На правах рукописи
УДК 517.537.38,517.538.5

Мочалина Екатерина Павловна

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПРОДОЛЖИМОСТЬ ФУНКЦИЙ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва, 2006

Работа выполена на кафедре теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Н.С. Вячеславов.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В.И. Данченко, кандидат физико-математических наук, доцент А.К. Рамазанов.
Ведущая организация:	Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского.

Защита диссертации состоится 13 октября 2006 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 13 сентября 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор Т.П. Лукашенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В 1912 году С.Н. Бернштейн[1,2] выявил тесную связь между скоростью полиномиального приближения функции на отрезке в равномерной метрике и ее структурными свойствами. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция f была аналитической на отрезке $[-1;1]$ и, оставаясь аналитической внутри эллипса $Э_\rho$ с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей $1/\rho$, имела особенности на $Э_\rho$, заключается в том, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E_n(f,[-1;1])}=\rho.$$

Символом $E_n(f,K)$ обозначатеся величина наименьшего уклонения в пространстве $C(K)$ непрерывной на компакте $K\subset\mathbf{C}$ функции f от $\mathbf{P_n}$ – подпространства алгебраических полиномов степени не выше n; $int\ \Gamma$ – ограниченная область с жордановой замкнутой границей Γ; C_R – линия уровня компакта K, имеющего односвязное дополнение в $\bar{\mathbf{C}}$.

Если Γ – замкнутая аналитическая жорданова кривая, $K = int\ \Gamma\cup\Gamma$ и функция f голоморфна в замкнутой области $\overline{int\ C_R}$, то выполняется следующее соотношение

$$E_n(f,K)=O(R^{-n}).$$

Этот результат неявно содержится в работе Г. Фабера[3]. Как показал Г. Сеге[4], предположение об аналитичности контура Γ в условии предыдущего утверждения можно опустить.

Дж. Уолш[5] доказал эквивалентность равенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E_n(f,K)}=1/R$$

и требования, что функция f голоморфна в области $int\ C_R$ и на ее границе имеет хотя бы одну особую точку, в случае, когда дополнение компакта K

[1]Бернштейн С.Н.,*Sur l'ordre de la meilleure des fonctions continues par des polynomes de degré donné.* Memoires de l'Académie Royale de Belgique, 1912, V. 4, p. 1–104.

[2]Бернштейн С.Н., *О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени.* Харьков, Сообщения Харьковского математического общества, 1912.

[3]Faber G.,*Über polynomische Entwicklungen.*Math. Annalen, 1903, V. 57, p. 389–408.

[4]Szegö G.,*Über orthogonale Polynome, die zu einer gegeben Kurve der komplexen Ebene gehören.*Math. Z., 1921, V. 9, p. 218–270.

[5]Walsh J.L.,*Über den Grad der Approximation einer analytischen Funktion.*Müncher Berischter, 1926, p. 223–229.

односвязно в $\bar{\mathbf{C}}$. Дж. Уолш и Х. Рассел[6] обобщили последний результат на случай компактов со связным регулярным дополнением.

Посредством $\mathbf{r_{n,k}} = \{g/s : g \in \mathbf{P_n},\ s \in \mathbf{P_k}\}$ обозначим совокупность рациональных функций порядка (n, k). Для конкретного значения $p \in (0; +\infty)$, фиксированной функции $f \in H^p$ и заданных целых неотрицательных чисел n и k определим величину наилучшего приближения f множеством $\mathbf{r_{n,k}} \cap H^p$ в пространстве H^p следующим равенством

$$H^pR_{n,k}(f) = \inf_{r \in \mathbf{r_{n,k}} \cap H^p} \|f - r\|_{H^p}.$$

В случаях $k = n$ и $k = 0$ будем использовать привычные обозначения

$$H^pR_n(f) = H^pR_{n,n}(f),\ \ H^pE_n(f) = H^pR_{n,0}(f).$$

А.Л. Левин[7] показал, что условие

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{H^2E_n(f) - H^2R_n(f)} = \rho < 1$$

для некоторой функции $f \in H^2$, обеспечивает возможность ее аналитического продолжения в круг радиуса $1/\sqrt{\rho}$ с центром в нуле. Этот результат был существенно усилен Х. М. Махмудовым[8]: если задано число $p \in (1; +\infty)$ и функция $f \in H^p$, то условие

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{H^pE_n(f) - H^pR_n(f)} = \rho < 1$$

эквивалентно тому, что $1/\rho$ – радиус голоморфности f.

