На правах рукописи
УДК 512.667 + 515.146

Хорошкин Антон Сергеевич

ФОРМАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Специальность:
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2006

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, профессор Михаил Владимирович Зайцев;

доктор физико-математических наук Борис Львович Фейгин.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук Максим Эдуардович Казарян;

доктор физико-математических наук, профессор Георгий Борисович Шабат.

Ведущая организация: Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Защита диссертации состоится «9» февраля 2007 г. в $16^{\underline{15}}$ на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет (Главное здание, 14 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан «9» января 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 в МГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор В. Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Работа посвящена вычислению когомологий различных бесконечномерных алгебр Ли, являющихся подалгебрами Ли алгебры Ли формальных векторных полей. Принципы формальной геометрии позволяют интерпретировать когомологические классы рассмотренных алгебр Ли как характеристические классы различных геометрических структур: расслоений, слоений, флагов слоений и т. п.

Когомологии алгебр Ли рассматривались ещё в работах Шевалле[1]. Когомологии полупростых алгебр Ли с коэффициентами в конечномерных модулях оказалось вычислить довольно просто (например, это можно сделать с помощью теории инвариантов). Эти вычисления имеют множество применений как в алгебре, так и в геометрии; например, один из класических способов построения характеристических классов расслоений с компактной структурной группой использует когомологии соответствующей алгебры Ли с коэффициентами в симметрических степенях коприсоединённого представления. Другой способ, который мы хотим здесь упомянуть, использует вычисления когомологий бесконечномерных алгебр Ли.

И. М. Гельфанд и Д. Б. Фукс[2] предложили изучить кольцо когомологий бесконечномерной алгебры Ли W_n формальных векторных полей на n-мерном пространстве. Одной из мотивировок этого рассмотрения является понятие “формальной геометрии”, появившееся в работах тех же авторов сразу после[3]. Замена n-мерного комплексного многообразия M на гомотопное ему многообразие формальных аффинных систем координат на M позволяет сопоставить классам относительных когомологий алгебры Ли W_n некоторые классы когомологий многообразия M. Было показано, что кольцо относительных когомологий алгебры Ли W_n по модулю подалгебры Ли линейных векторных полей порождено классами ξ_{2i} степени $2i$ (где $1 \leqslant i \leqslant n$), которые при

[1]Например, *Chevalley C., Eilenberg S.* Cohomology theory of Lie groups and Lie Algebras // Transactions of the American Mathematical Society, — 1948.

[2]*Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.* Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей // Изв. Акад. Наук СССР. — Сер. Мат. — 1970. — Т.34, вып. 2. — С. 322–337.

[3]*Гельфанд И. М., Каждан Д. А., Фукс Д. Б.* Действия бесконечномерных алгебр Ли // Функц. анализ и его прил. — 1972. — Вып. 1. — С. 10–15.

этом сопоставлении переходят в характеристические классы касательного расслоения. Следующим естественным шагом является обобщение этой конструкции на случай произвольных главных $\mathbf{G}$-расслоений. В случае $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_n$ подобные соображения были существенно использованы в доказательствах локальной теоремы Римана–Роха[4]. В диссертации приведена общая конструкция с доказательствами, а также вычислены когомологии алгебры Ли формальных векторных полей, расширенной формальными $\mathbf{g}$-значными функциями для произвольной (не обязательно редуктивной) алгебры Ли $\mathbf{g}$.

Интерес к вычислению когомологий бесконечномерных алгебр Ли возрос в 70-х годах XX века в связи с построением характеристических классов слоений. В частности, характеристический класс Годбийона–Вея[5] для слоений коразмерности один был обобщён на случай слоений с большими коразмерностями Бернштейном и Розенфельдом[6] и независимо Боттом и Хефлигером[7]. Эти классы также связаны с когомологиями алгебр Ли. Например, классы абсолютных когомологий алгебры Ли W_n отвечают характеристическим классам слоений коразмерности n с тривиальным нормальным расслоением (такие слоения принято называть оснащёнными).

