

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М.В.Ломоносова

---

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи  
УДК 533.3.539.74

**Федулов Борис Никитович**

**ЗАДАЧИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ  
ДИЛАТИРУЮЩИХ СРЕД  
ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва 2007 г.

Работа выполнена на кафедре теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор Е.В. Ломакин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Р.А. Васин  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
В.А. Пелешко

Ведущая организация: Институт проблем механики РАН

Защита состоится 16 февраля 2007 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.91 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119992, г. Москва, Ленинские горы, главное здание МГУ, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «\_\_\_» января 2007 г.

Учёный секретарь

диссертационного совета Д.501.001.91,

доктор физико-математических наук, профессор

С.В. Шешенин

# 1 Общая характеристика работы

**Актуальность.** В механике деформируемых твердых тел наиболее известны и широко используются такие критерии пластичности как критерий Треска и критерий Мизеса. Существует же достаточно большой класс материалов, для которых данные критерии не согласуются с экспериментами. Данные материалы, как правило, являются микронеоднородными — имеют трещины, поры, включения и другие особенности структуры. Такие материалы будучи достаточно хрупкими в обычных условиях при больших гидростатических напряжениях могут проявлять пластические свойства и наоборот при большом всестороннем растяжении материал в обычных условиях пластичный может проявить свойства, достаточно близкие к хрупким. Деформирование таких материалов может сопровождаться необратимыми объемными деформациями.

Основные свойства материалов, которые рассматриваются в данной работе — это отсутствие "единой кривой" для зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций и несправедливость обычно принимаемых гипотез об упругой сжимаемости материала и пластической несжимаемости. Для многих материалов диаграммы зависимости интенсивности деформации от интенсивности напряжений при простом растяжении, сжатии, сдвиге, двухосном сжатии и других видах нагружения различны, причем расхождение диаграмм может быть весьма значительным. Такими свойствами обладают некоторые композиционные материалы, конструкционные графиты, чугун, бетон, некоторые полимерные материалы, конструкционные стали, керамические материалы и другие.

Приведенные свойства материалов, выявление которых невозможно с использованием классических подходов, заставляет вводить в критерии и определяющие соотношения новые параметры, которые характеризуют вид напряженного состояния в деформируемой среде.

В данной диссертационной работе за основу взят критерий пластичности,

предложенный в работах Ломакина Е.В.. Такой критерий включает в себя зависимость пластических свойств от вида напряженного состояния в достаточно общем виде. При выборе конкретных видов зависимостей от параметра вида напряженного состояния возможно получение известных критериев пластичности используемых в механике сыпучих сред, а также для моделирования пористых сред. В работе анализируется степень влияния чувствительности среды к виду напряженного состояния при пластическом деформировании.

Исследованию свойств, рассматриваемых в диссертации материалов и соответствующих определяющих соотношений, посвящены работы многих авторов: Аннин Б.Д., Быков Д.Л., Гвоздев А.Е., Грин Р. Дж., Друккер Д., Ивлев Д.Д., Кийко И.А., Макаров Э.С., Матченко Н.М., Мор О., Надаи А., Никитин Л.В., Паферов В.М., Прагер В., Райс Дж.Р., Ревуженко А.Ф., Рыжак Е.И., Соколовский В.В., Толоконников Л.А., Ульченков В.Э., Шемякин Е.И., Ширко И.В..

**Цель работы.** Целью работы является анализ пластического деформирования среды с учетом зависимости свойств от вида напряженного состояния. Сравнение результатов для сред с различной степенью чувствительности к виду напряженного состояния на примерах ряда задач, решение которых строится при помощи жестко-пластической схемы решения. Выяснение качественных и количественных отличий с решениями, полученными при отсутствии влияния на пластическое деформирование вида напряженного состояния. Второй основной целью работы было построение численных упруго-пластических решений для определения целесообразности использования жестко-пластической схемы решения при определении предельных нагрузок для такого класса материалов.

**Достоверность основных положений и выводов** определяется использованием строгих математических подходов механики деформируемого твердого тела, хорошим соответствием результатов исследований характеристик предельного пластического состояния тел, полученных с помощью аналитических и численных методов,

удовлетворением полученных решений энергетическим требованиям и условиям теорем о предельной нагрузке, совпадением полученных решений в частных случаях с известными решениями.

### **Научная новизна.**

- Получены решения задач пластического деформирования с учетом вида напряженного состояния и дилатансии среды.
- Проанализированы качественные и количественные различия в решениях при учете влияния на пластическое деформирование вида напряженного состояния и в отсутствии него.
- Для всех рассмотренных задач получены аналитические выражения для предельных нагрузок через параметры геометрии и степени чувствительности среды к виду напряженного состояния.
- Проведено сравнение решений, полученных аналитически при помощи жестко-пластической схемы решения, с численными решениями для упруго-пластических сред с зависимостью характеристик деформирования от вида напряженного состояния.

**Научно-практическое значение.** Результаты работы могут быть использованы во всех отраслях промышленности, где используются пористые, гранулированные микронеоднородные материалы, такие как графиты, чугун, бетон, некоторые полимерные материалы, конструкционные стали, керамические материалы и другие. Конкретные рассмотренные примеры решения задач имеют непосредственное отношение к механике деформирования горных пород, геологическим и строительным расчетам.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в диссертации, были обсуждены на научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности МГУ под руководством проф. Е.В. Ломакина, научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости МГУ под руководством проф. И.А. Кийко, научно-исследовательском семинаре

кафедры механики композитов МГУ под руководством проф. Б.Е. Победри, научно-исследовательском семинаре кафедры газовой и волновой динамики МГУ под руководством акад. Е.И. Шемякина, Ломоносовских чтениях МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2006), Международной конференции "Advanced problems in mechanics" (St.Petersburg, 2006.), IX Всероссийском съезде по теоритической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в семи работах.

**Структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 99 наименований. Работа изложена на 177 страницах машинописного текста без приложений и содержит 82 рисунка.

## 2 Краткое содержание работы.

Во ВВЕДЕНИИ обосновывается актуальность темы диссертационной работы, дан обзор существующих подходов к описанию закономерностей деформирования сред, в которых процессы сдвигового и объемного деформирования взаимосвязаны, сформулированы цели исследования.

В ГЛАВЕ 1 проведен анализ определяющих соотношений и уравнений, полученных на основе закона пластического течения, ассоциированного с условием пластичности, представленном в следующем обобщенном виде:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k. \quad (1)$$

Здесь  $\xi = \sigma/\sigma_0$  — параметр вида напряженного состояния, характеризующий в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями в точке сплошной среды,  $\sigma = 1/3\sigma_{ii}$  — среднее нормальное напряжение,  $\sigma_0 = \sqrt{3/2S_{ij}S_{ij}}$  — интенсивность касательных напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ . Не нарушая общности, можно принять, что при чистом сдвиге ( $\xi = 0$ ) значение функции  $f(0) = 1$ . Тогда  $k = \sqrt{3}\tau_s$ , где  $\tau_s$  — предел текучести при сдвиге. При произвольном виде напряженного состояния параметр  $\xi$  принимает значения в диапазоне от  $-\infty$  (равномерное трехосное сжатие) до  $\infty$  (равномерное трехосное растяжение).

Принимая различные аналитические выражения для функции  $f(\xi)$ , для данного критерия пластичности можно получить некоторые из известных условий пластичности для гранулированных, пористых и поврежденных сред. Если принять функцию  $f(\xi)$  в виде линейной функции

$$f(\xi) = 1 + C\xi, \quad (2)$$

то придем к обобщению критерия Кулона-Мора. Можно также получить условие пластичности Грина, если принять функцию  $f(\xi)$  в виде

$$f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}. \quad (3)$$

При  $f(\xi) \equiv 1$  условие (1) совпадает с условием пластичности Губера - Мизеса  $\sigma_0 = k$ .

