Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.628.2+519.688

Зобнин Алексей Игоревич

Допустимые упорядочения и стандартные базисы дифференциальных идеалов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2006

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Е.В. Панкратьев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор А.А. Михалев
	кандидат физико-математических наук, доцент И.Н. Балаба
Ведущая организация:	Вычислительный центр РАН им. А.А. Дородницына

Защита диссертации состоится 9 февраля 2007 г. в 16 ч. 15 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 9 января 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

В.Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В последнее время был достигнут значительный прогресс в области компьютерной алгебры, а именно в развитии методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений от нескольких переменных, а также методов изучения алгебраических идеалов, порожденных нелинейными полиномами. Настоящим прорывом в данной области стало появление базисов Гребнера и алгоритма их вычисления[1], предложенного Б. Бухбергером еще в середине 1960-х годов. Теория исключений, использовавшаяся ранее для решения систем, оказалась частью новой теории, позволяющей приводить произвольную систему уравнений к стандартному виду. Неудивительно, что впоследствии стали разрабатываться различные обобщения понятия базиса Гребнера полиномиального идеала на прочие алгебраические структуры. Одной из таких структур явились дифференциальные идеалы в кольце дифференциальных многочленов, моделирующие системы дифференциальных алгебраических уравнений в том же смысле, в каком полиномиальные идеалы моделируют системы обычных алгебраических уравнений. Для радикальных дифференциальных идеалов в кольце дифференциальных многочленов над алгеброй Ритта был создан эффективный метод разложения на характеризуемые компоненты, позволяющий, в частности, проверить принадлежность дифференциального многочлена такому идеалу и исследовать строение множества решений. Для произвольных бесконечно порожденных дифференциальных идеалов была доказана алгоритмическая неразрешимость задачи принадлежности[2]. Однако для нерадикальных конечно порожденных идеалов вопрос об алгоритмическом решении задачи принадлежности до сих пор открыт.

Дифференциальные стандартные базисы, появившиеся в немного отличающихся формах в конце 1980-х гг. в работах Ф. Оливье[3] и Дж. Карра Ферро[4], являются прямым и естественным обобщением понятия базиса Гребнера, но не позволяют полностью решить задачу принадлежности. Сами основатели теории подметили, что для многих идеалов они могут быть

[1] Becker T. and Weispfenning W., *Groebner Bases. A Computational Approach to Commutative Algebra,* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] Gallo G., Mishra B., Ollivier F., *Some Constructions in Rings of Differential Polynomials,* Lecture Notes in Computer Science, vol. 539, 171–182, 1991.

[3] Ollivier F., *Standard Bases of Differential Ideals,* Lecture Notes in Computer Science, 304–321, 508, 1990.

[4] Carrà Ferro G., *Groebner Bases and Differential Algebra,* Lecture Notes in Computer Science, vol. 356, 129–140, 1989.

бесконечными. Этот факт на несколько лет приостановил дальнейшие исследования в этой области. Однако диссертантом были получены неожиданные примеры конечных дифференциальных стандартных базисов, что снова возродило интерес к данной теме. Поводом для исследования стала обнаруженная автором связь между процессом редукции Г. Леви[5], дающим алгоритм проверки принадлежности монома идеалу $[y^p]$, и появившимися почти через 50 лет дифференциальными стандартными базисами Оливье и Карра Ферро. Долгое время считалось, что стандартные базисы Оливье и Карра Ферро даже таких несложно устроенных идеалов, как $[y^p]$, являются бесконечными. Однако выяснилось, что при более общих упорядочениях идеалы вида $[y^p]$ приобретают конечный дифференциальный стандартный базис $\{y^p\}$. Такие общие упорядочения (например, degrevlex) являются вполне естественными при вычислении базисов Гребнера полиномиальных идеалов. В то же время в дифференциальном случае они не обладают некоторыми свойствами согласованности с дифференцированиями, и потому не рассматривались основателями теории дифференциальных стандартных базисов. Грубо говоря, Оливье и Карра Ферро применяли лишь упорядочения lex и deglex.

