Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.57

Доценко Владимир Викторович

Аналоги алгебры Орлика–Соломона и связанные с ними операды

Специальность:
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научные руководители:
доктор физико-математических наук, профессор Михаил Владимирович Зайцев;
доктор физико-математических наук Борис Львович Фейгин.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук Сергей Миронович Натанзон;
кандидат физико-математических наук Алексей Львович Городенцев.

Ведущая организация: Санкт-Петербургское Отделение Математического Института им. В. А. Стеклова РАН.

Защита диссертации состоится 2 марта 2007 г. в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет (Главное здание, 14 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 2 февраля 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 в МГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор В. Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В 1969 году в заметке В. И. Арнольда[1] были вычислены когомологии группы крашеных кос на n нитях. Конфигурационное пространство упорядоченных наборов n точек плоскости является пространством $K(\pi, 1)$ для этой группы, и в заметке [Арн] вычислены когомологии этого пространства, реализованного в виде дополнения в арифметическом векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ конфигурации плоскостей типа A. Алгебра когомологий этого пространства квадратична; её обычно называют алгеброй Орлика – Соломона в честь П. Орлика и Л. Соломона, изучавших аналогичные алгебры для различных конфигураций гиперплоскостей в конце 1970-х годов[2].

Конфигурационное пространство упорядоченных наборов n точек плоскости гомотопически эквивалентно n-му пространству топологической операды маленьких 2-дисков, поэтому гомологии этих дополнений образуют алгебраическую операду. В работе Коэна[3] было показано, что эта операда изоморфна операде Герстенхабера, которая описывает алгебраические структуры, возникающие на комплексе Хохшильда ассоциативной алгебры.

Операда Герстенхабера является нечётным аналогом операды Пуассона, описывающей алгебраические структуры на кольце функций на пуассоновом многообразии. С операдой Пуассона связано семейство ассоциативных алгебр, которые естественно называть чётными алгебрами Орлика – Соломона $OS^+(n)$. Эти алгебры впервые были изучены в работе Матьё[4]. Эти алгебры

[1][Арн] *Арнольд В. И.* Кольцо когомологий группы крашеных кос. // Математические заметки. — 1969. — т. 5. — С. 227 – 231.

[2][OS] *Orlik P., Solomon L.* Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. // Invent. Math. — 1980. — Vol. 56, №2. — P. 167–189.

[3][Coh] *Cohen F. R.* The homology of $\mathscr{C}_{n+1}$-spaces, $n \geq 0$. // Lecture Notes in Math. — 1976. — Vol. 533. — P. 207–351.

[4][Mat] *Mathieu O.* The symplectic operad. // "Functional analysis on the eve of the 21st

связаны с геометрией вещественной конфигурации гиперплоскостей A_{n-1}: это градуированные версии алгебр Гельфанда – Варченко[5] локально постоянных функций на дополнениях к соответствующим конфигурациям.

Доказательства результатов Коэна и Арнольда независимы друг от друга; доказательства Матьё перерабатывают информацию о чётных алгебрах Орлика – Соломона (устроенных довольно несложно) в информацию об операде Пуассона. Идея перабатывать информацию об операдах в информацию о квадратичных алгебрах впервые появилась в работе автора.

Обобщения алгебр Орлика – Соломона даются двойными алгебрами Орлика – Соломона и их чётными версиями. Эти алгебры были определены недавно Б. Л. Фейгиным; их некоммутативные варианты изучались А. Н. Кирилловым[6]. Б. Л. Фейгин предложил также гипотетические формулы размерности для этих алгебр. Оказывается, что эти алгебры связаны с естественными удвоениями операд Герстенхабера и Пуассона. Существенное отличие от уже известного случая состоит в том, что эту связь приходится привлекать для исследования самих алгебр. В то время, как алгебры Орлика – Соломона и их чётные версии являются кошулевыми, а их определяющие идеалы обладают квадратичным базисом Грёбнера, удвоенные алгебры не обладают этими свойствами. Это означает, что задача вычисления размерности и ряда Гильберта такой алгебры не сводится к аналогичной задаче для мономиального вырождения соотношений этой алгебры, и потому является довольно нетривиальной. Решение этой задачи предложено в данной диссертации. Оно использует результаты теории операд.

Другая причина изучения бигамильтоновой операды такова. Как известно, представление симметрической группы в n-й ком-

century", Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993). — Progr. Math., 131, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995. — P. 223–243.