Большое количество применений когомологий алгебр Ли привело к тому, что было проделано множество вычислений в этой области. Одной из интересных и важных задач была задача о вычислении когомологий алгебры Ли W_n формальных векторных полей с коэффициентами в симметрических степенях коприсоединённого представления. Технически трудное вычисление с $\mathbf{gl}_n$-инвариантами позволило Гельфанду, Фейгину и Фуксу вычислить когомологии W_n с коэффициентами в коприсоединённом представлении[8]. Ответ для коэффициентов

[4] *Feigin B. L., Tsygan B. L.* Riemann–Roch theorem and Lie algebra cohomology I // Proc. Winter Sch. Geom. Phys., Srni, 1988. — Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. — Ser. 21. — 1989. — P. 15–52; *Feigin B., Felder G., Shoikhet B.*. Hochschild cohomology of the Weyl algebra and traces in deformation quantization // arxiv:math.QA/0311303. — 30 pp.

[5] *Godbillon C., Vey J.* Un invariant des feuilletages de codimension 1 // CR Acad. Sci. Paris. — 1971. — P. 92–95.

[6] *Бернштейн И. Н., Розенфельд Б. И.* О характеристических классах слоений // Функц. анализ и его прил. — 1972. — Вып. 6. — №1. — С. 68–69; *Бернштейн И. Н., Розенфельд Б. И.*. Однородные пространства бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений // Успехи математических наук. — 1973. — Вып. 4. — С. 103–138.

[7] *Bott R., Haefliger A.* On characteristic classes of Γ-foliations // Bull. Amer. Math. Soc. — 1972 — Vol. 78, № 6. — P. 1039–1044.

[8] *Гельфанд И. М., Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б.*. Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей с коэффициентами в сопряжённом с ней пространстве и вариации характеристических классов слоений // Функц. анализ и его прил. — 1974. — Вып.2. — С. 13–29.

в произвольной симметрической степени коприсоединённого представления был сформулирован только в качестве гипотезы (сложность вычислений с соответствующими комплексами $\mathbf{gl}_n$-инвариантов растёт экспоненциально с ростом n). Если ограничиться случаем $n = 1$, то в явных вычислениях циклов в этой задаче, как и во многих других вычислениях, связанных с когомологиями алгебры Ли W_1, удаётся продвинуться существенно дальше. Явный набор представителей классов гомологий в симметрических степенях присоединённого представления был выписан В. Доценко[9]. В диссертации предложен метод, позволяющий решить эту задачу в полной общности (то есть для всех значений n и произвольной симметрической степени), не углубляясь в явную комбинаторику (ко)цепных комплексов. Более того, оказывается возможным выписать набор коциклов, представляющих классы когомологий.

Задачи классификации многообразий естественно приводят к вопросу о когомологиях алгебры Ли $\mathrm{Vect}(M)$ векторных полей на многообразии M. Явное вычисление кольца когомологий алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ не потеряло своей актуальности и по сей день[10]. Конечномерность пространств когомологий алгебры Ли $\mathrm{Vect}(M)$ для произвольного многообразия M была доказана в работе Гельфанда и Фукса[11], где также определены и вычислены диагональные когомологии алгебры Ли $\mathrm{Vect}(M)$. Общее вычисление когомологий с тривиальными коэффициентами для алгебры Ли векторных полей на многообразии было проделано сначала Хефлигером[12], а затем, другим способом, Боттом и Сигалом[13]. Оба доказательства существенно используют локальные вычисления, то есть вычисление когомологий алгебры Ли формальных векторных полей, а после этого по-разному решают задачу глобализации. В частности, это показывает, что вычисления в когомологиях алгебры Ли формальных векторных полей помогают решать анало-

---

[9] *Доценко В. В.* Гомологии алгебры Ли векторных полей на прямой с коэффициентами в симметрических степенях её присоединённого представления // Функц. анализ и его прил. — 2006. — Т. 40 , вып. 2. — С. 13–19.

[10] См. *Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.* Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности // Функц. анализ и его прил. — 1968. — Вып. 2, №4 — С. 92–93.

[11] *Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.* Когомологии алгебры Ли касательных векторных полей гладкого многообразия// Функц. анализ и его прил. — 1969. — Вып. 3, №3. — С. 32–52.

[12] *Haefliger A.* Sur la cohomologie de Gelfand-Fuchs // Lect.Notes Math. — 1975. — Vol. 484. — P. 121–152, *Haefliger A.* Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs // Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. — 1976. — №9. — P. 503–532.

[13] *Bott R., Segal G.* The cohomology of vector fields on a manifold // Topology. — 1977. — Vol. 16. — P. 285–298.

гичные задачи для произвольных многообразий, что способствует пониманию геометрии многообразий.