В первой части главы 1 получен аналог приведенного выше результата С.Н. Бернштейна и дано обобщение теоремы Х.М. Махмудова.

В параграфе два главы 1 рассматривается возможность мероморфного продолжения функций из некоторого класса. Точнее, здесь получена формула для вычисления k-ого радиуса мероморфности каждой такой функции. Самыми известными результатами в этом направлении являются формула О. Коши для радиуса сходимости степенного ряда и теорема Ж. Адамара о кругах мероморфности аналитической в нуле функции

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_mz^m + \cdots\ . \tag{1}$$

[6]Walsh J.L., Russell H.G.,*On the convergence and overconvergence of sequences of polynomials of best simutaneous approximation to several functions analytic in distinct regions.*Transactions of the American Mathematical Society, 1934, V. 36, p.13–28.

[7]Левин А.Л.,*Расположение полюсов рациональных функций наилучшего приближения.*Матем. сб., 1969, Т. 80(122), с. 281–289.

[8]Махмудов Х.М.,*О функциях с близкими значениями наименьших уклонений от полиномов и рациональных функций.*Матем. сб., 1991, Т. 182, с. 1657–1668.

При каждом $k \in \mathbf{Z}_+$ посредством $m_k(f)$ обозначим максимальный радиус круга с центром в нуле, в который функция f может быть продолжена как мероморфная порядка не выше k (т. е. $m_0(f)$ – радиус сходимости ряда (1), в открытом круге $M_k(f) = \{z \in \mathbf{C} : |z| < m_k(f)\}$ при $k \in \mathbf{N}$ у функции f число полюсов с учетом кратности не превосходит k). Символом $D_{m,k}$ обозначим симметрический определитель

$$D_{m,k} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \dots & a_{m+k} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_{m+k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m+k} & a_{m+k+1} & \dots & a_{m+2k} \end{vmatrix},$$

а посредством l_k – следующий верхний предел:

$$l_k = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{D_{m,k}}.$$

По определению положим $l_{-1} = 1$.

Ж. Адамар[9,10] показал, что отношение $l_{k-1}/l_k = m_k(f)$– радиус k-ого круга мероморфности функции f. Если для некоторого натурального значения s справедливо строгое неравенство

$$m_s(f) > m_{s-1}(f), \tag{2}$$

то функция f в круге $M_s(f)$ имеет ровно s полюсов с учетом кратности.

Пусть $n, m \in \mathbf{Z}_+$ – целые неотрицательные числа. Аппроксимация Паде $\pi_{n,m}(f) = p_{n,m}(f)/q_{n,m}(f)$ функции (1) порядка (n, m) , где $p_{n,m}(f) \in \mathbf{P_n}$, $q_{n,m}(f) \in \mathbf{P_m}$, определяется условием

$$q_{n,m}(f)(z)f(z) - p_{n,m}(f)(z) = O(z^{n+m+1}).$$

Считаем, что старшие коэффициенты знаменателей $q_{n,m}(f)$ равны 1. Кроме того предполагаем справедливость неравенства (2) для некоторого натурального значания индекса s. Тогда из теоремы Р. Монтессу де Баллора[11] следует, что для знаменателей s-ой строки таблицы Паде существует предел

$$\lim_{n\to\infty} q_{n,s}(f)(z) = \prod_{\nu=1}^{s} (z - \alpha_\nu),$$

[9] Hadamard J.,*Essai sur l'etude des functions donnés par leur developpment de Taylor.*Journal de mathematiques pures et appliqúes, 1892, Ser. 4, V. 8, p. 1–86.

