

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ВЕРШИНИН АНАТОЛИЙ ВИКТОРОВИЧ

УДК 539.3

ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ, ВЫЗВАННОЕ
ОБРАЗОВАНИЕМ КОНЦЕНТРАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007 г.

Работа выполнена на кафедре Вычислительной механики Механико-Математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук,
профессор Левин Владимир Анатольевич

Официальные оппоненты – доктор физико-математических наук,
профессор Бровко Георгий Леонидович

– доктор технических наук,
профессор Морозов Евгений Михайлович

Ведущая организация – Институт прикладной механики РАН

Защита состоится «16» февраля 2007 года в 16:00 часов на заседании диссертационного совета Д501.001.91 при МГУ им. М.В. Ломоносова по адресу: 119899, г. Москва, ГСП, Воробьевы горы, МГУ, Главное здание, Механико-Математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-Математического факультета МГУ (Главное здание, 14эт.).

Автореферат разослан «16» января 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д501.001.91 при МГУ
доктор физико-математических наук, профессор



Шешенин С.В.

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена постановке и решению задач об образовании концентраторов напряжений в нелинейно-упругом нагруженном теле при конечных деформациях, использовании полученных результатов для решения ряда модельных задач о развитии концентраторов напряжений различной формы и вида в телах с конечными деформациями и разработке программного обеспечения на базе метода конечных элементов (МКЭ) для решения плоских и пространственных задач.

В работе получено решение новых практически интересных и теоретически важных задач о одновременном образовании полостей и включений в предварительно нагруженном теле с большими начальными деформациями с учетом их перераспределения при образовании концентраторов напряжений. В том числе получено решение задачи о росте эллиптической полости при догрузке напряженного тела.

Свойства материала описываются известными соотношениями для сжимаемых и несжимаемых нелинейно-упругих материалов. Учитывается, что возникновение в теле концентратора напряжений приводит (по крайней мере, в окрестности образованной граничной поверхности) к появлению в теле больших дополнительных деформаций, которые «физически» накладываются на уже имеющиеся в теле большие деформации. Постановка задачи осуществляется на основе теории многократного наложения больших деформаций.

Вклад в развитие как нелинейной теории упругости, так и эксперимента для нее внесли многие отечественные и зарубежные специалисты, в частности, Г.М.Бартенев, В.Л.Бидерман, В.Д.Бондарь, М.Ф.Бухина, И.И.Ворович, Н.В.Зволинский, Л.М.Зубов, Ю.А.Крутков, Л.И.Кутилин, А.И.Лурье, Н.Ф.Морозов, В.В.Новожилов, В.А.Пальмов, П.М.Риз, Г.Н.Савин, Л.И.Седов, Л.А.Толоконников, Т.Н.Хазанович, К.Ф.Черных, P.J.Blats, A.E.Green, W.L.Ko, M.A.Moony, F.D.Murnaghan, W.Noll, R.S.Rivlin, L.R.G.Treloar, C.Truesdell, O.Watanabe, W.Zerna и многие другие. Развитие теории наложения малых деформаций на большие началось с середины 60-х годов прошлого века, наиболее подробно вопросы теории были рассмотрены в работах киевской школы механиков под руководством А.Н. Гузя. Создание и развитие теории многократного наложения больших деформаций для тел из упругого или вязкоупругого материала было осуществлено Г.С. Тарасьевым, В.А. Левиным. В работах В.А. Левина рассмотрены также вопросы зарождения и развития дефектов в рамках механики деформируемого твердого тела при конечных деформациях, предложены нелокальные критерии прочности и модели, учитывающие возникновение и развитие зон предразрушения (совместно с Е.М. Морозовым), разработаны методы оценки эффективных характеристик пористых материалов при конечных деформациях и их наложении (совместно с В.В. Лохиным, К.М. Зингерманом). Задача наложения деформаций для двухконстантного потенциала (с учетом ряда упрощающих

допущений) была рассмотрена Л.М. Нечаевым. Одним из современных подходов к решению таких задач можно считать использование метода конечных элементов, а также систем компьютерной алгебры для получения приближенных аналитических решений.

Численное решение рассматриваемых задач может быть найдено с использованием МКЭ в совокупности с методом Галёркина. Данный метод был предложен в 1915 г. Б.Г. Галёркиным как приближенный метод решения краевых задач. Ранее, в 1913г., метод применялся для решения конкретных задач теории упругости И.Г. Бубновым, в связи с чем именуется также методом Бубнова - Галёркина. Теоретическое обоснование метода принадлежит М. В. Келдышу (1942). Применение метода конечных элементов к задачам линейной и нелинейной теории упругости подробно рассмотрено в работах Л. Дж. Сегерлинда, О.Зенкевича, Одена.

Актуальность темы. Развитие техники инициирует создание новых материалов, способных испытывать большие деформации, что, в свою очередь, требует совершенствования методов мониторинга, особенно для случая возникновения и развития концентраторов напряжений в процессе эксплуатации элементов конструкций из таких материалов. Учитывая, что концентратор напряжений возникает в теле с конечными деформациями, его возникновение приводит к перераспределению в теле конечных деформаций, последнее определяет актуальность рассмотрения задач теории многократного наложения больших деформаций.

Основными целями диссертационной работы являются:

- математическая формулировка задач о последовательном образовании в нагруженном теле концентраторов напряжений (полостей и включений) различной формы, в том числе формулировка модельных задач о росте дефекта в упругом теле при конечных деформациях;
- разработка алгоритма решения плоских и пространственных задач как при статическом, так и при динамическом нагружении;
- разработка программного обеспечения для реализации указанного алгоритма на базе МКЭ; а также получение приближенного аналитического решения задачи об образовании эллиптического жесткого включения с использованием системы компьютерной алгебры «Mathematica 5.0».

Научная новизна.

Впервые получены решения пространственных задач об образовании концентраторов напряжений в нагруженном теле при конечных деформациях, плоских и пространственных задач о последовательном образовании слоистых включений, модельных задач о росте концентраторов напряжений в упругом теле. Решения найдены для нескольких типов нагружения, в том числе и для случая приложения динамической нагрузки. Впервые получены приближенные аналитические решения плоской задачи об эллиптическом (в момент образования) жестком включении, образующемся в предварительно нагруженном теле при конечных деформациях.

Достоверность результатов базируется на использовании соотношений теории многократного наложения больших деформаций,

корректной математической постановке задачи, применении определяющих соотношений, апробированных ранее другими авторами, использовании для решения задач метода конечных элементов, применение которого в конкретных расчетных схемах базируется на использовании апробированных методов оценки корректности получаемого решения (анализ сходимости при измельчении сетки, влияние начальных и граничных условий на получаемое решение), метода Синьорини и средств компьютерной алгебры (пакет «Mathematica 5.0»). Полученные в работе результаты согласуются с результатами решения ряда задач другими методами.

Практическая значимость заключается в постановке плоских и пространственных задач об образовании и развитии концентраторов напряжений в предварительно нагруженных телах, а также программной реализации алгоритма решения указанных задач. Разработанный программный комплекс использовался при выполнении работ по гранту РФФИ (проект № 06-01-00682)¹.

На защиту выносятся:

Постановка и алгоритм решения плоских и пространственных статических и динамических задач о последовательном образовании концентраторов напряжений (полостей и включений, в том числе слоистых) в нагруженных телах из сжимаемого и несжимаемого материала при конечных деформациях. Постановка и алгоритм решения модельных задач о развитии концентраторов напряжений в нагруженном теле.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на международной научной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Л.А.Толоконникова в 2003 г. (г. Тула); на Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» в 2004, 2005 гг. (г. Тула); на Международной конференции «Фундаментальные проблемы разработки нефтегазовых месторождений, добычи и транспортировки углеводородного сырья» в 2004 г. (г. Москва); на пятнадцатом, шестнадцатом и семнадцатом симпозиумах «Проблемы шин и резинокордных композитов» в 2004, 2005, 2006 гг. (г. Москва); на 6-й научно-технической конференции «Актуальные проблемы состояния и развития нефтегазового комплекса России» в 2005 г. (г. Москва); на научных конференциях «Ломоносовские чтения» в 2004, 2005 и 2006 гг. в МГУ им. М.В. Ломоносова; на научных семинарах кафедры «Вычислительная механика» (под руководством чл.-корр. РАН А.В. Забродина); на шестом Всероссийском семинаре «Сеточные методы для краевых задач и приложения» в 2005 г. (г. Казань); на седьмом международном конгрессе по вычислительной механике в 2006 г. (Лос-Анджелес, США).

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в 21 научной публикации и одной монографии.

¹ Результаты работы использовались при написании книги В.А. Левин, В.В. Калинин, К.М. Зингерман, А.В.Вершинин «Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование». М. ФИЗМАТЛИТ. 2007. 392с. (в печати)

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка литературы. Работа изложена на 138 страницах машинописного текста, содержит 65 рисунков, список использованных источников из 117 наименований.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи данной работы, приведена аннотация содержания диссертации.

В первой главе кратко изложены основные соотношения теории многократного наложения больших деформаций в упругих телах. В п.1.1 приводятся основные термины, обозначения.