Принимая ассоциированный с условием (1) закон течения  $\dot{\epsilon}_{ij} = h'\partial F/\partial\sigma_{ij}$ , в случае жестко-пластического тела получим связь между скоростями деформаций и напряжениями

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= h'[1/3\Lambda(\xi)\delta_{ij} + \lambda(\xi)f(\xi)S_{ij}/k], \quad \Lambda(\xi) = f'(\xi), \lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi), \\ h' &= \sqrt{(\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})/(1/3\Lambda^2(\xi) + 3/2\lambda^2(\xi))}. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции  $\lambda(\xi)$  и  $\Lambda(\xi)$  и их производные связаны соотношениями  $\lambda(\xi) + \xi\Lambda(\xi) = f(\xi)$ ,  $\lambda'(\xi) + \xi\Lambda'(\xi) = 0$ .

В случае плоской деформации  $\dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{13} = \dot{\epsilon}_{23} = 0$  и, воспользовавшись соотношениями (4), можно выразить напряжение  $\sigma_{33}$  через  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  и исключить его из условия пластичности (1). В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \sigma - \frac{2}{9}\sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)}, \quad \sigma_0 = S_0[1 - \frac{\Lambda^2(\xi)}{9\lambda(\xi)}]^{1/2}, \quad \sigma = S - \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{9\lambda(\xi)}, \\ S_0 &= \sqrt{3/2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2]^{1/2}, \quad S = 1/2(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \end{aligned} \quad (5)$$

Вводя параметр  $\zeta = S/S_0$ , с помощью (5) можно выразить  $\zeta$ , через  $\xi$ :

$$\zeta = [\xi + 1/9\Lambda(\xi)/\lambda(\xi)][1 - 1/9\Lambda^2(\xi)/\lambda^2(\xi)]^{1/2}. \quad (6)$$

Равенство (6) определяет взаимнооднозначное соответствие между  $\xi$  и  $\zeta$  при выполнении условий

$$3\lambda(\xi) > |\Lambda(\xi)|, \quad \Lambda'(\xi) \geq 0.$$

Параметр  $\zeta$  и напряжение  $S_0$  можно выразить через  $S$ . Тогда известные формулы для напряжений в случае плоской деформации могут быть представлены в виде:

$$\sigma_{11} = S - kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{22} = S + kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{12} = kF(S) \cos 2\theta, \quad (7)$$

где  $S = 1/2(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ ,  $\theta$  — угол между осью  $x_1$  и направлением площадки, на которой действует максимальное касательное напряжение.

При нахождении аналитических решений краевых задач с использованием представлений (2) - (3) в случае условий плоской деформации задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{aligned} S_{,1} - kF'(S)(S_{,1} \sin 2\theta - S_{,2} \cos 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) &= 0, \\ S_{,2} + kF'(S)(S_{,1} \cos 2\theta + S_{,2} \sin 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \sin 2\theta - \theta_{,2} \cos 2\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для случаев (2) - (3)  $F(S)$  представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(S) &= m(C^{-1} - S/k), \quad m = \sqrt{3}C/\sqrt{9 - C^2}, \quad \text{в случае } f(\xi) = 1 + C\xi, \\ F(S) &= \sqrt{1 - \beta S^2/k^2}, \quad \beta = \alpha/(1 + \alpha/9), \quad \text{в случае } f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Параметры  $C$  и  $\alpha$  для данных видов зависимостей  $f(\xi)$  представляют собой степень поврежденности среды, пористости или степень чувствительности материала к виду напряженного состояния.

Для приведенных видов зависимостей  $f(\xi)$  при некоторых ограничениях на параметры  $C$  и  $\alpha$  система (8) является гиперболической и возможно построение решений методом характеристик. Также для данных видов зависимостей  $f(\xi)$  возможно интегрирование соотношений вдоль характеристик и построение аналитических решений. В общем случае



уравнения характеристик и соотношения вдоль них имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - k^2 F'^2}}{-kF' + \sin 2\theta}, \\ dS \mp \frac{2kF d\theta}{\sqrt{1 - k^2 F'^2}} &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Для зависимости  $f(\xi) = 1 + C\xi$  уравнения характеристик и соотношения вдоль них имеют следующий вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - m^2}}{m + \sin 2\theta}, \quad \frac{\sqrt{1 - m^2}}{2m} \ln\left(1 - C\frac{S}{k}\right) \pm \theta = \text{const.} \quad (11)$$

Если функция  $f(\xi)$  представлена  $f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}$ , то уравнения (10) имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{(1 - \beta S/k)^2 / [3(1 - \beta S^2/k^2)]}}{\beta S/k \sqrt{3(1 - \beta S^2/k^2)} + \sin 2\theta}, \\ \sqrt{\frac{3 + \beta}{\beta}} \arcsin \left[ \sqrt{\frac{\beta(3 + \beta) S}{3 k}} \right] - \arcsin \left[ \frac{\beta S}{k \sqrt{3(1 - \beta S^2/k^2)}} \right] \mp 2\theta &= \text{const.}\end{aligned}\quad (12)$$

Также в данной главе показывается, что можно получить систему уравнений для скоростей

$$\begin{aligned}(v_{1,2} + v_{2,1}) \operatorname{tg} 2\theta + v_{1,1} - v_{2,2} &= 0, \\ (v_{1,1} + v_{2,2}) \cos 2\theta + (v_{1,2} - v_{2,1})kF' &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

При этом характеристики системы уравнений (13) для скоростей совпадают с характеристиками уравнений для напряжений.

В ГЛАВЕ 2 для критерия пластичности (1) и конкретных видов зависимостей  $f(\xi) = 1 + C\xi$  и  $f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}$  рассматривается аналитическое решение различных задач, при помощи жестко-пластической схемы решения.

Рассматривается задача о растяжении полосы, ослабленной угловыми вырезами (Рис.1). Полоса растягивается при помощи силы  $P$ . Величина

скорости растяжения полосы вдали от вырезов предполагается равной  $V$ , берега вырезов свободны от нагрузки. Глубина вырезов предполагается хотя и произвольной, но достаточно глубокой, в противном случае предлагаемый вид пластических областей, представленный на рисунке 1, может не реализоваться.

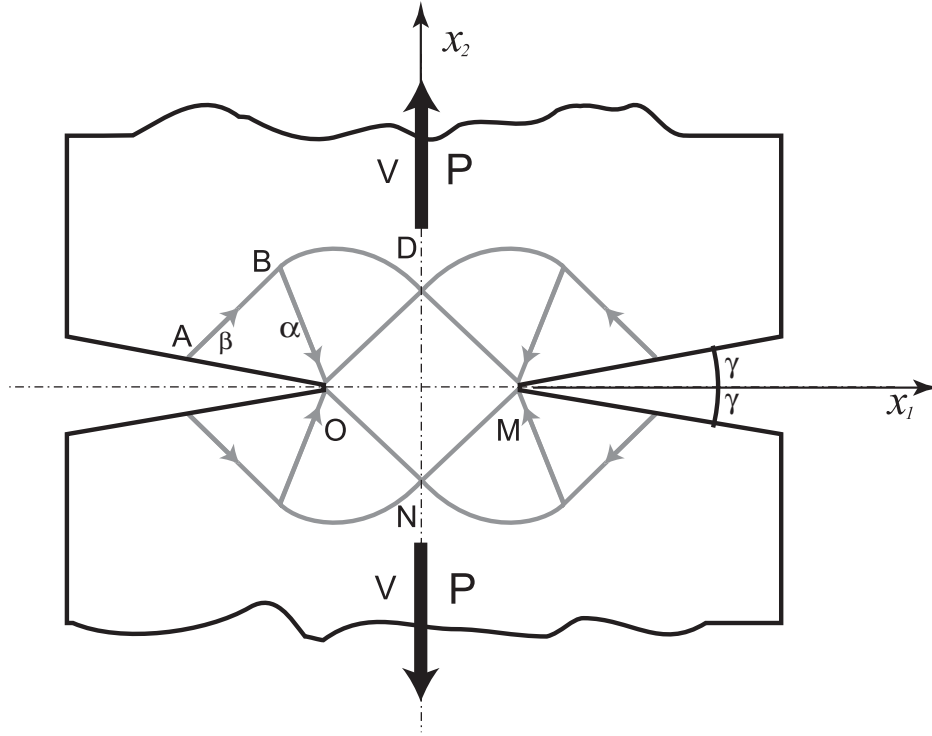


Рис. 1: Растяжение полосы, ослабленной угловыми вырезами.