[5][ВГ] *Варченко А. Н., Гельфанд И. М*. Функции Хевисайда конфигурации гиперплоскостей. // Функциональный анализ и его приложения. — 1987. — т. 21, вып. 4. — С. 1 – 18.

[6][Kir] *Kirillov A. N*. On some quadratic algebras II — Preprint RIMS (Kyoto), 2005.

поненте операды Пуассона изоморфно регулярному представлению. Этому же представлению изоморфно представление симметрической группы в алгебре её коинвариантов — факторалгебре алгебры многочленов от n переменных по идеалу, порождённому симметрическими многочленами, которые равны нулю в начале координат. Естественное удвоение этой алгебры — алгебра диагональных коинвариантов симметрической группы, т. е. факторалгебра алгебры полиномиальных функций на n точках плоскости по идеалу, порождённому инвариантами, равными нулю в начале координат. Первые нетривиальные результаты об этой алгебре были получены несколько лет назад М. Хайманом[7]. Дальнейшие исследования показали, что различные интерпретации этой алгебры приводят к прояснению нетривиальных связей разных областей математики[8]. Гипотеза Б. Л. Фейгина состояла в том, что новую интерпретацию этой алгебры можно получить с помощью удвоения операды Пуассона — бигамильтоновой операды. Оказалось, что эта гипотеза неверна, но лишь частично. А именно, размерность алгебры диагональных коинвариантов совпадает с размерностью пространства бигамильтоновой операды и двойной чётной алгебры Орлика – Соломона, но представление симметрической группы в алгебре диагональных коинвариантов отличается от представления в компоненте бигамильтоновой операды (которое изоморфно представлению в двойной чётной алгебре Орлика – Соломона). Эти утверждения тоже являются следствиями результатов диссертации.

Ещё одна мотивировка происходит из теории деформаций. Согласно Ливернэ и Лодэю[9], с помощью деформаций операды Пуассона можно обсуждать задачи деформационного квантова-

[7][Ha] *Haiman M.* Vanishing theorems and character formulas for Hilbert scheme of points on a plane. // `math.AG/0201148`.

[8]См., например, работы [FL] *Feigin B., Loktev S.*. Multi-dimensional Weyl modules and symmetric functions. // `math.QA/0212001`, [Gor] *Gordon I., Stafford J. T.* Rational Cherednik algebras and Hilbert schemes II: representations and sheaves. // `math.RT/0410293`.

[9]Результаты Ливернэ и Лодэя впервые опубликованы в [MR] *Markl M., Remm E.* Algebras with one operation including Poisson and other Lie-admissible algebras // `math.AT/0412206`.

ния пуассоновых структур[10]. Поэтому интересно изучать деформации бигамильтоновой операды, которые потенциально могут быть полезны в задачах деформационного квантования бигамильтоновых структур, важного для интегрируемых систем.

Цель работы

Целью работы является обобщение результатов Матьё [Mat] на случай бигамильтоновой операды, вычисление действия симметрических групп в компонентах этой операды, доказательство кошулевости этой операды, вычисление размерностей и рядов Гильберта для двойных чётных алгебр Орлика – Соломона и построение плоских деформаций бигамильтоновой операды.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 118 страницах и состоит из введения, пяти глав и заключения. Библиография включает 35 наименований.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) Доказано, что операда пары согласованных скобок и бигамильтонова операда являются кошулевыми квадратичными операдами.

2) Вычислены размерности и характеры, а также построены мономиальные базисы компонент операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды.

3) Вычислены размерности и характеры, а также построены мономиальные базисы аналогов алгебры Орлика–Соломона:

[10][BFFLS] *Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D.* Deformation theory and quantization I, II // Ann. Physics. — 1978. — Vol. 111. — P. 61 – 151.

двойной чётной алгебры Орлика–Соломона и двойной алгебры Орлика–Соломона.

4) Построено семейство операд, включающее в себя бигамильтонову операду, и доказано, что все операды этого семейства кошулевы и имеют те же размерности и характеры однородных компонент.

Основные методы исследования

Для исследования квадратичных операд используются методы теории кошулевой двойственности для операд[11] и теории гомологий частично упорядоченных множеств[12] (в частности, частично упорядоченных множеств Коэна–Маколея[13]). В вычислении размерностей компонент рассматриваемых операд, а также при построении мономиальных базисов используются методы перечислительной комбинаторики. В вычислении характеров компонент рассматриваемых операд используются методы теории представлений конечных групп и групп Ли.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для теории многообразий алгебраических структур, теории представлений, комбинаторной теории колец, перечислительной комбинаторики. Результаты диссертации могут быть полезны специалистам из МГУ, ИТФ РАН, МИ РАН, ПОМИ РАН, ИТЭФ.

