

На правах рукописи

ЯКУНИНА ГАЛИНА ЕВГЕНЬЕВНА

**ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТЕЛА И ОСОБЕННОСТИ
ИХ ДВИЖЕНИЯ В РАМКАХ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СРЕДЫ И ТЕЛА**

01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2006

Работа выполнена в Центральном институте авиационного моторостроения им. П.И. Баранова и Научно-исследовательском институте механики МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор Крайко А.Н.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, академик РАН Левин В.А.,

доктор физико-математических наук, профессор Лунев В.В.,

доктор физико-математических наук Зубов В.И.

Ведущая организация:

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН

Защита состоится «___» _____ 2007 г. в _____ на заседании диссертационного совета Д501.001.89 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва ГСП-2, Воробьевы Горы, главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан «___» _____ 2007 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д501.001.89

доктор физ.- мат. наук

Осипцов А.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы

Построение тела, оптимального по одной из интегральных характеристик движения (сопротивлению или длине траектории инерционного движения), и исследование устойчивости его движения, являются актуальными проблемами механики. Интерес к этой области науки обусловлен, прежде всего, нуждами авиационно-космической промышленности и связан с необходимостью совершенствования ракетной и авиационной техники.

Решения задач оптимизации формы тела по интегральным характеристикам движения возможны лишь при наличии соотношений, явно связывающих силы, действующие на поверхности контакта среды и тела, с формой его поверхности. Параметры среды при обтекании тела находятся из решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных, которая на основе выбранной модели среды дополнена уравнениями состояния и соотношениями на сильных разрывах. Задача оптимизации формы тела в постановке, базирующейся на точных уравнениях такого рода, для большинства сред практически неразрешима. В этих случаях естественно искать упрощения, позволяющие найти приближенное решение. В первую очередь они делаются для сил, действующих на поверхности тела, для которых используются формулы, полученные из приближенных моделей.

Для оценочных расчетов сил, действующих на тело при его высокоскоростном движении в газе и плотных средах, широкое распространение получили формулы, найденные из локальных моделей. В основе этих моделей лежит предположение, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения. Эта зависимость может включать в себя скорость движения и характеристики среды, которые считаются постоянными. Примером такой зависимости является формула Ньютона, широко

используемая в гиперзвуковой аэродинамике для оценочных расчетов распределения давления на поверхности тела. При расчете напряжений на поверхности тела при его движении в плотных средах, таких как грунт и металл, хорошо зарекомендовали себя двучленные формулы, квадратичные по скорости, с постоянным слагаемым, характеризующим прочность среды. Использование таких формул позволяет записать силы, действующие на тело, в виде интегралов по его поверхности, которые дают связь сил с формой тела и методами вариационного исчисления могут быть исследованы на экстремум.

В предположении о локальном характере взаимодействия среды с элементом поверхности тела задача оптимизации пространственной формы тела по одной из интегральных характеристик движения была предметом многочисленных исследований. Однако даже в рамках конкретных законов сопротивления решение этой задачи непрямыми методами вариационного исчисления было найдено лишь при упрощающих предположениях относительно геометрии тела. Так, в большинстве случаев рассматривались тонкие, конические или гомотетичные тела, когда, сужая класс допустимых поверхностей, удавалось свести уравнения Эйлера к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Задача об оптимальной пространственной форме тела без ограничений на его геометрию и без ограничений на вид функции, задающей модель локального взаимодействия среды с поверхностью тела, до сих пор остается актуальной.

Оптимальные формы строятся при прямолинейном движении тела. Движение тела в реальной среде может быть возмущенным, и тогда, как показывают результаты теоретических и экспериментальных исследований, скорость центра масс тела может сильно отклоняться от своего начального направления, а траектория движения тела иметь изогнутый вид. Рост возмущений может привести к опрокидыванию тела, и тогда достижение теоретически предсказываемых характеристик движения невозможно. Лишь в случае, когда прямолинейное движение оптимального тела устойчиво к малым

возмущениям начальных значений параметров движения, возможно эффективное использование тела для получения оптимальных характеристик. Исследование влияния возмущений на характеристики движения тела и поиск критерия его устойчивости – важные этапы изучения свойств оптимальных тел, результаты которых должны учитываться при построении их формы.

Решению актуальной проблемы – построению пространственных тел минимального сопротивления и тел с максимальной длиной траектории инерционного движения в средах, когда взаимодействие среды с элементом поверхности тела можно записать в рамках локальной модели, посвящена настоящая диссертация, в которой впервые задачи поиска оптимальных форм решались без упрощающих ограничений на геометрию тела и исследовались вопросы устойчивости движения оптимальных тел.

Работа выполнялась в соответствии с темами научной школы, руководимой профессором, д.ф.-м.н. А.Н. Крайко (проекты НШ-2124.2003.1 и НШ-9902.2006.1 Государственной программы поддержки ведущих научных школ), и проектов, поддержанных Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 01-01-00193 и 04-01-00771), руководимых автором.

Цель и задачи работы

Цель работы – при известном законе сопротивления, записанном в рамках модели локального взаимодействия (МЛВ) элемента поверхности тела со средой, и заданных начальных и изопериметрических условиях найти оптимальные пространственные формы тела и определить условия, при которых их прямолинейное движение в среде будет устойчивым.

Конкретные задачи состояли в следующем:

- постановка и решение вариационных задач построения пространственных форм, которые для конкретных законов сопротивления, записанных в рамках МЛВ, и заданных начальных и изопериметрических условиях обеспечивают

экстремум одной из интегральных характеристик движения (сопротивлению или длине траектории инерционного движения);

- сравнительный анализ эффективности использования оптимальных пространственных форм и тел, найденных ранее при упрощающих предположениях, для различных интегральных характеристик движения и разных законов сопротивления;
- исследование особенностей движения оптимальных тел, поиск критерия устойчивости их прямолинейного движения и разработка рекомендаций по увеличению запаса устойчивости их движения;
- численное моделирование трехмерного движения пространственного тела в среде при разных начальных условиях движения и различных модификациях закона сопротивления, записанного в рамках МЛВ;
- численная апробация аналитических результатов и исследование влияния модификаций модели взаимодействия среды и тела на характер его движения.

Научная новизна работы

Автором впервые получены и выносятся на защиту следующие основные теоретические результаты:

1. Найден принципально новые решения задачи о пространственной форме тела минимального сопротивления. Задача решена для произвольного закона сопротивления, записанного в рамках МЛВ, при заданных площади основания и ограничениях на длину и поперечные размеры тела без упрощающих предположений на его геометрию. Показано, что задача имеет бесконечное множество решений, а формы оптимальных тел образуются из участков поверхностей, нормаль к которым составляет с направлением движения некоторый постоянный оптимальный угол.
2. Создан новый метод построения оптимальных тел, позволяющий строить пространственные конфигурации, удовлетворяющие самым разным

требованиям практики. Он основан на непрерывном сопряжении участков поверхности кругового конуса, имеющего оптимальный угол раствора, и касающихся его плоскостей. Используя метод, можно строить оптимальные самолетоподобные тела, тела заданной длины с оперением и тела с формой основания в виде круга.

3. Впервые без упрощающих предположений на геометрию тела в рамках двучленной МЛВ, когда напряжения на поверхности тела описываются двучленными квадратичными по скорости формулами, найдено новое решение задачи о пространственной форме тел с максимальной длиной траектории инерционного движения. Показано, что структура поверхности этих тел та же, что и у тел минимального сопротивления, найденных на начальном этапе движения, но оптимальный угол, используемый при их построении, в общем случае другой.
4. При безотрывном обтекании тел в рамках двучленной МЛВ построена асимптотическая теория динамики тонких конических и пирамидальных тел и найдены критерии устойчивости их прямолинейного движения. Показано, что форма тела существенно влияет на устойчивость его движения, но при одинаковой форме тел и равных условиях погружения в среду более устойчивым будет движение тела с меньшей массой.
5. Впервые, используя результаты асимптотической теории динамики тонких тел, в рамках двучленной МЛВ исследованы проблемы устойчивости движения оптимальных конических и пирамидальных тел и определены области параметров, при которых прямолинейное движение этих тел устойчиво. Проведена классификация конических и пирамидальных оптимальных форм по устойчивости движения и определены области параметров, при которых при построении оптимального тела отдавать предпочтение следует той или иной его форме.