В данной задаче для зависимости  $f(\xi) = 1 + C\xi$  и для предложенных форм пластических областей восстанавливается поле напряжений в области  $ODMN$ , используя которое находится значение предельной нагрузки:

$$P = 2h\sigma_{22} = 2h\frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp\left(-\frac{2m}{\sqrt{1-m^2}}[\pi + \varphi_n]\right) \right], \quad (14)$$

где  $\varphi_n$  - угол между нормалью к границе выреза и осью  $x_1$ . На рисунке 2 изображено несколько зависимостей предельной нагрузки деленной на  $k$  и на  $2h$  от  $C$  для разных углов надрезов. Таким образом, видно, что предельная нагрузка падает с ростом значений  $C$  для всех углов вырезов и не учет введенных здесь свойств в критерий может достаточно сильно изменить

результат. Для этой задачи построено поле скоростей, причем в данном

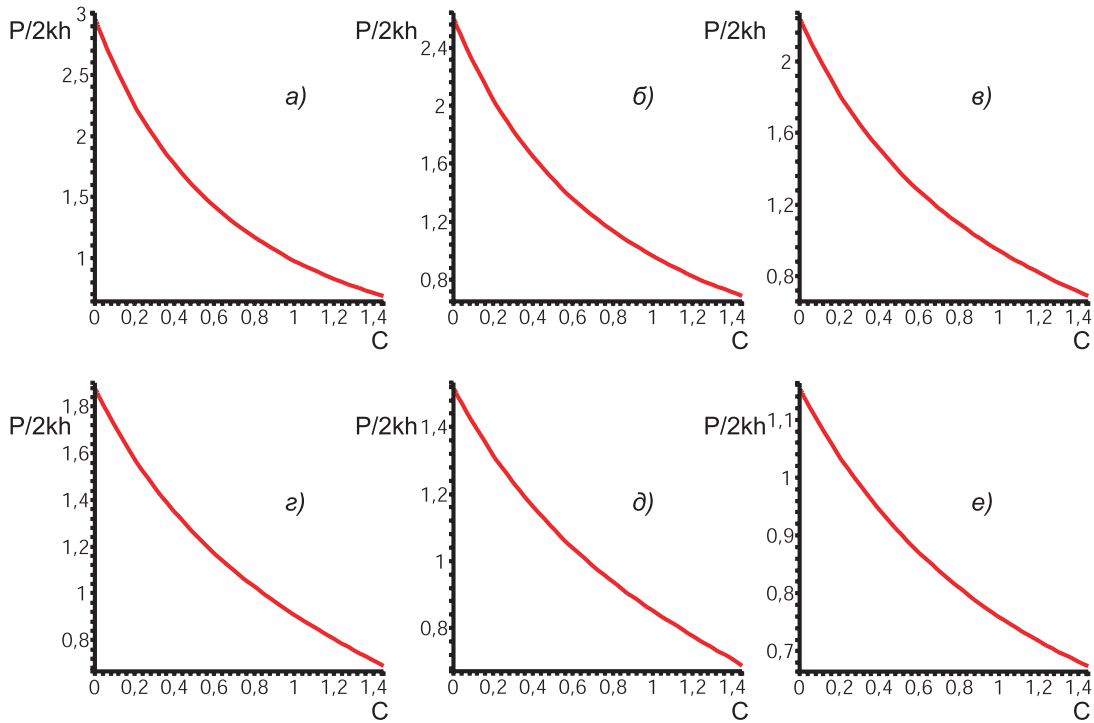


Рис. 2: Предельная нагрузка деленная на  $k$  и  $2h$  в случае (2) где а)  $\varphi_n = -\pi/2$ , б)  $\varphi_n = -\pi/2 - \pi/10$ , в)  $\varphi_n = -\pi/2 - 2\pi/10$ , г)  $\varphi_n = -\pi/2 - 3\pi/10$ , д)  $\varphi_n = -\pi/2 - 4\pi/10$ , е)  $\varphi_n = -\pi$ .

случае это удалось сделать аналитически и построенное поле скоростей непрерывно.

В случае зависимости  $f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}$ , используя постоянство параметров  $S$  и  $\theta$  на границе вырезов, возможно найти выражение для  $S$  на срединной линии ОМ после чего получить выражение для  $\sigma_{22}$ . Такая последовательность действий при условии гиперболичности системы позволяет определить значение предельной нагрузки. На рисунке 3 приведена зависимость предельной нагрузки от параметра  $\beta = \alpha/(1 + \alpha/9)$  для различных значений параметра геометрии  $\varphi_n$ .

Следующий рассмотренный пример — это задача о растяжении полосы с круговым отверстием. Полоса, приведенная на рисунке 4, растягивается силами  $P$  со скоростью  $V$ , границы отверстия свободны от нагрузок. При этом, также как и ранее, предполагается достаточно большой размер выреза,

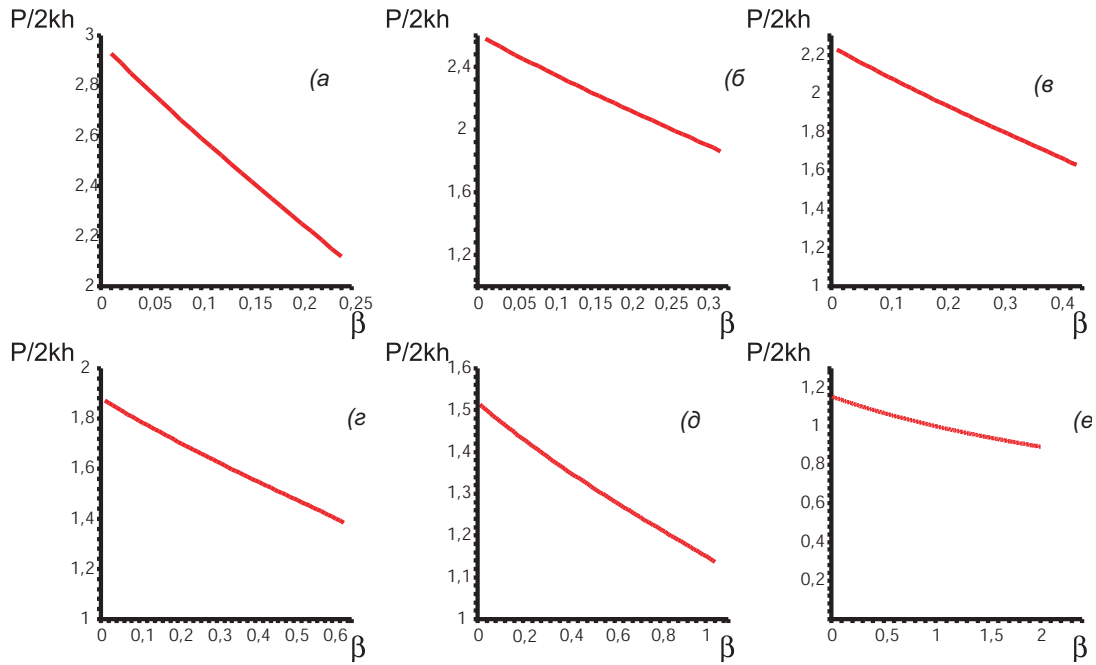


Рис. 3: Предельная нагрузка деленная на  $k$  и  $2h$  в случае функции  $f(\xi)$ , представляемой выражением (3): а)  $\varphi_n = -\pi/2$ , б)  $\varphi_n = -\pi/2 - \pi/10$ , в)  $\varphi_n = -\pi/2 - 2\pi/10$ , г)  $\varphi_n = -\pi/2 - 3\pi/10$ , д)  $\varphi_n = -\pi/2 - 4\pi/10$ , е)  $\varphi_n = -\pi$ .