---

[11][GK] *Ginzburg V., Kapranov M.* Koszul duality for operads. // Duke mathematical journal. — 1994. — Vol. 76, № 1. — P. 203–272.

[12][Fre] *Fresse B.* Koszul duality of operads and homology of partition posets. // Contemp. Math. — 2004. — Vol. 346. — P. 115–215.

[13][BW] *Björner A., Wachs M.* On lexicographically shellable posets. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 277, № 1. — P. 323–341.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

1) Семинар «Группы Ли и теория инвариантов» (рук. Э. Б. Винберг и А. Л. Онищик), мех-мат МГУ. Доклад: "Формулы характера для операды пары согласованных скобок", 2005 г.

2) Семинар «Избранные вопросы алгебры» (рук. М. В. Зайцев, А. А. Михалёв, И. А. Чубаров), мех-мат МГУ. Доклад: "Некоторые результаты о бигамильтоновой операде", 2005 г.

3) Семинар «Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика» (рук. С. М. Натанзон, О. В. Шварцман и О. К. Шейнман), НМУ. Доклад: "Характер операды пары согласованных скобок", 2005 г.

4) Семинар «Quantique» (руководитель Б. Энрикес), IRMA, Страсбург. Доклад: "Some results on the operad governing two compatible Poisson brackets", 2006 г.

5) Семинар «Séminaire de Physique Mathématique» (рук. О. Кравченко и В. Овсиенко), Université Lyon I. Доклад: "The bihamiltonian operad and related quadratic algebras", 2006 г.

6) Семинар «Algebra Szeminárium» (руководитель Л. Марки), институт им. А. Реньи, Будапешт. Доклад: "The bihamiltonian operad and related quadratic algebras", 2006 г.

7) Научно – исследовательский семинар им. О. Ю. Шмидта кафедры высшей алгебры (рук. В. Н. Латышев), мех-мат МГУ. Доклад: "Аналоги алгебры Орлика–Соломона и связанные с ними операды", 2006 г.

8) Конференция «Trends in Noncommutative Geometry», Isaac Newton institute, Кембридж, Великобритания. Poster talk:

"An operadic approach to deformation quantization of compatible Poisson brackets", 2006 г.

Публикации автора по теме диссертации

Основное содержание диссертации опубликовано в четырёх работах, список которых приведен в конце автореферата [1–4].

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения.

Во введении даётся обзор известных ранее результатов, формулируются результаты диссертации и вкратце описываются методы их получения.

В главе 1 приведены важнейшие определения и используемые нами результаты других авторов. Она является служебной; доказательства в ней в основном отсутствуют (исключением являются результаты автора об операде, квадратично двойственной операде пары согласованных скобок (предложение 2), об обобщении теоремы о дистрибутивных законах (теорема 3), и о хопфовой структуре на бигамильтоновой операде (предложение 4), а также результаты А. С. Хорошкина о фильтрациях на квадратичных операдах[14] (теорема 1)).

В главе 2 подробно обсуждается случай операды Пуассона и чётной алгебры Орлика – Соломона. Мы полагаем эту часть работы достаточно важной, ибо структура доказательства в модельном примере чётных алгебр Орлика – Соломона проясняет (технически трудное) доказательство новых результатов. Результаты этого раздела в основном известны, хотя многие из предложенных доказательств являются новыми. Сначала доказана коэн – маколеевость частично упорядоченных множеств $\Pi_n(\mathscr{C}om)$, построенных по теоретико – множественной операде

[14][Kh] *Khoroshkin A.* Koszul operads and distributive lattices. // Препринт ИТЭФ ITEP-TH-24/06.

$\mathscr{C}om$ (теорема 5). Следствием этого является кошулевость операды $\mathscr{C}om$, квадратично двойственной к ней операды $\mathscr{L}ie$ и получающейся из них с помощью дистрибутивного закона операды $\mathscr{P}$. Следующий шаг — вычисление размерностей компонент операд $\mathscr{L}ie$ и $\mathscr{P}$ (предложение 8 и следствие из него). Зная размерности компонент, можно построить мономиальные базисы этих компонент: для этого достаточно предъявить полные системы мономов правильной мощности (лемма 6 в случае операды $\mathscr{L}ie$, теорема 6 в случае операды $\mathscr{P}$). Наконец, мы предъявляем явные конструкции мономиальных базисов для чётных алгебр Орлика – Соломона (теорема 7). Доказательство этой теоремы использует спаривание между компонентами операды Пуассона и чётными алгебрами Орлика – Соломона.