6. Впервые проведено исследование пространственного движения оптимальных пирамидальных и конических тел и выявлены характерные особенности их трехмерного движения. Показано, что критерий устойчивости, найденный для плоского движения тонких пирамидальных и конических тел, позволяет и в случае произвольного задания малых возмущений параметров прямолинейного движения определить характер их развития. При этом для устойчивого движения тела при пространственном развитии возмущений необходимо, чтобы критерий устойчивости выполнялся для него по всем плоскостям симметрии.
7. Впервые исследована проблема увеличения запаса устойчивости прямолинейного движения оптимальных пространственных тел и найдены способы ее решения. Показано, что формирование оперения у оптимальных тел позволяет увеличивать запас устойчивости тел и улучшать характеристики движения, приближая их к оптимальным значениям, найденным для тел при прямолинейном движении.

Достоверность результатов

Научные положения и выводы, содержащиеся в диссертации, обоснованы результатами теоретических и численных исследований, проведенных в работе, не противоречат известным положениям механики и газовой динамики и согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Научно-практическое значение работы

Созданный и развитый автором метод построения оптимальных пространственных тел дает возможность конструировать бесконечное множество тел, удовлетворяющих самым разнообразным требованиям практики. Используя метод, можно строить оптимальные самолетоподобные тела и тела с формой основания в виде круга. Оптимальные формы с круговым

основанием можно непрерывно сопрягать с цилиндрическим корпусом летательного аппарата и использовать при построении головных частей ракет. Полученные в работе теоретические результаты по исследованию характеристик движения оптимальных тел позволяют понять и дать оценку многим явлениям, наблюдаемым в экспериментах по динамике тел. В частности, из экспериментальных данных известно, что звездообразные тела, обладая меньшим сопротивлением, движутся в среде менее устойчиво, чем эквивалентные им по изопериметрическим условиям осесимметричные тела. Построенная теория динамики тел объясняет этот факт: запас устойчивости звездообразного тела всегда меньше запаса устойчивости эквивалентного ему конуса. На основе полученных результатов составлена классификация оптимальных конических и пирамидальных форм по типам движений и определены области параметров, в которых по устойчивости движения отдавать предпочтение следует той или иной форме тела. Такие сведения необходимы и могут служить ориентирами при планировании и проведении экспериментов по изучению характеристик движения оптимальных тел в разных средах.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы неоднократно представлялись и докладывались на всероссийских и международных конференциях. Так, они представлялись на XXV Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королева (Москва, 2001); 10th International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference (Kyoto, Japan, 2001); IX, X, XI и XIII школах-семинарах «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2001, 2002, 2003, 2005); Всероссийской конференции, посвященной 80-летию академика Г.Г. Черного, «Аэродинамика и газовая динамика в XXI веке» (Москва, 2003); III, IV, V и VI Международных школах-семинарах «Модели и методы аэродинамики» (Евпатория, 2003, 2004,

2005, 2006); X Всероссийской школе-семинаре «Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа» (САМГОП - 2004), (Новороссийск, 2004); VIII и IX Всероссийских съездах по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001; Нижний Новгород, 2006).

Результаты работы обсуждались в процессе их получения на многих научных семинарах, руководимых ведущими учеными России. Они обсуждались и были одобрены на семинаре ЦИАМ (Москва), руководимом академиком РАН А.Н. Крайко; семинаре Института механики МГУ (Москва) под руководством академика РАН Г.Г. Черного; семинаре Института проблем механики (Москва), руководимом академиком РАН Ф.Л. Черноусько; и семинаре Института механики МГУ (Москва) под руководством академика РАН С.С. Григоряна.

Всем коллегам, принимавшим участие в дискуссиях, автор выражает искреннюю признательность.

Публикации и личный вклад автора

Все результаты, представленные в работе, получены лично автором либо при ее непосредственном участии. По теме диссертации опубликовано 20 печатных работ (11 из них без соавторов) и 1 монография в соавторстве с А.Н. Крайко и Д.Е. Пудовиковым. Научные работы автора были дважды отмечены редколлегией журнала «Прикладная математика и механика» премиями как лучшие работы года (за 2000 и 2003 гг.). Качество проведенного исследования соответствует мировому уровню, и это подтверждается публикациями автора в иностранных журналах.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. В каждой главе перед изложением собственных результатов дается краткий литературный обзор и формулируются задачи исследования. В конце каждой

главы приводится перечень основных выводов и результатов, полученных в ней. Работа изложена на 275 страницах и включает в себя 53 рисунка. Список цитируемой литературы содержит 144 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение.

Во введении показана актуальность темы диссертационной работы, сформулированы основные задачи исследования, описана структура работы и приведены темы исследований, рассмотренные в каждой главе.

Глава 1 имеет обзорный характер, в ней исследуется проблема выбора и обоснования моделей силового взаимодействия среды и тела, при которых сила, действующая на тело со стороны среды, может быть представлена в явной зависимости от формы тела.

Глава 2 посвящена решению задачи построения пространственных тел минимального сопротивления в рамках модели локального взаимодействия (МЛВ) среды и тела без упрощающих ограничений на геометрию тела и вид функций, задающих закон распределения напряжений по поверхности тела.

В главе 3 в рамках двучленной МЛВ решается проблема построения пространственных форм, имеющих при прямолинейном инерционном движении в среде максимальную длину траектории.

В главе 4 в рамках двучленной МЛВ, учитывая особенности построения оптимальных пространственных конфигураций, исследуются характеристики плоского и пространственного движения оптимальных конических и пирамидальных тел и ищется критерий устойчивости их прямолинейного движения.

Глава 1. Модель взаимодействия среды и тела.

Глава 1 состоит из двух параграфов и выводов, данных в ее конце.

Первый параграф посвящен обзору исследований, где проводился выбор и обоснование моделей силового взаимодействия тела со средой при его движении в газе различной разреженности. Рассмотрен весь диапазон высот полета тела в атмосфере Земли от гиперзвукового движения тела в «плотном» газе до движения тела в разреженном свободномолекулярном потоке газа. Показано, что в основе моделей, при которых сила, действующая на тело со стороны среды, может быть представлена в явной зависимости от формы его поверхности, лежат предположения о локальном характере взаимодействия каждого элемента поверхности тела со средой и независимости такого взаимодействия от других участков тела. Выписаны общие свойства таких моделей, которые позволяют выделить их в отдельный класс моделей, названных ранее *моделями локального взаимодействия* (МЛВ). Кратко эти свойства можно сформулировать в следующем виде.

Свойство 1. Тело взаимодействует со средой только своей освещенной частью поверхности, на которой выполнено условие

$$\alpha = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \geq 0 \quad (1)$$

где \mathbf{n} и \mathbf{x} – единичные векторы внутренней нормали к элементу поверхности тела и скорости потока соответственно.

Свойство 2. Каждый элемент освещенной поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела.

Свойство 3. Вектор силы \mathbf{f} , действующей на элемент поверхности тела со стороны среды, лежит в плоскости векторов \mathbf{n} и \mathbf{x} , а количественная характеристика этой силы определяется только углом между векторами \mathbf{n} и \mathbf{x} и глобальными параметрами, характеризующими общие свойства среды и поверхности тела.

В рамках МЛВ нормальные и касательные напряжения f_n и f_τ на поверхности тела представляются в виде

$$f_n = f_n(\alpha, q) \geq 0, \quad f_\tau = f_\tau(\alpha, q) \geq 0 \quad (2)$$

где q – скоростной напор.

В общем случае в выражения (2) могут входить параметры потока, которые считаются постоянными. Примером записи нормальных напряжений f_n в виде (2) служит формула Ньютона: $f_n = 2q\alpha^2$, широко используемая в гиперзвуковой аэродинамике для оценочных расчетов распределения давления на поверхности тела при его движении в «плотном» газе.

В рамках МЛВ направление касательного вектора τ для каждого элемента поверхности выбирается по направлению скорости движения частиц среды после столкновения их с поверхностью тела, что с учетом перечисленных выше свойств позволяет представить силу, действующую на тело со стороны потока, в явной зависимости от формы тела.

