрица гироскопических сил представима в виде $N\Gamma$, где N – числовой коэффицент, $N \gg 1$.

[3] *Пожарицкий Г.К.* О неустановившемся движении консервативных голономных систем // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 3.

[4] *Болотин С.В., Козлов В.В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вест. МГУ. Математика. Механика. 1980. N 4. С. 84-89.

[5] *Huseyin K., Hagedorn P., Teschner W.* On the stability of linear conservative gyroscopic systems // ZAMP. 1983. V. 34. N 6. P. 807-815.

[6] *Булатович Р.М.* Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем в случаях, когда потенциальная энергия имеет максимум // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 385-389.

Сразу отметим, что если матрица потенциальных сил P отрицательно определена, а размерность системы n четна, то при достаточно больших N гироскопическая стабилизация заведомо имеет место[7].

Вернемся к рассмотренному выше примеру – движение заряда в электромагнитном поле. Будем считать, что заряд единичной массы находится в постоянном бездивергентном электрическом поле $\mathbf{E}$ и сильном магнитном поле $\mathbf{H}$. Линеаризованное уравнение движения заряда имеет вид

$$\ddot{x} + N\Gamma\dot{x} + Px = 0,$$

здесь $x \in \mathbf{R}^3$; матрица $P = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$ задает электрическое поле, $d_1 + d_2 + d_3 = 0$ (это условие есть следствие условия $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0$). Магнитное поле задается следующим образом: направление $\mathbf{H}$ – фиксированная точка на единичной сфере $S^2 = \{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = 1\}$, а интенсивность поля очень велика: $|\mathbf{H}| = N \gg 1$. Таким образом кососимметрическая матрица Γ, отвечающая направлению магнитного поля в трехмерном евклидовом пространстве, определяется компонентами вектора $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$.

Необходимое условие гироскопической стабилизации Томсона в данных условиях означает, что среди компонент d_1, d_2, d_3 две отрицательные и одна положительная; можно считать, что $d_1, d_2 < 0$, $d_3 = -(d_1 + d_2) > 0$. В работе В.В. Козлова[8] показано, что если $\Sigma \equiv d_1H_1^2 + d_2H_2^2 + d_3H_3^2 > 0$, то при больших значениях N равновесие заряда устойчиво, если же $\Sigma < 0$, то равновесие неустойчиво. В той же работе дается следующая вероятностная

[7] *Лахаданов В.М.* О стабилизации потенциальных систем // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53-58. *Карапетян А.В.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Teor. i primen. meh. 1994. N 20. S. 89-93.

[8] *Козлов В.В.* О стабилизации неустойчивых равновесий зарядов сильными магнитными полями // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 390-397.

интерпретация этого результата. В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ конус $\Sigma = 0$ пересекает единичную сферу S^2 по двум овалам и делит ее на три области. При этом условию $\Sigma > 0$ отвечают точки из двух областей, содержащих полюсы сферы $(0, 0, \pm 1)$. Отношение суммы площадей этих двух областей к площади всей сферы S^2 есть вероятность гироскопической стабилизации неустойчивого равновесия заряда случайно выбранным сильным магнитным полем. Эта вероятность зависит от компонент d_1, d_2, d_3 и заключена между значениями $1 - 3^{-1/2} \approx 0,423$ и $1/2$. В частности, при случайном выборе направления сильного магнитного поля более вероятен случай неустойчивого равновесия заряда.

Цель работы.

Диссертация посвящена дальнейшему развитию теории гироскопической стабилизации. В работе исследуется задача гироскопической стабилизации с вероятностной точки зрения, а также устанавливаются оценки степени устойчивости линейной гамильтоновой системы, позволяющие получить ряд важных следствий.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Исследованы подходы к оценке вероятности гироскопической стабилизации при случайном выборе матрицы гироскопических сил.

2. Получена оценка степени устойчивости линейной гамильтоновой системы через индексы инерции гамильтониана, являющегося квадратичной формой от обобщенных координат.

3. Доказано нетривиальное обобщение теоремы Томсона: при добавлении гироскопических сил степень устойчивости системы не уменьшается.

Методы исследования.