Цель работы

Целью работы является изучение допустимых упорядочений и критериев конечности дифференциальных стандартных базисов идеалов обыкновенного кольца дифференциальных многочленов $\mathcal{F}\{y\}$ над полем констант $\mathcal{F}$ нулевой характеристики. Перед автором стояли следующие задачи:

- исследовать свойства допустимых упорядочений на дифференциальных мономах (например, полную упорядоченность множества дифференциальных мономов и эффект сокращения старших мономов в производных многочлена) без дополнительных предположений о согласованности с дифференцированиями;
- изучить различные классы упорядочений на дифференциальных мономах в зависимости от их связи с дифференцированиями, а также соотношения между этими классами;
- описать всевозможные такие упорядочения некоторым конструктивным способом, аналогичным матричному заданию обычных мономиальных упорядочений;

[5] Levi H., *On the Structure of Differential Polynomials and on Their Theory of Ideals,* Trans. AMS, vol. 51, 532–568, 1942.

• установить необходимые и достаточные условия конечности дифференциальных стандартных базисов при определенных упорядочениях;

• сформулировать и реализовать в системах компьютерной алгебры алгоритм, вычисляющий конечный дифференциальный стандартный базис при определенных упорядочениях;

• изучить поведение дифференциальных стандартных базисов и задачу о принадлежности дифференциального многочлена идеалу при композиции многочленов.

Научная новизна

Научная новизна данной работы состоит в следующем:

1. Изучены допустимые упорядочения дифференциальных мономов. Доказана полная упорядоченность множества дифференциальных мономов относительно таких упорядочений. Предложено описание упорядочений на дифференциальных мономах в терминах согласованного набора мономиальных матриц (а также с помощью «бесконечных» матриц особого вида). Выделены различные классы упорядочений в зависимости от их связи с дифференцированиями. Исследован феномен сокращения мономов в производных многочлена. Предложен и реализован в системе компьютерной алгебры Maple 10 алгоритм, строящий дифференциальный многочлен (если он существует), в котором сокращается заданная в общем виде последовательность мономов.

2. Дано необходимое и достаточное условие существования конечного дифференциального стандартного базиса заданного идеала при определенных классах упорядочений. Приведены новые примеры конечных и параметрических дифференциальных стандартных базисов. Предложен и реализован так называемый «улучшенный процесс Оливье», заведомо останавливающийся и возвращающий редуцированный дифференциальный стандартный базис идеала в случае его конечности.

3. Получена связь между дифференциальными стандартными базисами и базисами Гребнера полиномиальных идеалов в кольце многочленов от конечного числа производных основной переменной. С помощью этой техники результаты Х. Хонга[6,7] о поведении базисов Гребнера при композиции многочленов обобщены на дифференциальный случай. Исследована

[6] Hong H., *Groebner Basis Under Composition I,* The Journal of Symbolic Computation, 643-663, 25 (5), 1998.

[7] Hong H., *Groebner Basis Under Composition II,* in Proceedings of ISSAC-1996, 79–85, 1996.

(совместно с М.В. Кондратьевой) задача принадлежности многочлена дифференциальному идеалу, порожденному композицией многочленов: ее решение сведено к решению более простой (с алгоритмической точки зрения) задачи принадлежности.

Основные методы исследования

В работе используются методы и результаты теории базисов Гребнера, коммутативной алгебры, дифференциальной алгебры. Результаты диссертации опираются на работу Леви о структуре дифференциальных многочленов[5], на статьи Карра Ферро[4,8] и Оливье[3] о стандартных базисах дифференциальных идеалов («дифференциальных базисах Гребнера»), теорию дифференциальной размерности[9,10,11], работу Колчина об экспонентах дифференциального многочлена первого порядка[12], теорию Хуна Хонга о поведении базисов Гребнера при композиции многочленов[6,7], а также предложенную Роббьяно и развитую затем Вайспфеннингом и Хонгом классификацию мономиальных упорядочений с помощью матриц[13,14,15]. Кроме того, автором проведены многочисленные компьютерные вычисления с помощью современных систем компьютерной алгебры. Благодаря этим вычислениям получили подтверждение различные гипотезы, впоследствии доказанные в виде теорем.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет как теоретический, так и прикладной характер. Результаты работы являются существенным продвижением в конструктивной теории дифференциальных стандартных базисов. Они позволяют в не рассматривавшихся ранее случаях алгоритмически решать задачу принадлежности дифференциального многочлена конечно порожденному дифферен-

[8] Carrà Ferro G., *Differential Gröbner Bases in One Variable and in the Partial Case,* Math. Comput. Modelling, Pergamon Press, vol. 25, 1–10, 1997.

