МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 519.7

Яшунский Алексей Дмитриевич

О ВЕРОЯТНОСТЯХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ БУЛЕВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА — 2006

Работа выполнена на кафедре дискретной математики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор О. М. Касим-Заде.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. А. Малышев; кандидат физико-математических наук, доцент В. А. Стеценко.
Ведущая организация:	Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Защита диссертации состоится 9 февраля 2007 г. в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова (Главное здание, аудитория 14-08).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 9 января 2007 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

В. Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Вероятностные модели и методы используются в различных разделах дискретной математики. Они могут выступать как в качестве инструмента решения задач, так и в качестве объекта исследования. При этом использование вероятностностых методов в некоторой задаче может привести к появлению вероятностной модели, представляющей самостоятельный интерес.

Примером плодотворного применения вероятностных методов могут служить исследования сложности булевых функций. Использование вначале комбинаторных (Б. А. Субботовская, Л. С. Хасин), а затем и вероятностных методов (Л. Вэлиант, А. Е. Андреев, Й. Хостад, М. Айтай) позволило существенно продвинуться в этой области. Достижения, полученные вероятностными методами, послужили причиной интереса к вероятностным пространствам булевых формул как таковым. Х. Лефманн и П. Савицкий[1], а также Б. Шовин с соавторами[2], исследовали вероятностное пространство булевых функций, заданных в виде случайных формул. В этих работах установливается связь между сложностью булевых функций и их вероятностью в указанном вероятностном пространстве.

А. Бродский и Н. Пиппенджер рассматривали аналогичные вероятностные пространства уже как самостоятельный объект исследования. В их работе[3] изучается линейность, монотонность и самодвойственность булевых функций, реализованных в виде случайных булевых формул.

Исследование вероятностных автоматных моделей привело к созданию теории вероятностных автоматов (см. книгу Р. Г. Бухараева[4]). В рамках этой теории, в частности, возникает задача о синтезе источника вероятности. В более общем виде, как задача порождения значений вероятности булевыми функциями, эта задача исследовалась Р. Л. Схиртладзе, Ф. И. Салимовым и Р. М. Колпаковым.

В задаче порождения значений вероятности достаточно естественно

[1]Lefmann H., Savický P. Some typical properties of large AND/OR Boolean formulas // Random structures algorithms. — 1997. — Vol. 10. — P. 337–351.

[2]Chauvin B., Flajolet Ph., Gardy D. and Gittenberger B. And/Or trees revisited // Combinatorics, probability and computing. — 2004. — Vol. 13 No. 4–5. — P. 475–497.

[3]Brodsky A., Pippenger N. The Boolean functions computed by random Boolean formulas or how to grow the right function // ArXiv Computer Science e-prints, Feb. 2003.

[4]Бухараев Р. Г. Основы теории вероятностных автоматов — М.: Наука, 1985.

возникает модель, в которой бесповторные булевы формулы играют роль „преобразователей вероятности". Такая модель использовалась, в частности, С. Голдманом с соавторами[5] для решения задачи распознавания булевых формул над специальными базисами.

Кроме отмеченных выше вероятостных моделей, следует также упомянуть следующие задачи, в которых были использованы вероятностные конструкции: надёжность схем (см. обзор С. В. Яблонского[6]), выполнимость конъюнктивных нормальных форм (в частности, А. Гоердт, Г. Соркин, А. А. Сапоженко), свойства логик с конечной моделью (Ю. В. Глебский, В. В. Князев, В. А. Таланов, Р. Фагин и др.), построение вероятностных вычислительных устройств (В. В. Яковлев, Р. Ф. Фёдоров, А. В. Рябинин).

Таким образом, исследования свойств вероятностных моделей, связанных с булевыми функциями, представляются весьма актуальными.

Данная диссертация посвящена изучению свойств вероятностных пространств случайных булевых выражений. Порождение случайных булевых выражений может рассматриваться, в частности, как имитация некоторого „сложного" вычислительного процесса. В рамках такой интерпретации ставятся и решаются различные содержательные задачи о случайных булевых выражениях.

Кроме того, рассматриваемые в диссертации задачи, не являясь частным случаем или обобщением упомянутых ранее задач, связаны как с исследованием свойств случайных булевых формул, так и с задачей порождения значений вероятности.

Цель работы

В работе изучаются вероятностные пространства случайных булевых выражений. Основной целью диссертации является исследование задач о вероятностях значений случайных булевых выражений и связанных с ними комбинаторно-вероятностных свойств указанных пространств. Изучается зависимость вероятностей значений случайных булевых выражений от вероятностей входящих в них констант и от свойств базиса, над которым строятся выражения.