$\overset{n}{R}$ – радиус-вектор частицы в n -м состоянии;

ξ^i – лагранжевы (материальные) координаты частицы;

$\overset{n}{\varepsilon}_i$ – базисные векторы в n -м состоянии;

$\overset{n}{u}_n = \overset{n}{R} - \overset{n-1}{R}$ – вектор перемещений, характеризующий переход из предыдущего $(n-1)$ -го состояния в последующее n -е состояние;

$\overset{k}{\nabla} = \overset{k}{\varepsilon}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ – оператор градиента;

$\Psi_{q,p} = \Psi_{q,k} \cdot \Psi_{k,p}$, $\Psi_{m,n} = I + \sum_{p=m+1}^n \overset{m}{\nabla} u_p = \left(I - \sum_{p=m+1}^n \overset{n}{\nabla} u_p \right)^{-1}$ – аффино-

деформаций ($m < n$);

$\overset{m}{E}_{q,p} = \frac{1}{2} \left(\Psi_{m,p} \cdot \Psi_{m,p}^T - \Psi_{m,q} \cdot \Psi_{m,q}^T \right)$ – тензор деформаций, описывающий

изменение деформаций при переходе тела из состояния q в состояние p и отнесенный к координатному базису m -го состояния;

$G_{q,p} = \Psi_{q,p} \cdot \Psi_{q,p}^T$ – тензорная мера деформаций, описывающая изменение деформаций при переходе тела из состояния q в состояние p и соответствующая мере Грина ($G_{0,1}$ – тензорная мера Грина);

$F_{q,p} = \Psi_{q,p}^T \cdot \Psi_{q,p}$ – тензорная мера деформаций, описывающая изменение деформаций при переходе тела из состояния q в состояние p и соответствующая мере Фингера ($F_{0,1}$ – тензорная мера Фингера);

ρ_n, f_n – плотность и массовая сила в n -м состоянии;

$\Delta_{m,n}$ – относительное изменение объема при переходе из m -го в n -е состояние;

$\overset{n}{\sigma}_{0,n}$ – тензор истинных напряжений, накопленных в теле при переходе из начального в n -е состояние (при $n=1$ это тензор Коши);

$\overset{n}{\Sigma}_{0,n} = (1 + \Delta_{0,n})^n \overset{n}{\sigma}_{0,n}$ – тензор обобщенных (полных для n -го состояния) напряжений, определенный в координатном базисе n -го состояния;

$\overset{m}{\Sigma}_{0,n}$ – тензор обобщенных (полных для n -го состояния) напряжений, определенный в координатном базисе произвольного m -го состояния:

$$\overset{m}{\Sigma}_{0,n} = \Psi_{n,m}^T \cdot \overset{n}{\Sigma}_{0,n} \cdot \Psi_{n,m};$$

$\overset{m}{\Sigma}_{q,p} = \overset{m}{\Sigma}_{0,p} - \overset{m}{\Sigma}_{0,q}$ – тензор обобщенных дополнительных напряжений, определенный в координатном базисе произвольного m -го состояния;

$\overset{k}{\Gamma}_n$ – граница тела в n -м состоянии в координатах k -го состояния;

$\overset{k}{N}_n$ – нормаль к $\overset{k}{\Gamma}_n$;

$\cdot\cdot$ – знак двойной скалярной свертки;

T – знак транспонирования.

(Индекс над символом, кроме ε и R , указывает номер состояния, в координатном базисе которого вычисляется данная величина).

В п.1.2 рассмотрены выражения для характеристик напряженно-деформированного состояния тела (аффиноры деформаций, тензоры деформаций) в различных состояниях и уравнения, связывающие их между собой.

В п.1.3 рассмотрены определяющие соотношения нелинейной упругости, используемые далее в работе при решении задачи:

Сжимаемый материал (на примере материала Мурнагана)

$$\begin{aligned} \overset{0}{\Sigma}_{0,n} = & \lambda \left(\overset{0}{E}_{0,n} \cdot\cdot I \right) I + 2G \overset{0}{E}_{0,n} + 3C_3 \left(\overset{0}{E}_{0,n} \cdot\cdot I \right)^2 I + \\ & + C_4 \left(\overset{0}{E}_{0,n} \cdot\cdot I \right)^2 I + 2C_4 \left(\overset{0}{E}_{0,n} \cdot\cdot I \right) \overset{0}{E}_{0,n} + 3C_5 \left(\overset{0}{E}_{0,n} \right)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

Несжимаемый материал (на примере материала Муни)

$$\overset{0}{\sigma}_{0,n} = \frac{\mu}{2} \left\{ (1 + \beta) F_{0,n} + (1 - \beta) \left[(F_{0,n} \cdot\cdot I) F_{0,n} - F_{0,n}^2 \right] \right\} - p_{0,n} I, \quad (2)$$

В п.1.4. приведены уравнения равновесия и граничные условия в координатном базисе текущего состояния, а также для тела, находящегося в n -м состоянии, в координатах произвольного k -го состояния ($k \neq n$).

В п.1.5 сформулированы механические и математические постановки граничных задач теории многократного наложения больших деформаций об образовании концентраторов напряжений в предварительно нагруженных телах. Постановка задачи осуществляется на основе теории многократного наложения больших деформаций. Механическая постановка задачи следующая.

Пусть некоторое тело, находящееся в начальном ненапряженном состоянии (рис. 1а), перешло под действием внешних нагрузок в первое промежуточное состояние и приобрело большие начальные деформации.

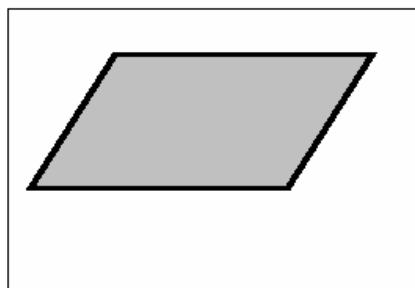


рис. 1 а

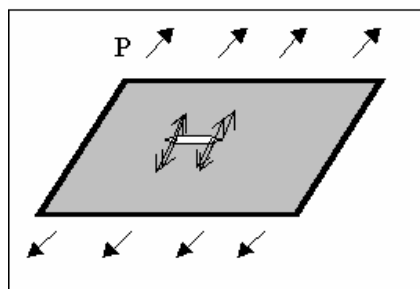


рис. 1 б

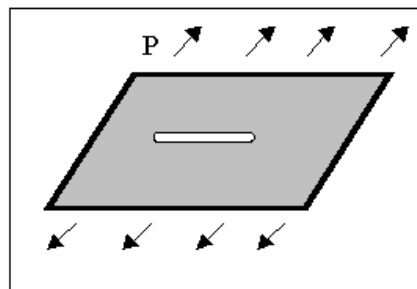


рис. 1 в

(Рис. 1а) - начальное состояние. В теле отсутствуют напряжения и деформации

(Рис. 1б) – первое промежуточное состояние

(Рис. 1в) – второе промежуточное состояние

Затем в теле намечается некоторая замкнутая поверхность (рис. 1б), и удаляется часть тела, ограниченная этой поверхностью. Действие удаленной части тела на оставшуюся заменяется (по принципу освобождения от связей) силами, распределенными по этой поверхности. Далее эти силы, перешедшие в разряд внешних, «мгновенно» изменяются на большую величину, например, уменьшаются до нуля (под термином «мгновенно изменяются» при рассмотрении статических задач не следует понимать, что данное приложение (снятие) нагрузок приводит к деформированию тела в динамическом режиме). Тело, приобретая (теряя) большие дополнительные деформации и напряжения (по крайней мере, в окрестности вновь образованной граничной поверхности), переходит во второе промежуточное состояние (рис. 1в). Такое нагружение можно продолжить и дальше.

Далее рассмотрены два случая математической постановки задач. В первом рассматривается задача об образовании концентратора напряжений, когда его форма задана в момент образования. Постановка задачи включает:

– уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \Sigma_{0,n} - \Sigma_{0,n} \cdot \nabla \cdot \ln(1 + \Delta_{0,k}) + \Sigma_{0,n} : (\nabla \cdot \Psi_{k,n}) \cdot \Psi_{k,n}^{-1} - \\ - (\nabla \cdot \Psi_{k,n}^T)^{-1} \cdot \Psi_{k,n}^T \cdot \Sigma_{0,n} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

– уравнение несжимаемости (для несжимаемых материалов):

$$\Delta_{0,n} = 0, \quad (4)$$

– граничные условия:

$$N_n \cdot \Sigma_{0,n} \Big|_{\Gamma_n^k} = Q_{N_n}^k \quad (5)$$

$$Q_{N_n}^k = (1 + \Delta_{0,k}) \frac{|d\sigma|}{|d\sigma|} P_{N_n}^n \cdot \Psi_{k,n}$$

$P_{N_n}^n$ - вектор истинных напряжений на элементарной площадке

$d\sigma = N_n |d\sigma|$. В частности, в случае отсутствия нагрузок на границе

концентратора получаем $N_n \cdot \Sigma_{0,n} \Big|_{\Gamma_n^k} = 0$.

$$\sigma_{0,n} \Big|_{\infty} = \sigma_{0,n}^{\infty} \quad (6)$$

где $\sigma_{0,n}^{\infty}$ – тензор истинных напряжений на бесконечности, определенный в постановке задачи.

В постановку задачи также входят уравнения, связывающие тензор истинных напряжений $\sigma_{0,n}$ с аффинором деформаций $\Psi_{0,n}$. Для различных материалов они имеют вид (1), (2).

Завершают постановку задачи геометрические соотношения:

$$1 + \Delta_{0,n} = \det \Psi_{0,n} \quad (7)$$

$$\Psi_{0,n} = \Psi_{0,k} \cdot \Psi_{k,n} \quad (8)$$

$$\Psi_{k,n} = I + \sum_{i=k+1}^n \nabla u_i \quad (9)$$

Решение этой задачи позволяет, в частности, найти суммарный вектор $\sum_{i=k+1}^n u_i$ перемещений из k -го состояния в n -е как функцию радиус-вектора R^k , т.е. в координатах k -го состояния.

