Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.76

Шрамов Константин Александрович

Рациональность и бирациональная жёсткость особых многообразий Фано

Специальность:
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научные руководители:
д. ф.-м. н., профессор Василий Алексеевич Исковских;
д. ф.-м. н., профессор Юрий Геннадьевич Прохоров.

Официальные оппоненты:
д. ф.-м. н. Дмитрий Олегович Орлов;
к. ф.-м. н., доцент Дмитрий Александрович Степанов.

Ведущая организация:
Владимирский государственный университет.

Защита диссертации состоится 2 марта 2007 г. в $16^{\underline{15}}$ на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет (Главное здание, 14 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 2 февраля 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 в МГУ
д. ф.-м. н., профессор В. Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Вопросы рациональности алгебраических многообразий относятся к числу наиболее фундаментальных вопросов алгебраической геометрии. Более общо, можно интересоваться бирациональной классификацией многообразий, то есть пытаться расклассифицировать многообразия с точностью до бирациональной эквивалентности и (по возможности) выделить в каждом классе эквивалентности многообразия с достаточно хорошими свойствами. Для кривых и поверхностей эти задачи были решены ещё классиками. Нормализация $\tilde{C}$ любой кривой C неособа и является единственным с точностью до изоморфизма неособым представителем в своём классе бирациональной эквивалентности. Любую особую поверхность S можно заменить на (бирационально эквивалентное ей) разрешение особенностей $\tilde{S}$, после чего перейти к неособой минимальной поверхности S_{min}, последовательно стягивая (-1)-кривые. При этом минимальные поверхности поддаются достаточно хорошему описанию: либо канонический класс $K_{S_{min}}$ численно неотрицателен (это свойство уже довольно ограничительно, но в случае поверхностей классификацию можно продолжить и до более подробного описания), либо S_{min} — линейчатая поверхность, либо $S_{min} = \mathbb{P}^2$.

В размерности 3 теория становится значительно богаче. Первопроходцем в области трёхмерной бирациональной геометрии, возможно, следует считать Дж. Фано. Он исследовал трёхмерные многообразия, кривые-сечения которых являются каноническими кривыми; в частности, канонический дивизор на таких многообразиях обилен (сейчас многообразия с обильным антиканоническим дивизором принято называть многообразиями Фано). Им были предсказаны многие глубокие результаты, которые удалось доказать на удовлетворительном уровне строгости лишь через много лет после появления его работ.

В размерности 3 становится крайне сложно проверять нерациональность различных многообразий. Первые существенные успехи в этом направлении были достигнуты в работах Исковских и Манина[1] Клеменса и Гриффитса[2] и Артина и Мамфорда[3]. В [CG] был развит метод промежуточного якобиана, а в [ИМ] — заложены основы того, что впоследствии стало называться методом максимальных особенностей. Впоследствии эти методы широко применялись к изучению рациональности трёхмерных многообразий; во втором случае это стало возможным во многом благодаря появлению программы минимальных моделей в работах С. Мори[4]. Кроме того, были достигнуты определённые успехи в исследовании бирациональной геометрии особых и многомерных многообразий Фано.

Метод максимальных особенностей можно рассматривать как один из способов доказательства нерациональности многообразий. Он применим к произвольным расслоениям Мори (в частности, к многообразиям Фано с числом Пикара 1). Суть этого метода состоит в том, что по бирациональному отображению $\chi : X \dashrightarrow X'$ между двумя расслоениями Мори строится линейная система $\mathcal{H}$ без неподвижных компонент на многообразии X, в некотором смысле контролирующая поведение отображения χ; а именно, в случае, когда χ не является изоморфизмом, система $\mathcal{H}$ должна иметь достаточно "плохие" особенности (точное утверждение известно под названием неравенства Нётера–Фано), и, более того, зная особенности $\mathcal{H}$, можно разложить отображение χ в композицию элементарных отображений. Таким образом, метод максимальных особенностей сводит вопрос о существовании бирациональных отображений из расслоения Мори X на другие расслоения Мори к вопросу о существовании на X линейных систем, имеющих "плохие" особенности. Отметим, что в тех случаях, когда этот метод удаётся применить,

[1][ИМ] *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Мат. Сборник — 1971 — том 86, No. 1. — 140–166.

[2][CG] *H. Clemens, P. Griffiths* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Annals of Mathematics **95** (1972), 73–100.

[3][AM] *M. Artin, D. Mumford* Some elementary examples of unirational varieties which are not rational // Proc. London Math. Soc. **25** (1972), 75–95.