[9] Kolchin E.R., *Differential Algebra and Algebraic Groups,* Academic Press, 1973.

[10] Kondratieva M.V., Levin A.B., Mikhalev A.V., Pankratiev E.V., *Differential and Difference Dimension Polynomials,* Kluwer Academic Publisher, 1999.

[11] Kredel H., Weispfenning V., *Computing Dimension and Independent Set for Polynomial Ideals,* Journal of Symbolic Computation, vol. 6, 231–247, 1988.

[12] Kolchin E.R. *On the exponents of differential ideals,* Annals of Mathematics, 42:740–777, 1941.

[13] Robbiano L., *On the Theory of Graded Structures,* The Journal of Symbolic Computation, 2, 139-170, 1986.

[14] Weispfenning V., *Differential Term-Orders,* in Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 245–253, ACM press, Kiev, 1993.

[15] Hong H. and Weispfenning V., *Algorithmic Theory of Admissible Term Orders,* preprint, 1999. http://www4.ncsu.edu:8030/~hong/papers/Hong99c.dvi.

циальному идеалу, а также исследовать строение такого идеала. Решение подобных задач связано с исследованием систем нелинейных обыкновенных алгебраических дифференциальных уравнений. Методы и алгоритмы, предложенные в диссертации, могут быть внедрены в существующие системы компьютерной алгебры (автор реализовал эти алгоритмы в системе компьютерной алгебры Maple 10). Результаты диссертации могут быть полезны специалистам из Московского государственного университета, Новосибирского государственного университета, Тульского государственного педагогического университета, Красноярского государственного педагогического университета, Вычислительного центра РАН, Объединенного института ядерных исследований.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на научно-исследовательском семинаре и на семинаре «Кольца и модули» кафедры высшей алгебры МГУ;
- на выездных заседаниях международного семинара по компьютерной алгебре в г. Дубна в 2003, 2004, 2005 и 2006 гг.;
- на международных конференциях «Компьютерная алгебра в символьных вычислениях» (CASC), Ялта, 2002, и Санкт-Петербург, 2004;
- на международной алгебраической конференции, посвященной 250-летию МГУ и 75-летию кафедры высшей алгебры, МГУ, 2004 г.;
- на конференции «Ломоносовские чтения» в МГУ в 2005 и 2006 гг.;
- на международном симпозиуме по символьным и алгебраическим вычислениям (ISSAC-2005), Пекин, Китай, 2005 г.;
- на международном семинаре по компьютерной алгебре и информатике, МГУ, 2005 г.;
- на международной конференции «Базисы Гребнера в символьном анализе» (D2) в рамках Специального семестра по базисам Гребнера в г. Линц, Австрия, 2006 г.;
- на IX международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки», МГУ, 2006 г.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 9 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 6 глав (одна из которых является вводной), заключения, приложения и библиографии (66 наименований). Общий объем диссертации составляет 120 страниц.

Краткое содержание работы

В **первой главе**, которая является вводной, изложена краткая история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты.

Во **второй главе** приводятся необходимые сведения о мономиальных упорядочениях, их классификации с помощью мономиальных матриц[13,15], базисах Гребнера полиномиальных идеалов[16] и о поведении базисов Гребнера при композиции многочленов[6,7].

В **третьей главе** вводится понятие кольца дифференциальных многочленов, сформулирована задача принадлежности дифференциального многочлена идеалу и описаны конструктивные методы дифференциальной алгебры (характеристические множества, дифференциальные базисы Гребнера, дифференциальные стандартные базисы).

Пусть $\mathcal{R}$ — алгебра Ритта (т.е. дифференциальное кольцо, содержащее $\mathbb{Q}$) с множеством элементарных коммутирующих дифференциальных операторов Δ и Θ — моноид, порожденный Δ. Пусть $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ — набор независимых переменных. *Кольцом дифференциальных многочленов* над $\mathcal{R}$ называется кольцо многочленов

$$\mathcal{R}\{V\} = \mathcal{R}\{v_1, \dots, v_n\} := \mathcal{R}[\Theta v_1, \dots, \Theta v_n]$$

от бесконечного числа *дифференциальных переменных* вида $\theta v_j = \delta_1^{\alpha_1} \dots \delta_m^{\alpha_m} v_j$. На переменных дифференцирования в $\mathcal{F}\{y\}$ определены стандартным образом: $\delta(\theta v_j) = (\delta\theta) v_j$.