Ещё одна задача, связанная с вычислениями когомологий бесконечномерных алгебр Ли, состоит в построении характеристических классов флагов слоений. Б. Л. Фейгин заметил, что относительные когомологии алгебры Ли формальных векторных полей, сохраняющих флаг слоений фиксированных коразмерностей, отвечают за непрерывные характеристические классы флагов слоений тех же коразмерностей[14]. Была выдвинута гипотеза, что предъявленные классы совпадают со вторичными характеристическими классами. Однако доказательство приводилось только в случае пары вложенных слоений, большее из которых имеет коразмерность 1. В диссертации приводится полное доказательство данной гипотезы.

Цель работы.

Основной целью диссертационной работы является вычисление когомологий различных бесконечномерных алгебр Ли: вычисление когомологий алгебры Ли формальных векторных полей, расширенных формальными $\mathfrak{g}$-значными функциями; алгебры Ли формальных векторных полей с коэффициентами в симметрических степенях коприсоединённого представления; а также описание непрерывных характеристических классов флагов слоений.

Основные методы исследования.

Для вычисления когомологий алгебр Ли использовались методы гомологической алгебры, такие как метод спектральных последовательностей (в частности, спектральные последовательности Серра–Хохшильда для алгебры и её подалгебры), метод трансгрессий, метод вычисления спектра оператора Лапласа. Кроме этого, были использованы методы теории представлений матричных алгебр Ли и теории инвариантов, а также методы коммутативной алгебры.

[14] *Фейгин Б. Л.* Характеристические классы флагов слоений // Функц. анализ и его прил. — 1975. — Вып.4. — С. 49–56.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1) Вычислены когомологии алгебры Ли формальных векторных полей, расширенных формальными $\mathbf{g}$-значными функциями.

2) Вычислены когомологии алгебры Ли формальных векторных полей с коэффициентами в симметрических степенях коприсоединённого представления; выписан явный набор коциклов, представляющих соответствующие классы когомологий.

3) Получены ограничения на носитель когомологий алгебры Ли формальных векторных полей с коэффициентами в тензорных степенях коприсоединённого представления.

4) Вычислены когомологии алгебры Ли формальных векторных полей, сохраняющих флаг слоений. Построены характеристические классы флагов слоений.

Практическая и теоретическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в различных задачах гомологической алгебры, алгебраической топологии, некоммутативной геометрии и теории представлений.

Апробация результатов.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1) Семинар по алгебраической топологии под руководством Г. И. Шарыгина, мех-мат МГУ (2003).

2) Семинар “Математическая физика и гармонический анализ” под руководством Ю. А. Неретина, ИТЭФ (2004).

3) Семинар по математической физике и теории представлений под руководством А. А. Герасимова, А. М. Левина, М. А. Ольшанецкого, ИТЭФ (2004).

4) Семинар “Группы Ли и теория инвариантов” под руководством Э. Б. Винберга и А. Л. Онищика, мех-мат МГУ(2005).

5) Математический семинар Королевского Технологического Института (Стокгольм, Швеция) под руководством Т. Эйкедаля (2006).

6) Семинар по алгебре университета города Трондхейма (Норвегия, 2006).

7) Научно-исследовательский семинар по алгебре им. О. Ю. Шмидта (Мехмат МГУ, 2006).

8) Конференция “Journées des jeunes en cotutelle” в Лаборатории Ж.-В. Понселе (НМУ и CNRS), Москва (24.04.2006–26.04.2006).

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в трёх работах, список которых приведен в конце автореферата [1–3].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 106 страницах и состоит из введения и трёх глав. Библиография включает 41 наименование.

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения и трёх частей.

Во введении мотивируются исследования, проведённые в диссертации, кратко излагается содержание работы и формулируются основные результаты.