Второй вариант постановки задачи дан для случая задания границы концентратора напряжений после деформирования (в конечном состоянии). Постановка задачи включает:

– уравнение равновесия

$$\nabla \cdot \sigma_{0,n} = 0, \quad (10)$$

– уравнение несжимаемости (для несжимаемых материалов)

$$\Delta_{0,n} = 0, \quad (11)$$

– граничные условия

$$N_n \cdot \sigma_{0,n} \Big|_{\Gamma_n}^n = P_{N_n}^{n(n)}, \quad (12)$$

В частности, в случае отсутствия нагрузок на границе концентратора получаем $N_n \cdot \sigma_{0,n} \Big|_{\Gamma_n}^n = 0$.

$$\sigma_{0,n} \Big|_{\infty} = \sigma_{0,n}^{\infty}, \quad (13)$$

– геометрические соотношения

$$1 + \Delta_{0,n} = \det \Psi_{0,n}, \quad (14)$$

$$\Psi_{0,n} = \left(I - \sum_{i=1}^n \nabla u_i \right)^{-1}. \quad (15)$$

Уравнения, связывающие тензор истинных напряжений $\sigma_{0,n}$ с аффинором деформаций $\Psi_{0,n}$, – соотношения (1), (2).

Решение этой задачи позволяет, в частности, найти суммарный вектор $\sum_{i=1}^n u_i$ перемещений из начального в n -е состояние как функцию радиус-вектора R , т.е. в координатах n -го состояния.

В п.1.6 обсуждаются модели, применяемые при рассмотрении задач об образовании и росте концентраторов напряжений в нагруженных телах. Рассматриваются особенности постановки данных задач в рамках механики деформируемого твердого тела.

В п.1.7 рассматриваются модели, использующие понятие зоны предразрушения, возникающей вблизи концентратора напряжений при выполнении некоторого критерия прочности. Зона предразрушения – это часть тела (зоны), где под воздействием внешних нагрузок, приложенных к телу, происходит изменение свойств материала тела. То есть, при превышении некоторой критерияльной величины в теле возникает зона предразрушения. Граница зоны предразрушения определяется из условия выполнения критерия прочности. В работе используется силовой нелокальный критерий прочности, учитывающий, что разрушение, а значит, и изменение свойств зоны предразрушения происходит не на отрезке и не мгновенно (для вязкоупругих материалов или при нестационарных процессах). Далее рассматриваются модели роста зоны предразрушения и изменения ее свойств в процессе нагружения.

В п.1.8 рассмотрены различные способы моделирования поврежденностей, возникающих вблизи вершины концентратора напряжений. Приведены модели образования и роста зоны поврежденности, обсуждаются способы оценки эффективных свойств материала внутри нее.

Во второй главе диссертации рассматривается применение метода конечных элементов для решения задач теории наложения больших деформаций и метода Синьорини для решения задачи об образовании в нагруженном теле жесткого эллиптического включения.

Использование МКЭ позволяет найти численное решение поставленной задачи. При этом посредством метода Галеркина исходная система нелинейных дифференциальных уравнений сводится к системе нелинейных алгебраических, которая затем решается с использованием метода Ньютона.

Применение метода Синьорини (метода последовательных приближений) и системы компьютерной алгебры «Mathematica 5.0» к исследуемым задачам позволяет найти их приближенное аналитическое решение. При этом решение исходной нелинейной задачи сводится к решению бесконечной последовательности линеаризованных задач. Преимущество такого подхода состоит в том, что плоская задача линеаризованной упругости для однородного тела с отверстием может быть решена аналитически методом Колосова–Мусхелишвили. При расчетах в данной работе ограничились вычислением двух первых членов последовательности линеаризованных задач.

В п.2.1 рассматриваются различные особенности применения метода конечных элементов к задачам теории наложения больших деформаций. Обсуждается способ переноса физических и геометрических параметров конечноэлементного разбиения со старой сетки на новую в случае последовательного образования концентраторов напряжений.

В качестве примера в п.2.2 подробно изложены постановка (механическая и математическая) и решение с применением метода Галёркина плоской задачи теории наложения больших деформаций – задачи об образовании круговой (в момент образования) полости в предварительно нагруженном бесконечно протяженном теле из нелинейно-упругого материала. Система уравнений Галёркина, соответствующая исходной дифференциальной постановке, выглядит следующим образом:

$$\iint_D N_i \cdot (\nabla \cdot \sigma_{0,n}) dS = \int_{\Gamma} \bar{n} \cdot N_i \cdot \sigma_{0,n} d\Gamma - \iint_D (\nabla N_i) \cdot \sigma_{0,n} dS = 0; N_i - \text{функции формы.}$$

В п. 2.3 приведен общий алгоритм решения задач о последовательном образовании концентраторов напряжений в нагруженных телах.

В п.2.4 рассмотрены математическая постановка динамической задачи теории наложения и ее решение с использованием МКЭ. Постановка задачи включает:

Уравнение движения:

$$\nabla \cdot [(1 + \Delta_{0,n})^{-1} \sum_{0,n+1}^n (t) \cdot \Psi_{n,n+1}(t)] - \rho_n \frac{d^2 u}{dt^2} = 0 \quad (16)$$

Начальные условия:

$$u(0) = u_n; \frac{du}{dt}(0) = 0 \quad (17)$$

Граничные условия:

$$\sigma_{0,n+1}(t) \Big|_{\infty} = \sigma_{0,n+1}^{\infty}(t) \quad (18)$$

$$N_{n+1}(t) \cdot \Sigma_{0,n+1}(t) \Big|_{\Gamma_{n+1}(t)}^k = -P(t) \cdot (1 + \Delta_{0,n+1}(t)) \cdot N_{n+1}(t) \cdot \Psi_{n,n+1}^{*-1}(t) \cdot \Psi_{n,n+1}^{-1}(t) \quad (19)$$

Определяющие соотношения для потенциала Мурнагана:

$$\Sigma_{0,n+1}(t) = (1 + \Delta_{0,n+1}(t)) \cdot \Psi_{n,n+1}^{*-1}(t) \cdot \sigma_{0,n+1}(t) \cdot \Psi_{n,n+1}^{-1}(t) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{0,n+1}^0(t) = & \lambda(E_{0,n+1}^0(t) : I)I + 2G E_{0,n+1}^0(t) + 3C_3(E_{0,n+1}^0(t) : I)^2 I + \\ & + C_4(E_{0,n+1}^0(t)^2 : I)I + 2C_4(E_{0,n+1}^0(t) : I) E_{0,n+1}^0(t) + 3C_5(E_{0,n+1}^0(t))^2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\sigma_{0,n+1}(t) = (1 + \Delta_{0,n+1}(t))^{-1} \Psi_{0,n+1}^*(t) \cdot \Sigma_{0,n+1}^0(t) \cdot \Psi_{0,n+1}(t) \quad (22)$$

$$E_{0,n+1}(t) = \frac{1}{2} (\Psi_{0,n+1}(t) \cdot \Psi_{0,n+1}^*(t) - I) \quad (23)$$

Геометрические соотношения:

$$1 + \Delta_{0,n+1}(t) = \det \Psi_{0,n+1}(t) \quad (24)$$

$$\Psi_{0,n+1}(t) = \Psi_{0,n} \cdot \Psi_{n,n+1}(t) \quad (25)$$

$$\Psi_{n,n+1}(t) = I + \nabla^n u(t) \quad (26)$$

$$\rho_n = \frac{\rho_0}{|\Psi_{0,n}|} \quad (27)$$

Система уравнений Галёркина, соответствующая приведенной дифференциальной постановке, выглядит следующим образом:

$$M \cdot \frac{d^2 \mathfrak{u}}{dt^2} + K(\mathfrak{u}) - f = 0 \quad (28)$$

Здесь \mathfrak{u} - вектор неизвестных узловых перемещений;

$$M = \int_{\Omega} N^T \cdot \rho \cdot N d\Omega, \quad (29)$$

$$K(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \nabla N^T \cdot [(1 + \Delta_{0,n}(\mathbf{x}))^{-1} \cdot \sum_{0,n+1}^n(\mathbf{x}) \cdot \Psi_{n,n+1}(\mathbf{x})] d\Omega, \quad (30)$$

$$f = \int_{\Gamma} N^T \cdot \sigma^{\infty} \cdot \bar{n} d\Gamma \quad (31)$$

Решение полученной системы ищется по методу SS22.

В п.2.5 рассматривается применение метода Синьорини к решению задачи об образовании жесткого эллиптического включения в нагруженном теле. Решение исходной нелинейной задачи ищется в перемещениях в виде бесконечной суммы

$$u_2 = u_2^{(0)} + u_2^{(1)} + \dots, \quad \text{где } u_2^{(i)} \sim q^{i+1}. \quad (32)$$

Вектор $u_2^{(i)}$ ($i=1,2,\dots$) называют поправкой от учета эффектов $(i+1)$ -го порядка для перемещений при переходе из 1-го во 2-е состояние. При таком подходе выделяется безразмерная величина q , определяемая следующим

$$\text{образом: } q = \max\left(\frac{\sigma_{\max}}{G}, \frac{|P|}{G}\right), \quad \text{где } \sigma_{\max} = \max_{i,j} |\sigma_{0,2ij}^{\infty}|. \quad \text{Далее в подобном виде}$$

представляются и другие характеристики напряженно-деформированного состояния. Подставив эти разложения в уравнения, входящие в постановку задачи, и сгруппировав члены одинакового порядка, можно получить бесконечную последовательность систем линеаризованных краевых задач для расчета напряжений и деформаций в теле в конечном состоянии, при последовательном решении которых можно найти сначала $u_2^{(0)}$ и $\sigma_{0,2}^{(0)}$ (нулевое приближение), затем $u_2^{(1)}$ и $\sigma_{0,2}^{(1)}$ (первое приближение) и т.д. В настоящей работе выполнены расчеты для нулевого и первого приближений.