[10] Hadamard J.,*Oeuvres de Jaques Hadamard.*Paris, 1968, Ed. du Centre nat. de la rech. sci., V. 1, p. 7–93.

[11] Montessus de Ballor R.,*Sur les fractions continnes algebriques.*Bull. Soc. Math.France, 1902, № 30, p. 266–336.

где корни $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ предельного полинома являются полюсами (с учетом кратностей) функции f.

Фиксируем натуральное число s и некоторый полином $q_s(z) = (z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_s)$, причем $q_s(0) \neq 0$. Напомним, что в конечномерном пространстве любые нормы эквивалентны.

Имеет место следующее утверждение: соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|q_{n,s}(f) - q_s\|^{1/n} = \lambda < 1 \tag{3}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы функция f, заданная рядом (1), допускала мероморфное продолжение в круг радиуса $R^* = \lambda^{-1} \max\limits_{\nu} |\beta_\nu|$ с центром в нуле и имела там ровно s полюсов с учетом кратностей. Смысл последнего утверждения состоит в следующем: если фиксировано $s \in \mathbf{N}$ и при $n \to \infty$ полюсы аппроксимаций Паде $\pi_{n,s}(f)$ быстро стремятся (в смысле (3)) к некоторым пределам $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ (и $\beta_\nu \neq 0$), то все эти предельные точки являются полюсами функции f, причем она не имеет других особенностей в круге $|z| < R^*$, содержащем точки $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$, $R^* = m_s(f)$ и выполняется (2).

В главе 2 изучаются рациональные аппроксимации со свободными полюсами функций следующего вида:

$$\widehat{\tau}(z) = \int\limits_{supp\ \tau} \frac{d\tau(t)}{t-z}, \ \ z \in \mathbf{C} \backslash supp\ \tau. \tag{4}$$

Порядки наилучших приближений функций $\widehat{\tau}$ на компактах (не пересекающихся с носителями мер $supp\ \tau$) в равномерной метрике получены в работе А.А. Гончара[12]. В случае пересечения носителя меры $supp\ \tau$ и компакта, на котором осуществляется аппроксимация $\widehat{\tau}$ рациональными функциями, в одной или нескольких точках, скорость приближения в начале исследований была найдена для индивидуальных функций, позднее – для классов функций в работах Я.-Э. Андерссона, А.А. Пекарского, Н.С. Вячеславова и других авторов.

В предположении, что мера μ конечна на отрезке $[-1;1]$, положим

$$\widehat{\mu}(z) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\mu(x)}{1-xz}, \ \ z \in D. \tag{5}$$

Напомним, что функции $\gamma(t)$ и $\delta(t)$ слабо эквивалентны при $t \to t_0$, т.е. $\gamma(t) \asymp \delta(t)$, если $\gamma(t) = O(\delta(t))$ и $\delta(t) = O(\gamma(t))$.

[12] Гончар А.А., *О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций.* Мат. сб., 1978, Т. 105, № 2, с. 147–163.

Следующая оценка сверху при $p = \infty$ получена А.А. Пекарским[13], а остальные результаты принадлежат Я.-Э. Андерссону[14].

Пусть носитель конечной меры μ содержится на отрезке $[0,1]$. Если заданы значения $1 < p \leqslant \infty$, $a > -1/p$ и $d\mu(x) \asymp (1-x)^a dx$ при $x \to 1$, то справедливы слабые асимптотики

$$H^p R_n(\widehat{\mu}) \asymp n^{\frac{1}{2p}} exp\left\{-\pi\sqrt{2n\,(a+1/p)}\ \right\}.$$

Фиксируем числа $p \in (0;1)$ и $a > -1$.

1. Если $d\mu(x) \leqslant C(1-x)^a dx$, то при $1/p \notin \mathbf{N}$ имеют место оценки сверху

$$H^p R_n(\widehat{\mu}) \leqslant C_1 n^{\frac{1}{2p}} exp\left\{-\pi\sqrt{2n\,(a+1/p)}\ \right\}.$$

2. Если $C(1-x)^a dx \leqslant d\mu(x)$, то выполнены неравенства

$$C_1 n^{1-1/p} \leqslant H^p R_n(\widehat{\mu}) n^{-\frac{1}{2p}} exp\left\{\pi\sqrt{2n\,(a+1/p)}\ \right\}.$$

Здесь C и C_1 – не зависящие от n положительные величины.