Первая часть содержит напоминание классических результатов о когомологиях алгебр Ли. В ней приведены важнейшие классические определения и конструкции, связанные с исследуемыми алгебрами Ли и когомологиями алгебр Ли. Приведена классическая конструкция дифференциально-градуированной алгебры Вейля $W^\bullet(\mathbf{g})$ алгебры Ли $\mathbf{g}$. Алгебра $W^\bullet(\mathbf{g})$ порождена нечётным и чётным пространствами, изоморфными $\mathbf{g}^*$, гомологические степени которых полагаются равными 1 и 2 соответственно; дифференциал определяется как сумма отображения, двойственного скобке Ли, и кошулевского дифференциала. Стандартная убывающая фильтрация на алгебре Вейля вводится по степеням чётных переменных. Если алгебра Ли $\mathbf{g}$ является алгеброй Ли компактной группы Ли $\mathbf{G}$, то выбор связности в $\mathbf{G}$-расслоении эквивалентен выбору морфизма фильтрованных DG-алгебр из алгебры Вейля $W^{\bullet}(\mathbf{g})$ в алгебру форм на тотальном пространстве $\mathbf{G}$-расслоения с фильтрацией Лере–Серра. Единственное условие состоит в том, чтобы ограничение данного отображения на множество образующих нечётного пространства было вложением. Кроме классических результатов, в части 1 сформулированы результаты основных проведённых в диссертации вычислений. Эти вычисления позволяют связать когомологии различных бесконечномерных алгебр Ли и когомологии некоторых подалгебр в факторалгебрах алгебр Вейля, построенных по "маленьким" подалгебрам в исходных бесконечномерных алгебрах Ли. Приведём результаты некоторых вычислений.

Пусть W_n обозначает алгебру Ли формальных векторных полей на n-мерном пространстве, а $W_n \ltimes \mathbf{g} \otimes \mathcal{O}_n$ обозначает её расширение с помощью формальных степенных рядов от n переменных со значениями в алгебре Ли $\mathbf{g}$. Определим DG-алгебру $\widetilde{W}^{\bullet}(\mathbf{gl} \oplus \mathbf{g})$ как фактор алгебры Вейля $W^{\bullet}(\mathbf{gl} \oplus \mathbf{g})$ по члену стандартной фильтрации степени $(2n+1)$. Имеет место следующая теорема, доказанная в разделе 6.

Теорема 2. *DG-алгебра $\widetilde{W}^{\bullet}(\mathbf{gl}_n \oplus \mathbf{g})$ квазиизоморфна коцепному комплексу алгебры Ли $W_n \ltimes \mathbf{g} \otimes \mathcal{O}_n$ с постоянными коэффициентами. Более того, существует квазиизоморфизм, согласованный со стандартной фильтрацией $F^{\bullet}$ на $\widetilde{W}^{\bullet}(\mathbf{gl}_n \oplus \mathbf{g})$ и фильтрацией Серра–Хохшильда $\Phi^{\bullet}$ на $C^{\bullet}(W_n \ltimes \mathbf{g} \otimes \mathcal{O}_n; \Bbbk)$, отвечающей подалгебре Ли $\mathbf{gl}_n \oplus \mathbf{g}$.*

Для произвольной подалгебры Ли $\mathbf{h} \subset \mathbf{gl}_n \oplus \mathbf{g}$ сформулированы и доказаны относительные варианты этой теоремы, которые существенно используются в других главах диссертации.

В качестве $\mathbf{g}$ в теорему 2 можно подставить бесконечномерную алгебру Ли формальных векторных полей от другого числа переменных. Полученная алгебра Ли будет алгеброй Ли формальных векторных полей, сохраняющих структуру слоения коразмерности n. Одним из центральных результатов является вычисление когомологий данной алгебры Ли, проделанное в разделе 7. Аналоги этой алгебры Ли для большего числа групп переменных, для которых мы и сформулируем результат вычисления когомологий, определяется следующим образом.

Пусть фиксирован набор положительных индексов $\overline{n} = (n_0, \ldots, n_k)$. Рассмотрим подалгебру Ли $W_{\overline{n}}$ алгебры Ли формальных векторных полей в $(n_0 + \ldots + n_k)$-мерном пространстве, состоящую из векторных полей, инфинитезимально сохраняющих флаг слоений в окрестности точки 0, для которого коразмерность i-го слоения в $(i-1)$-ом равна n_i:

$$W_{\overline{n}} = W_{n_0} \ltimes \mathcal{O}_{n_0} \otimes (W_{n_1} \ltimes \mathcal{O}_{n_1} \otimes (\ldots \otimes W_{n_k}) \ldots).$$