Линейный порядок $\prec$ на множестве мономов кольца $\mathcal{F}\{y\}$ называется *допустимым упорядочением*, если выполнены свойства:

[**O1.**] $p \prec q \implies p \cdot s \prec q \cdot s \quad \forall p, q, s \in \mathbb{M}$;

[**O2.**] $1 \preccurlyeq p \quad \forall p \in \mathbb{M}$;

[**O3.**] ограничение $\prec$ на подмножество дифференциальных переменных ΘV является допустимым ранжиром: $\theta_1 y_i \prec \theta_2 y_j \implies \theta\theta_1 y_i \prec \theta\theta_2 y_j$ и $y_i \preccurlyeq \theta y_i$ для всех $y_i, y_j \in \Theta V$, $\theta \in \Theta$.

[16] Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д., *Идеалы, многообразия и алгоритмы,* М., Мир, 2000.

Пусть зафиксировано некоторое допустимое упорядочение $\prec$. Множество $S \subset I$ называется *дифференциальным стандартным базисом* идеала I относительно $\prec$, если ΘS является (бесконечным) алгебраическим базисом Гребнера идеала I, рассматриваемого в кольце $\mathcal{F}[\Theta V]$. Дифференциальные стандартные базисы в $\mathcal{F}\{V\}$ можно рассматривать как удобную параметризацию бесконечных базисов Гребнера (алгебраических стандартных базисов) в кольце $\mathcal{F}[\Theta V]$. Эта параметризация обеспечивается дифференциальными операторами и является совместимой со структурой дифференциального кольца $\mathcal{F}\{V\}$. Таким образом, мы можем работать с одним элементом f вместо целого семейства Θf.

Четвертая глава посвящена изучению допустимых упорядочений на дифференциальных мономах в широком смысле. В частности, установлена полная упорядоченность множества дифференциальных мономов без использования дополнительных предположений, введены различные классы допустимых упорядочений и исследованы зависимости между ними, рассмотрен феномен сокращения последовательности мономов в производных многочлена.

Вначале доказывается, что *каждое допустимое упорядочение вполне упорядочивает множество всех дифференциальных мономов.* Предыдущие исследователи[14] для доказательства этого важного свойства вводили дополнительные ограничения на $\prec$ и тем самым отсекали значительный класс упорядочений.

Далее рассматривается случай обыкновенного кольца дифференциальных многочленов $\mathcal{F}\{y\}$. Для упорядочений на мономах такого кольца предложена матричная классификация. Набор мономиальных матриц $\{\mathcal{M}_k\}$ называется *согласованным*, если $\mathcal{M}_{k-1}$ получается из $\mathcal{M}_k$ удалением правого столбца и затем откидыванием нулевой строки, если такая найдется. Каждая матрица $\mathcal{M}_k$ имеет $k+1$ столбцов и задает мономиальное упорядочение на мономах от $y_0, \ldots, y_k$ по правилу

$$y_0^{\alpha_0} \ldots y_k^{\alpha_k} \prec y_0^{\beta_0} \ldots y_k^{\beta_k} \iff \mathcal{M} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \prec_{\mathrm{lex}} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

В частности, ее столбцы лексикографически неотрицательны.

Теорема 1. *Всякое допустимое упорядочение на дифференциальных мономах можно задать согласованным набором мономиальных матриц $\{\mathcal{M}_k\}$ (матрица $\{\mathcal{M}_k\}$ задает ограничение $\prec$ на мономы от $y_0, \ldots, y_k$), или, что эквивалентно,* «бесконечной» *(вообще говоря, вверх, вниз и вправо) мономиальной матрицей.*

Под «бесконечной» мономиальной матрицей здесь понимается упорядоченная счетная система бесконечных строк с действительными элементами, такая, что для любого $k \geqslant 0$ в подматрице из первых $k+1$ столбцов лишь конечный набор строк ненулевой, причем этот набор образует мономиальную матрицу упорядочения $\prec_k$. Тогда, обозначив этот набор через $\mathcal{M}_k$, мы получаем согласованную систему $\{\mathcal{M}_k\}$.