Далее рассматривается применение метода Колосова-Мухелишвили к решению линеаризованной задачи упругости. При этом вводится тензор S , соответствующий тензору напряжений линейной упругости. Для сжимаемого материала $S = L_1[u]$, для несжимаемого $S = L_2[u, p]$. Тогда векторы u , f , N и тензор S могут быть представлены в координатной форме следующим образом:

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3, \quad (33)$$

$$f = f_1 e_1 + f_2 e_2, \quad (34)$$

$$N = N_1 e_1 + N_2 e_2, \quad (35)$$

$$S = S_{11} e_1 e_1 + S_{12} e_1 e_2 + S_{21} e_2 e_1 + S_{22} e_2 e_2 + S_{33} e_3 e_3. \quad (36)$$

В рассмотрение также вводятся:

– комплексные переменные

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad (37)$$

– функции этих переменных:

$$w(z, \bar{z}) = u_1 + iu_2, \quad F(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}(f_1 + if_2), \quad (38)$$

$$N(z, \bar{z}) = N_1 + iN_2, \quad (39)$$

– комбинации компонент некоторого тензора T второго ранга (в декартовой системе координат):

$$T_I = T_{11} + T_{22} + i(T_{12} - T_{21}), \quad T_{II} = T_{11} - T_{22} + i(T_{12} + T_{21}) \quad (40)$$

Для случая плоской деформации и сжимаемого материала уравнения равновесия и граничные условия линеаризованной задачи могут быть записаны в комплексной форме следующим образом:

$$\frac{\partial S_{II}}{\partial z} + \frac{\partial S_I}{\partial \bar{z}} = 2F, \quad (41)$$

$$\text{“условие прилипания” } w_{вкл}|_{\Gamma} = w_{матр}|_{\Gamma} \quad (42)$$

$$S_I|_{\infty} = \sigma_I^{\infty}, \quad S_{II}|_{\infty} = \sigma_{II}^{\infty}, \quad (43)$$

$$S_I = 2(\lambda + G) \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right), \quad S_{II} = 4G \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}. \quad (44)$$

Решение линеаризованной краевой задачи ищется в виде:

$$w = w_{\text{н}} + w_{\text{одн}}, \quad S = S_{\text{н}} + S_{\text{одн}}, \quad (45)$$

$$p = p_{\text{н}} + p_{\text{одн}}, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{33 \text{ н}} + \varepsilon_{33 \text{ одн}}, \quad (46)$$

где $w_{\text{н}}$, $S_{\text{н}}$, $p_{\text{н}}$, $\varepsilon_{33 \text{ н}}$ – некоторое частное решение линеаризованной задачи, $w_{\text{одн}}$, $S_{\text{одн}}$, $p_{\text{одн}}$, $\varepsilon_{33 \text{ одн}}$ – решение линеаризованной задачи для однородной системы уравнений.

Получены и приводятся формулы для нахождения частного решения линеаризованной задачи, при этом считается, что функция $F(z, \bar{z})$ является аналитической функцией аргументов z и \bar{z} в области, занимаемой телом. Для случая плоской деформации сжимаемого материала эти формулы имеют вид:

$$w_{\text{н}} = \frac{1}{4G(\lambda + 2G)} \left[(\lambda + 3G) \iint F dz d\bar{z} - (\lambda + G) \iint \bar{F} dz dz \right], \quad (47)$$

$$S_{I \text{ н}} = 2(\lambda + G) \left(\frac{\partial w_{\text{н}}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}_{\text{н}}}{\partial \bar{z}} \right), \quad S_{II \text{ н}} = 4G \frac{\partial w_{\text{н}}}{\partial \bar{z}}. \quad (48)$$

Рассматривается подход к решению линеаризованной краевой задачи для однородной системы уравнений с использованием комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$w_{\text{одн}} = \frac{1}{2G} \left[\kappa \int \Phi(z) dz - z \overline{\Phi(z)} - \int \Psi(z) dz \right], \quad (49)$$

$$S_{I \text{ одн}} = 2 \left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right], \quad S_{II \text{ одн}} = -2 \left[\overline{\Psi(z)} + z \overline{\Phi'(z)} \right]. \quad (50)$$

В третьей главе рассматриваются результаты решения задач, постановка и методы решения которых, приведены во второй главе. Приводятся примеры решения двумерных статических и динамических задач, также рассматриваются трехмерные задачи. Решения даны для различных типов материалов: сжимаемых и несжимаемых. Приведено

распределение напряжений, отнесенных к параметру материала, а также контуры полостей до и после деформирования тела при различных видах нагружения. Из представленных графиков виден качественный результат учета нелинейных эффектов.

Далее приводится сравнение полученных результатов решения задач, найденных численным и полуаналитическим методами. Рассматривается зависимость получаемого решения от размеров конечноэлементной сетки. Приводится сравнение с аналогичными линейными задачами, при этом производится оценка учета как физической, так и геометрической нелинейностей. В диссертации имеется приложение, в котором приведены примеры решений задач, не вошедших в основной текст работы (задача о квазистатическом образовании отверстия в нагруженном теле с последующим «мгновенным» снятием внешних нагрузок, задача о квазистатическом одновременном образовании двух отверстий в нагруженном теле с последующим «мгновенным» снятием внешних нагрузок, задача о нестационарном образовании кругового (в момент образования) отверстия в нагруженном теле, задача о нестационарном одновременном образовании двух круговых (в момент образования) отверстий в нагруженном теле, задача о последовательном образовании двух круговых (в момент своего образования) отверстий в нагруженном теле с нестационарным снятием внешних нагрузок после квазистатического образования первого отверстия, задача о нестационарном последовательном образовании двух круговых (в момент своего образования) отверстий и двух круговых (в момент своего образования) упругих включений в нагруженном теле).

В п.3.1 рассматриваются примеры решенных плоских статических и динамических задач.

В 3.1.1 рассмотрена задача об одновременном образовании двух эллиптических отверстий (отношение полуосей 1:5). На приведенных ниже рисунках для случая начального всестороннего растяжения при $\lambda / G = 2.097$, $C_3/G = -0.0689$, $C_4/G = -0.37464$, $C_5/G = 0.33709$; $\sigma_{0,11}^\infty / G = p$, $\sigma_{0,12}^\infty / G = p$; $p/G = 0.05$ приведено распределение главной компоненты тензора полных истинных напряжений $\sigma_{0,21} / G$. Свойства материала матрицы описываются потенциалом Мурнагана. Отношение большой полуоси отверстия к стороне матрицы 1:20.