В диссертации используются методы и результаты теории устойчивости, теории Вильямсона нормальных форм вещественных гамильтоновых систием, теории U-статистик.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты дополняют классическую теорию устойчивости и могут быть полезны при изучении линейных гамильтоновых систем.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на семинарах механико-математического факультета МГУ "Гамильтоновы системы и статистическая механика" под руководством академика РАН В.В. Козлова, члена-корреспондента РАН Д.В. Трещева и профессора С.В. Болотина (2005 г.), "Аналитическая механика и теория устойчивости" под руководством академика РАН В.В. Румянцева, члена-корреспондента РАН В.В. Белецкого и профессора А.В. Карапетяна (2004 г.), "Прикладная статистика" под руководством ведущего научного сотрудника И.А. Кожевниковой, доцента М.В. Козлова, старшего преподавателя К.В. Степанова и доцента Е.Б. Яровой (2004 г.), а также на семинаре ВЦ им. А.А. Дородницына РАН по теории устойчивости под руководством профессора С.Я. Степанова (2006 г.).

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 2 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, двух глав (каждая из которых разбита на разделы) и списка литературы, насчитывающего 26 наименований. Общий объем диссертации – 56 страниц.

Поддержка.

Исследования по теме диссертации частично были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект 02-01-01059) и Программой поддержки ведущих научных школ (проект НШ 136.2003.1).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** дается краткий обзор по теме диссертации – задаче гироскопической стабилизации, излагается краткое содержание работы, формулируются основные полученные результаты. Далее в диссертации рассматривается круг вопросов, связанных с дальнейшим исследованием задачи гироскопической стабилизации.

В главе I изучаются подходы к оценке вероятности гироскопической стабилизации при случайном выборе матрицы гироскопических сил Γ. Элементы матрицы Γ полагаются независимыми бернуллиевскими случайными величинами, принимающими значения ± 1. Матрица P полагается приведенной к диагональному виду (т. е. $P = D =$

$\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n))$, а ее элементы фиксированны, кроме специально оговоренных случаев.

Для случая $n = 4$ (n – размерность конфигурационного пространства – число степеней свободы) в указанных предположениях получено значение вероятности гироскопической стабилизации в зависимости от элементов матрицы P; указаны условия на элементы матрицы P, при которых эта вероятность нетривиальна, т. е. отлична от нуля и единицы.

Для произвольного $n = 2m$ (или $n = 2m + 1$) указаны m необходимых условий гироскопической стабилизации, причем первое условие $d_1 \cdots d_n > 0$ есть условие Томсона четности степени неустойчивости. В указанных предположениях об элементах матрицы Γ второе условие принимает вид

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{d_i d_j} > 0. \tag{5}$$

Если считать элементы $d_1, \dots, d_n$ матрицы P независимыми одинаково распределенными случайными величинами, то сумма, стоящая в левой части неравенства (5), станет U-статистикой. Напомним, что U-статистикой (степени $m \le n$) независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \dots, X_n$ называется выражение

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} \Phi(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}),$$

где $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ – симметрическая функция m переменных. Поэтому, применяя теорию U-статистик[9], можно оценить вероятность выполнения условия (5), а значит, получить оценку сверху вероятности гироскопической стабилизации.

[9] *Королюк В.С., Боровских Ю.В.* Теория U-статистик. Киев: Наук. Думка. 1989.

В главе II обобщается понятие степени неустойчивости по Пуанкаре на случай линейных гамильтоновых систем общего вида.

Пусть $x = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) \in \mathbf{R}^{2n}$ – канонические переменные (набор импульсов и координат), а гамильтониан имеет вид

$$H = (1/2)(Bx, x), \tag{6}$$

где B – симметрический линейный оператор. Тогда канонические уравнения записываются в виде

$$\dot{x} = Ax, \tag{7}$$

где

$$A = JB, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

В переменных p, q уравнения (7) принимают привычный вид уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (1 \le k \le n).$$

Пусть A – невырожденный оператор: $|A| \ne 0$ (это эквивалентно условию $|B| \ne 0$). Тогда собственные числа оператора A могут быть трех типов: вещественные пары $\pm a$, чисто мнимые пары $\pm ib$ и четверки $\pm a \pm ib$.