Пример. Упорядочения lex и degrevlex можно задать соответственно «бесконечными» матрицами

$$
\begin{pmatrix}
\hdotsfor{9} \\
 & & & \cdots & & & & 1 & \cdots \\
 & & & \cdots & & & 1 & & \cdots \\
 & & & \cdots & & 1 & & & \cdots \\
 & & & \cdots & 1 & & & & \cdots \\
\hdotsfor{9} \\
 & & 1 & \cdots & & & & & \cdots \\
 & 1 & & \cdots & & & & & \cdots \\
1 & & & \cdots & & & & & \cdots
\end{pmatrix}
\quad \text{и} \quad
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
-1 & & & \cdots & & & & \cdots \\
 & -1 & & \cdots & & & & \cdots \\
 & & -1 & \cdots & & & & \cdots \\
\hdotsfor{8} \\
 & & & \cdots & -1 & & & \cdots \\
 & & & \cdots & & -1 & & \cdots \\
 & & & \cdots & & & -1 & \cdots \\
\hdotsfor{8}
\end{pmatrix}.
$$

В работе предложен алгоритмический способ построения *канонического согласованного набора матриц* для допустимого упорядочения. Так, для порядка degrevlex таким набором будет

$$
(1)\,, \ \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \ \ldots,
$$

где жирным шрифтом обозначены добавленные на очередном шаге в матрицы строка и столбец. Аналогично в работе определяются упорядочения (wt+deg)invrevlex, degwtrevlex, wtdegrevlex, совершенно естественно возникающие при работе с дифференциальными многочленами.

Пусть $p > 0$. Моном $M = \prod_{i=0}^{k} y_i^{\alpha_i}$ называется *α_p-мономом*, если для всех i от 1 до k выполнено $\alpha_{i-1}+\alpha_i < p$. Все остальные мономы называются *β_p-мономами*. Многочлен f называется *квазилинейным* относительно $\prec$, если $f \in \mathcal{F}$ или $\deg \operatorname{lm}_\prec f = 1$. Допустимое упорядочение $\prec$ называется:

- *δ-лексикографическим*, если $\operatorname{lm}_\prec \delta M = \operatorname{lm}_{\text{lex}} \delta M \ \forall M \neq 1$;
- *δ-фиксированным*, если $\forall\, f \in \mathcal{F}\{y\} \setminus \mathcal{F}$ найдутся такие моном M и индексы k_0 и r, что $\operatorname{lm}_\prec \delta^k f = M y_{r+k}$ для всех $k \geqslant k_0$;
- *β-упорядочением*, если $\operatorname{lm}_\prec \delta^k y^n = \operatorname{lm}_{\text{degrevlex}} \delta^k y^n \ \forall k, n \geqslant 1$ (то есть, старший моном $\delta^k y^n$ является β_n-мономом);
- *согласованным с квазилинейностью*, если производная любого $\prec$-квазилинейного многочлена сама является $\prec$-квазилинейной.

В терминах данных классов упорядочений в диссертации устанавливаются критерии конечности дифференциальных стандартных базисов и доказываются теоремы о поведении таких базисов при композиции.

Пример. Упорядочения lex, deglex и wtlex являются δ-лексикографическими. Упорядочения degrevlex, degwtrevlex и wtdegrevlex являются β-упорядочениями. Все перечисленные упорядочения согласованы с квазилинейностью. Каждое δ-лексикографическое упорядочение является δ-фиксированным и согласованным с квазилинейностью.

В конце четвертой главы приведены примеры многочленов, у которых β-старший моном производных не является β-мономом. Это явление, невозможное при δ-лексикографических упорядочениях, рассматривается в более общей форме как сокращение мономов в производных многочленов.

В **пятой главе** устанавливаются необходимые и достаточные условия конечности дифференциальных стандартных базисов при различных упорядочениях; строится и обосновывается улучшенный процесс Оливье.

Теорема 2 (необходимое условие конечности). *Пусть $\prec$ — δ-фиксированное упорядочение. Если собственный идеал $I \lhd \mathcal{F}\{y\}$ обладает конечным дифференциальным стандартным базисом G относительно $\prec$, то в I содержится $\prec$-квазилинейный многочлен.*

Эта теорема для лексикографического упорядочения (а также для случая нескольких дифференцирований) была впервые доказана Дж. Карра Ферро[8]. В данной работе она модифицирована и обобщена на случай более общих упорядочений.