[4]Современное введение в эту теорию можно найти в [Mat] *K. Matsuki* Introduction to the Mori program. — Universitext, Springer, 2002. — 478 pp.

он даёт не только нерациональность многообразия X, но, как правило, значительно большее; часто таким образом можно доказать бирациональную жёсткость X или получить информацию о группе $\mathrm{Bir}(X)$ его бирациональных автоморфизмов.

На этом пути были доказаны нерациональность неособой трёхмерной квартики (см. [ИМ]), а также некоторых других неособых трёхмерных многообразий Фано[5]. Этим методом также доказана бирациональная сверхжёсткость (а следовательно, и нерациональность) гиперповерхностей[6] степени N в $\mathbb{P}^N$, а также разнообразных многомерных двойных накрытий и полных пересечений[7]. В частности, метод максимальных особенностей остаётся одним из немногих[8] способов доказательства нерациональности многообразий высших размерностей. (Так, например, теория промежуточного якобиана, возможно, более элегантная и эффективная в случае трёхмерных многообразий, на высшие размерности пока не обобщается.)

С другой стороны, метод максимальных особенностей применим к вычислению групп бирациональных автоморфизмов (и, опять же, к доказательству нерациональности) некоторых особых трёхмерных многообразий Фано. В этом направлении многое известно про гиперповерхности во взвешенных проективных пространствах, удовлетворяющие некоторым условиям общности[9]. С другой стороны, при рассмотрении необщих многообразий часто бывает удобно ограничиться нодальными многообразиями[10]. Отметим, что по-

[5] [И] *Исковских В. А.* Бирациональные автоморфизмы трёхмерных алгебраических многообразий. — Итоги науки и техники: современные проблемы математики, т. 12, ВИНИТИ, Москва 1979, 159–236; [ИП] *Исковских В. А., Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы многомерных алгебраических многообразий. — Итоги науки и техники: современные проблемы математики, т. 19, ВИНИТИ, Москва 2001, 5–139.

[6] [dFEM] *T. de Fernex, L. Ein, M. Mustata* Bounds for log canonical thresholds with applications to birational rigidity // Math. Res. Letters **10** (2003), 219–236.

[7] [P1] *A. Pukhlikov* Birationally rigid Fano complete intersections // J. Reine Angew. Math. **541** (2001), 55–79.

[8] Ср. [K] *J. Kollár* Singularities of pairs // Algebraic geometry — Santa Cruz 1995, Proc. Symp. Pure Math. AMS **62** (1997), 221–287.

[9] [CPR] *Corti A., Pukhlikov A., Reid M.* Fano 3-fold hypersurfaces // L.M.S. Lecture Note Series **281** (2000), 175–258.

[10] Об эффектах, связанных с более сложными особенностями, см., например, [CM] *A. Corti,*

явление даже обыкновенных двойных особенностей как правило увеличивает группу бирациональных автоморфизмов многообразия. Так, например, неособая квартика бирационально сверхжёстка (см. [ИМ]), в то время как наличие уже одной особенности нарушает сверхжёсткость (хотя и не нарушает бирациональной жёсткости), добавляя к группе бирациональных автоморфизмов 25 независимых бирациональных инволюций[11]. Тем не менее, для многообразий малых степеней получено довольно много результатов в этом направлении: в [И] и [ИП] доказана бирациональная жёсткость и вычислены группы бирациональных автоморфизмов неособых трёхмерных многообразий Фано степеней 2, 4 и 6; доказана бирациональная сверхжёсткость $\mathbb{Q}$-факториального многообразия Фано степени 2 с любым количеством обыкновенных двойных точек[12]; в [П] разобран случай квартики с одной обыкновенной двойной точкой; изучено двойное накрытие квадрики с ветвлением в дивизоре степени 4 с одной обыкновенной двойной точкой[13]; доказана бирациональная жёсткость и найдены образующие группы бирациональных автоморфизмов $\mathbb{Q}$-факториальной трёхмерной квартики с любым количеством обыкновенных двойных точек[14].

Результаты диссертации продолжают эти исследования. Мы исследуем двойное накрытие неособой квартике с ветвлением в дивизоре степени 4 с произвольным количеством обыкновенных двойных особенностей. При условии факториальности доказывается бирациональная жёсткость этого многообразия и вычисляется его группа бирациональных автоморфизмов (она является полупрямым произведением подгруппы бирегулярных автоморфизмов и некоторой группы, свободно порождённой бирациональными инволюциями). Также классифицируются возможные конфигурации

M. Mella Birational geometry of terminal quartic 3-folds I // Amer. J. Math., to appear.

[11][П] *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартики с простейшей особенностью // Мат. Сборник — 1988 — том 135 (177), No. 4. — 472–496.