то есть радиус кругового отверстия достаточно велик по сравнению с общей шириной полосы. Рассматривается вариант линейной зависимости критерия пластичности от параметра вида напряженного состояния  $\xi$ . В данной задаче существует несколько возможностей построения линий характеристик системы (8). Поскольку круговой контур отверстия свободен от нагрузок, то к нему может прилегать осесимметричная область логарифмических спиралей — ABC, а к свободным прямолинейным боковым границам — поле одноосного растяжения ECD. Положение точки C не определено однозначно, это означает, что можно построить множество решений, меняя положение точки C на срединной линии и уменьшая или увеличивая тем самым области спиралей или одноосного растяжения.

Для устранения данной неоднозначности находится значение предельной нагрузки для произвольного положения точки сопряжения областей и, воспользовавшись утверждениями экстремальных теорем, осуществляется выбор координаты для этой точки.

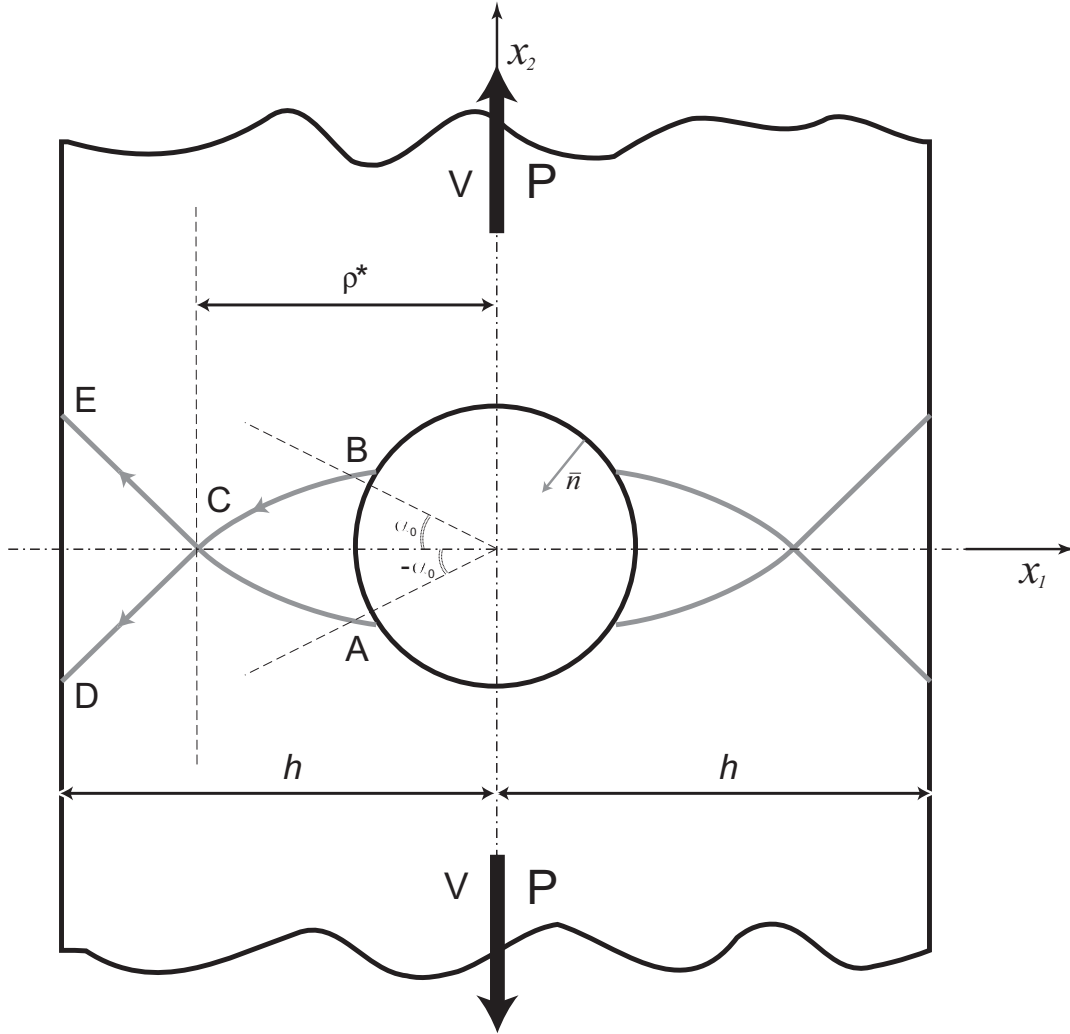


Рис. 4: Растяжение полосы с круговым отверстием.

Формулу для предельной нагрузки в данном случае можно представить в виде

$$P = 2 \int_R^{\rho^*} \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{-2m/(1-m)} \right] d\rho + 2 \int_{\rho^*}^h \frac{2k}{C} \frac{m}{1+m} d\rho. \quad (15)$$

Минимальное значение  $P$  достигается при минимально возможном значении радиальной координаты точки сопряжения  $\rho^*$ , т.е. при  $\rho^* = R$ . Это означает, что область с логарифмическими спиралями отсутствует и выражение для предельной нагрузки представляется следующим образом:

$$P = (h - R) \frac{4k}{C} \frac{m}{1+m}. \quad (16)$$

Полученное в данном решении поле напряжений, можно распространить на все тело, продолжив его вдоль оси  $x_2$  нулевым напряжением  $\sigma_{22}$  в ослабленном сечении. Таким образом, получим статически допустимое значение предельной нагрузки, которое совпадает с (16). Таким образом, полученное решение является полным, как и в случае известного решения данной задачи с использованием критерия пластичности Губера-Мизеса.

В качестве еще одного примера рассматривается задача о растяжении полосы с вырезами с круглым основанием. Геометрия приведена на рисунке 5. Вырезы, как и ранее, предполагаются произвольными, но достаточно глубокими. Границы вырезов свободны от нагрузок. Рассматривается критерий пластичности в виде (2). Построение поля характеристик здесь возможно двумя способами и выбор одного из них зависит от ширины ослабленного сечения, или от значения параметра  $h$ , и значения материальной константы  $C$ , входящей в критерий пластичности. Первый

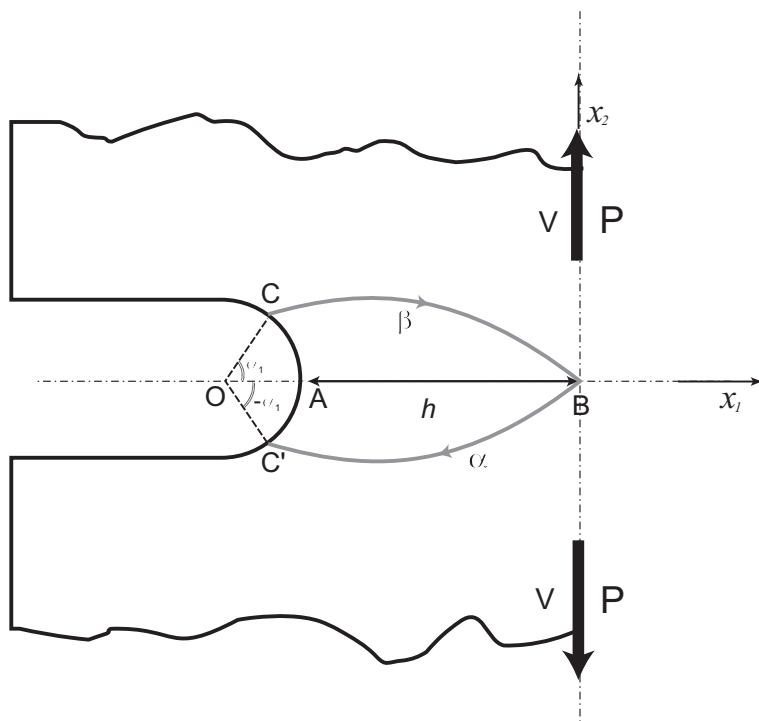


Рис. 5: Вариант решения только с логарифмическими областями.