При прямолинейном движении тела силу F_1 , действующую на тело со стороны среды, используя выражения (2), можно записать в виде

$$F_1 = \iint_S f(\alpha, q) \alpha dS \quad (3)$$

$$f(\alpha, q) = f_n(\alpha, q) + f_\tau(\alpha, q)(1 - \alpha^2)^{1/2}/\alpha \quad (4)$$

Конкретная модель записи напряжений (2) определяет вид функции (4) и закон сопротивления (3). Интегрирование в выражении (3) ведется по части поверхности тела S , на которой выполнено условие (1). В результате, в рамках МЛВ при известном законе сопротивления (3) появляется возможность при изменении формы тела анализировать значения функционала сопротивления F_1 и искать его экстремумы.

Во втором параграфе проведен обзор моделей силового воздействия среды на тело, наиболее часто используемых при исследовании высокоскоростного движения тела в плотных средах типа грунтов, бетона и металла. Показано, что в этом случае, как и при движении тела в газе, модели, основанные на локальном характере взаимодействия элемента поверхности тела со средой, могут быть использованы для описания действующих на тело сил. Учитывая результаты многочисленных теоретических и

экспериментальных исследований, показано, что наиболее часто для оценочных расчетов сил используются двучленные формулы записи напряжений:

$$f_n = A_1 U^2 \alpha^2 + C_1, \quad f_\tau = A_2 U^2 \alpha^2 + C_2 \quad (5)$$

где U – скорость движения тела, а параметры A_i и C_i ($i = 1, 2$) – постоянные коэффициенты, определяемые характеристиками среды. Для конкретных сред значения коэффициентов находятся либо из решения модельных задач, либо определяются экспериментально. Модель (5) является частным случаем записи напряжений в рамках общей модели (2), что позволяет, как и при движении тела в газе, представить силу сопротивления, действующую на тело со стороны среды, в виде интеграла (3).

В конце главы 1 подводится итог проведенного исследования и формулируются его выводы. Важнейшим результатом исследования является вывод о том, что для *определенных режимов взаимодействия тела со средой имеются теоретические и экспериментальные обоснования того, что напряжения на поверхности тела могут быть представлены в рамках МЛВ*. Такие представления напряжений допустимы для оценочных расчетов сил, действующих на тело при его гиперзвуковом движении в газе различной разреженности и при его высокоскоростном движении в плотных средах типа грунтов и металлов.

Глава 2. Пространственные тела минимального сопротивления.

Глава 2 посвящена решению задачи о пространственных формах тела минимального сопротивления и разработке методике построения оптимальных форм. Глава состоит из введения, четырех параграфов и перечня основных результатов исследования, приведенных в конце.

В *первом параграфе* дана постановка задачи. Предполагается, что тело движется в среде прямолинейно и напряжения на его поверхности можно записать в рамках МЛВ. Задача решается без упрощающих ограничений на геометрию тела и вид функций f_n и f_τ (2), задающих закон распределения

напряжений по поверхности тела. Считается, что площадь основания тела S_b задана, на основании выполнено условие $\alpha = -1$, а вся боковая поверхность тела S контактирует со средой. Такие поверхности тела S названы *допустимыми*, и они связаны с площадью основания S_b соотношением

$$S_b = \iint_S \alpha dS \quad (6)$$

Второй параграф посвящен решению задачи о теле минимального сопротивления и в нем доказаны два утверждения.

Утверждение 1. Для значений функционала сопротивления F_1 (3) в классе допустимых поверхностей S есть оценка: $F_1(S) \geq F_1^*$, где F_1^* - некоторая неотрицательная величина, зависящая от скорости движения, глобальных параметров модели, входящих в выражения (2), и заданной площади основания тела S_b .

Утверждение 2. Среди допустимых поверхностей S есть поверхности, на которых функционал F_1 достигает значения F_1^* , которое является его абсолютным минимумом.

Поверхности S , на которых функционал F_1 достигает минимума F_1^* , являются искомыми и их построение дает решение задачи о теле минимального сопротивления. При доказательстве утверждений показано, что величина F_1^* определяется выражением

$$F_1^* = S_b f^* = \iint_S f^* \alpha dS \quad (7)$$

где f^* - это глобальный минимум функции $f(\alpha, q)$ (4), который ищется при постоянном q и значениях $\alpha \in [0, 1]$.

Значение f^* функцией f всегда достигается и всегда есть величина $\alpha^* \in [0, 1]$ такая, что при $\alpha = \alpha^*$ значение $f^* = f(\alpha^*, q)$. Следовательно, минимум

сопротивления F_1^* (7) также всегда достигается, и его имеют тела на поверхности которых выполнено условие

$$\alpha = \alpha^* = \text{const} \quad (8)$$

Согласно условию (8) поверхность оптимального тела формируется из участков поверхностей, нормаль к которым составляет с направлением движения постоянный угол, величина которого определяется конкретным видом записи функции (4).

Простейшим телом, поверхность которого удовлетворяет условию (8), является круговой конус с углом раствора $2\beta^*$, где $\beta^* = \arcsin(\alpha^*)$. Поверхность конуса длины l^* :

$$l^* = R_b/t^*, \quad R_b = (S_b/\pi)^{1/2}, \quad t^* = \alpha^*/(1 - \alpha^{*2})^{1/2}$$

принадлежит классу допустимых, и при движении в среде такой конус будет иметь минимальное сопротивление F_1^* . Однако конус неединственное тело минимального сопротивления.

Доказывается, что можно построить бесконечное множество пространственных тел, поверхность которых удовлетворяет условиям (1), (6) и условию оптимальности (8). Все эти тела также имеют сопротивление F_1^* , меньше которого при заданной площади основания S_b получить нельзя. Класс таких тел назван классом *абсолютно-оптимальных тел* (АОТ).

Третий параграф главы 2 посвящен разработке методики построения АОТ при задании дополнительных ограничений на длину и поперечные размеры тела, которая основана на непрерывном сопряжении участков поверхности кругового конуса, имеющего оптимальный угол раствора, и касающихся его плоскостей.

Используя методику, можно строить оптимальные конические конфигурации, имеющие заданную длину l и удовлетворяющие заданным ограничениям на поперечные размеры. Поперечный контур этих тел может иметь звездообразную форму, и способ построения таких тел дан на рис. 1.

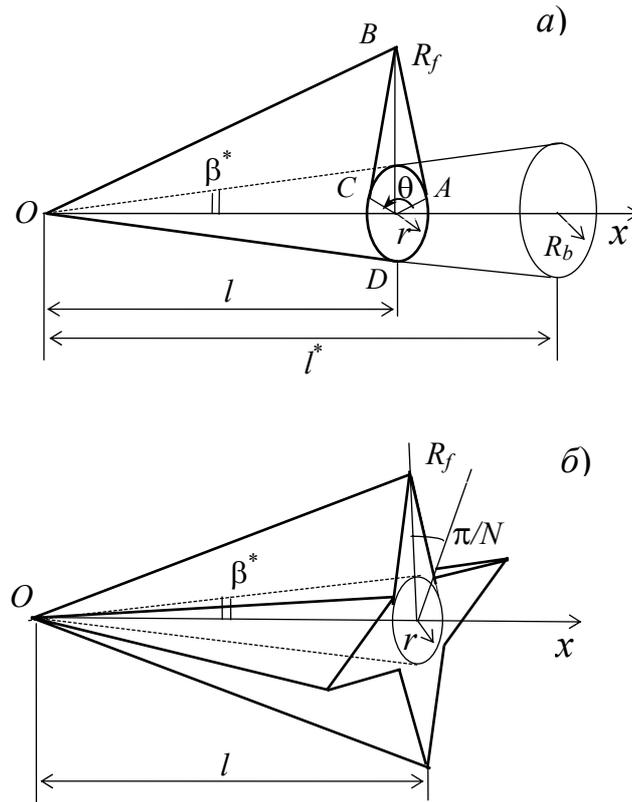


Рис. 1. Способы построения конических АОТ.

Можно увидеть, что звездообразное АОТ строится из N симметричных циклов, каждый из которых (см. рис. 1, а) состоит из участков двух плоскостей OAB и OBC , касательных к оптимальному конусу, и части поверхности $OADC$, принадлежащей конусу. Очевидно, что, увеличивая количество циклов N (см. рис. 1, б), при заданных длине и площади основания тела можно уменьшать максимальный радиус тела R_f и получать значения R_f , удовлетворяющие любым ограничениям.