[12][CP] *I. Cheltsov, J. Park* Sextic double solids // arXiv:math.AG/0404452 (2004).

[13][Г] *Гриненко М. М.* Бирациональные автоморфизмы трёхмерной двойной квадрики с простейшей особенностью // Мат. Сборник — 1998. — том 189, No. 1. — 101–118.

[14][M] *M. Mella* Birational geometry of quartic 3-folds II: the importance of being $\mathbb{Q}$-factorial // Math. Ann. **330** (2004), 107–126.

центров максимальных особенностей на нодальной факториальной квартике; из этой классификации выводится описание структуры соотношений в группе бирациональных автоморфизмов квартики (другими словами, даётся полное описание группы в терминах образующих и соотношений). Затем находятся достаточные условия факториальности этих многообразий в терминах количества особых точек. Наконец, рассматривается вопрос о рациональности стандартных расслоений на поверхности Дель Пеццо степени 4 (такие расслоения связаны с нефакториальной квартикой, содержащей пересечение двух квадрик); классифицируются такие расслоения с топологической эйлеровой характеристикой $\chi = -4$ и доказывается их рациональность.

Цель работы

Цель работы — исследование вопросов рациональности и бирациональной жёсткости для многообразий Фано степени 4 с простейшими особенностями (в частности, обобщение на этот случай результатов В. А. Исковских и А. В. Пухликова), вычисление их группы бирациональных автоморфизмов, а также выяснение удобных для проверки достаточных условий факториальности этих многообразий.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 106 страницах и состоит из шести глав. Библиография включает 47 наименований.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Пусть $X' \to Q \subset \mathbb{P}^4$ — двойное накрытие квадрики Q в $\mathbb{P}^4$ с ветвлением в дивизоре, высекаемом на Q гиперповерхностью

степени 4; это трёхмерное многообразие Фано. Если X' факториально (то есть любой дивизор на X' локально задаётся одним уравнением) и имеет обыкновенные двойные особенности, то X' бирационально жёстко. В этом случае также явно описана группа бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}(X')$.

2. Для описанного выше многообразия X' доказано следующее достаточное условие факториальности: если количество (обыкновенных двойных) особенностей X' не превосходит 11, то X' факториально; более того, эта оценка точна, то есть существуют нефакториальные многообразия такого типа с 12 обыкновенными двойными особенностями.

3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ — факториальная гиперповерхность степени 4 с обыкновенными двойными особенностями; это трёхмерное многообразие Фано. В этом случае вычислены соотношения в группе $\mathrm{Bir}(X)$ (образующие этой группы были найдены ранее в работе [M]).

4. Для гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^4$ степени 4 доказаны следующие достаточные условия факториальности: если X не содержит двумерных плоскостей и имеет не более 11 обыкновенных двойных особенностей, то X факториальна; если X имеет 12 обыкновенных двойных особенностей, то она факториальна в том и только в том случае, когда она не содержит двумерных плоскостей и двумерных квадрик.

5. Построены новые бирациональные автоморфизмы особого полного пересечения квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$.

6. Доказано, что всякое стандартное расслоение Y над $\mathbb{P}^1$ с эйлеровой характеристикой $\chi(Y) = -4$, общий слой которого является поверхностью Дель Пеццо степени 4, рационально. Этот результат завершает исследование вопросов рациональности таких расслоений, начатое 15 лет назад В. А. Алексеевым.

Основные методы исследования

Большая часть используемых в диссертации конструкций основано на программе минимальных моделей (см. [Mat]). Для доказательства бирациональной жёсткости многообразий и вычисления их групп бирациональных автоморфизмов применяется алгоритм разложения бирациональных отображений расслоений Мори, известный под названием программы Рида–Саркисова[15]. В целом исследование проходит в рамках метода максимальных особенностей[16].

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Доказанные в диссертации теоремы представляют интерес для теории многообразий Фано, многомерной алгебраической геометрии и теории особенностей.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях.

1. Семинар "Геометрия алгебраических многообразий" под руководством В.А.Исковских и Ю.Г.Прохорова в МГУ (2005 и 2006).

2. Конференция GAEL-XIV (Бедлево, Польша, 2006).

3. Кафедральный семинар кафедры высшей алгебры МГУ (2006).

Публикации автора по теме диссертации

Основное содержание диссертации опубликовано в трёх работах, список которых приведен в конце автореферата [1–3].