вариант решения состоит только из двух логарифмических областей (Рис. 5).

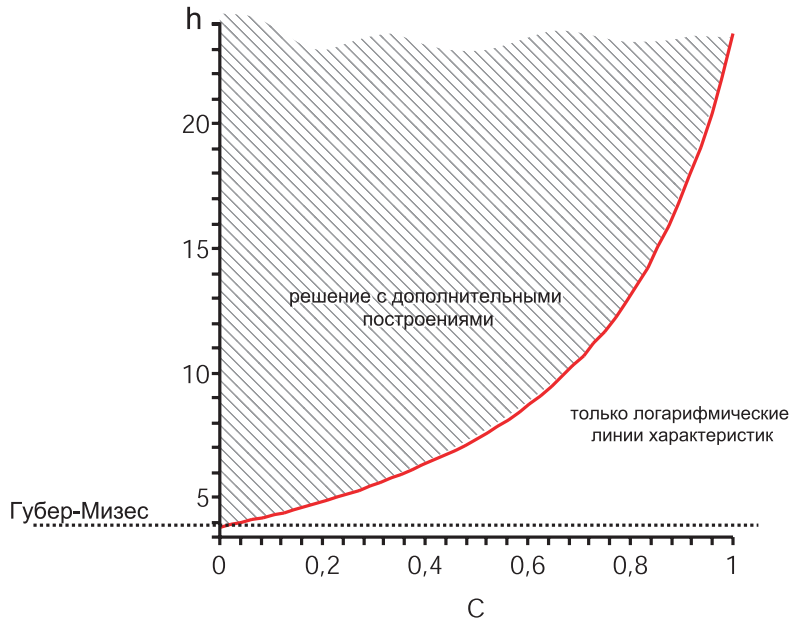


Рис. 6: Условие выбора вида решения.

Условие, когда такое решение возможно:

$$\frac{h}{R} \leq \exp\left(\frac{\pi}{2 \operatorname{tg}(\varphi/2)}\right) - 1. \quad (17)$$

Стоит отметить, что в условии (17) включено значение  $\varphi$ , которое является функцией параметра  $C$ . Таким образом, в отличие от решения на основе критерия пластичности Губера-Мизеса, данное решение отличается тем, что условие выбора типа решения зависит не только от геометрических параметров, но и степени чувствительности пластических свойств материала к виду напряженного состояния. Значение предельной нагрузки в случае решения, основанного только на логарифмических областях,

$$P = 2R \frac{k}{C} \left[ \frac{h}{R} - \left( (1 + h/R)^{-(3m-1)/(1-m)} - 1 \right) \frac{(1-m)^2}{(1+m)(3m-1)} \right].$$

На рисунке 7 представлены графики зависимости  $P/kR$  от  $C$  для различных  $h$ . Данное выражение верно только в случае выполнения условия (17) для  $C$  и  $h$ .

Рассмотрено также решение, когда условие (17) не выполнено и множество параметров  $C$  и  $h$  лежит в заштрихованной области слева

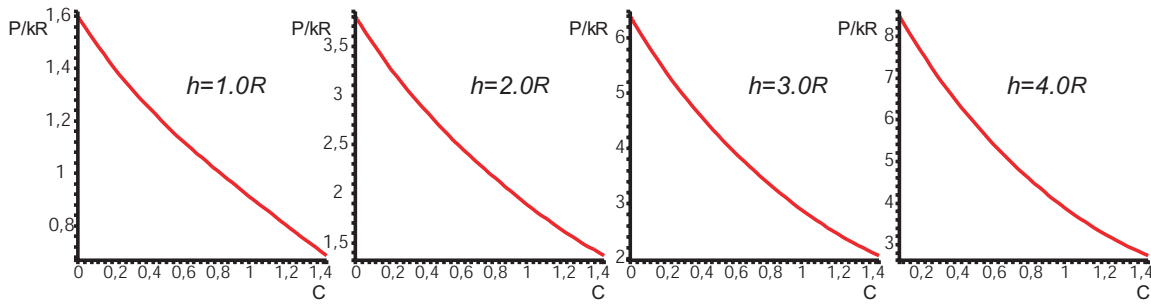


Рис. 7: Предельная нагрузка, деленная на  $k$ , в случае только логарифмических областей для конкретных  $h$ .

от линии, приведенной на рисунке 6. В данном случае предлагается рассмотреть возможный вид характеристик, представленный на рисунке 8. Область BEFC состоит из линий параллельных логарифмической спирали BC и прямых линий исходящих из BC под углом  $\varphi$ , как продолжение семейства  $\alpha$  характеристик области CC'B.

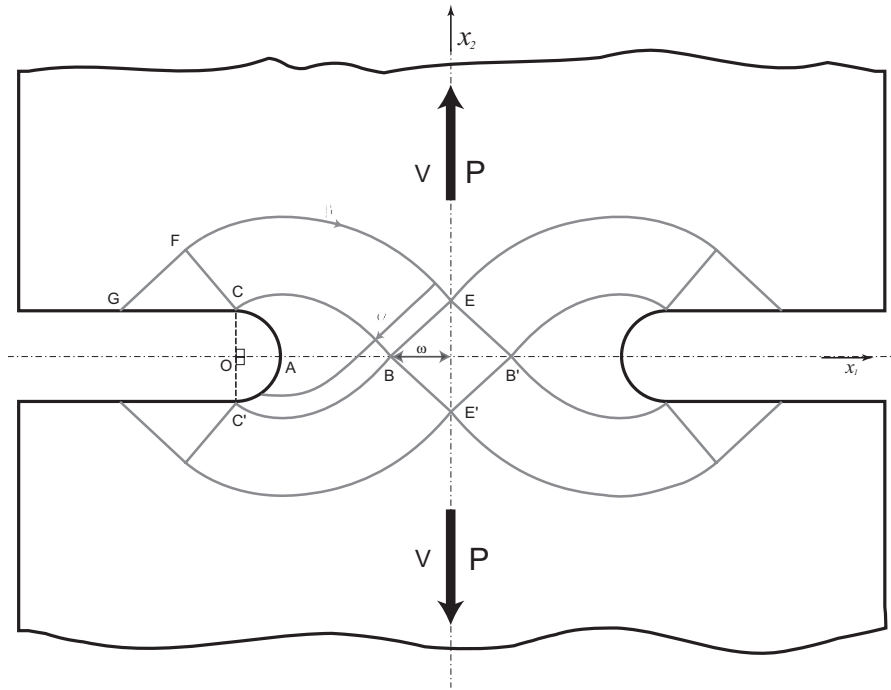


Рис. 8: Вариант решения с дополнительными построениями.

Для значения предельной нагрузки в данном случае получаем следующее



выражение:

$$P = \frac{2kR}{C} \left[ a - 1 + \left( a^{(3m-1)/(m-1)} - 1 \right) \frac{(m-1)^2}{(m+1)(3m-1)} \right] + \frac{2kR}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp \left( -(2m/\sqrt{1-m^2}) \left[ \frac{\pi}{2} \right] \right) \right] [h/R + 1 - a], \quad (18)$$

где

$$a = \exp \left( \frac{\pi}{2 \operatorname{tg}(\varphi/2)} \right).$$

На рисунке 9 в случае  $R = 1$  приведены зависимости предельной нагрузки, деленной на  $k$  и на  $R$ , от параметра  $C$  для различных значений параметра  $h$ .