Используя предложенный метод, можно строить и неконические АОТ. Примеры таких тел и способы их построения даны на рис. 2. Они формируются из участков поверхностей двух конических АОТ (см. формы 1 и 2 на рис. 2), вершины которых сдвинуты относительно друг друга на расстояние x_0 . Эти тела могут иметь самолетоподобную форму (см. рис. 2, а) и форму тела с круговым основанием (см. рис. 2, б). На практике АОТ с круговым основанием

могут быть головной частью заданной длины некоторого тела вращения. Пример сопряжения такого АОТ с цилиндрическим телом дан на рис. 2, в).

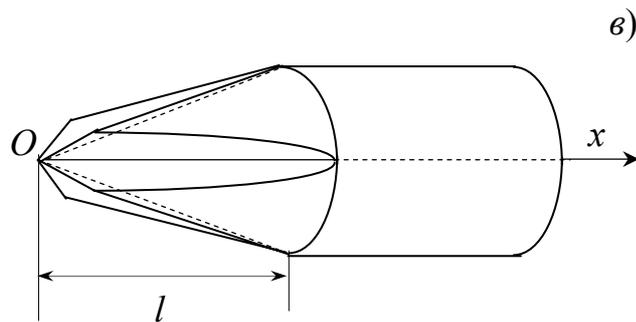
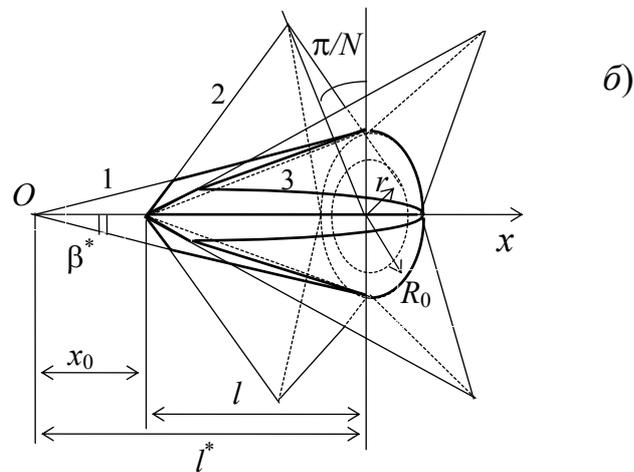
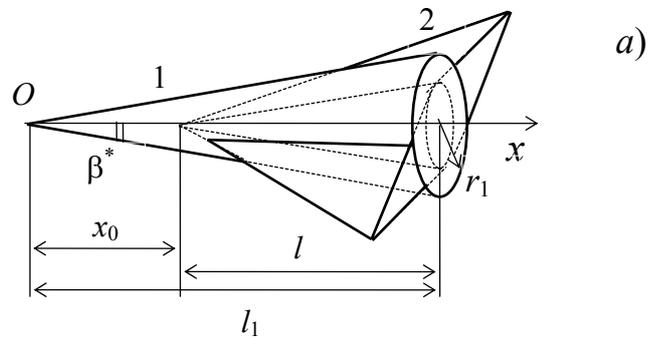


Рис. 2. Примеры и способы построения неконических АОТ.

Возможно и более сложное построение неконических форм АОТ. Одна из таких форм в проекциях на три взаимно перпендикулярные плоскости Oxy , Oxz и Oyz , показана на рис. 3.

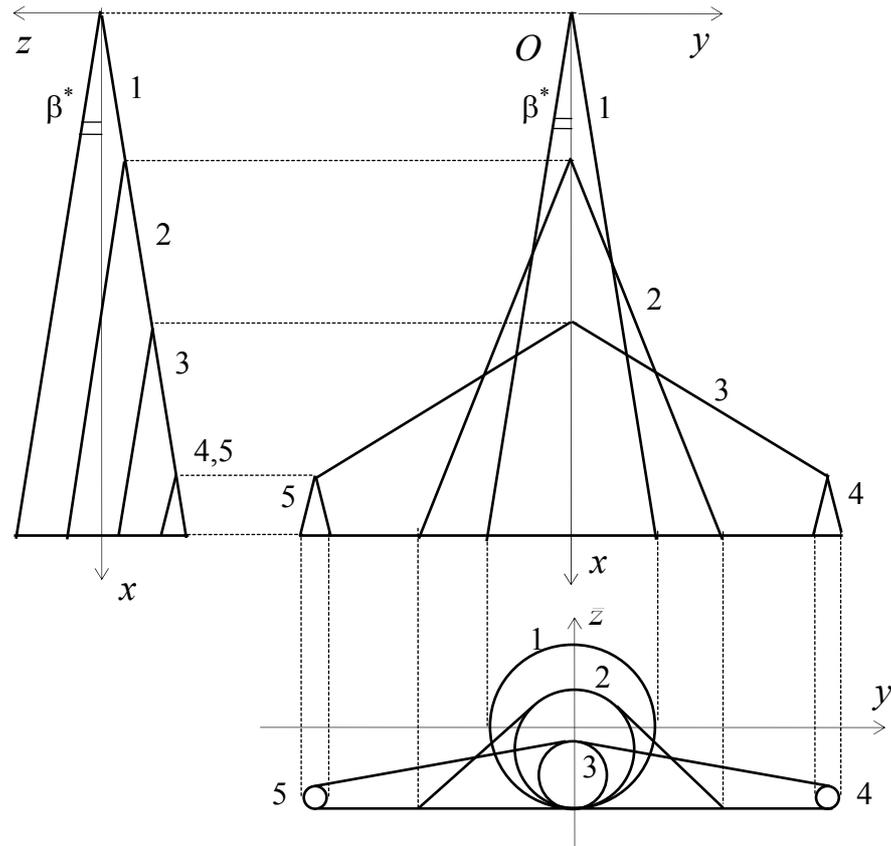


Рис. 3. Построение несимметричных АОТ.

Форма строится из участков поверхностей оптимальных конусов 1 - 5 и плоскостей, касающихся конусов 2 – 5. Такое АОТ имеет лишь одну плоскость симметрии Oxz .

Пространственные АОТ строятся при прямолинейном движении тела. Сила сопротивления F_1 на таких формах достигает абсолютного минимума F_1^* . В третьем параграфе главы 2 показано, что при прямолинейном движении тела, построенного при условии (8), даже при отсутствии у него симметрии сила, действующая на тело со стороны среды, не имеет составляющих в плоскости, перпендикулярной направлению движения.

В *четвертом параграфе* главы 2 проводится сравнение сопротивлений АОТ с сопротивлениями эквивалентных им по геометрическим характеристикам оптимальных осесимметричных и пространственных тел, найденных ранее для конкретных моделей записи напряжений (2) при

упрощающих предположениях. Сравнения проводятся для модели Ньютона с постоянным коэффициентом трения на поверхности тела, для модели свободномолекулярного потока и двучленной модели записи напряжений (5). Показано, что в рамках этих моделей при построении пространственных тел минимального сопротивления учет трения необходим, так как противном случае оптимальное значение $\alpha^* = 0$ и тела, построенные при условии (8), не имеют практического интереса.

Схематично формы оптимального конуса и поперечные контуры звездообразных АОТ при $\alpha^* \rightarrow 0$ приведены на рис. 4.