В главе 3 план, намеченный в предыдущей главе, реализуется для случая бигамильтоновой операды и двойных чётных алгебр Орлика – Соломона. Сначала мы доказываем коэн – маколеевость частично упорядоченных множеств $\Pi_n(\mathscr{C}om_2)$ (теорема 8). Непосредственным следствием этого является кошулевость операды $\mathscr{C}om_2$, квадратично двойственной к ней операды $\mathscr{L}ie_2$ и получающейся с помощью дистрибутивного закона из операд $\mathscr{C}om$ и $\mathscr{L}ie_2$ операды $\mathscr{P}_2$. Следующий шаг — вычисление размерностей компонент операд $\mathscr{L}ie_2$ и $\mathscr{P}_2$ (предложение 12 и следствие из него). Далее мы предъявляем в компонентах рассматриваемых операд полные системы мономов правильной мощности (лемма 13 в случае операды $\mathscr{L}ie_2$, теорема 9 в случае операды $\mathscr{P}_2$). Гипотеза о том, что эти мономы образуют базис, была высказана М. А. Берштейном. Наконец, мы предъявляем явные конструкции мономиальных базисов для двойных чётных алгебр Орлика – Соломона (теорема 10). В конце главы кратко изложены аналогичные результаты в случае двойной алгебры Орлика – Соломона и двойной операды Герстенхабера.

В главе 4 с помощью функциональных уравнений Гинзбурга и Капранова [GK] получены формулы характера для представлений различных групп в пространствах компонент операд $\mathscr{L}ie$

и $\mathscr{P}$ (теорема 11; интересно сравнить доказательство формулы характера для операды $\mathscr{L}ie$ с традиционными выводами этой формулы[15]), а также операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды (теорема 12). Кроме этого, мы доказываем некоторые результаты о кратностях неприводимых представлений симметрических групп и группы SL_2 в компонентах операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды (предложения 16 и 17).

В главе 5 определено семейство операд, включающее в себя бигамильтонову операду, и семейство алгебр, включающее в себя двойные чётные алгебры Орлика – Соломона (эти алгебры мы называем двойными алгебрами Гельфанда – Варченко, поскольку при общем значении параметра они аналогичны алгебрам, изучавшиеся в [ВГ] в связи с вещественными конфигурациями гиперплоскостей). Мы доказываем, что все операды построенного нами семейства кошулевы, их компоненты имеют одну и ту же размерность, и двойственные пространства к этим компонентам естественно отождествляются с двойными алгебрами Гельфанда – Варченко (теорема 14). Доказательство этого утверждения использует полученное нами обобщение теоремы о дистрибутивных законах.

В заключении приводится обобщение одного из ключевых результатов, не вошедшее в основной текст, обсуждаются возможные направления исследований и нерешённые задачи.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям доктору физико-математических наук, профессору Михаилу Владимировичу Зайцеву и доктору физико-математических наук Борису Львовичу Фейгину за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор признателен Антону Сергеевичу Хорошкину и Михаилу Александровичу Берштейну за

[15][Бах] *Бахтурин Ю. И.* Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985. — 447 с.

полезные обсуждения. Автор также благодарен Анатолию Кириллову (RIMS, Киото), Андрашу Сенешу (BME, Будапешт) и Бенджамену Энрикесу (IRMA, Страсбург) за интерес к работе и обсуждение результатов.

Литература

[1] *Доценко В. В., Хорошкин А. С.* Формулы характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды // Функциональный анализ и его приложения. — 2007. — Т. 41, вып. 1. — С. 1–22.

В этой работе автору принадлежит доказательство кошулевости бигамильтоновой операды и вычисление $SL_2 \times S_n$-характеров рассматриваемых операд и кратностей неприводимых представлений, а Хорошкину А. С. принадлежит идея вычисления характера с использованием многомерных вычетов и вычисление S_n-характеров рассматриваемых операд.

[2] *Доценко В. В.* Алгебры, связанные с бигамильтоновой операдой // Препринт ПОМИ РАН 18/2006. — 38 с.

[3] *Dotsenko V.* An operadic approach to deformation quantization of compatible Poisson structures // Препринт ПОМИ РАН 19/2006. — 10 с.

[4] *Доценко В. В.* О кошулевости бигамильтоновой операды // Деп. в ВИНИТИ РАН №1377–В2006. — 20 с.