Теорема 3 (достаточное условие конечности). *Пусть $\prec$ согласовано с квазилинейностью. Если в собственном дифференциальном идеале $I \lhd \mathcal{F}\{y\}$ имеется $\prec$-квазилинейный многочлен, то дифференциальный стандартный базис идеала I относительно $\prec$ является конечным.*

Следствие 1. *Пусть $\prec$ — δ-лексикографическое упорядочение. Для того, чтобы дифференциальный стандартный базис собственного идеала $I \lhd \mathcal{F}\{y\}$ был конечным, необходимо и достаточно, чтобы в I содержался $\prec$-квазилинейный многочлен.*

Следующий факт определяет ключевую роль порядка lex:

Теорема 4. *Если идеал обладает конечным дифференциальным стандартным базисом при δ-фиксированном упорядочении, то он обладает конечным стандартным базисом и при лексикографическом упорядочении.*

Из доказанных теорем вытекают следующие результаты:

Следствие 2. *Следующие условия эквивалентны:*

- *идеал* $I \triangleleft \mathcal{F}\{y\}$ *обладает конечным лексикографическим дифференциальным стандартным базисом;*
- *в* I *содержится* lex-*квазилинейный многочлен;*
- *факторалгебра* $\mathcal{F}[y, y_1, y_2, \ldots]/I$ *конечно порождена.*

Следствие 3. *Следующие условия эквивалентны:*

- *идеал* $I \triangleleft \mathcal{F}\{y\}$ *обладает конечным дифференциальным стандартным базисом относительно упорядочения* deglex*;*
- *в* I *содержится линейный многочлен.*

На основе критерия конечности был построен особый процесс пополнения[17], который вычисляет редуцированный дифференциальный стандартный базис идеала в случае, когда он конечен.

Улучшенный процесс Оливье
Вход:
$F \subset \mathcal{F}\{y\}$ — конечное множество дифференциальных многочленов (образующих идеала);
$\prec$ — δ-фиксированное и согласованное с квазилинейностью допустимое упорядочение.
Выход:
Редуцированный дифференциальный стандартный базис идеала $[F]$ (в случае, если он конечен).

$G := F; \quad H := \varnothing;$
$s := \max_{f \in F} \operatorname{ord} f; \quad k := 0;$
repeat
  $G_{old} := \varnothing;$
  while $G \neq G_{old}$ **do**
    $H :=$ **Diff Complete** $(G, s + k);$
    $G_{old} := G;$
    $G :=$ **ReducedGröbnerBasis** $(H, \prec);$
  end do;
  $k := k + 1;$
until ContainsQuasiLinear $(G, \prec);$
return DiffAutoreduce $(G, \prec);$

[17] Он называется «улучшенным процессом Оливье» в отличие от обычного процесса Оливье[3], который мог не остановиться даже в случае конечного стандартного базиса.

Стандартная функция **ReducedGröbnerBasis** $(H, \prec)$, используемая в этом процессе, возвращает редуцированный базис Гребнера идеала (H) относительно $\prec$ в кольце многочленов от всех переменных, от которых зависят элементы H. **DiffComplete** (G, r) возвращает множество, состоящее из всех элементов G и их производных, лежащих в $\mathcal{F}[y_0, y_1, \ldots, y_r]$. Алгоритм **DiffAutoreduce** $(G, \prec)$ редуцирует каждый элемент $g \in G$ относительно производных элементов из $G \setminus \{g\}$. Функция **ContainsQuasiLinear** $(G, \prec)$ проверяет наличие в множестве G $\prec$-квазилинейного многочлена.

В работе доказано, что улучшенный процесс Оливье завершает работу тогда и только тогда, когда $[F]$ обладает конечным дифференциальным стандартным базисом при δ-лексикографическом допустимом упорядочении $\prec$, согласованном с квазилинейностью. При этом он возвращает редуцированный дифференциальный стандартный базис идеала $[F]$.

Далее в работе изучаются условия конечности дифференциальных стандартных базисов при β-упорядочениях.