Пусть

$$\varkappa = \frac{2}{\dfrac{1}{a+1/p} + \dfrac{1}{b+1/p}}$$

– среднее гармоническое чисел $a + 1/p$ и $b + 1/p$.

Н. С. Вячеславов[15] показал, что если фиксированы параметры $p \in (1; +\infty]$, $a, b \in (-1/p; +\infty)$ и $d\mu(x) \asymp (1-x)^a(1+x)^b dx$ при $x \to \pm 1$, то

$$H^p R_n(\widehat{\mu}) \asymp n^{\frac{1}{2p}} e^{-\pi\sqrt{n\varkappa}}.$$

Цель работы.

В настоящей работе получены условия в терминах наименьших рациональных уклонений функций в некоторых пространствах, обеспечивающих аналитическое или k-мероморфное их продолжение, а также изучаются величины наилучших приближений функций Стилтьеса в равномерной и интегральной метриках.

[13] Пекарский А.А., *Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова.* Алгебра и анализ, 1995, Т. 7, с. 121–132.

[14] Andersson J.-E., *Rational approximation to function like x^α in integral norms.* Analysis Math., 1988, V. 14, $\mathcal{N}$ 1, p. 11–25.

[15] Вячеславов Н.С., Мочалина Е.П., *О наилучших рациональных приближениях функций Маркова-Стилтьеса.* Воронеж, ВГУ, Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конф., 2005, с. 64–65.

Методы исследования.

Результаты диссертации получены с использованием методов теории функций комплексного переменного, математического анализа, теории аппроксимаций и функционального анализа.

Научная новизна.

Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

получены два критерия аналитического продолжения некоторых функций из $L_p[-1;1]$ и пространств Смирнова при $p \in (1;+\infty)$;

приведены достаточные условия для возможности продолжения элементов из пространств Харди H^p, $1 < p < +\infty$ в k -ый круг их мероморфности;

доказаны оценки для величин наименьшего рационального уклонения функций Стилтьеса в равномерной и интегральной метриках, являющиеся аналогами известных результатов Я.-Э. Андерссона, А.А. Пекарского и Е.А. Ровбы.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут применяться в теории приближений и ее приложениях.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались

на научных семинарах Механико-математического факультета МГУ: по теории приближений и граничным свойствам функций под руководством профессора Е.П. Долженко(2003-2006гг.), по рациональным аппроксимациям функций под руководством доцента Н.С. Вячеславова (2000-2006гг.);

Саратовской зимней математической школе "Современные проблемы теории функций и их приложения"(Саратов, 2002, 2006гг.);

Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы"(Воронеж, 2003, 2005гг.).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[5], список которых приведен в конце автореферата. Все доказанные в диссертации теоремы получены автором впервые.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 42 наименования. Общий объем работы – 105 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация является исследованием в теории аппроксимаций рациональными функциями со свободными полюсами.

Во введении даны основные определения и обозначения, приведена история рассматриваемых вопросов и сформулированы основные результаты диссертации.

В первой главе получены критерии аналитического продолжения некоторых функций и приведены условия k -мероморфного продолжения. Сформулируем их. Для заданной функции $f \in L_p[-1;1]$ определим величины наименьших уклонений в $L_p[-1;1]$ от $\mathbf{P_n}$ и $\mathbf{r_{n,n}}$ как обычно:

$$L_pE_n(f) = \inf_{s\in\mathbf{P_n}} \|f - s\|_{L_p[-1;1]}, \ \ L_pR_n(f) = \inf_{r\in\mathbf{r_{n,n}}} \|f - r\|_{L_p[-1;1]}.$$

Теорема 1.*Если фиксировано число* $p \in (1;+\infty)$ *и для заданной функции* $f \in L_p[-1;1]$ *справедливо неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{L_pE_n(f) - L_pR_n(f)} = \rho < 1, \tag{6}$$

то она аналитически продолжима в область, ограниченную $Э_\rho$ *и на самом эллипсе* $Э_\rho$ *имеется хотя бы одна особая точка ее аналитического продолжения. Для любой функции* f *голоморфной внутри эллипса* $Э_\rho$, *имеющей особенности на границе такой области, выполняется соотношение* (6).