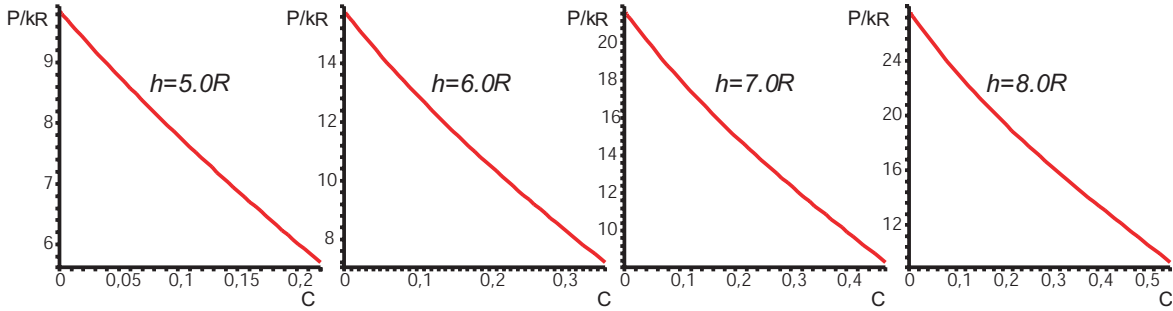


Рис. 9: Предельная нагрузка, деленная на  $k$ , в случае решения с дополнительными построениями для конкретных  $h$ .

Таким образом, получено решение задачи о растяжении полосы с вырезами с круглым основанием. Отличием от классического решения в данном случае является более сложное условие выбора вида решения (17), а также построение полей характеристик. Здесь переключение с построения решения в виде только логарифмических спиралей к решению с более сложным построением поля характеристик зависит не только от одного геометрического параметра  $h$ , а еще и от параметра  $C$  определяющего свойства материала. По сравнению с решением в случае критерия Губера-Мизеса при  $h > 3.81$  для достижения предельного состояния необходимо вовлекать в пластичность значительно большие области тела.

Рассмотрена задача о клине под действием одностороннего давления (Рис. 10).

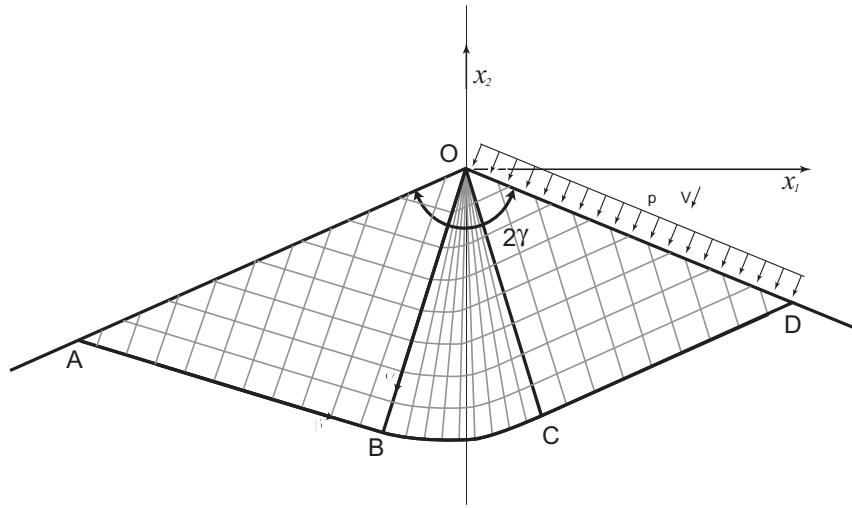


Рис. 10: Клин под действием одноосного давления.

На линии OD действует равномерно распределенное давление  $p$ , граница клина AO свободна от нагрузок. Угол раствора клина  $2\gamma$  предполагается достаточно большим, чтобы в представленном на рисунке 10 поле характеристик существовала область с центрированным полем OBC.

В случае критерия пластичности с зависимостью от параметра вида напряженного состояния в виде (2) значение предельного давления выражается следующей формулой:

$$-p = \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1+m}{1-m} \exp \left[ \frac{2m}{\sqrt{1-m^2}} (2\gamma - \pi/2) \right] \right]. \quad (19)$$

На рисунке 11 представлены зависимости предельного давления для конкретных углов раствора клина  $\gamma$ .

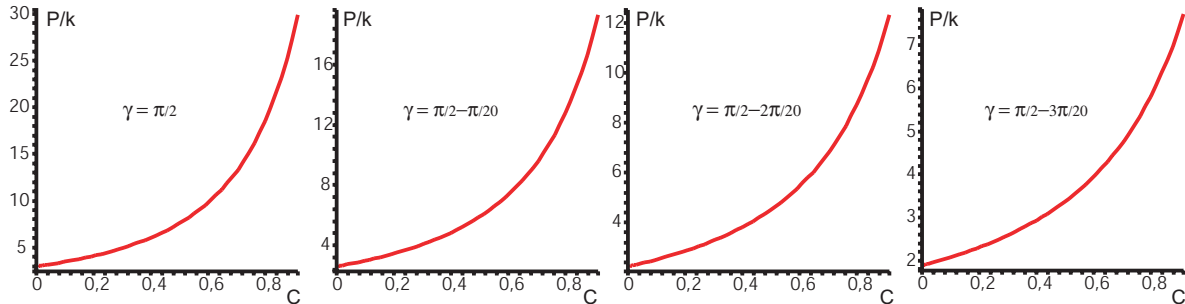


Рис. 11: Предельное давление, деленное на  $k$ , для конкретных углов  $\gamma$ .

Рассмотрен также случай, когда  $f(\xi)$  представлена в виде (3). Для

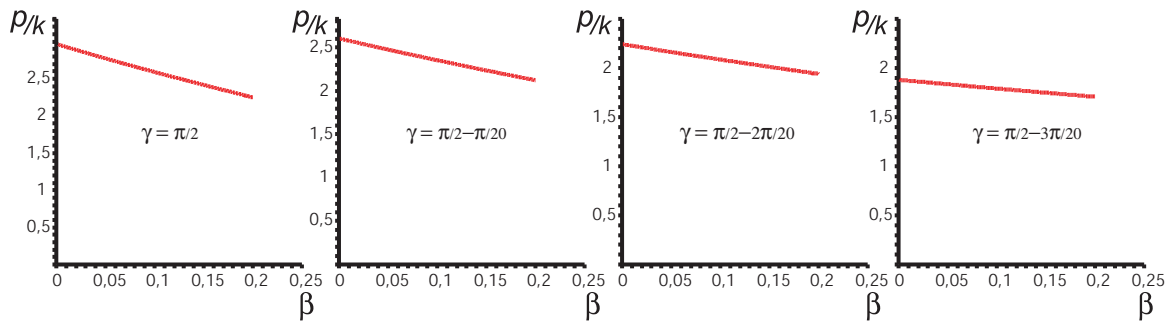


Рис. 12: Значение предельного давления деленного на  $k$  для  $f(\xi)$  в виде (3).

этого случая зависимости предельного давления  $p$  от параметра степени чувствительности к виду напряженного состояния приведены на рисунке 12 для различных углов раствора клина.

Из приведенных результатов, видно что результат зависимости предельного давления от параметров степени поврежденности среды качественно разный. Дано объяснение этим эффектам.

В ГЛАВЕ 3 рассматривается общая структура современных прочностных конечноэлементных программ на примере системы ABAQUS. Показывается общая схема получения нелинейных уравнений в случае включения в модель физической и геометрической нелинейности. Подробно разбирается способ встраивания модели физически нелинейного материала, описанного пользователем. В качестве примера такого материала рассматривается изотропная упруго-пластическая модель материала с критерием пластичности (1) в случае линейной зависимости (2) от параметра  $\xi$ .

В ГЛАВЕ 4 на основе построенной подпрограммы для выбранной модели материала строятся численные решения задач, рассмотренных в главе 2, но с учетом упругих деформаций и незначительного упрочнения. В качестве свойств материала для решения задач использовались следующие значения:

$$E = 200000, \quad \nu = 0.3.$$

Конечноэлементная программа ABAQUS всегда работает в безразмерных величинах, выбор единиц измерения для модуля Юнга, автоматически

определяет единицы измерения для результатов и моделируемой геометрии. Можно считать, что модуль упругости и предел текучести задаются в единичных напряжениях.