Предложение 1. *Идеал* $[y^n]$, $n > 1$, *обладает конечным дифференциальным стандартным базисом* $\{y^n\}$ *относительно* $\prec$ *в том и только том случае, когда* $\prec$ — β*-упорядочение.*

Этот результат частично обобщается в шестой главе на идеалы, порожденные степенью квазилинейного многочлена.

В конце пятой главы приведены примеры конечных и параметрических дифференциальных стандартных базисов, а также рассмотрен вопрос о существовании конечного стандартного базиса у идеала $[yy_1]$.

В **шестой главе** рассматривается поведение дифференциальных стандартных базисов при композиции многочленов, а также изучается задача принадлежности многочлена дробным идеалам, порожденным композицией. Для этого вводится понятие *согласованного набора базисов Гребнера*, позволяющее свести изучение к полиномиальному случаю. Устанавливается, что, в отличие от базисов Гребнера, дифференциальные стандартные базисы устойчивы, вообще говоря, лишь относительно композиции с квазилинейными многочленами.

(Дифференциальной) *композицией* с дифференциальным многочленом ψ называется дифференциальный эндоморфизм $\mathcal{F}\{y\} \to \mathcal{F}\{y\}$, при котором $y \mapsto \psi$. Образ многочлена $f \in \mathcal{F}\{y\}$ при дифференциальной композиции обозначается через $f \circ \psi$. Через $\mathcal{R}_i$ обозначается кольцо многочленов $\mathcal{F}[y, y_1, \ldots, y_i]$, а через $\prec_i$ — ограничение упорядочения $\prec$ на мономы из $\mathcal{R}_i$. Запись $\mathrm{DSB}_\prec(S, [F])$ будет обозначать условие «S является дифференциальным стандартным базисом идеала $[F]$ относительно $\prec$», а $\mathrm{DSB}_\prec(S)$ — условие $\mathrm{DSB}_\prec(S,[S])$.

Теорема 5. *Пусть $\prec$ — допустимое упорядочение на дифференциальных мономах, $r \geqslant 0$ и $\psi \in \mathcal{R}_r$ — дифференциальный многочлен, причем $\mathrm{lm}_\prec \delta^k\psi = y_{r+k}$ при всех $k \geqslant 0$. Пусть $\Psi = (y, y_1, \ldots, y_{r-1}, \psi, \delta\psi, \delta^2\psi, \ldots)$ и $S \subset \mathcal{F}[y_r, y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots] = \mathcal{F}\{y_r\}$. Тогда $\mathrm{DSB}_\prec(S,\, [F] \triangleleft \mathcal{F}\{y\}) \iff \mathrm{DSB}_\prec(S \circ \Psi,\, [F \circ \Psi] \triangleleft \mathcal{F}\{y\})$.*

Теорема 6. *Пусть упорядочение на дифференциальных мономах $\prec$ является полностью однородным, а $\psi \in \mathcal{F}\{y\}$ — $\prec$-квазилинейный многочлен, причем $\mathrm{lm}_\prec \delta^k\psi = y_{r+k}$ для всех $k \geqslant 0$. Тогда*

$$\mathrm{DSB}_\prec(S,\, [F] \triangleleft \mathcal{F}\{y\}) \iff \mathrm{DSB}_\prec(S \circ \Psi,\, [F \circ \Psi] \triangleleft \mathcal{F}\{y\}).$$

Развитая в работе техника позволяет доказать следующие важные результаты:

Теорема 7. *Пусть $\prec$ — согласованное с квазилинейностью β-упорядочение. Для того, чтобы собственный идеал I обладал конечным дифференциальным стандартным базисом относительно $\prec$, достаточно, чтобы либо I содержал $\prec$-квазилинейный многочлен, либо I порождался некоторой степенью $\prec$-квазилинейного многочлена.*

В диссертации выдвинута гипотеза о том, что это условие является также необходимым.

Теорема 8. *Пусть $k \geqslant 0$. Тогда найдется упорядочение $\prec$, такое, что для любого лексикографически квазилинейного многочлена f порядка k и любого $n \geqslant 1$ идеал $[f^n]$ обладает дифференциальным стандартным базисом из одного f^n относительно $\prec$.*

В работе данное упорядочение $\prec$ строится явным образом.