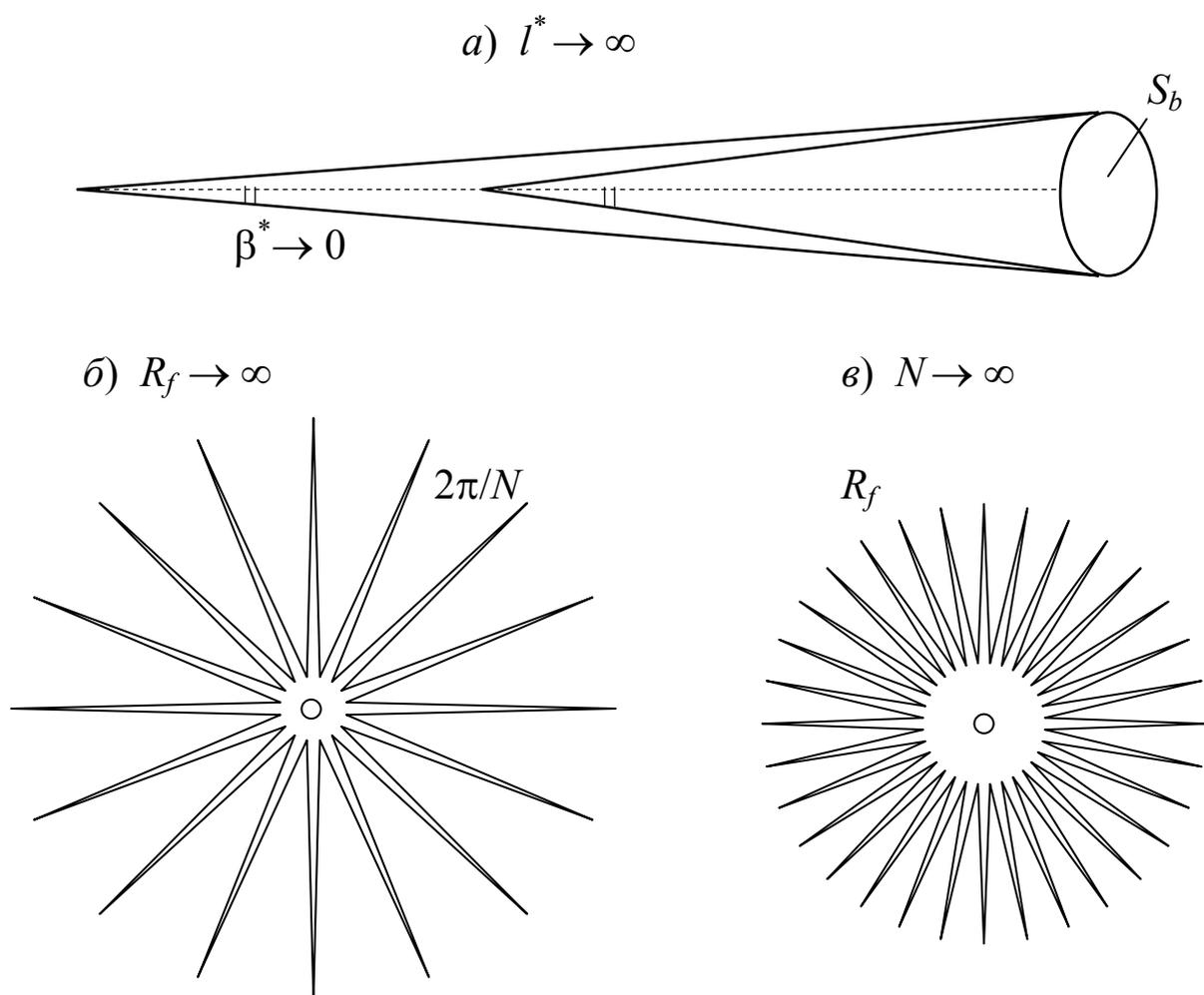


Рис. 4. Изменения форм оптимального конуса и поперечных контуров звездообразных АОТ при $\alpha^* \rightarrow 0$.

Можно увидеть, что так как в этом случае угол раствора оптимального конуса стремится к нулю ($2\beta^* \rightarrow 0$), то при заданной площади основания тела S_b длина конуса $l^* \rightarrow \infty$ (см. рис. 4, а). Задание ограничения на длину тела приводит к тому, что поперечные контуры звездообразных тел начинают стремиться к своей предельной форме, такой, что при заданном количестве циклов N значение $R_f \rightarrow \infty$ (см. рис. 4, б), а при заданном ограничении на R_f величина $N \rightarrow \infty$ (см. рис. 4, в). При нулевом трении предельная форма АОТ имеет нулевое сопротивление. Именно это обстоятельство являлось причиной того, что при поиске форм минимального сопротивления в этом случае вводились дополнительные ограничения на форму тел, при которых можно было получать тела, имеющие практический интерес. Эти ограничения необходимо делать как на количество циклов N , так и на величину максимального радиуса тела R_f .

При учете трения значение $\alpha^* > 0$ и, например, в рамках модели Ньютона с постоянным коэффициентом трения C_τ , $C_\tau = f_\tau/q$, в предположении, что тело тонкое ($\alpha^2 \ll 1$) величина $\alpha^* = (C_\tau/4)^{1/3}$. При значениях $C_\tau \sim 10^{-2} \dots 10^{-3}$, которые часто используются для оценочных расчетов сил трения, действующих на поверхности тел при их гиперзвуковом движении в газе, величина $\alpha^* \approx 0.1$. Оптимальный конус в этом случае имеет угол раствора $2\beta^* \approx 10^\circ$, и это позволяет строить пространственные АОТ, имеющие практический интерес.

Наиболее интересны с практической точки зрения АОТ с круговым основанием. Проведена оценка эффективности их использования для снижения сопротивления тел в сравнении с другими формами, имеющими круговое основание. Так, для модели Ньютона с постоянным коэффициентом трения на поверхности тела это можно сделать, если рассмотреть взаимное расположение кривых, изображенных на рис. 5, которые в зависимости от параметра трения K_f , $K_f = C_\tau/(4t^3)$, t – относительная толщина тела, для тонких тел ($t^2 \ll 1$) представляют значения C_x , $C_x = F_1/(qS_b t^2)$.

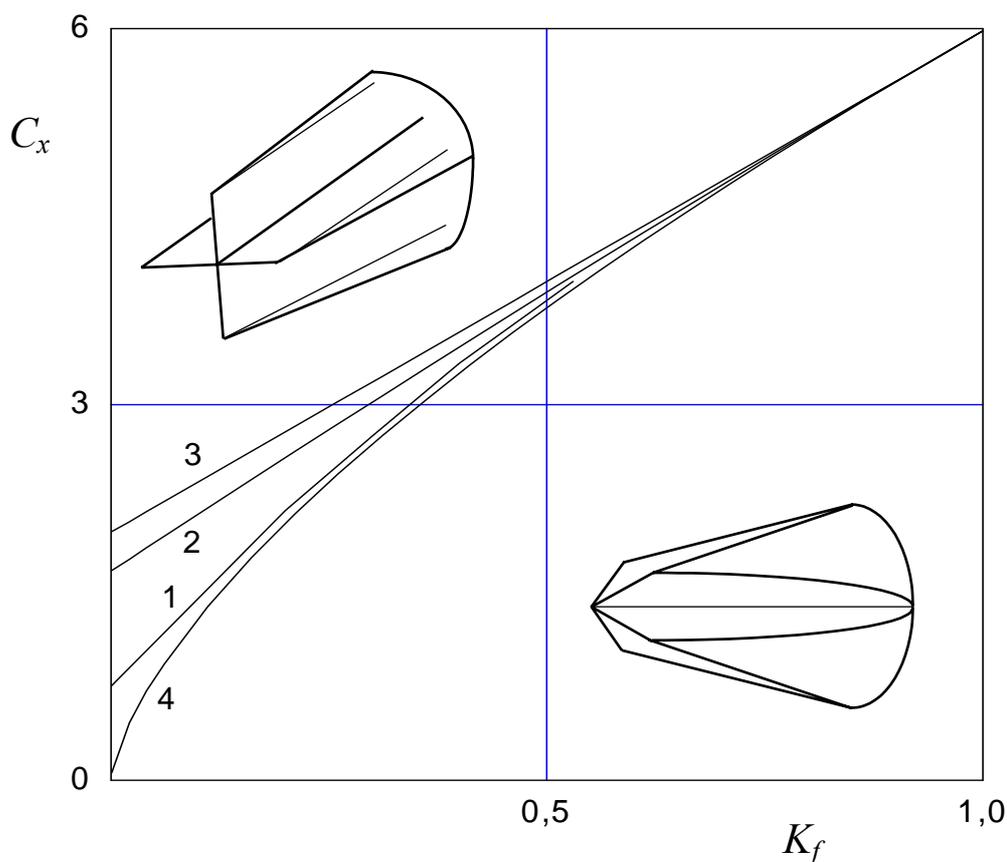


Рис. 5. Значения C_x для тел с круговым основанием.

На рис. 5 значения C_x даны для оптимальных линейчатых тел (кривая 1), оптимальных тел вращения (кривая 2), конусов (кривая 3) и АОТ (кривая 4). Примеры линейчатых поверхностей и АОТ с круговым основанием даны на рис. 5 в левом верхнем и правом нижнем углах соответственно.