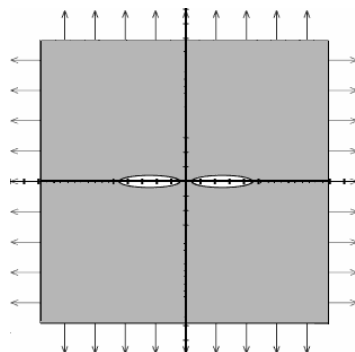
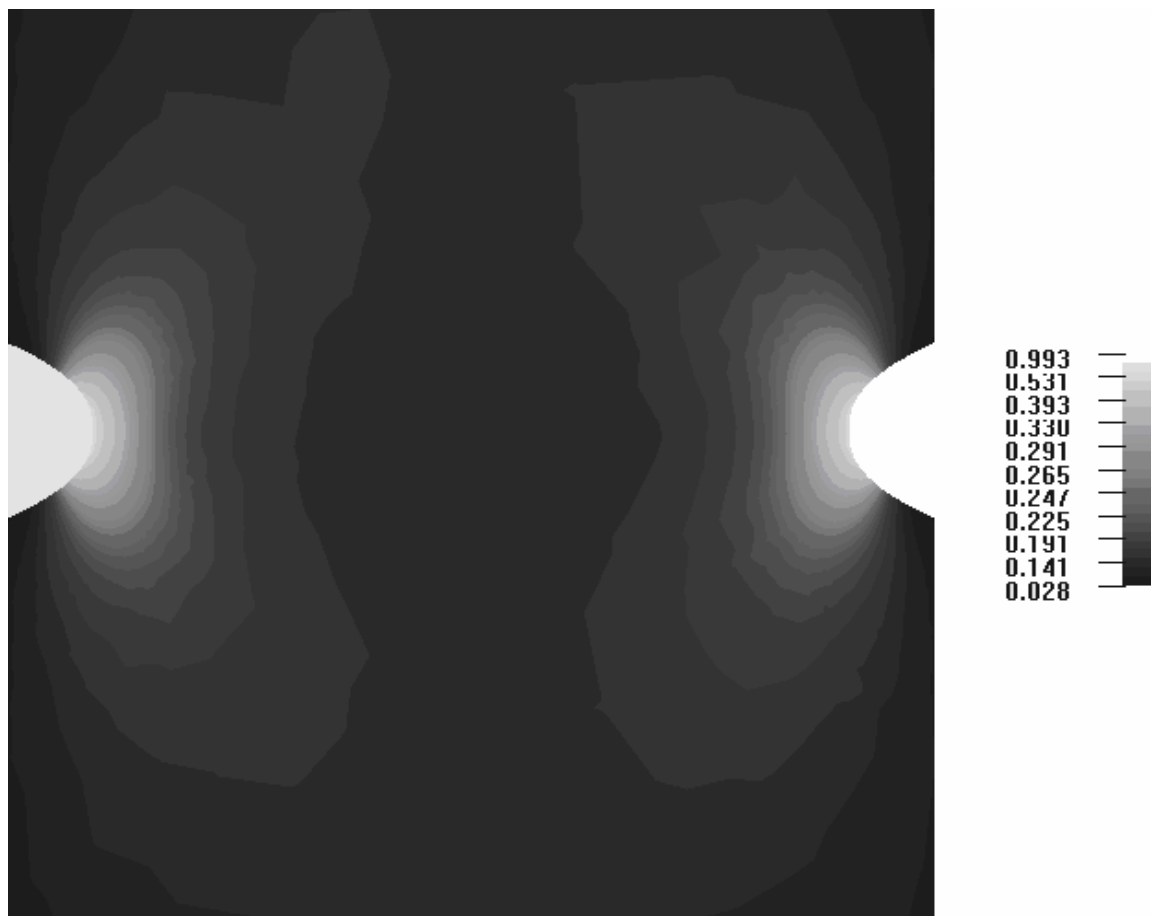
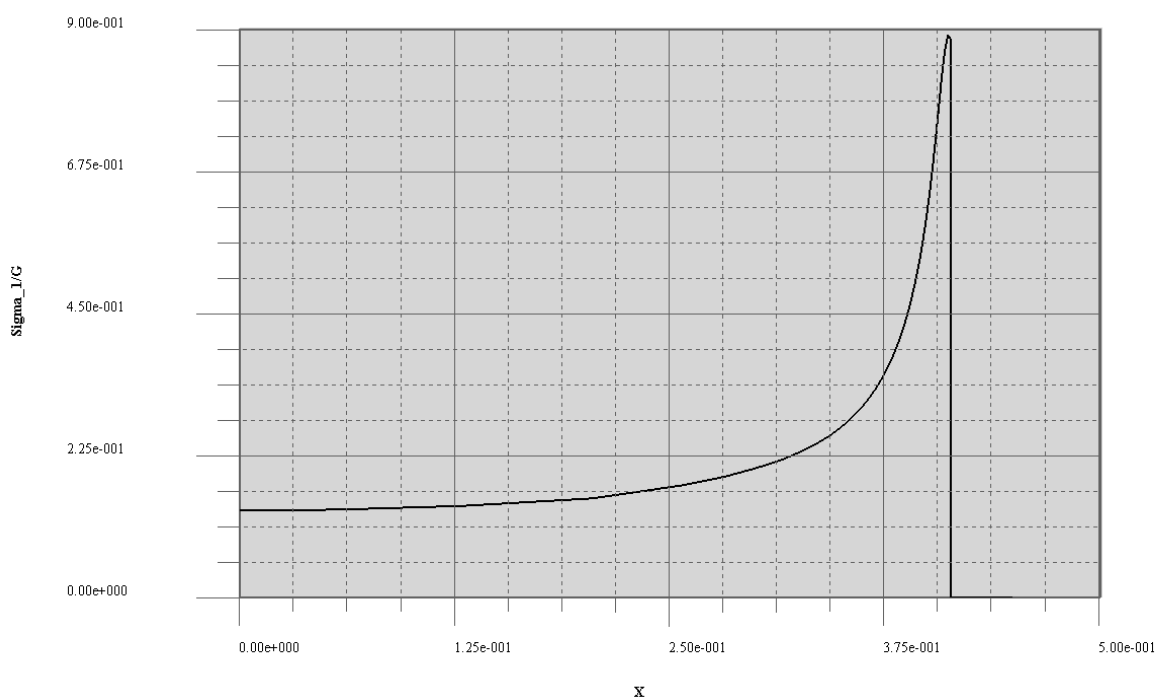


Схема нагружения

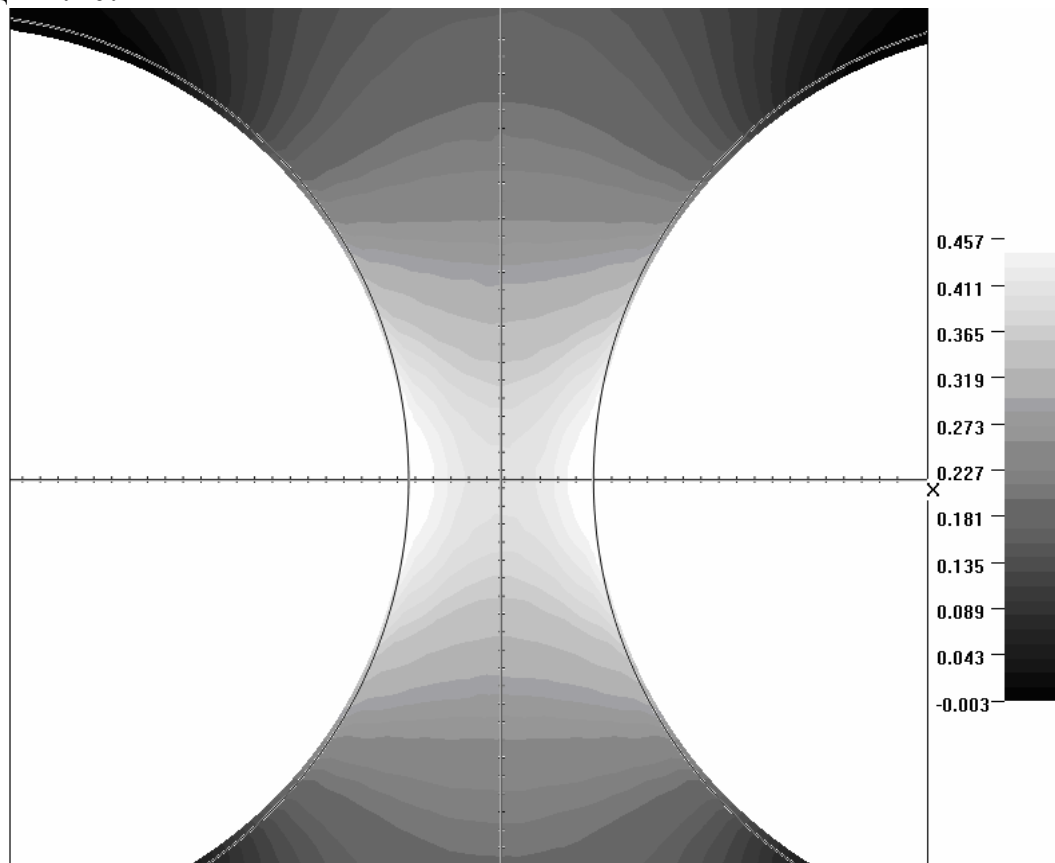


Распределение первой главной компоненты тензора истинных напряжений между полостями ($\sigma_{0,2_1} / G$)

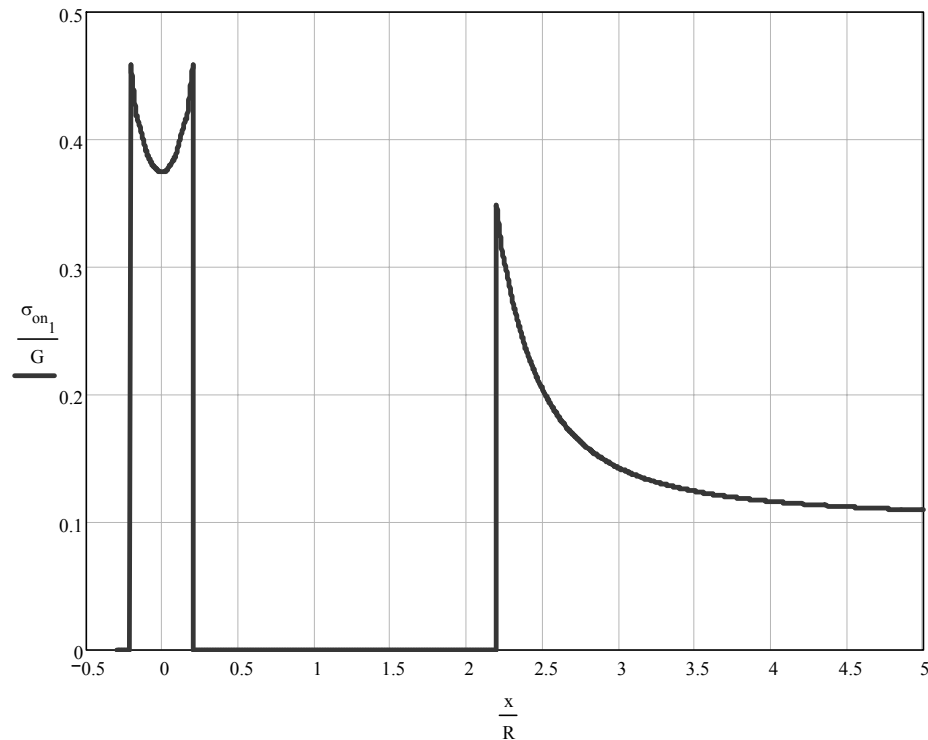


В 3.1.3 рассмотрена задача об одновременном образовании двух круговых отверстий. На приведенных ниже рисунках для случая начального

одноосного растяжения при $\beta = -0.263905$, $\sigma_{0,11}^{\infty} = 0$; $\sigma_{0,122}^{\infty} = p$; $p/\mu = 0.1$ приведено распределение главной компоненты тензора полных истинных напряжений $\sigma_{0,2_1}/G$. Свойства материала матрицы описываются потенциалом Муни. Отношение большой полуоси отверстия к стороне матрицы 1:20.