В данном случае параметр  $k$  не является постоянным, а представляет собой функцию параметра упрочнения, в качестве которого использовалась эквивалентная пластическая деформация  $\varepsilon^{pl} = \int \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}} dt$ . Функция упрочнения представлялась в виде кусочно линейной, проходящей через точки

$$k(0.0) = 200, \quad k(9.0/10^4) = 220, \quad k(2.2/10^3) = 225.$$

Во всех рассматриваемых задачах: расчет происходил всегда с помощью объемных восьми узловых полностью интегрируемых элементов; во всех моделях для получения правильной постановки задачи плоской деформации использовалось условие симметрии относительно плоскости моделируемого сечения; перемещения прикладывались всегда только по нормали к границе, так что перемещения вдоль границы возможны; расчет производился в геометрически линейной постановке; начало системы координат располагалось в центре сечения рассматриваемого образца.

В качестве первого примера рассмотрено численное решение задачи о растяжении полосы, ослабленной угловыми вырезами (Рис. 1). Постановка задачи аналогична постановке в рассмотренном ранее аналитическом решении. В расчетах задавались нормальные перемещения верхней и нижней границ тела. Предельная нагрузка определялась как суммарная сила реакции в направлении оси  $x_2$ . При этом, так как сечение имеет две линии симметрии, то моделировалась только четверть геометрии с соответствующими условиями симметрии на узлах модели. Параметры геометрии выбирались следующие: ширина  $2h = 2$ , рассмотрены два значения углов вырезов  $2\gamma = 0$  и  $2\gamma = \pi/2$ .

Из результатов расчета видно, что процесс формирования пластических областей и сами области пластичности в предельном состоянии существенно отличаются от областей, рассмотренных в аналитическом решении. Данный факт свидетельствует о том, что кинематически возможное аналитическое

решение, построенное с использованием метода характеристик, по своей форме отличается от численного решения, в котором учитываются упругие деформации и незначительное упрочнение материала.

На рисунке 13 показан характерный вид пластических областей в предельном состоянии. Видно что срединная область полосы остается упругой.

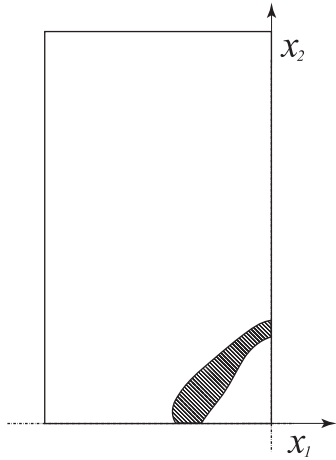


Рис. 13: Область пластичности.

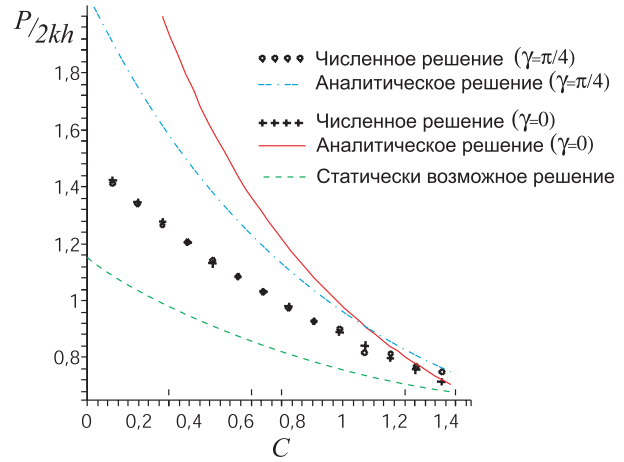


Рис. 14: Предельная нагрузка.

Проведен анализ соответствия значений нагрузок, отвечающих предельному состоянию, полученных путем численного решения упруго-пластической задачи и на основе аналитического решения. На рисунке 14 изображена зависимость предельной нагрузки от значения константы  $C$ . Видно, что различие полученных значений предельной нагрузки велико при малых параметрах  $C$ , при этом начиная со значений  $C > 0.5$  расхождение существенно меньше.

Данный факт можно объяснить с точки зрения экстремальных теорем о значении предельной нагрузки. В аналитическом решении для полосы, ослабленной угловыми вырезами, было построено кинематически возможное решение, которое дает оценку значению предельной нагрузки сверху. Если построить статически возможное решение, то оно даст оценку снизу. В аналитическом решении на линии ослабленного сечения можно задаться постоянным полем напряжений  $\sigma_{22} = P/2h$  и продолжить это поле в

область всего тела, тем самым получим статически возможное решение. На рисунке 14 штриховая линия отвечает статически возможному значению предельной нагрузки. Видно, что полученные на основе численных расчетов значения предельной нагрузки, лежат между значениями, полученными аналитически.

Рассмотрено численное решение задачи о растяжении полосы с круговым отверстием. Постановка задачи аналогична рассмотренной ранее аналитически. Предельная нагрузка находилась как суммарная сила реакции на узлах границы. Учитывая симметрию, моделировалась только четверть сечения. В качестве параметров геометрии выбраны следующие: половина ширины полосы  $h = 2$  и радиус отверстия  $R = 1$ .

На рисунке 15 штрихами показана пластическая область в момент достижения предельного состояния для значения параметра  $C = 0.5$ . На рисунке 16 представлена зависимость значений предельной нагрузки от параметра  $C$ , полученная численно и аналитически.

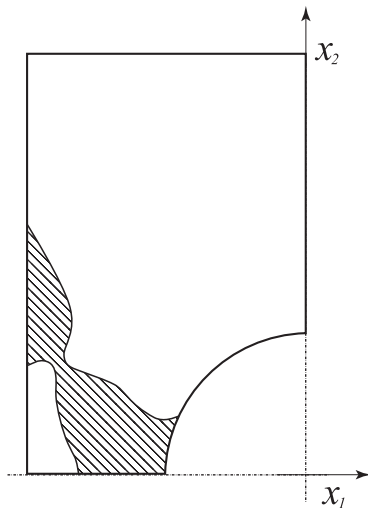


Рис. 15: Область пластичности.

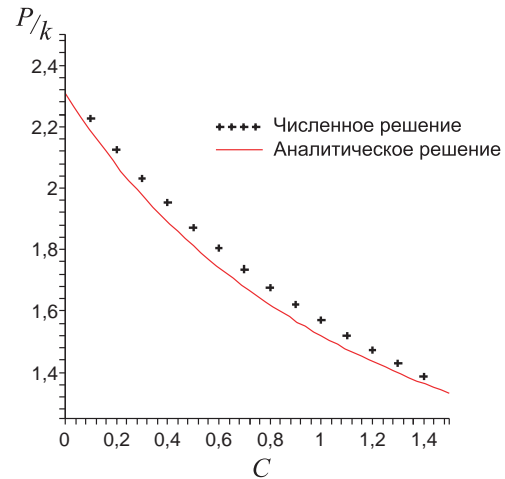


Рис. 16: Предельная нагрузка.

Сравнивая формы пластических областей, изображенных на рисунке 4 и рисунке 15, приходим к заключению, что кинематически возможное поле скоростей в аналитическом решении существенным образом отличается от численного решения. В то же время предельные нагрузки в обоих решениях

имеют близкие значения.

Рассмотрено также численное решение задачи о растяжении полосы, ослабленной вырезами с круговым основанием. Ограничимся рассмотрением случая, когда в аналитическом решении удавалось построить пластическую область в виде только логарифмических спиралей, то есть выберем ширину ослабленного сечения достаточно малой, чтобы удовлетворить условию (17). В качестве параметров геометрии выбраны следующие: радиус основания  $R = 1$  и ширина сечения  $2h = 2$ .