[15] См. [Co1] *Corti A.* Factorizing birational maps of threefolds after Sarkisov// Journal of Algebraic Geometry — 1995 — No. 4. — 223–254.

[16] См. [P2] *A. Pukhlikov* Essentials of the method of maximal singularities // L.M.S. Lecture Note Series **281** (2000), 73–100; [Co2] *A. Corti* Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // L.M.S. Lecture Note Series **281** (2000), 259–312.

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из шести глав.

Первая глава — введение. В ней обсуждается история вопроса, даётся обзор ранее известных результатов и формулируются основные утверждения, доказанные в диссертации.

В главе 2 приведены необходимые определения и известные вспомогательные утверждения. В частности, в разделе 2.2 описаны основные классы особенностей, которые участвуют в дальнейших формулировках (терминальные и канонические особенности, обыкновенные двойные точки); в разделе 2.3 дано определение расслоения Мори, в разделе; в разделе 2.4 кратко описан алгоритм разложения бирациональных отображений расслоений Мори в композицию элементарных бирациональных отображений (программа Рида–Саркисова), а также даны определения бирациональной жёсткости и сверхжёсткости. В разделе 2.5 обсуждается метод максимальных особенностей; приводятся формулировки локальных неравенств на кратности линейных систем в неособой точке (“$4n^2$-неравенство”, теорема 2.5.2) и обыкновенной двойной точке (теорема 2.5.3). В разделе 2.6 приводятся утверждения, позволяющие исследовать факториальность многообразий, в частности, принадлежащая С. Цинку теорема 2.6.1, позволяющая (в нашем случае) проинтерпретировать этот вопрос в терминах конфигурации особых точек многообразия.

Утверждения главы 2 не доказываются, но снабжаются ссылками на источники.

В главе 3 исследуется нодальное многообразие X', являющееся двойным накрытием неособой трёхмерной квадрики с ветвлением в сечении квартикой. Отметим, что неособое многообразие этого типа было изучалось В. А. Исковских ([И]), а многообразие X' с одной обыкновенной двойной особенностью — М. М. Гриненко ([Г]). В обоих случаях была доказана бирациональная жёсткость многообразия X' и вычислена группа его бирациональных автоморфизмов. В теореме 3.1.1 мы обобщаем эти утверждения на случай многообразия X' с любым числом обыкновенных двойных особенностей, предполагая лишь $\mathbb{Q}$-факториальность (которая в данном случае эквивалентна факториальности) многообразия X' (отметим, что без этого условия не только невозможно провести предложенное доказательство, но и сами утверждения теоремы перестают выполняться). Многообразие X', как и в случаях, рассмотренных В. А. Исковских и М. М. Гриненко, оказывается бирационально жёстким, а группа $\mathrm{Bir}(X')$ — порождённой своей подгруппой $\mathrm{Aut}(X')$ и бирациональными инволюциями, связанными с некоторыми прямыми на X'; соотношения между этими инволюциями в порождённой ими подгруппе отсутствуют.

Так как теорема 3.1.1 существенно использует $\mathbb{Q}$-факториальность многообразия X', а $\mathbb{Q}$-факториальность является трудно проверяемым глобальным (топологическим) свойством многообразия, представляется естественным вопрос о том, какие условия гарантируют $\mathbb{Q}$-факториальность многообразия X'. Предложение 3.1.5 даёт ответ на этот вопрос: если многообразие X' имеет не более 11 обыкновенных двойных точек, то оно $\mathbb{Q}$-факториально; с другой стороны, существуют не-$\mathbb{Q}$-факториальные многообразия этого типа с 12 обыкновенными двойными особенностями (пример 3.6.1).

В главе 4 исследуются возможные комбинации центров максимальных особенностей на $\mathbb{Q}$-факториальной нодальной трёхмерной квартике X. Отметим, что подмногообразия X, которые могут являться центрами максимальных особенностей, были классифицированы М. Мелла, что дало ему возможность описать образующие группы $\mathrm{Bir}(X)$. С другой стороны, можно построить (довольно многочисленные) примеры соотношений между этими образующими (примеры 4.1.7 и 4.1.8). Предложение 4.1.9 классифицирует все возможные конфигурации центров максимальных особенностей на X, что даёт возможность найти базисную систему соотношений на образующие группы $\mathrm{Bir}(X)$ (следствие 4.1.10). Основное техническое утверждение в доказательстве — лемма 4.3.7, ограничивающая возможные конфигурации центров максимальных особенностей в терминах конфигураций исключительных кривых на разрешении особенностей некоторых гиперплоских сечений X. Лемма 4.3.7, в свою очередь, основана на утверждениях, описывающих особенности общих (в пучке) гиперплоских сечений нодальных трёхмерных гиперповерхностей (леммы 4.2.3 и 4.2.4).