При расчете напряжений, действующих на поверхности тел при их движении в плотных средах типа грунтов и металлов, наиболее часто используется двучленная МЛВ (5). Для записи касательных напряжений в этом случае используется одна из трех моделей:

- модель трения Кулона: $f_\tau = \mu_0 f_n$;

- модель постоянного трения: $f_\tau = \tau_s$;

- смешанная модель трения:

$$f_{\tau} = \begin{cases} \mu_0 f_n, & \text{если } \mu_0 f_n \leq \tau_s \\ \tau_s, & \text{если } \mu_0 f_n \geq \tau_s \end{cases}$$

Здесь μ_0 – постоянный коэффициент, а τ_s – предел текучести материала среды при сдвиге.

В последнем параграфе главы 2 для этих моделей выписываются соотношения, связывающие оптимальные значения $\alpha = \alpha^*$, доставляющие на отрезке $[0, 1]$ глобальный минимум функции $f(4)$, со скоростью движения тела и параметрами среды.

Глобальный минимум функции f ищется среди ее локальных и краевых экстремумов. Показано, что краевой минимум достигается лишь при $\alpha^* = 1$, и он становится глобальным тогда, когда параметр трения превышает некоторую предельную величину, зависящую от скорости движения тела и характеристик среды. В этом случае оптимальная форма тела становится *вырожденной*, и АОТ – это торец (пластина) заданной площади. При меньших параметрах трения значения $\alpha^* \leq 1/\sqrt{2}$, и АОТ имеет *регулярную форму* (см. формы на рис. 1 - 3), при построении которой используется круговой конус с полууглом раствора $\beta^* \leq 45^\circ$. Для указанных моделей трения проведено сравнение сопротивлений АОТ с сопротивлениями тел вращения, имеющими с оптимальным телом одинаковые длину и площадь основания. Показано, что в общем случае АОТ имеют меньшее сопротивление, чем тела вращения, и с ростом скорости движения эффективность использования АОТ для снижения сопротивления растет.

Глава 3. Пространственные тела с максимальной длиной траекторией инерционного движения.

Глава 3 посвящена решению задачи построения пространственных тел, имеющих при прямолинейном движении в среде максимальную длину траектории инерционного движения.

Глава состоит из введения, трех параграфов и перечня результатов.

В первом параграфе главы дается постановка задачи. Задача решается в рамках двучленной МЛВ (5) при условии, что масса тела и площадь его основания (6) заданы и нет упрощающих предположений на геометрию тела.

Во втором параграфе приводится решение задачи. Доказано, что поверхность искомым тел удовлетворяет условию (8) и формируется из участков поверхностей, нормаль к которым составляет с направлением движения постоянный угол. Задача имеет бесконечное множество решений, и структура поверхности оптимальных тел та же, что и у тел минимального сопротивления, найденных на начальном этапе движения (см. рис. 1 - 3). Следовательно, при построении тел с максимальной длиной траектории можно использовать методику построения, разработанную ранее для тел минимального сопротивления, но в общем случае оптимальный угол, используемый при их построении, другой.

В третьем параграфе для трех моделей трения (модели трения Кулона, модели постоянного трения и смешанной модели трения) найдены соотношения, связывающие оптимальные значения α^* с начальной скоростью движения тела и параметрами среды. Проведено сравнение длин траекторий построенных тел и длин траекторий тел вращения, наиболее часто используемых в экспериментах. Показано, что в общем случае построенные тела имеют большую длину траектории, чем эквивалентные им по массе, длине и площади основания круговые конуса и тела оживальной формы. Определены условия, при которых преимущества оптимальных тел в сравнении с телами вращения по достижению большей длины траектории становятся значительными.

Глава 4. Особенности движения оптимальных тел.

Глава 4 посвящена изучению влияний возмущений на характеристики движения оптимальных конических и пирамидальных тел и поиску критерия

устойчивости их прямолинейного движения. Исследование проводится в предположении, что напряжения на поверхности тела можно записать в рамках двучленной МЛВ (5), когда для записи касательных напряжений выбирается одна из трех описанных выше моделей трения. Глава состоит из введения, четырех параграфов и перечня основных результатов, данных в конце.

В первом параграфе приводится постановка задачи, выписываются уравнения пространственного и плоского движения тела и определяется класс исследуемых конфигураций. В этот класс входят пирамидальные тела (звездообразные и ромбовидные), а также конические тела, составленные из двух и четырех циклов (см. рис. 1, а), часть поверхности которых полностью принадлежит конусу. Среди конических конфигураций есть и круговой конус, эквивалентный пространственным телам по массе, длине и площади основания. На поверхности тел выполнено условие $\alpha = \text{const}$ и они принадлежат классу АОТ, если $\alpha = \alpha^*$.

Во втором параграфе в рамках двучленной МЛВ для безотрывного обтекания тела средой в предположении, что для записи касательных напряжений на поверхности тела используется модель трения Кулона или модель постоянного трения, строится аналитическое решение задачи плоского движения тонких конических и пирамидальных тел. Считается, что в начальный момент времени отношение прочностного слагаемого к динамическому члену в формуле для f_n (5) меньше или порядка единицы, а возмущения параметров движения тела вокруг центра масс малы. Тогда система уравнений, записанная для этих параметров, становится автономной, и ее решение получается независимо от решения задачи движения центра масс. Устойчивость движения тела определяется асимптотической устойчивостью нулевого решения этой системы. Следовательно, условие, полученное для нее, является критерием устойчивости движения тела.

Критерий устойчивости движения тела часто записывают через запас статической устойчивости тела z_f , $z_f = C_d - C_m$, где C_m – расстояние от вершины

тела до положения центра масс, а C_d - расстояние от вершины тела до центра давления действующей на него силы, рассчитанной в квазистатическом приближении. Значение z_f зависит от формы тела, расположения центра масс и выбранной модели взаимодействия тела со средой. В рассматриваемом случае для z_f можно записать выражение

$$z_f = 2/3 - C_m + 2\alpha^2 k_1 / (3P_f), \quad k_1 = 1 + k\mu_0/\alpha \quad (9)$$

Здесь $k = 1$ для модели трения Кулона, $k = 0$ для модели постоянного трения, а P_f – параметр формы тела, причем для звездообразных тел и конусов $P_f = 1$, а для ромбовидных тел значение $P_f \in (0, 2)$.

Используя полученное решение задачи динамики тела, *критерий устойчивости движения тела* можно представить в виде

$$z_f > -A_m P_f / 18, \quad A_m = 3A_1 / \rho_m \quad (10)$$

где ρ_m – отношение массы тела к его объему. Значение A_m зависит от ρ_m и коэффициента A_1 , который имеет порядок плотности среды ρ_0 . Следовательно, всегда $A_m > 0$ и для плотных сред типа грунтов и металлов значение $A_m \sim O(1)$. Тогда, в согласии с условием (10) получаем, что в плотной среде движение тела с отрицательным запасом статической устойчивости z_f может быть устойчивым.

Апробация аналитических результатов проведена в *третьем параграфе* главы на основе численного решения задачи Коши системы уравнений движения, полученного без упрощающих предположений. При сравнении результатов численного и аналитического решений задачи динамики тела показано, что аналитическое решение, построенное для тонких пирамидальных и конических тел при упрощающих предположениях, дает хорошее приближение к точному решению задачи. Это можно увидеть, сравнивая результаты, приведенные на рис. 6, где сплошными и штриховыми линиями даны траектории движения однородных тел, построенные в соответствии с численным и аналитическим решениями задачи динамики. Расчет траекторий

проводился в рамках модели постоянного трения при $\tau_s = 1$ МПа для среды с $\rho_0 = 1500$ кг/м³ при начальной скорости движения тел $U_0 = 600$ м/сек. Значения коэффициентов, входящих в выражения (5), брались в согласии с решением модельной задачи движения тела в несжимаемой упругопластической среде, моделирующей грунта малой и средней прочности. В результате, было получено $A_1 = 3\rho_0/2$ и $C_1 = 5\tau_s$. На поверхности пространственных тел выполнялось условие (8), в котором α^* искалось при указанных параметрах среды и начальной скорости движения для тел с максимальной длиной траектории инерционного движения. Траектории даны для однородных тел, для которых $C_m = 3/4$, причем кривые 1 на рис. 6 представляют траектории звездообразных тел, а кривые 2 и 3 траектории ромбовидных тел. Эти тела составлены из участков поверхностей оптимального конуса ($\beta^* = 6.5^\circ$) и плоскостей его касающихся. Траектории эквивалентного им по массе, длине и площади основания конуса представлены на рис. 6 кривыми 4. Траектории 1 - 4 даны на рис. 6, а для тел, изготовленных из титана ($A_m = 1.5$), с относительной толщиной $t = 0.18$, а на рис. 6, б для тел, изготовленных из стали ($A_m = 0.85$), с $t = 0.22$. Углы растворов эквивалентных конусов были равны 20° ($\beta = 10^\circ$) и 26° ($\beta = 13^\circ$) соответственно. Считалось, что в начальный момент времени возмущения есть лишь по углу атаки Γ : $\gamma = \Gamma/\beta = 0.3$.