На рисунке 17 штрихами показана пластическая область в момент достижения предельного состояния для значения параметра  $C = 0.5$ . На рисунке 18 представлена зависимость значений предельной нагрузки от параметра  $C$ , полученных численно и аналитически.

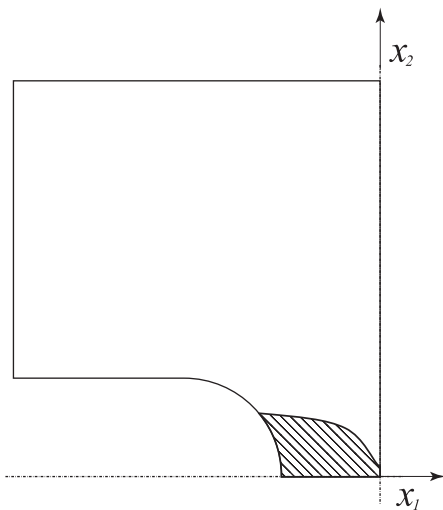


Рис. 17: Область пластичности.

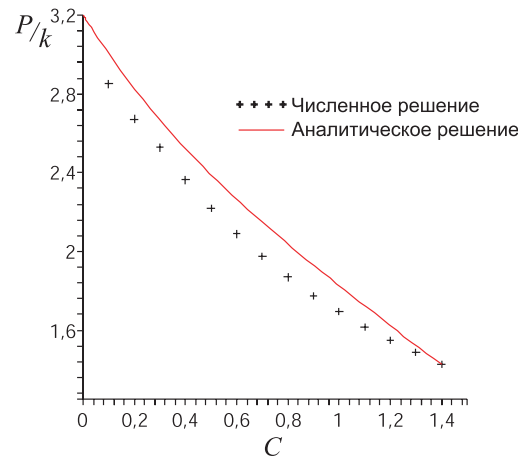


Рис. 18: Предельная нагрузка.

Представленные на рисунке 18 результаты свидетельствуют о том, что предложенное аналитическое решение, являясь кинематически возможным, достаточно хорошо приближает значения предельной нагрузки для всего рассмотренного диапазона значений параметра  $C$ .

В работе проведен анализ соответствия значений предельных нагрузок, полученных аналитически при помощи жестко-пластической схемы решения, и численно с использованием упруго-пластической модели

материала, а также приведены иллюстрации, демонстрирующие поля напряжений, деформаций, перемещений и характер формирования пластических областей.

### **3 Основные результаты и выводы**

1. На основе решения конкретных задач исследованы некоторые закономерности пластического деформирования сред, в которых процессы сдвигового и объемного деформирования взаимосвязаны и пластические свойства которых зависят от вида напряженного состояния. При этом использован критерий пластичности, представленный в соответствующем обобщенном виде и учитывающий зависимость предела текучести от параметра, представляющего собой отношение гидростатической компоненты напряжения к интенсивности напряжений. На основе ассоциированного закона пластического течения в рамках рассмотренного критерия пластичности оказалось возможным учесть необратимое изменение объема.
2. Для условий плоской деформации в рамках жестко-пластической модели материала решение задач сведено к решению системы уравнений в частных производных. Такая система, при некоторых ограничениях на зависимость от параметра вида напряженного состояния в критерии пластичности, является гиперболической, и получение решения возможно методом характеристик. В рамках таких условий для некоторых видов зависимости характеристик пластичности от параметра вида напряженного состояния были рассмотрены конкретные задачи: растяжение полосы, ослабленной угловыми вырезами; растяжение полосы с круговым отверстием; растяжение полосы, ослабленной вырезами с круглым основанием; клин под действием одностороннего давления. Во всех задачах были выделены характерные особенности, связанные с включением



в критерий пластичности параметра вида напряженного состояния. Были получены аналитические выражения для значений предельных нагрузок в зависимости от параметров геометрии и степени чувствительности свойств среды к виду напряженного состояния.

3. Установлено, что значения предельных нагрузок для всех рассмотренных задач существенным образом зависят от степени чувствительности среды к виду напряженного состояния и отличаются от значений, полученных в предположении о несжимаемости материалов и инвариантности пластических свойств к условиям нагружения. Это свидетельствует о том, что оценка значений предельных нагрузок без учета изменения свойств материала при различных видах напряженного состояния, реализуемого при нагружении, может привести к существенной ошибке.
4. При получении аналитических решений задач использовалась жестко-пластическая схема решения, что упрощает граничные условия для определения пластических областей. Пренебрежение упругими деформациями приводит к некоторой неточности, которую достаточно сложно оценить. Чтобы провести такую оценку были получены численные решения задач. В численных решениях использовалась упруго-пластическая модель материала. В качестве критерия пластичности использовался критерий с линейной зависимостью от параметра вида напряженного состояния. Численное моделирование проводилось в конечноэлементной программе ABAQUS. Для реализации упруго-пластической модели была написана специальная подпрограмма, подключаемая при расчете и отвечающая за связь между деформациями и напряжениями.
5. В работе были проведены расчеты для различных значений коэффициента, характеризующего степень чувствительности свойств среды к виду напряженного состояния. Для конкретных значений данного параметра продемонстрированы поля напряжений

и распределение эквивалентных напряжений и деформаций при увеличении нагрузки. Показан процесс формирования пластических областей и поля перемещений в момент реализации предельного состояния. Получены также значения предельных нагрузок для разных значений характеристик материалов.

6. На основе сравнительного анализа численных расчетов с аналитическими решениями установлено, что форма пластических областей в решениях, полученных с учетом упругих деформаций, значительно отличается от рассмотренных в аналитических решениях. При этом значения предельных нагрузок укладываются в оценки, получаемые из экстремальных теорем.
7. В задаче о растяжении полосы, ослабленной круговым вырезом, в которой было получено полное аналитическое решение, значения предельных нагрузок практически совпадают с результатами численного расчета для всех рассмотренных значений параметра чувствительности среды к виду напряженного состояния. Аналогичный результат был получен в задаче о растяжении полосы с боковыми вырезами с круглым основанием в случае малой ширины ослабленного сечения. Значения предельных нагрузок во всем рассмотренном диапазоне значений характеристик материалов получились достаточно близкими к результатам, полученным численно, расхождение значений не превышало 9%.
8. Построение численных решений, с одной стороны, позволяют верифицировать соответствующие аналитические решения, полученные с использованием жестко-пластической схемы, а с другой стороны, вместе с аналитическими решениями, демонстрируют возможный способ учета изменения механических свойств материалов в зависимости от вида напряженного состояния и необратимого изменения объема среды.

## 4 Основные публикации по теме работы

1. *Ломакин Е.В., Федулов Б.Н.* Предельное состояние полосы с угловыми надрезами из материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами. В кн.: Упругость и неупругость. М.: ЛЕНАНД 2006. С. 188-194.
2. *Ломакин Е.В., Федулов Б.Н.* Растяжение полосы с угловыми надрезами из материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами. Конф. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов. М.: МГУ. 2006. С. 110.
3. *Федулов Б.Н.* Предельное пластическое состояние полосы с отверстием из дилатирующего материала. Вестник Московского университета. Сер. Математика. Механика. 2007 (принята в печать).
4. *Федулов Б.Н.* Предельное состояние и пластическое течение дилатирующих сред. IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Том III. Н.Новгород: НГУ. 2006. С. 210
5. *Федулов Б.Н.* Растяжение полос из дилатирующего материала. Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2006. №6/1(46). С. 167-175.
6. *Федулов Б.Н.* Растяжение полос с надрезами из материала, пластические свойства которого зависят от вида напряженного состояния. Деп. в ВИНТИ 06.10.2006, № 1209-B2006.
7. *Lomakin E.V., Fedulov B.N.* Deformation and limit state of solids with stress state dependent plastic properties. Conf. Advanced Problems in Mechanics. St.Petersburg: IPME RAS. 2006. P. 58.