Для спрямляемого пути Γ посредством $|\Gamma|$ будет обозначаться его длина. Символом G обозначим односвязную ограниченную область со спрямляемой границей Γ.

Как известно, если функция $f \in E_p(G)$ – пространству Смирнова, то она почти всюду на Γ имеет определенные предельные значения $\widetilde{f}(\zeta)$ по всем некасательным путям, при- чем $\widetilde{f} \in L_p(\Gamma)$. Положим

$$\|f\|_{E_p(G)} = \left(\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma |\widetilde{f}(\zeta)|^p|dz|\right)^{1/p}.$$

Для каждой функции f из $E_p(G)$ определим величины наименьших уклонений от подпространств $\mathbf{P_n}$ и множеств $\mathbf{r_{n,n}} \cap E_p(G)$ соответственно равенствами

$$E_pE_n(f,G) = \inf_{s\in\mathbf{P_n}} \|f - s\|_{E_p(G)}, \ \ E_pR_n(f,G) = \inf_{r\in\mathbf{r_{n,n}}\cap E_p(G)} \|f - r\|_{E_p(G)}.$$

Пусть функция Φ осуществляет конформное отображение внешности области, ограниченной жордановой кривой Γ на внешность единичного круга. Причем потребуем, чтобы при этом $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$. При $R > 1$ посредством Γ_R будем обозначать линии уровня кривой Γ при отображении Φ (то есть Γ_R – прообраз окружности радиуса R с центром в нуле).

Определение.*Будем говорить, что при фиксированном* $\alpha \in (0;1]$ *спрямляемая кривая* $\Gamma = \{\lambda, [0;|\Gamma|]\}$ *принадлежит классу* $C(1,\alpha)$, *если ее натура-*

льная параметризация $\lambda(s)$ дифференцируема и $\lambda'(s)$ содержится в классе Гельдера Lip_α.

Теорема 2. *Пусть фиксированы следующие величины: замкнутая жорданова кривая Γ, принадлежащая классу $C(1,\alpha)$, область $G \equiv int\ \Gamma$, параметр $p \in (1;+\infty)$ и функция $f \in E_p(G)$. Условие*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E_pE_n(f,G) - E_pR_n(f,G)} = \rho < 1 \qquad (7)$$

достаточно для того, чтобы функция f аналитически продолжалась в область $int\ \Gamma_{1/\rho}$ и на ее границе аналитическое продолжение имело хотя бы одну особую точку. Для любой функции f голоморфной в области $int\ \Gamma_{1/\rho}$, имеющей особенность на границе $\Gamma_{1/\rho}$, выполняется соотношение (7).

В следующей теореме для некоторых функций найдены радиусы их кругов мероморфности.

Теорема 3. *Если фиксированы числа $k \in \mathbf{N}$, $p > 1$ и функция $f \in H^p$, для которой выполнено неравенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{H^pR_{n,k}(f) - H^pR_{n+k+1}(f)} = \rho < 1$$

и, кроме того, последовательность знаменателей σ_n рациональных функций r_n, определяемых равенством $H^pR_{n,k}(f) = \|f - r_n\|_{H^p}$, удовлетворяет условиям

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(z) = \sigma(z),\ \ \sigma(z) \neq 0\ \ \forall z : |z| = 1,$$

то $m_k(f) = 1/\rho$.

В главе 2 изучаются рациональные аппроксимации со свободными полюсами функций Стилтьеса вида (4) и (5).