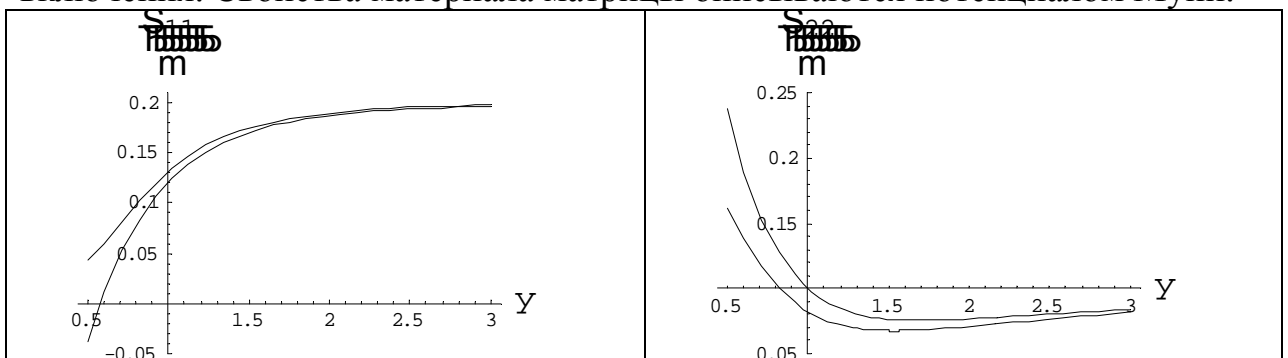


Распределение первой главной компоненты тензора истинных напряжений между полостями ($\sigma_{0,2_1}/G$)



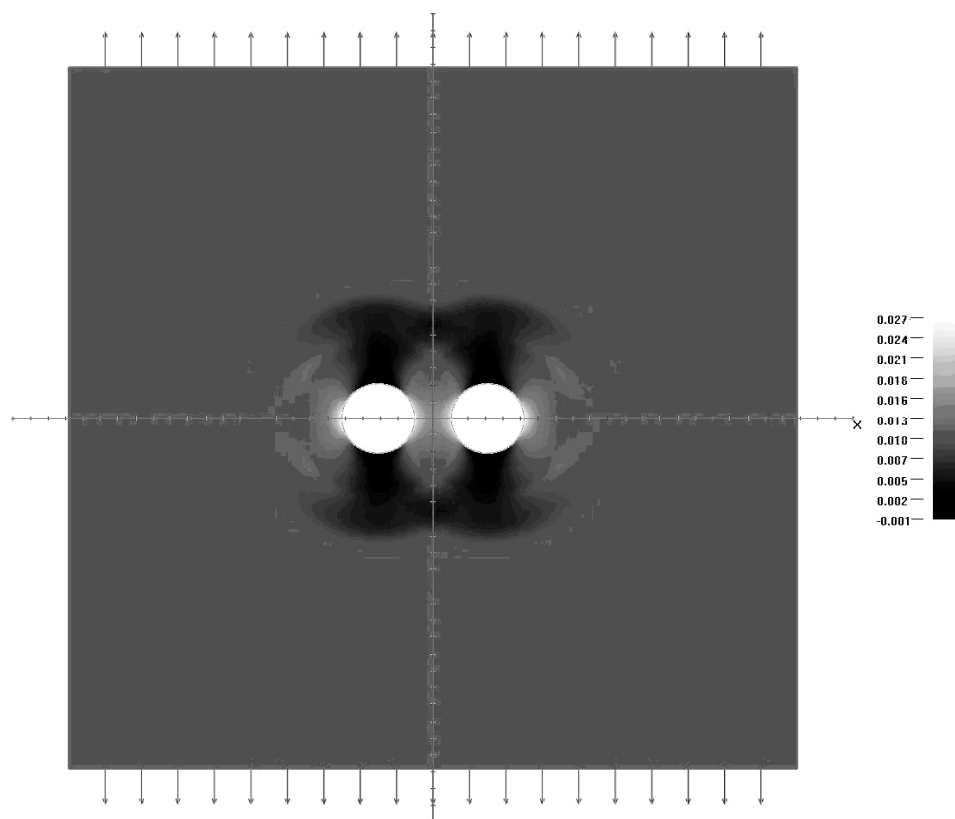
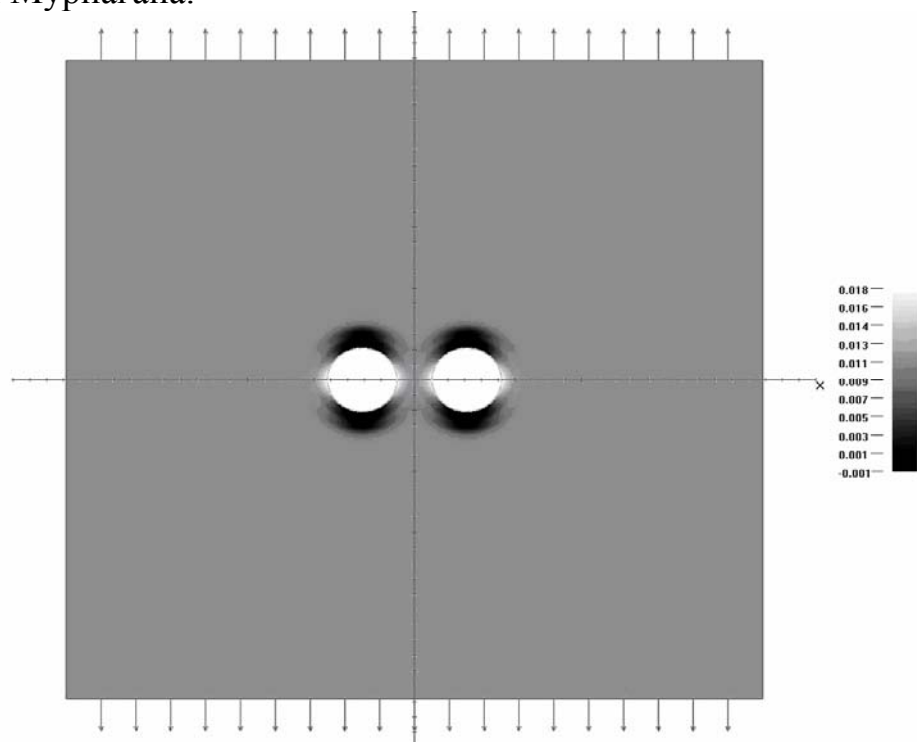
В 3.1.5 приведено приближенное аналитическое решение методом Синьорини задачи об образовании в бесконечно протяженном теле жесткого эллиптического включения. На приведенных ниже рисунках для случая начальных нагрузок на бесконечности $\sigma_{0,1,1}^{\infty} = p$, $\sigma_{0,1,2}^{\infty} = \frac{p}{2}$, $\sigma_{0,1,2,2}^{\infty} = \frac{p}{2}$; $\frac{p}{\mu} = \frac{1}{5}$ со следующими значениями параметров: $\mu = 2.51228$, $\beta = -2.63905$;

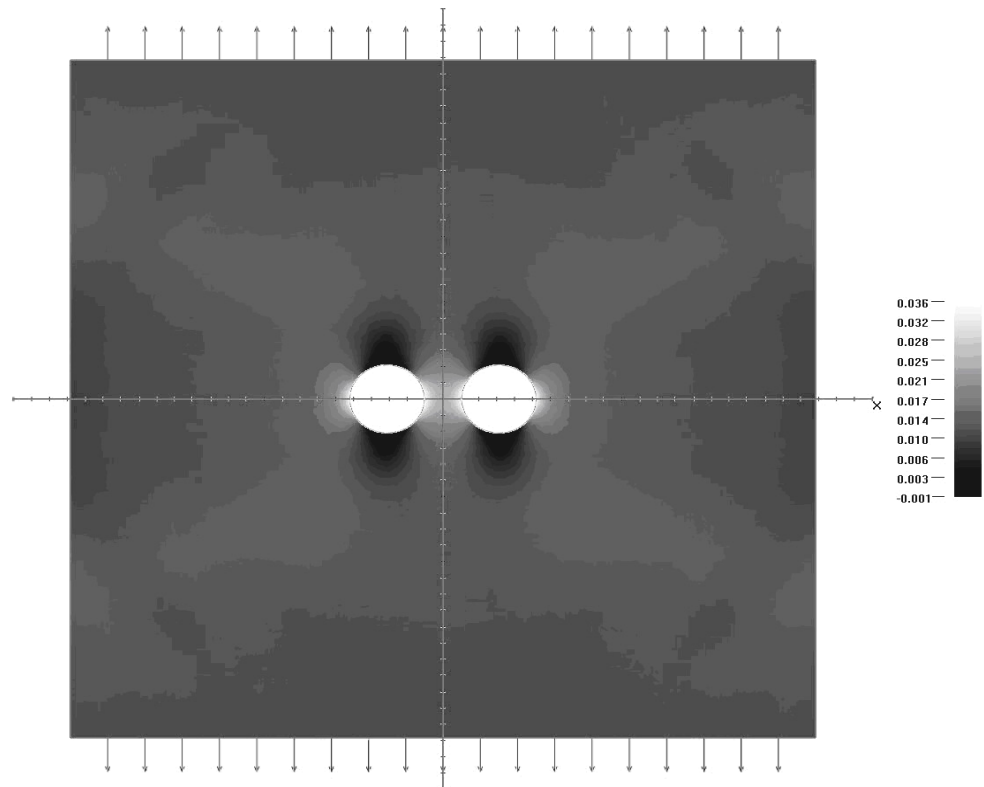
приведено распределение $\frac{\Sigma_{11}}{\mu_{matrix}}$ и $\frac{\Sigma_{22}}{\mu_{matrix}}$ матрицы при удалении от включения. Свойства материала матрицы описываются потенциалом Муни.



В 3.1.7 рассмотрена динамическая задача об одновременном образовании (с учетом динамических эффектов) в предварительно нагруженном теле двух круговых отверстий. На приведенных ниже рисунках для случая начального всестороннего растяжения при $\lambda / G = 2.097$, $C_3/G = -0.0689$, $C_4/G = -0.37464$, $C_5/G = 0.33709$; $\sigma_{0,1,1}^{\infty}/G = p$, $\sigma_{0,1,2}^{\infty}/G = p$; $p/G = 0.01$

приведено распределение первой главной компоненты тензора полных истинных напряжений $\sigma_{0,2_1}/G$ в различные моменты времени, начиная с момента образования. Свойства материала матрицы описываются потенциалом Мурнагана.