[5]Goldman S., Kearns M., and Schapire R. Exact identification of read-once formulas using fixed points of amplification functions // SIAM Journal on computing. — 1993. — Vol. 22, No. 4. — P. 705–726.

[6]Яблонский С. В. Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики, вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

Методы исследования

В диссертации используются методы комбинаторного анализа, в частности, теории производящих функций, методы теории булевых функций, а также методы элементарной теории вероятности.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Доказано существование предела вероятности значений случайных булевых выражений при стремлении сложности выражений к бесконечности и получено явное выражение этого предела (функция вероятности) для произвольного базиса.

2. Доказана непрерывность и бесконечная дифференцируемость функции вероятности произвольного базиса на интервале $p \in (0, 1)$, исследовано поведение функции вероятности в граничных точках в зависимости от свойств базиса.

3. Изучены свойства базисов, имеющих постоянную функцию вероятности. Построены классы базисов с постоянной функцией вероятности, замкнутые относительно операции объединения.

4. Доказана возможность сколь угодно точного равномерного приближения произвольной непрерывной функции, отображающей отрезок $[0, 1]$ в себя, функциями вероятности булевых базисов.

5. Исследовано множество значений функций вероятности формул в произвольной точке p для различных базисов. Установлены необходимые и достаточные условия того, что такое множество для заданного базиса и заданного значения p является всюду плотным на отрезке $[0, 1]$.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях в теории булевых функций и других разделах дискретной математики и математической кибернетики. Результаты диссертации могут быть полезны специалистам

Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Вычислительного центра им. А. А. Дородницына РАН, Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, Новосибирского государственного университета, Санкт-Петербурского государственного университета.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на семинаре «Синтез управляющих систем» под руководством академика РАН О. Б. Лупанова (октябрь-ноябрь 2005 г. и март-апрель 2006 г.), на семинаре профессора О. М. Касим-Заде «Математические вопросы кибернетики» (ноябрь 2006 г.), на третьем Международном симпозиуме «Стохастические алгоритмы: теория и приложения» (3^{rd} International Symposium «Stochastic Algorithms: Foundations and Applications», Москва, октябрь 2005 г.), на VII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Покровское, март 2006 г.), на XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, апрель 2006 г.), на XVI Международной школе-семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» (С.-Петербург, июнь 2006 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, перечисленных в конце автореферата [1–4].

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения и пяти глав, разбитых на разделы. Текст диссертации изложен на 108 страницах. Список литературы содержит 42 наименования.

Краткое содержание диссертации

Во **Введении** содержится обзор результатов, полученных в смежных областях другими авторами, приводится постановка задач, дано краткое изложение основных результатов диссертации.

В **главе 1** диссертации даётся формальное определение функции вероятности булева базиса B и доказываются теоремы о виде функции вероятности произвольного базиса.

Рассматривается множество всех правильно построенных булевых выражений, содержащих ровно n символов функций из некоторого заданного базиса[7] B, а также константы 0 и 1. На множестве таких выражений определяется распределение вероятностей $\mathcal{P}$ следующим образом: для выражения Φ полагаем $\mathcal{P}\{\Phi\} = \frac{1}{s_n}\pi(\Phi)$, где s_n — число бесповторных формул сложности n над базисом B с точностью до переименования переменных, а $\pi(\Phi)$ — произведение вероятностей констант в выражении Φ (вероятность 1 равна p, вероятность 0 равна $1-p$). Рассматривается предел вероятности выражений со значением 1, $P_{1,n}(p) = \mathcal{P}\{\Phi = 1\}$, при $n \to \infty$. *Функция вероятности* $P_1(p)$ базиса B определяется как значение предела $\lim\limits_{n\to\infty} P_{1,n}(p)$, если предел существует, в противном случае считается, что значение функции вероятности в точке p не определено.

Для базиса B вводятся понятия *базисного многочлена* $B(S) = \sum_{k=0}^{r} |B_k| S^k$, где B_k — множество всех функций от k переменных в базисе B, и *характеристического многочлена* $A(T,F) = \sum_{k=0}^{r}\sum_{i=0}^{k} a_{ki}T^iF^{k-i}$, где a_{ki} — число единиц среди значений функций из B_k на наборах значений переменных, содержащих ровно i единиц.