Теорема 4. *Фиксируем параметр p из интервала $(0;1)$ и меру μ, удовлетворяющую условию*

$$d\mu(x) \leqslant C_1(1-x)^a(1+x)^b dx,\ \ x \in (-1;1),$$

при некоторых $a > -1$, $b > -1$ и положительной постоянной C_1. Если $1/p$ – не целое число, то для каждого натурального значения n выполняется неравенство

$$H^pR_n(\widehat{\mu}) \leqslant Cn^{\frac{1}{2p}} e^{-\pi\sqrt{n\varkappa}},$$

причем здесь и ниже положительная величина C не зависит от n.

Если мера μ, удовлетворяет условию

$$d\mu(x) \geqslant C_2(1-x)^a(1+x)^b dx,\ \ x \in (-1;1),$$

при некоторых $a > -1$, $b > -1$ и положительной постоянной C_2, то имеет место следующая оценка снизу

$$Cn^{1-\frac{1}{p}} \leqslant H^pR_n(\widehat{\mu}) n^{-\frac{1}{2p}} e^{\pi\sqrt{n\varkappa}}.$$

Пусть $\mathbf{A}$ – банахово пространство функций f, непрерывных в круге $\Delta = \{z : |z| \leqslant 1\}$ и аналитических в $D = \{z : |z| < 1\}$, с равномерной нормой – максимумом модуля функции. Множество функций $\mathbf{A}$ будем рассматривать также как предгильбертово пространство, в котором скалярное произведение определяется следующим образом

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Delta} f(z)\overline{g(z)}|dz|, \;\; f, g \in C_A.$$

Пусть точки $z_1, \cdots, z_n \in \bar{\mathbf{C}} \backslash \Delta$. Обозначим посредством $R_n(z_1, \cdots, z_n)$ линейное пространство рациональных функций степени $\leqslant n$ с фиксированными полюсами $z_1, \cdots, z_n$, где каждый полюс записан с учетом его кратности, а через F_n – ортопроектор из $\mathbf{A}$ в $R_n(z_1, \cdots, z_n)$.

Фиксируем некоторую меру τ с носителем $supp \;\; \tau$, содержащимся на множестве $\mathbf{R}\backslash(-1; 1)$, для которой определена функция (4).

Введем следующие величины:

$$S_n(\tau) = \inf_{t_1, \cdots, t_n \in (-1;0]} \int\limits_{supp \;\; \tau} \frac{d\tau(t)}{|t|(|t|-1)B_n^2(|t|, \mathbf{t})}.$$

$$\Lambda_n(f, \Delta) = \inf_{z_1, \cdots, z_n \in \bar{\mathbf{C}} \backslash \Delta} \|f(z) - F_n(z, f)\|_{C(\Delta)}, \;\; f \in \mathbf{A}.$$

Здесь $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$,

$$B_n(\zeta, \mathbf{a}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\zeta - a_k}{1 - \bar{a}_k \zeta}$$

– произведение Бляшке с нулями в точках a_k, $k = 1, \cdots, n$, а $F_n(z, f)$ – проекция f на $R_n(z_1, \cdots, z_n)$.

Теорема 5 представляет собой аналог теоремы 1 из работы А.А. Пекарского и Е.А. Ровбы[16].

Теорема 5. *Если фиксировано натуральное число n, а τ – положительная борелевская мера с носителем $supp \;\; \tau \subset (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ и*

$$\int\limits_{supp \;\; \tau} \frac{d\tau(t)}{|t| - 1} < \infty,$$

то

$$\Lambda_n(\widehat{\tau}, \Delta) \leqslant S_n(\tau), \;\; n \in \mathbf{N}.$$

[16] Пекарский А.А., Ровба Е.А., *Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций.* Матем. зам., 1999, Т. 65, выпуск 3, с. 362–368.

Следующие теоремы являются обобщениями некоторых результатов А.А. Пекарского[13]. Здесь расширяется класс функций, для которых получены оценки.