В п.3.2 рассматриваются примеры решенных трехмерных задач. В 3.2.4 рассматривается задача об образовании шарового включения с последующим образованием внутренних слоев. Ниже приведены результаты решения задачи для случая образования трех слоев (трех «вложенных» включений) при начальном одноосном растяжении $\rho = G/20$. Радиусы включений заданы в момент их образования $R_3 = 0.8R_2$, $R_2 = 0.8R_1$. Отношение R_1 к стороне матрицы принято равным 1:20. Приведены результаты решения (поле распределения полных истинных напряжений $\sigma_{0,n_1} / G$ в плоскости xOy) для случая, когда материал тела (матрицы) - материал Мурнагана с константами $\lambda / G = 2.097$, $C_3/G = -0.0689$, $C_4/G = -0.37464$, $C_5/G = 0.33709$, материал первого включения - материал Мурнагана $\lambda/G_1 = 2.24$; $C_3/G_1 = -1.96$, $C_4/G_1 = 3.61$, $C_5/G_1 = -11.13$ и $G/G_1 = 0.39$. Материал второго включения соответствует материалу первого при пористости 0.06, а третьего включения соответствует материалу первого при пористости 0.18.

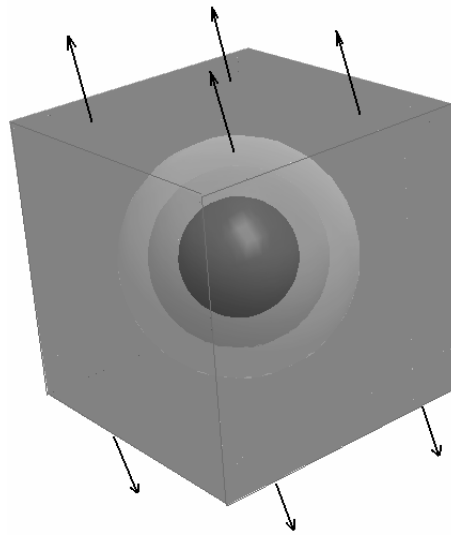
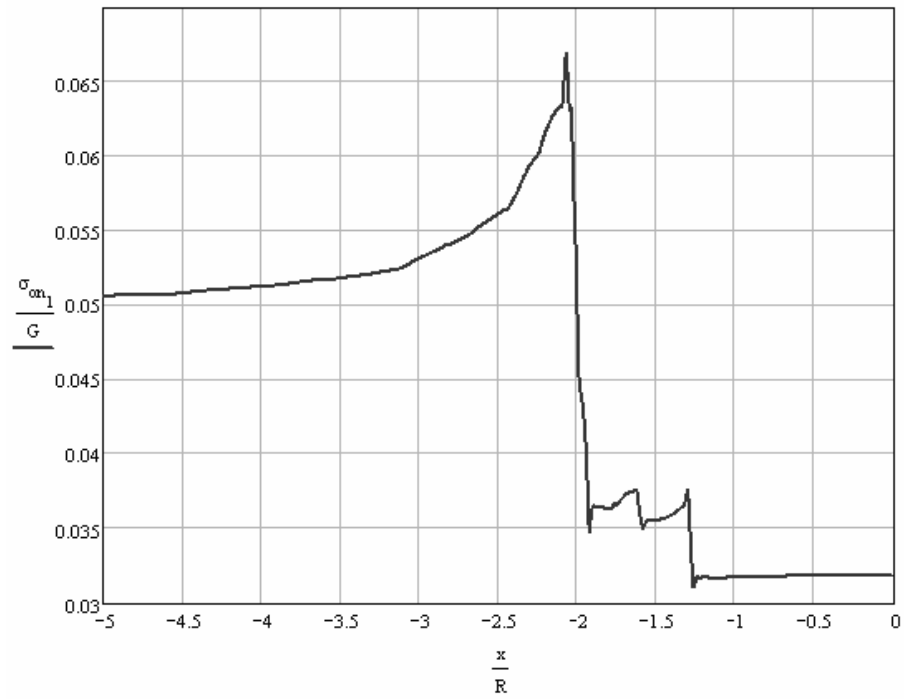
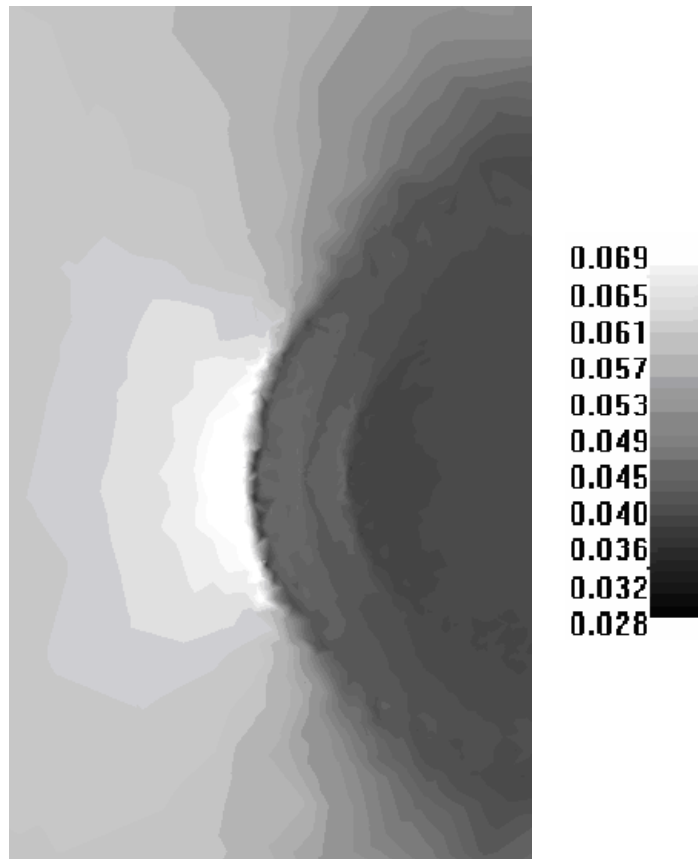


Схема нагружения

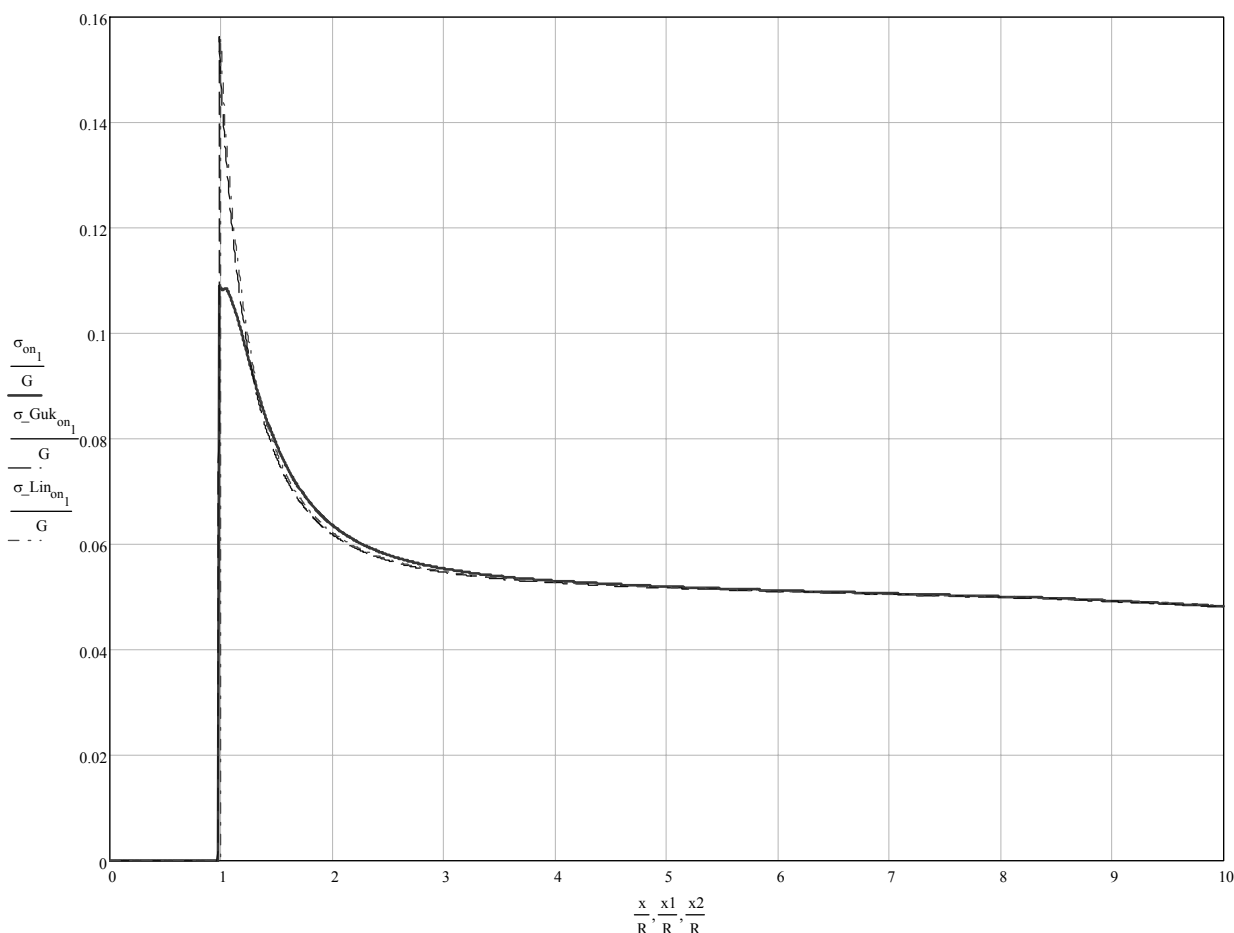
изменение $\sigma_{0, n_1} / G$ вдоль оси OX



поле распределения $\sigma_{0,n_1} / G$ в плоскости xOy

В п.3.3 анализируется влияние нелинейных эффектов и зависимость получаемого решения от размеров конечноэлементной сетки. Приводится сравнение решений, полученных разными методами. В 3.3.3 приводится сравнение линейных и нелинейных решений. Рассматривается влияние как физической, так и геометрической нелинейностей.