Пусть $\mathbf{gl}_{\overline{n}} = \mathbf{gl}_{n_0} \oplus \ldots \oplus \mathbf{gl}_{n_k} \hookrightarrow W_{\overline{n}}$ — максимальная редуктивная подалгебра алгебры Ли линейных векторных полей. Рассмотрим идеал I в симметрической алгебре $S^{\cdot}\mathbf{gl}_{\overline{n}}$, порождённый набором подпространств $S^{n_0+\ldots+n_r+1}(\mathbf{gl}_{n_0} \oplus \ldots \oplus \mathbf{gl}_{n_r})$ для $r = 0, \ldots, k$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 4. *Относительные когомологии алгебры Ли $W_{\overline{n}}$ по модулю подалгебры Ли $\mathbf{gl}_{\overline{n}}$ отличны от нуля только в чётных степенях и совпадают с $\mathbf{gl}_{\overline{n}}$-инвариантами в факторалгебре $S^{\cdot}\mathbf{gl}_{\overline{n}}/I$:*

$$\mathrm{H}^{2j}(W_{\overline{n}}, \mathbf{gl}_{\overline{n}}; \Bbbk) = \left[\frac{S^j \mathbf{gl}_{\overline{n}}}{I}\right]^{\mathbf{gl}_{\overline{n}}}.$$

Теорема 5. *Кольцо когомологий алгебры Ли $W_{\overline{n}}$ формальных векторных полей, сохраняющих структуру флага слоения, имеет нулевое умножение и совпадает с кольцом когомологий урезанной алгебры Вейля:*

$$\mathrm{H}^{\cdot}(W_{\overline{n}}; \Bbbk) = \mathrm{H}^{\cdot}\left(\frac{W^{\cdot}(\mathbf{gl}_{\overline{n}})}{\Lambda^{\cdot}(\mathbf{gl}^*_{\overline{n}}) \otimes I}\right).$$

Важным следствием и одной из мотивировок этих теорем является описание алгебры Вейля алгебры Ли W_n и, в частности, вычисление когомологий алгебры Ли W_n с коэффициентами в симметрических степенях코присоединённого представления.

Теорема 1. *Для любого натурального k имеет место равенство*

$$\mathrm{H}^i(W_n, \mathbf{gl}_n; S^k W_n^*) = \begin{cases} [S^{n+k}\mathbf{gl}_n]^{\mathbf{gl}_n}, & \text{если } i = 2n, \\ 0, & \text{если } i \neq 2n. \end{cases}$$

Вторая часть посвящена геометрическим применениям. В ней показано, как использовать вычисленные когомологии для построения различных инвариантов геометрических структур. Глава 4 посвящена конструкциям формальной геометрии. Конструкция характеристических классов расслоений при помощи формальной геометрии изложена в разделе 4.1. В теореме 7 объясняется, что полученные таким образом коциклы на многообразии совпадают с классическими характеристическими классами. В разделе 4.2 предложена модификация конструкции характерстических классов, приспособленная для флагов слоений. Также вычислены производящие функции чисел характеристических классов полных[15] флагов слоений.

Теорема 8.

$$\sum_{q\leqslant 0} q^k \dim \mathrm{H}^k(W_{(1,\ldots,1)};\Bbbk) = 1 + \sum_{k=1}^{N} q^{2n+1}(1+q)^{n-1}C(n),$$

где $C(n) = \frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}$ *— n-е число Каталана.*

Кроме этого, разобран случай проекций, слоем которых над каждой точкой является компактное комплексное многообразие. В главе 5 показано, как с помощью когомологий алгебр Ли можно вычислять сизигии квадратичных вложений. Полученная нами теорема 9 о сизигиях грассманиана двумерных плоскостей является новой.

Часть 3 посвящена доказательствам сформулированных теорем. Методы, используемые в доказательствах, важны сами по себе, поскольку могут быть применены в похожих задачах. Доказательство теоремы 2 устроено следующим образом. Сначала мы подробно изучаем относительный коцепной комплекс алгебры Ли $W_n \ltimes \mathbf{g} \otimes \mathcal{O}_n$ по модулю подалгебры Ли $\mathbf{gl}_n$. Из технической леммы 7, доказательство которой основано на подробном изучении $\mathbf{gl}_n$-инвариантов и вынесено в отдельный раздел 6.2, следует, что этот комплекс совпадает с фактором относительной алгебры Вейля $\widetilde{W}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbf{gl}_n \oplus \mathbf{g}, \mathbf{gl}_n)$. Простые соображения трансгрессии показывают совпадение дифференциалов в этих комплексах, что завершает доказательство теоремы.

Теорема 4 доказывается сложнее, поскольку использует более тонкую технику работы с $\mathbf{gl}_{\overline{n}}$-инвариантами. Мы показываем, что все относительные коциклы алгебры Ли $W_{\overline{n}}$ происходят из вложения $W_{\overline{n}}$ в алгебру Ли $W_{n_0+\ldots+n_k}$ всех формальных векторных полей на пространстве той же размерности; соответствующая каноническая проекция коцепных комплексов обозначается через φ. Любой ориентированный

[15] Флаг называется полным, если (ко)размерности соседних слоений отличаются на единицу.