Наименьшее уклонение в $C[-1;1]$ непрерывной на $[-1;1]$ функции f от совокупности $\mathbf{r_{n,m}}$ будем обозначать посредством $R_{n,m}(f,[-1;1])$. Полагаем

$$R^*_{n,m} = \{r \in \mathbf{r_{n,m}} : \text{знаменатель } r \text{ неотрицателен на } \mathbf{R} \text{ и функция } r > 0$$

$$\text{на носителе меры } supp\ \tau\},$$

$$\lambda_{nm}(\tau,[-1;1]) = \inf_{r \in R^*_{n+m+1,2m}} \left\| r(x) \int\limits_{supp\ \tau} \frac{d\tau(t)}{r(t)(t-x)} \right\|_{C[-1;1]}.$$

Теорема 6. *Если мера τ имеет носитель на $\mathbf{R}\backslash(-1;1)$, причем*

$$\int\limits_{supp\ \tau} \frac{d\tau(t)}{|t|-1} < \infty, \tag{8}$$

функция $\widehat{\tau}$ определяется согласно равенству (4), тогда при любых значениях индексов $n \geqslant m-1$ выполняется неравенство

$$\lambda_{nm}(\tau,[-1;1]) \leqslant R_{n,m}(\widehat{\tau},[-1;1]).$$

Пусть $\mathbf{S_n}$ – пространство полиномов с действительными коэффициентами степени не выше n, а

$$\mathbf{S_{n,m}} = \left\{\frac{p}{q}, p \in \mathbf{S_n},\ \ q \in \mathbf{S_m}\right\};$$

$$\widetilde{S}_{n,m} = \{r \in \mathbf{R}_{n,m} : \text{знаменатель } r \text{ неотрицателен на } \mathbf{R} \text{ и функция } r \text{ явля-}$$

$$\text{ется знакопостоянной на каждом из лучей} [1;+\infty) \text{ и } (-\infty;-1]\},$$

$$\lambda^*_{nm}(\tau,\Delta) = \inf_{r \in \widetilde{S}_{n+m+1,2m}} \left\| r(z) \int\limits_{supp\ \tau} \frac{d\tau(t)}{r(t)(t-z)} \right\|_{C(\Delta)}.$$

Теорема 7. *Если мера τ имеет носитель на $\mathbf{R}\backslash(-1;1)$, а функция $\widehat{\tau}$ определяется согласно (4) и удовлетворяет условию (8), то при всех $n \geqslant m$ имеет место следующая оценка*

$$\lambda^*_{nm}(\tau,\Delta) \leqslant \frac{2}{\pi} S_{n,m}(\widehat{\tau},\Delta).$$

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю доценту Н.С. Вячеславову за постановки задач и руководство работой, профессору Е.П. Долженко за доброжелательное отношение и ценные советы, а также всем участникам семинара по теории приближений и граничным свойствам функций под руководством профессора Е.П. Долженко за полезное обсуждение.

Работы автора по теме диссертации

1. *Мочалина Е.П.* Об одном критерии аналитической продолжимости функции с отрезка.// УМН, 2003, Т.58 Вып. 6, с. 161–162.

2. *Мочалина Е.П.* Достаточные условия k - мероморфного продолжения функций.// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика, $\mathcal{N}$ 4, 2004, с. 14–19.

3. *Вячеславов Н.С., Мочалина Е.П.* О рациональных аппроксимациях функций типа Маркова-Стилтьеса.// Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского, материалы международной летней школы-конф., 2004, Т. 20, с. 54–55.
   Теорема 2 получена Мочалиной Е.П., теорема 1 получена Вячеславовым Н.С.

4. *Вячеславов Н.С., Мочалина Е.П.* О наилучших рациональных приближениях функций Маркова-Стилтьеса.// Воронеж, ВГУ, Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конф., 2005, с. 64–65.
   При конечных значениях p теорема получена Вячеславовым Н.С., при $p = +\infty$ – Мочалиной Е.П.

5. *Мочалина Е.П.* Аналитическая продолжимость некоторых функций из классов Смиронова $E_p(G)$ при $p \in (1; +\infty)$. // Саратов, Изд-во "Научная книга", Современные проблемы теории функций и их приложения, тезисы докладов 13-ой Саратовской зимней школы, 2006, с. 123 – 124.