Ниже приведены результаты решения задачи о растяжении квадратной матрицы с круговым отверстием при одноосном растяжении $p=G/20$. На графике представлено изменение полных истинных напряжений $\sigma_{0,n_1} / G$ вдоль оси Ox для случая, когда материал тела (матрицы) - материал Мурнагана с константами $\lambda / G = 2.24$, $C_3/G = -1.96$, $C_4/G = 3.61$, $C_5/G = -11.13$.



-.-.- - линейное решение (закон Гука и малые деформации)

- - - - - нелинейное решение (закон Гука и конечные деформации)

_____ - нелинейное решение (потенциал Мурнагана и конечные деформации)

Таким образом, разница между линейным и нелинейным решениями в точке максимальной концентрации напряжений составляет порядка 30%. Кроме того, отметим смещение точки максимальной концентрации напряжений от вершины носика полости.

Основные результаты и выводы диссертационной работы

1. Решены при конечных деформациях плоские и пространственные задачи о последовательном образовании концентраторов напряжений в нагруженном теле. На их основе решены модельные задачи о росте концентраторов напряжений в предварительно нагруженном теле для сжимаемых и несжимаемых материалов.

2. Разработан алгоритм решения поставленных плоских и пространственных задач, как при статическом, так и при динамическом нагружении. Разработано программное обеспечение для математической реализации алгоритма на базе МКЭ; получены приближенные аналитические решения плоской задачи о жестком эллиптическом (в момент образования) включении для разных типов нелинейно-упругих материалов. Разработан алгоритм и программное обеспечение для решения этой задачи на базе системы компьютерной алгебры «Mathematica 5.0» с использованием метода Синьорини.

3. Показано, что учет нелинейных эффектов в задачах такого типа является существенным. Выявлено, что разница между решениями, полученными для линейных и нелинейных определяющих соотношений и рассмотренными в работе, достигает 30%.

Публикации по теме диссертации

1. В. А. Левин, И. А. Мишин, А. В. Вершинин “Плоская задача об образовании включения в упругом нагруженном теле. Конечные деформации”, Вестник Московского Университета, серия 1, Математика. Механика. 2006 №1 с. 56-59.
2. В. А. Левин, А. В. Вершинин “О приближенном аналитическом решении плоской задачи о жестком эллиптическом включении, возникающем в нагруженном теле. Конечные деформации”, Известия ТулГУ, серия “Дифференциальные уравнения и прикладные задачи”, 2004, с. 151-157.
3. Левин В.А., Зингерман К.М., Вершинин А.В. “Сравнение аналитического и численного решения задачи о распределении напряжений вблизи включений и полостей, образованных в нагруженном нелинейно-упругом теле, при наложении конечных деформаций” Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Шестого Всероссийского семинара. – Казань: Казанский государственный университет, 2005. - с. 157-160
4. Василевский Ю., Вершинин А., Данилов А., Пленкин А. “Технология построения тетраэдральных сеток для областей, заданных в САПР” Матричные методы и технологии решения больших задач – Москва: Институт вычислительной математики РАН, 2005. – с. 21-32.
5. В. А. Левин, И. А. Мишин, А. В. Вершинин “Решение задачи об упругом или жестком включении, возникающем в предварительно нагруженном теле из высокоэластичного материала, с помощью программного комплекса “Наложение”. 15-й симпозиум “Проблемы шин и резинокордных композитов”, г. Москва, 18-22 октября 2004г., с.33.
6. А. В. Вершинин “Решение задач теории многократного наложения больших деформаций с помощью средств компьютерной алгебры”, г. Москва, МГУ, тезисы научной конференции “Ломоносовские чтения 2004”, с. 41.
7. В. А. Левин, И. А. Артюхин, А. В. Вершинин, Д. А. Улькин “Вариант модели для описания напряженно деформированного состояния тела из высокоэластичного материала после фазового перехода. Конечные деформации”, Тезисы докладов международной научной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Л.А.Толоконникова, стр. 184-185, Россия, Тула, 18-21 ноября 2003 г.
8. В. А. Левин, А. В. Вершинин “К оценке напряженного состояния вблизи жесткого эллиптического включения, возникшего в нагруженном нелинейно-упругом массиве. Конечные деформации”,

- материалы Международной конференции «Фундаментальные проблемы разработки нефтегазовых месторождений, добычи и транспортировки углеводородного сырья» г. Москва, 24-26 ноября 2004г., стр. 174.
9. В. А. Левин, А. В. Вершинин “О приближенном аналитическом решении плоской задачи о жестком эллиптическом включении, возникающем в нагруженном теле. Конечные деформации”, сборник Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", Россия, Тула, 17-19 ноября 2004 г., стр. 107-108.
 10. В. А. Левин, И. А. Мишин, Е. А. Рыбалка, А. В. Вершинин “К расчету напряженного состояния массива при образовании в нем полости или включения с помощью авторского программного комплекса для аналитических вычислений на ЭВМ “Наложение”. Конечные деформации”, 6-я научно-техническая конференция, посвященная 75-летию Российского государственного университета нефти и газа им. И. М. Губкина, г. Москва, 26-27 января 2005 г., стр. 414-415.
 11. А. В. Вершинин “Об использовании МКЭ для решения задач теории многократного наложения больших деформаций”, тезисы научной конференции “Ломоносовские чтения 2005”, 19 апреля 2005 г., г. Москва, МГУ, с. 43.
 12. В. А. Левин, А. В. Вершинин “Плоская задача о разгрузке тела из нелинейно-упругого материала после возникновения в нем зоны предразрушения. Конечные деформации”. Сборник тезисов Международной научной конференции “Современные проблемы математики, механики, информатики”, Россия, Тула, 22-26 ноября 2005 г., стр. 223-224.
 13. В. А. Левин, А. В. Вершинин, Е. И. Фрейман, Е. Д. Комолова “К оценке микронапряжений при моделировании свойств наноматериалов в рамках механики деформируемого твердого тела при конечных деформациях”. Сборник тезисов Международной научной конференции “Современные проблемы математики, механики, информатики”, Россия, Тула, 22-26 ноября 2005 г., стр. 224-225.
 14. В. А. Левин, К. М. Зингерман, Е. В. Рыбалка, А. В. Вершинин “Сравнение конечно-элементного и приближенного аналитического решения некоторых плоских задач теории многократного наложения больших деформаций”. Сборник тезисов Международной научной конференции “Современные проблемы математики, механики, информатики”, Россия, Тула, 22-26 ноября 2005 г., стр. 225-226.
 15. В. А. Левин, А. В. Вершинин “Решение одной модельной динамической задачи теории многократного наложения больших деформаций с помощью программного комплекса "Наложение". Тезисы научной конференции “Ломоносовские чтения 2006”, 18 апреля 2006 г., г. Москва, МГУ, с. 44-45.

16. В.А. Левин, А.В. Вершинин, Пекарь Г.Е., Саяхова Л.Ф., Труфен К.Н., Яковлев М.А. “Использование нелокального критерия прочности в задачах теории многократного наложения больших деформаций. Решение модельных задач с помощью программного комплекса "Наложение". Тезисы научной конференции “Ломоносовские чтения 2006”, 18 апреля 2006 г., г. Москва, МГУ, с. 45.
17. В.А. Левин, А.В. Вершинин, Фрейман Е.И., Комолова Е.Д. “Результаты решения плоских задач теории многократного наложения больших деформаций с помощью программного комплекса "Наложение". Тезисы научной конференции “Ломоносовские чтения 2006”, 18 апреля 2006 г., г. Москва, МГУ, с.43-44.
18. Левин В.А., Вершинин А.В. “Программный комплекс “Наложение” на базе МКЭ”. Тезисы научной конференции “Ломоносовские чтения” 2006, 18 апреля 2006 г., г. Москва, МГУ, с. 44.
19. Левин В.А., Зингерман К.М., Вершинин А.В. “Программный комплекс для численного решения динамических задач об образовании повреждений в нагруженных нелинейно-упругих телах при наложении больших деформаций”. // Проблемы шин и резинокордных композитов. Материалы 17-го симпозиума. - М.: Научно-технический центр "НИИШП", 2006. Т.1. С. 214-217.
20. В.А. Левин, В.В. Калинин, К.М. Зингерман, А.В. Вершинин Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. М. ФИЗМАТЛИТ. 2007. 392с. (в печати)
21. В.А. Левин, В.В. Калинин, А.В. Вершинин, Г.Е. Пекарь Решение плоской задачи о концентраторе напряжений произвольной формы, образованном в нагруженном теле. Конечные деформации. Известия Тульского государственного университета. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи". Том 12. Вып. 1. 2006г. с. 167-172
22. В.А. Левин, А.В. Вершинин Авторский программный комплекс наложение и его использование для решения плоских и пространственных статических и динамических задач для предварительно нагруженных тел при конечных деформациях. Известия Тульского государственного университета. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи". Том 12. Вып. 1. 2006г. с. 145-166