Основным результатом первой главы является

Теорема 7. *Пусть B — некоторый базис с базисным многочленом $B(S)$ и характеристическим многочленом $A(T,F)$. Тогда для любого фиксированного p, $0 < p < 1$, существует предел $P_1(p) = \lim\limits_{n\to\infty} P_{1,n}(p)$, и имеет место равенство*:

$$P_1(p) = \frac{A'_F(\tau, \sigma - \tau)}{\omega^{-1} - A'_T(\tau, \sigma-\tau) + A'_F(\tau, \sigma - \tau)}, \tag{1}$$

где ω и σ — однозначно определённые положительные действительные числа, образующие решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \sigma = 1 + \omega B(\sigma), \\ 1 = \omega B'(\sigma), \end{cases} \tag{2}$$

с минимальным значением $|\omega|$ (среди всех решений (2)), A'_T и A'_F — частные производные многочлена $A(T,F)$, $\tau = \tau(p)$ — однозначно опре-

[7]Предполагаем, что базис содержит хотя бы одну функцию от двух или более переменных.

делённая алгебраическая функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\tau(p) = p + \omega A(\tau(p), \sigma - \tau(p)),$$

и условиям $0 \leq \tau(p) \leq \sigma$.

Доказательство теоремы 7 опирается на построение формального языка булевых выражений над базисом B. Для построенного языка и его подъязыков выписываются связывающие их уравнения. Эти уравнения гомоморфно отображаются в алгебраические уравнения, связывающие производящие функции вероятностей булевых выражений. Анализ асимптотики коэффициентов производящих функций завершает доказательство теоремы.

В диссертации показано, что на любом замкнутом отрезке, целиком содержащимся в интервале $(0, 1)$ последовательность функций $P_{1,n}(p)$ сходится к $P_1(p)$ равномерно, и при этом $P_{1,n}(p) = P_1(p) + O(1/\sqrt{n})$.

Теорема 7 позволяет вычислить значение функции вероятности произвольного базиса B в любой точке $0 < p < 1$. Поведение функции вероятности в граничных точках $p = 0$ и $p = 1$ описывает

Теорема 9. *Пусть задан базис B. Значение $P_1(0)$ (соответственно, $P_1(1)$) определено тогда и только тогда, когда в базисе B найдётся функция, отличная от линейной, существенно зависящей от всех переменных, не сохраняющей ноль (не сохраняющей единицу) функции. Если в B найдётся функция, не сохраняющая ноль (не сохраняющая единицу), то значение $P_1(0)$ ($P_1(1)$) вычисляется по формуле (1), в противном случае $P_1(0) = 0$ ($P_1(1) = 1$).*

В **главе 2** с помощью теорем 7 и 9, доказанных в главе 1, найдены явные выражения для функций вероятности некоторых конкретных базисов. Также исследуется непрерывность и дифференцируемость функций вероятности и рассматривается задача восстановления значения вероятности.

Результаты о непрерывности и дифференцируемости функций вероятности во внутренних и граничных точках отрезка $[0, 1]$ сформулированы в виде двух теорем.

Теорема 13. *Для всякого базиса B функция $P_1(p)$ является бесконечно непрерывно-дифференцируемой на интервале $p \in (0, 1)$.*

Теорема 14. *Пусть B — базис с базисным многочленом $B(S)$ и характеристическим многочленом $A(T, F)$. Функция $P_1(p)$ имеет разрыв в точке $p = 0$ (соответственно, $p = 1$) тогда и только тогда, когда выполнены равенства $a_{k0} = 0$, $a_{k1} = k|B_k|$ (соответственно, $a_{k\,k-1} = 0$, $a_{kk} = |B_k|$) для всех $k = 0, \ldots, r$.*

Установленные выше свойства функций вероятности позволяют решать некоторые содержательные задачи о случайных булевых выражениях. Источником таких задач являются различные интерпретации модели случайных булевых выражений. В частности, с содержательной точки зрения случайные булевы выражения можно рассматривать как модельный объект, имитирующий ход некоторого „сложного" вычислительного процесса.

Одной из задач, возникающих в таком контексте, является задача восстановления значения вероятности. Эта задача заключается в том, чтобы для заданного базиса B по заданному значению функции вероятности $P_1(p)$ определить значение p.

С помощью теоремы 13 в диссертации доказывается, что эта задача либо неразрешима вообще (если функция вероятности базиса B постоянная), либо число решений не превышает $2r - 2$, где r — максимальное число переменных у функций базиса B.

В случае бинарного базиса (т. е. $r = 2$) доказывается более точный результат: функция вероятности является либо строго монотонной на интервале $(0, 1)$, либо постоянной при всех $p \in (0, 1)$. В первом случае задача восстановления значения вероятности имеет единственное решение, а во втором случае — неразрешима.