Степенью неустойчивости u системы (7) будем называть количество корней характеристического уравнения оператора A, лежащих в правой полуплоскости, считая их кратности, а степенью устойчивости s – количество пар чисто мнимых корней характеристического уравнения оператора A, считая их кратности.

В главе II устанавливается связь между собственными числами оператора A и индексами инерции i^+, i^- квадратичной формы (6). Основной результат главы II составляет

Теорема. Справедливо неравенство

$$|i^+ - i^-| \leq 2l,$$

где l – количество пар чисто мнимых собственных чисел оператора A с жордановыми клетками нечетного порядка.

Следствие. Имеет место неравенство

$$|i^+ - i^-| \leq 2s.$$

Данный результат получен с помощью теории Вильямсона вещественных нормальных форм линейных уравнений Гамильтона[10]. Этот же метод дает простое доказательство обобщенной теоремы Томсона

$$u \equiv i^- \bmod 2. \tag{8}$$

Сравнение (8) установлено в работах В.В. Козлова[11] и В.Н. Рубановского[12]. Для систем общего вида (когда $\dot{H} \leq 0$) обобщенная теорема Томсона (8) доказана в работе В.В. Козлова[13].

Полученные соотношения позволяют установить ряд важных фактов о возможности гироскопической стабилизации систем вида (2).

Теорема. При добавлении гироскопических сил степень устойчивости системы не уменьшается.

[10] *Williamson J.* On a algebraic problem, concerning the normal forms of linear dynamical systems // Amer. J. of Math. 1936. V. 58 N 1. P. 141-163.

[11] *Козлов В.В.* Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900-906.

[12] *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 4. С. 616-627.

[13] *Козлов В.В.* О степени неустойчивости // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 14-19.

В связи с этой теоремой укажем результат работы В.Ф. Журавлева[14]. Пусть матрица потенциальных сил P положительно определена ($P > 0$). При увеличении потенциальной энергии системы (2), т. е. при замене матрицы P на $\tilde{P}$ так, что $(1/2)(\tilde{P}x, x) > (1/2)(Px, x)$ для любых $x \neq 0$, все собственные частоты этой системы могут только возрасти. Под собственной частотой системы понимается модуль вещественного числа λ, являющегося одним из корней уравнения $|(i\lambda)^2 I + (i\lambda)\Gamma + P| = 0$. (Это уравнение имеет $2n$ действительных корней, причем если λ – корень, то $-\lambda$ – также корень этого уравнения. Таким образом, система имеет ровно n собственных частот.)

Теорема. Заменим матрицу Γ в уравнении (2) на $N\Gamma$. Пусть $P < 0$, т. е. матрица потенциальных сил P отрицательна определена. Если n нечетно и $\operatorname{rank}\Gamma = n - 1$, то при $N \geq N_0$ степень неустойчивости системы (2) равна 1.

Как известно, при нечетных n матрица Γ вырождена и ее максимальный ранг может быть равен как раз $n - 1$. Таким образом (согласно теореме Томсона), гироскопическая стабилизация невозможна, однако, при подходящем выборе больших гироскопических сил, степень неустойчивости можно свести к ее минимально возможному значению. Проблема устойчивости для ненулевых матриц гироскопических сил минимального ранга, равного двум, рассмотрена в работах В.В. Козлова[15] и Т.В. Сальниковой[16].

[14] *Журавлев В.Ф.* Обобщение теоремы Релея на гироскопические системы // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 606-610.

[15] *Козлов В.В.* Гироскопическая стабилизация и параметрический резонанс // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 739-745.

[16] *Сальникова Т.В.* Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 35-39.

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю академику РАН Валерию Васильевичу Козлову за постановку задач, ценные советы и всестороннюю поддержку. Автор благодарит доцента Михаила Васильевича Козлова за обсуждение вопросов, затронутых в работе.

Работы автора по теме диссертации

1. *Карапетян А.А.* К задаче гироскопической стабилизации. // Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. N 2. С. 49-52.

2. *Козлов В.В., Карапетян А.А.* О степени устойчивости. // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. N 2. С. 186-192.

Вторая работа выполнена в соавторстве с научным руководителем. В.В. Козлову принадлежит постановка задачи и предложение использовать теорию Вильямсона для ее решения; решение поставленной задачи полностью принадлежит А.А. Карапетяну.