В главе 5 исследуются достаточные условия $\mathbb{Q}$-факториальности для нодальных трёхмерных квартик. Теорема 5.1.3 утверждает, что если нодальная трёхмерная квартика X имеет не более 11 обыкновенных двойных особенностей и не содержит плоскостей, или если X имеет 12 обыкновенных двойных точек и не содержит плоскостей и (двумерных) квадрик, то она $\mathbb{Q}$-факториальна (отметим, что квартика, содержащая плоскость или двумерную квадрику $\mathbb{Q}$-факториальной не является). Это утверждение является обобщением результата[17] о $\mathbb{Q}$-факториальности нодальных квартик, имеющих не более 8 особенностей, и частным случаем гипотезы Чилиберто и ди Геннаро[18] о $\mathbb{Q}$-факториальности нодальных гиперповерхностей (которое до этого была установлена только для кубических гиперповерхностей).

Пример не-$\mathbb{Q}$-факториальной нодальной трёхмерной квартики, не содержащей плоскостей, даёт общая квартика, содержащая двумерную квадрику (заметим, что в качестве вырождения этого примера можно получить уже упоминавшийся пример 3.6.1). В разделе 5.3 обсуждается связь этого многообразия с полным пересечением Y квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$: описывается (известное) бирациональное отображение между многообразиями этих типов (общая квартика, содержащая квадрику, бирационально эквивалентна по крайней мере двум различным — см. замечание 5.3.2 — полным пересечениям квадрики и кубики); строится новый пример бирациональной инволюции многообразия Y (пример 5.3.4 и утверждение 5.3.5); указывается связь между бирациональными инволюциями на Y и на квартике (замечание 5.3.6).

[17][Ch] *I. Cheltsov* Non-rational nodal quartic threefolds // Pacific J. of Math. — 2006 — vol. 226, No. 1. — 65–82.

[18][CdG] *C. Ciliberto, V. di Gennaro* Factoriality of certain hypersurfaces of $\mathbb{P}^3$ with ordinary double points // Encyclopaedia of Mathematical Sciences — 2004 — vol. 132. — 1–9.

В главе 6 исследуются стандартные расслоения на поверхности Дель Пеццо степени 4 над $\mathbb{P}^1$. Такие расслоения связаны с квартикой, содержащей (неособое) пересечение двух трёхмерных квадрик. Мы дополняем известную теорему В. А. Алексеева[19], устанавливающую критерий рациональности расслоения этого типа X в терминах топологической эйлеровой характеристики $\chi(X)$ во всех случаях, кроме $\chi(X) = -4$: теорема 6.2.1 утверждает, что все стандартные расслоения X на поверхности Дель Пеццо степени 4 над $\mathbb{P}^1$ с эйлеровой характеристикой $\chi(X) = -4$ рациональны. Она выводится из явного описания всех таких расслоений (лемма 6.3.4), которое, в свою очередь, выводится из доказываемого прямыми вычислениями критерия гладкости общего полного пересечения двух послойных квадрик в скролле (теорема 6.3.2).

Благодарности

Я благодарю моих научных руководителей д. ф.-м. н. профессора В. А. Исковских и д. ф.-м. н. профессора Ю. Г. Прохорова за постоянное внимание к моей работе, И. А. Чельцова за многочисленные советы на всех этапах подготовки диссертации, а также С. С. Галкина, М. М. Гриненко, Н. Ф. Зака, Ф. Л. Зака, В. В. Пржиялковского, A. Corti, B. Fu и F. Russo за полезные обсуждения.

[19][А] *Алексеев В. А.* Условия рациональности трехмерных многообразий с пучком поверхностей Дель Пеццо степени 4 // Мат. Заметки. — 1987. — том 41, No. 5. — 724–730.

Список литературы

[1] *Шрамов К. А.* К вопросу рациональности неособых трёхмерных многообразий с пучком поверхностей Дель Пеццо степени 4. // Мат. сборник 197 (2006), вып. 1, 133–144.

[2] *Шрамов К. А.* $\mathbb{Q}$-факториальные трёхмерные квартики. // Депонировано в ВИНИТИ РАН 14.11.2006, № 1379-В2006, 14 с.

[3] *Шрамов К. А.* Бирациональные автоморфизмы многообразий Фано степени 4. // Депонировано в ВИНИТИ РАН 14.11.2006, № 1378-В2006, 36 с.