В **главе 3** исследуются свойства базисов с постоянной функцией вероятности. Интерес к таким базисам обусловлен, во-первых, тем, что они представляют собой особый случай в описанной выше задаче восстановления вероятности. Во-вторых, такие базисы позволяют строить различные примеры, демонстрирующие, какого рода информация о базисе может быть получена по его функции вероятности. Задача определения свойств базиса по его функции вероятности является ещё одним примером содержательной задачи, связанной с моделью случайных булевых выражений.

В рассмотрении базисов с постоянной функцией вероятности особую роль играют *однородные* базисы, т. е. базисы, все функции которых имеют одинаковое число переменных. Доказывается, что коэффициенты характеристического и базисного многочленов однородных базисов с постоянной функцией вероятности удовлетворяют некоторым специальным соотношениям.

Теорема 17. *Пусть B — однородный базис с базисным многочленом $B(S)$ и характеристическим многочленом $A(T,F)$, и пусть $d_j = \frac{a_{rj}}{|B_r|\binom{r}{j}}$. Функция вероятности базиса B постоянна и равна C, $0 < C < 1$, при всех $p \in (0,1)$ тогда, и только тогда, когда разности $d_j - C$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{C-1}{C}$.*

Таким образом, у однородного базиса с постоянной функцией вероятности доли единичных значений на слоях булева куба d_j „колеблются" около величины C — постоянного значения функции вероятности.

Исследование неоднородных базисов во многих случаях сводится к рассмотрению однородных. В частности, выполнено

Следствие 9. *Любое конечное объединение однородных базисов с постоянными функциями вероятности, равными некоторой постоянной C, одной и той же для всех базисов, является базисом с постоянной функцией вероятности, равной C.*

Утверждение следствия 9 можно обратить при некоторых дополнительных условиях:

Теорема 24. *Пусть базис B имеет вид $B_q \cup B_{q+1} \cup \ldots \cup B_{r-1} \cup B_r$, где $q > 0$, $B_q \neq \emptyset$ и $B_r \neq \emptyset$. Пусть число σ, соответствующее базису B, является алгебраическим, степени $r - q + 1$. Пусть функция вероятности базиса B постоянна и равна некоторому рациональному числу C. Тогда каждое из множеств B_k для $k = q, \ldots, r$ является базисом с постоянной функцией вероятности, равной C.*

С помощью следствия 9 строятся примеры, показывающие, что по заданной функции вероятности базиса, вообще говоря, невозможно определить ни число функций в базисе, ни количество переменных у функций базиса. Более того, для произвольного базиса B по функции вероятности невозможно определить принадлежность некоторой функции этому базису. Однако, теорема 24 показывает, что при соответствующем сужении класса рассматриваемых базисов информацию о долях единичных значений функций на слоях булева куба по функции вероятности базиса получить всё же можно.

В **главе 4** рассматривается вопрос о том, насколько богат класс функций вероятности булевых базисов. Доказывается, что существуют базисы, функции вероятности которых сколь угодно близки к любой наперёд заданной непрерывной функции $f(p)$, отображающей отрезок $[0,1]$ в себя.

Доказательство теоремы о равномерном приближении функциями вероятности конструктивно и осуществляется в два этапа. Вначале доказывается теорема о равномерном приближении многочленов функциями вероятности.

Теорема 25. *Пусть B — некоторый базис с базисным многочленом $B(S)$ и характеристическим многочленом $A(T,F)$, и базис $B^{(m)}$ получается из B добавлением в каждую функцию из B ровно m несущественных переменных. Тогда для функции вероятности $P_1^{(m)}(p)$ базиса $B^{(m)}$ выполняется соотношение*:

$$\lim_{m\to\infty} P_1^{(m)}(p) = \frac{A(p,1-p)}{|B|},$$

причём сходимость является равномерной по p на отрезке $[0,1]$.

Затем с помощью теоремы Вейерштрасса в формулировке С. Н. Бернштейна[8] (о равномерном приближении непрерывных функций многочленами) доказывается

Теорема 27. *Пусть $f(p)$ — непрерывная функция, отображающая отрезок $[0,1]$ в себя. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся базис B_ε с функцией вероятности $P_1(p)$ такой, что для всякого $p \in [0,1]$ имеет место неравенство $|f(p) - P_1(p)| < \varepsilon$.*

Конструкция, используемая в теореме 27 для построения базиса B_ε, является достаточно гибкой и позволяет строить приближающие базисы с некоторыми наперёд заданными свойствами. В частности, в диссертации доказано, что базис B_ε в теореме 27 может быть выбран так, чтобы все функции базиса оказались различными, а все переменные каждой функции — существенными.

В **главе 5** в вероятностных пространствах булевых выражений рассматриваются вероятности некоторых событий, связанных с бесповторными булевыми формулами.