Все тела имели значение $z_f < 0$, но согласно критерию устойчивости (10) при $t = 0.18$ (см. рис. 6, а) движение звездообразного тела (кривая 1), одной из ромбовидных форм (кривая 2) и конуса (кривая 4) было устойчивым, и полученные ими в начальный момент времени возмущения параметров движения затухали со временем. Движение одной из ромбовидных форм происходило в плоскости, где лежит максимальный радиус основания тела, и согласно критерию (10) было неустойчивым. Однако можно увидеть (см. кривую 3 на рис. 6, а, что и для нее рост возмущений не привел к сильному отклонению траектории от начального направления движения.

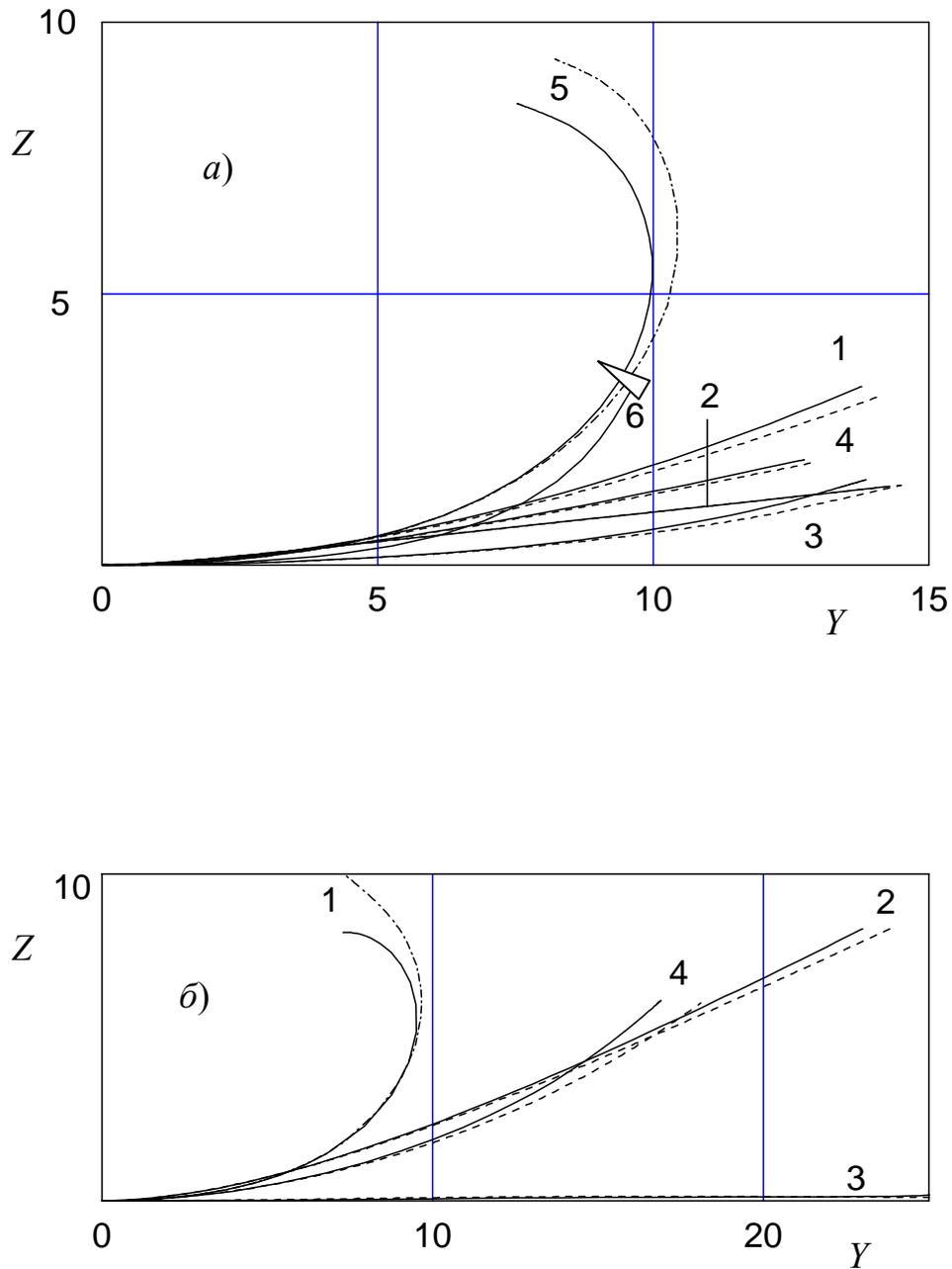


Рис. 6. Траектории движения однородных тел.

Наибольшее отклонение траектории от начального направления движения получено для оптимального звездообразного тела (см. кривую 1 на рис. 6, *a*), и оно больше чем отклонение траектории эквивалентного ему кругового конуса (см. кривую 4). Для звездообразного тела и кругового конуса

$P_f = 1$, но значения α , которые использовались при их построении, были разными. Для конуса $\alpha \approx \beta = 10^\circ$, а для звездообразного тела $\alpha \approx \beta^* = 6.5^\circ$. Значение z_f (9) для конуса больше чем у звездообразного тела, и поэтому возмущения, полученные им в начальный момент времени, затухали быстрее.

Известно, что при прямолинейном движении тела увеличение массы тела при сохранении его формы и начальной скорости движения ведет к увеличению длины траектории его инерционного движения. Однако согласно критерию (10) в этом случае уменьшается значение A_m , что при $z_f < 0$ может привести нарушению условия (10), и достижение телом большей длины траектории при наличии возмущений параметров движения может оказаться невозможным. Этот вывод подтверждается результатами исследований. При параметрах движения тел, рассмотренных выше, примеры траекторий движения стальной ($A_m = 0.85$) и вольфрамовой ($A_m = 0.36$) оптимальных звездообразных форм даны на рис. 6, а кривыми 5 и 6 соответственно. Движение этих тел неустойчиво, траектории имеют сильно изогнутый вид, причем вольфрамовая форма схематично показана на рис. 6, а в момент опрокидывания. Данный результат подтверждает теоретический вывод о том, что простым увеличением массы тела можно не достичь большей длины траектории.

Преимущества оптимальных тел по достижению большей длины траектории растут с увеличением относительной толщины тела t , если при этом их движение устойчиво. Это можно увидеть на рис. 6, б при сравнении длин траекторий стальных однородных тел, имеющих $t = 0.22$. Движение ромбовидных тел (см. кривые 2 и 3) и конуса (см. кривую 4) в этом случае устойчиво, и длина траекторий оптимальных тел больше длины траектории конуса на 27%. Движение оптимального звездообразного тела неустойчиво, его траектория имеет изогнутый вид (см. кривую 1), и ее длина меньше, чем у оптимальных ромбовидных тел. Это подтверждает теоретический вывод о том, что при неустойчивом движении оптимальные формы не дают тех преимуществ, которые получены для них при прямолинейном движении.

Интегральные кривые в фазовой плоскости ω и γ ($\omega = \Omega/(U_c\beta)$, Ω - угловая скорость вращения тела вокруг центра масс, U_c – скорость движения центра масс) для тел в той же последовательности, что и на рис. 6, б, даны на рис. 7. Можно увидеть, что аналитическое решение задачи динамики тела (см. штриховые линии) дает хорошую аппроксимацию точного решения задачи (см. сплошные линии). При построении аналитического решения предсказана бифуркация решения, что подтверждается численными расчетами и на рис. 7 показано стрелками. Однако в этом случае бифуркация почти не повлияла на решение задачи движения центра масс.