граф, рёбра которого раскрашены в $(k+1)$ цвет и из каждой вершины которого выходит ровно одно ребро, задаёт $\mathbf{gl}_{\overline{n}}$-инвариантную коцепь комплекса $C^{\cdot}(W_{n_0+\ldots+n_k}, \mathbf{gl}_{\overline{n}}; \Bbbk)$. Если граф удовлетворяет дополнительным условиям на цвета входящих и выходящих рёбер в каждой вершине, то он задаёт $\mathbf{gl}_{\overline{n}}$-инвариантную коцепь комплекса $C^{\cdot}(W_{\overline{n}}, \mathbf{gl}_{\overline{n}}; \Bbbk)$. Таким образом каноническая проекция φ обладает естественным левым обратным отображением, которое мы обозначим через ψ. Когомологии алгебры Ли $W_{n_0+\ldots+n_k}$ могут быть вычислены с помощью спектральной последовательности Серра–Хохшильда относительно подалгебры $\mathbf{gl}_{n_0+\ldots+n_k}$, которая вырождается в первом члене. Существенно, что фильтрацию Серра–Хохшильда можно усилить (в результате чего образ присоединённого градуированного дифференциала от коцепи задаваемой графом, содержит существенно меньше слагаемых), однако соответствующая спектральная последовательность всё равно будет вырождаться в первом члене. Мы вводим аналогичную фильтрацию на коцепном комплексе алгебры Ли $W_{\overline{n}}$ и показываем, что естественное вложение векторных пространств ψ является расщеплением комплексов, если в качестве дифференциалов в коцепных комплексах рассмотреть присоединённые градуированные дифференциалы относительно введённых фильтраций. Следовательно, φ является сюръекцией на когомологиях. Более того, удаётся явно описать коциклы, представляющие когомологии; главным образом представляют интерес коциклы, представляющие когомологии алгебры Ли W_n с коэффициентами в симметрических степенях коприсоединённого представления (раздел 7.3.2). Для $n = 1$ эти формулы удаётся сильно упростить. Это проделано в разделе 7.3.3.

В разделе 8.1 показано, что аналогичный результат можно получить для когомологий алгебры Ли формальных векторных полей, сохраняющих набор коммутирующих слоений с постоянными размерностями пересечений слоёв. Результаты вычислений когомологий приводят к сильной верхней оценке на носитель когомологий алгебры Ли формальных векторных полей с коэффициентами в тензорных степенях коприсоединённого представления (раздел 8.2). В разделе 8.3 приведено доказательство нижней оценки на носитель, которая имеет место для любого W_n-модуля, свободного как модуль над подалгеброй постоянных векторных полей. Результаты оценок подытожены в следующей теореме.

Теорема 6. *Для любого натурального k и $i \notin [n, 2n]$ имеет место* *равенство*

$$\mathrm{H}^i(W_n, \mathbf{gl}_n; W_n^{*\otimes k}) = 0.$$

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность д. ф.-м. н. Б. Л. Фейгину и д. ф.-м. н., профессору М. В. Зайцеву за мудрое научное руководство, постановку задач и постоянное внимание к моей работе. Автор также благодарен к. ф.-м. н. А. Л. Городенцеву, В. В. Доценко, д. ф.-м. н. М. Э. Казаряну, д. ф.-м. н. А. С. Лосеву, д. ф.-м. н. А. Н. Рудакову, профессорам М. В. Финкельбергу и Б. Л. Цыгану, к. ф.-м. н. Б. Б. Шойхету и А. К. Шрамову за полезные обсуждения на различных этапах подготовки диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Хорошкин А. С.* Сизигии некоторых квадратичных многообразий и их связь с когомологиями алгебр Ли // Успехи Математических Наук. — 2006. — Т.61, вып.5. — С. 189–190.

[2] *Хорошкин А. С.* Алгебра Ли формальных векторных полей, расширенных формальными $\mathbf{g}$-значными функциями // Труды семинаров ПОМИ РАН. — 2006. — Т. 335, серия: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 19. — С. 205–230.

[3] *Хорошкин А. С.* Алгебра Ли формальных векторных полей, сохраняющих структуру слоения // Деп. в ВИНИТИ РАН —2006. — № 1376–В2006. — 2006. — 38 с.