[8]Bernstein S. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilitées // Comm. Soc. Math. Kharkov. — 1912. — Vol. 13. — P. 1–2.

Каждому булеву выражению ставится в соответствие единственная с точностью до переименования переменных бесповторная формула, из которой это выражение получается в результате подстановки констант вместо переменных. *Функцией вероятности бесповторной булевой формулы* $\hat{\Phi}$, обозначаемой $P_1(p|\hat{\Phi})$, называется вероятность того, что случайное выражение Φ принимает значение 1, при условии, что оно порождается формулой $\hat{\Phi}$. Рассмотренные ранее функции $P_{1,n}(p)$, пределом которых является функция вероятности базиса, связаны с функциями $P_1(p|\hat{\Phi})$ равенством $P_{1,n}(p) = \frac{1}{s_n}\sum_{|\hat{\Phi}|=n} P_1(p|\hat{\Phi})$.

Вычисление функции вероятности отдельно взятой бесповторной формулы $\hat{\Phi}$ не представляет особой сложности, однако получить описание множества всевозможных функций вероятности бесповторных формул над заданным базисом B оказывается гораздо более сложной задачей. Наиболее продуктивным методом исследования функций вероятности формул над заданным базисом оказалось рассмотрение множеств их значений при фиксированных значениях p.

Для целей классификации таких множеств представляется естественным рассматривать их замыкания относительно операции предельного перехода. Множество значений функций вероятности формул для базиса B в точке p, дополненное всеми своими предельными точками, обозначается $W_B(p)$.

Рассмотрение различных базисов B позволяет выявить некоторые специальные случаи множеств $W_B(p)$. Если базис целиком лежит в K (множестве конъюнкций переменных или констант), в D (множестве дизъюнкций переменных или констант), или в L (множестве линейных булевых функций), то множество $W_B(p)$ имеет единственную предельную точку (0, если $B \subset K$; 1, если $B \subset D$; 1/2, если $B \subset L$). В этих случаях множество $W_B(p)$ является нигде не плотным на отрезке $[0, 1]$.

У базисов $\{\&, \neg\}$ и $\{\&, \vee\}$ при любом $p \in (0, 1)$ множество $W_B(p)$ совпадает с отрезком $[0, 1]$, т. е. все точки множества являются предельными. Совпадение множества $W_B(p)$ с отрезком $[0, 1]$ означает, что в сколь угодно малой окрестности произвольной точки отрезка $[0, 1]$ обязательно лежит значение функции вероятности некоторой бесповторной формулы над B. Условия, при которых множество $W_B(p)$ совпадает с отрезком $[0, 1]$, описываются следующей теоремой.

Теорема 34. *Пусть задан базис* B *и число* $p \in (0, 1)$. *Множество* $W_B(p)$ *совпадает с отрезком* $[0, 1]$ *тогда и только тогда, когда* $B \not\subseteq L, K, D$ *и* $0, 1 \in W_B(p)$.

Кроме упомянутых выше случаев совпадения $W_B(p)$ с отрезком $[0,1]$ и множеств $W_B(p)$ с единственной предельной точкой, возможны и другие, более сложно устроенные множества $W_B(p)$. Например, для базиса $B = \{xy \vee yz \vee xz\}$ при $p \in (0, 1/2)$ множество $W_B(p)$ содержит бесконечно много предельных точек на отрезке $[0, p]$, но не является всюду плотным на этом отрезке.

В заключение автор хотел бы выразить глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору О. М. Касим-Заде за постановку задачи, постоянное внимание к работе, многочисленные плодотворные обсуждения, и огромную моральную поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

1. Яшунский А. Д. Об асимптотике вероятности значений случайных булевых выражений // Дискретный анализ и исследование операций. — 2006. — Серия 1. Том 13, №2. — С. 59–96.

2. Yashunsky A. D. On the properties of asymptotic probability for random Boolean expression values in binary bases // Proc. of the 3^{rd} Int. Symp. "Stochastic Algorithms: Foundations and Applications" (SAGA 2005), Moscow, October 20–22, 2005. Lecture Notes on Computer Science. Vol. 3777. Berlin: Springer, 2005. — P. 202–212.

3. Яшунский А. Д. О равномерном приближении непрерывных функций функциями вероятности булевых базисов // Дискретные модели в теории управляющих систем: VII Международная конференция, Покровское, 4-6 марта 2006 г.: Труды. — М.: МАКС Пресс, 2006. С. 426–430.

4. Яшунский А. Д. О преобразованиях вероятности бесповторными булевыми формулами // Материалы XVI Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.) — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2006. — С. 150–155.