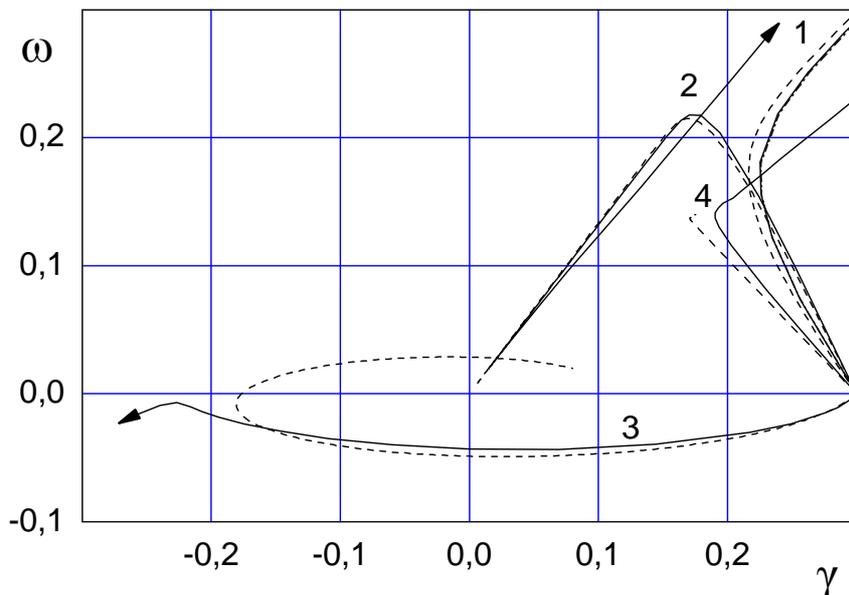


Рис. 7. Интегральные кривые в фазовой плоскости ω и γ .

При пространственном развитии возмущений исследование характеристик движения оптимальных пирамидальных и конических тел проведено в *четвертом параграфе*. Выявлены характерные особенности их трехмерного движения, и показано, что они существенно зависят от особенностей формы тела. Критерий устойчивости (10), найденный для плоского движения тонких пирамидальных и конических тел, позволяет и в

случае произвольного задания малых возмущений параметров прямолинейного движения определить характер их развития, однако для устойчивого движения тела при пространственном развитии возмущений необходимо, чтобы критерий (10) выполнялся для тела по всем плоскостям симметрии. Найдены способы увеличения запаса устойчивости прямолинейного движения оптимальных тел. Показано, что формирование у оптимальных тел оперения позволяет увеличивать у тел запас устойчивости движения и улучшать характеристики движения тела, приближая их к оптимальным значениям, найденным для тел при прямолинейном движении.

Заключение.

В заключении к диссертационной работе подводится итог всего исследования и формулируются его результаты, в основе которых лежат следующие положения.

1. Для произвольного закона сопротивления, записанного в рамках МЛВ, найдены новые решения задачи о пространственных формах тела минимального сопротивления. Показано, что при заданных площади основания и ограничениях на габариты тела можно построить бесконечное множество форм минимального сопротивления, которые образуются из участков поверхностей, нормаль к которым составляет с направлением движения постоянный оптимальный угол.
2. Создан метод построения оптимальных форм, который позволяет строить пространственные тела, удовлетворяющие самым разным требованиям практики. В частности, используя метод, можно строить оптимальные самолетоподобные тела и тела с формой основания в виде круга.
3. Без упрощающих предположений на геометрию тела в рамках двучленной МЛВ найдены решения задачи о пространственной форме тел с максимальной длиной траектории инерционного движения. Показано, что

структура поверхности этих тел та же, что и у тел минимального сопротивления, найденных на начальном этапе движения, но оптимальных угол, используемый при их построении, в общем случае другой.

4. В рамках двучленной МЛВ при безотрывном обтекании тел построена асимптотическая теория динамики тонких конических и пирамидальных тел и найдены критерии устойчивости их прямолинейного движения. Показано, что форма тела существенно влияет на устойчивость его движения, но при одинаковой форме тел и равных условиях погружения в среду более устойчивым будет движение тела с меньшей массой.
5. Используя результаты асимптотической теории динамики тонких тел, в рамках двучленной МЛВ исследованы проблемы устойчивости движения оптимальных конических и пирамидальных тел и определены области параметров, при которых прямолинейное движение этих тел устойчиво.
6. Проведено исследование пространственного движения оптимальных конических и пирамидальных тел и выявлены характерные особенности их трехмерного движения. Показано, что критерий устойчивости, найденный для плоского движения тонких конических и пирамидальных тел, позволяет и в случае произвольного задания малых возмущений параметров прямолинейного движения определить характер их развития.
7. Показано, что при неустойчивом движении оптимальные формы не дают тех преимуществ, которые получены для них при прямолинейном движении, тогда как при устойчивом движении характеристики этих тел близки к своим оптимальным значениям.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Бунимович А.И., Якунина Г.Е.* Исследование формы поперечного контура конического пространственного тела минимального

- сопротивления, движущегося в разреженном газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 112 - 117.
2. *Бунимович А.И., Якунина Г.Е.* О форме тел вращения минимального сопротивления, движущихся в пластически сжимаемой и упругопластической средах // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 496 - 503.
 3. *Бунимович А.И., Якунина Г.Е.* О форме пространственных тел минимального сопротивления, движущихся в пластически сжимаемой и упругопластической средах // Вестник МГУ. 1987. Сер. 1. Математика, механика. № 3. С. 105 - 107.
 4. *Бунимович А.И., Якунина Г.Е.* О форме тел вращения минимального сопротивления при безотрывном проникании в пластически сжимаемые среды // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 860 - 863.
 5. *Остапенко Н.А., Якунина Г.Е.* О телах наименьшего сопротивления, двигающихся в средах при наличии закона локальности // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 95 - 106.
 6. *Остапенко Н.А., Романченко В.И., Якунина Г.Е.* Оптимальные формы пространственных тел с максимальной глубиной проникания в плотные среды // ПМТФ. 1994. № 4. С. 32 - 40.
 7. *Остапенко Н.А., Якунина Г.Е.* Об особенностях движения тонкого тела в плотных средах // Доклады РАН. 1996. Т. 351. № 2. С. 192 - 195.
 8. *Остапенко Н.А., Якунина Г.Е.* Динамика тонких тел в плотных средах в условиях локальной модели взаимодействия // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 1008 - 1022.
 9. *Остапенко Н.А., Якунина Г.Е.* О форме тонких пространственных тел с максимальной глубиной проникания в плотные среды // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 6. С. 1018 - 1034.
 10. *Якунина Г.Е.* К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 299 - 310.

11. *Якунина Г.Е.* О пространственных формах минимального сопротивления // Вестн. молодых ученых. 2000. Серия прикладная математика и механика. № 3. С. 77 - 85.
12. *Якунина Г.Е.* Об оптимальных неконических и несимметричных пространственных конфигурациях // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 605 - 614.
13. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е.* Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным // М.: Янус-К, 2001. – 132 с.
14. *Якунина Г.Е.* О пространственных формах тела с максимальной глубиной проникания в плотные среды // Доклады РАН. 2001. Т. 376. № 6. С. 768 - 771.
15. *Yakunina G. Ye.* Optimum three-dimensional hypersonic bodies within the framework of a local interaction model // AIAA Paper. 2001. No. 2001-1797. 11 p.
16. *Yakunina G. Ye.* Three-dimensional bodies of minimum total drag in hypersonic flow // J. Optimiz. Theory and Appl. 2002. V. 115. No. 2. P. 241 – 265.
17. *Якунина Г.Е.* Динамика пирамидальных тел в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 1. С. 15 - 29.
18. *Якунина Г.Е.* О пространственном движении оптимальных пирамидальных тел // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 258 - 268.
19. *Yakunina G.Ye.* Effects of sliding friction on the optimal 3D- nose geometry of rigid rods penetrating media // J. Optimiz. and Engng. 2005. V. 6. No. 3. P. 315 – 338.
20. *Якунина Г.Е.* Об оптимальных формах тел, движущихся в плотных средах // Доклады РАН. 2005. Т. 405. № 4. С. 484 – 488.
21. *Якунина Г.Е.* Оптимальные формы движущихся в среде тел при учете трения // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 5. С. 759 - 773.