В диссертации имеется три **приложения**. В приложении A приводятся соотношения между классами упорядочений и формулировками основных теорем. Затем изложена реализация в системе компьютерной алгебры Maple 10 улучшенного процесса Оливье (приложение B) и алгоритма, строящего дифференциальный многочлен заданного веса, в производных которого сокращается указанная в общем виде последовательность мономов (приложение C).

Благодарности

Автор благодарит научного руководителя, ведущего научного сотрудника, кандидата физико-математических наук Евгения Васильевича Панкратьева за помощь в выборе темы исследования, внимательное руководство в процессе исследовательской деятельности и множество полезных идей. Автор весьма признателен доктору физико-математических наук, профессору Александру Васильевичу Михалеву, доктору физико-математических наук, профессору Виктору Николаевичу Латышеву, доктору физико-математических наук, профессору Евгению Соломоновичу Голоду и кандидату физико-математических наук Марине Владимировне Кондратьевой.

Автор также выражает благодарность д.ф.-м.н. Сергею Петровичу Цареву, к.ф.-м.н. Елене Игоревне Буниной, к.ф.-м.н. Олегу Голубицкому, Дмитрию Трушину, Алексею Овчинникову и всем участникам семинара по компьютерной и дифференциальной алгебре на механико-математическом факультете МГУ под руководством Е.В. Панкратьева.

Автор глубоко благодарит своих родителей и коллектив кафедры высшей алгебры за поддержку в работе. Автор посвящает работу своим школьным учителям математики: Тамаре Васильевне Симкиной и Елизавете Николаевне Стрелковой.

Работы автора по теме диссертации

[1] Зобнин А.: *О стандартных базисах в кольце дифференциальных многочленов.* Фундаментальная и прикладная математика, том 9, вып. 3, стр. 89–102 (2003).

[2] Zobnin A.: *Essential Properties of Admissible Orderings and Rankings.* Contributions to General Algebra 14, pp. 205–221 (2004).

[3] Зобнин А.: *Обобщенная редукция в кольце дифференциальных многочленов.* Программирование, № 30 (2), стр. 42–50 (2004).

[4] Zobnin A.: *On Testing the Membership to Differential Ideals.* In Proceedings of the 7th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC-2004), July 12–19, 2004, St. Petersburg, Russia, pp. 485–496 (2004).

[5] Zobnin A.: *Some Results on Differential Grobner Bases*. In Proceedings of A3L-2005 (Conference in Honor of the 60th Birthday of Volker Weispfenning), April 3–6, Passau, Germany, pp. 309–314 (2005).

[6] Zobnin A.: *Admissible Orderings and Finiteness Criteria for Differential Standard Bases*. In Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC-2005), July 24–27, Beijing, China, pp. 365–372 (2005).

[7] Зобнин А.И., Кондратьева М.В.: *Задача принадлежности для дифференциальных идеалов, порожденных композицией многочленов*. Программирование, № 32 (3), стр. 3–9 (2006).

В данной работе Зобнину А.И. принадлежит доказательство основных результатов (теорема 3, следствия 1, 2 и 3) об эквивалентности задачи принадлежности дифференциального многочлена дробному идеалу, порожденному композицией многочленов, и задачи принадлежности соответствующего preparation-многочлена более простому идеалу. Кондратьевой М.В. принадлежат формулировки этих теорем, а также вычислительные примеры.

[8] Кондратьева М.В., Панкратьев Е.В., Зобнин А.И. и Трушин Д.В.: *Вопросы конечности дифференциальных стандартных базисов*. Материалы IX международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки», том 1, часть 2, 141–144 (2006).

В данной работе Зобнину А.И. принадлежат построение и реализация в системе компьютерной алгебры Maple «улучшенного процесса Оливье», доказательство теорем 5 и 6, а также вычислительные примеры. Трушину Д.В. принадлежит исследование идеала сепарант, а также предложение 1 о связи идеала сепарант и конечности лексикографического дифференциального стандартного базиса. Кондратьевой М.В. и Панкратьеву Е.В. принадлежат постановка задачи, вычислительные примеры, а также гипотезы о связи радикальности однопорожденного дифференциального идеала и конечности его дифференциального стандартного базиса.

[9] Зобнин А.И.: *Поведение дифференциальных стандартных базисов при композиции*. «Фундаментальная и прикладная математика», том 13, выпуск 1, стр. 109–134 (2007).