Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.929

Медведев Данил Александрович

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МЕТОДАМИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Специальность 01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2006

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор А. Г. Костюченко, доктор физико-математических наук, профессор В. В. Власов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор А. Д. Мышкис, доктор физико-математических наук, профессор И. С. Ломов
Ведущая организация:	Российский университет дружбы народов

Защита диссертации состоится 2 марта 2007 года в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 2 февраля 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор Т. П. Лукашенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Основы теории функционально-дифференциальных уравнений в конечномерном пространстве заложены в работах А. Д. Мышкиса, Р. Беллмана, К. Кука, Н. В. Азбелева, Н. Н. Красовского, Дж. Хейла, Л. Э. Эльсгольца. Ряд глубоких результатов для функционально-дифференциальных уравнений в частных производных изложен в недавних монографиях Дж. Ву и А. Л. Скубаческого. Несмотря на значительное число работ, посвященных изучению функционально-дифференциальных уравнений нейтрального и запаздывающего типов, получение наиболее точных (неулучшаемых) оценок их решений и изучение асимптотического поведения решений остается актуальной задачей, играющей важную роль в теории динамических систем и теории управления. Особый интерес в настоящее время представляет изучение функционально-дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах; при этом активно используются методы теории полугрупп и спектральной теории операторных пучков. Наиболее близкими в этом направлении являются работы В. В. Власова, Д. В. Якубовича, С. В. Лунела, Г. Ди Блазио, К. Куниша, Е. Синестрари, В. Шаппахера. Результаты, представленные в диссертации, являются естественным развитием и обобщением результатов упомянутых авторов.

Большой интерес представляет собой исследование свойств экспоненциальных решений функционально-дифференциальных уравнений, поскольку указанные решения являются системой собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования с нелокальными граничными условиями. Свойства полноты и базисности систем экспонент и систем собственных и присоединенных функций несамосопряженных задач изучались много и интенсивно. Наиболее близкими к тематике диссертации являются работы В. В. Власова, В. А. Ильина, А. Г. Костюченко, М. Г. Крейна, Б. Я. Левина, Н. Левинсона, В. Б. Лидского, И. С. Ломова, А. С. Маркуса, В. П. Михайлова, Е. И. Моисеева, Н. К. Никольского, Б. С. Павлова, А. М. Седлецкого, А. П. Хромова, А. А. Шкаликова.

Вопросы актуальности затрагиваются также в описании каждой из глав.

Цель работы. Изучение вопросов асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального и запаздывающего типов, первого и произвольного дифференциальных порядков в различных функциональных пространствах, в том числе в пространствах Соболева. Рассмотрение в этой связи ряда спектральных вопросов, включающих в себя исследования полноты, минимальности и базисности систем экспоненциальных решений упомянутых уравнений. Изучение поведения решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве на основе исследования оператор-функций, являющихся символами этих уравнений.

Методы исследования. В работе использованы методы спектральной теории операторов и операторных пучков, а также теории целых функций, теории полугрупп и теории функционально-дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по спектральной теории операторных пучков (оператор-функций), теории функционально-дифференциальных уравнений, также в дальнейших исследованиях в ряде математических задач теории управления и задачах математической теории распространения тепла в средах с памятью.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

Установлены утверждения о полноте, минимальности и базисности Рисса систем экспоненциальных решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа в пространствах Соболева и других функциональных пространствах. На основе этих результатов получены неулучшаемые оценки решений упомянутых функционально-дифференциальных уравнений.

Получены неулучшаемые оценки для решений функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Установлены результаты о разложении решений упомянутых уравнений в сумму линейной комбинации экспоненциальных решений и функции с меньшим показателем экспоненциального роста на основе результатов о поведении и оценках оператор-функций с экспоненциальным вхождением спектрального параметра, являющихся символами рассматриваемых функционально-дифференциальных уравнений.

Получены неулучшаемые оценки и результаты об асимптотическом поведении решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа и в конечномерных пространствах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 81 страницу. Список литературы содержит 41 наименование.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах автора. Их список приведен в конце автореферата.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались в 2005-2007 гг. на научных семинарах МГУ: под руководством проф. А. Г. Костюченко, проф. В. В. Власова, проф. К. А. Мирзоева (неоднократно), под рук. проф. А. А. Шкаликова, под рук. проф. А. М. Седлецкого, под рук. проф. В. В. Жикова, проф. А. С. Шамаева, проф. Т. А. Шапошниковой, под рук. академика Е. И. Моисеева, проф. С. И. Ломова; на семинаре в МИАН им. В. А. Стеклова под рук. проф. А. К. Гущина, проф. В. П. Михайлова, проф. А. А. Дезина;

на семинаре в РУДН под рук. А. Л. Скубачевского; на семинаре в МИИТ под рук. проф. А. Д. Мышкиса, проф. А. С. Братуся, проф. А. М. Филимонова; на международных конференциях «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвященная столетию С. М. Никольского (Москва, МИАН им. В. А. Стеклова, 2005), «Четвертая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям» (Москва, МИАН им. В. А. Стеклова, 2005), «Тихонов и современная математика», посвященная столетию А. Н. Тихонова (Москва, МГУ, 2006).

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** формулируются основные задачи, рассматриваемые в диссертации, приводится краткий обзор посвященных им работ, излагаются цели, методы и основные результаты исследования.

Глава 1 посвящена изучению функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. Особый интерес к таким уравнениям обусловлен тем, что, в отличие от уравнений запаздывающего типа, они изучены в значительно меньшей степени. При этом для нейтральных уравнений реализуются так называемые критический и сверхкритический случаи (т. е. когда имеются цепи корней характеристического квазимногочлена, приближающиеся или лежащие на мнимой оси), которые представляют особый интерес. Дело в том, что при изучении таких уравнений традиционными методами (например, используя преобразование Лапласа и его обращение) возникают трудности, связанные с тем, что при обращении преобразования Лапласа прямая, параллельная мнимой оси, по которой производится интегрирование, должна находиться на положительном расстоянии от спектра (множества нулей характеристической функции).

В первом параграфе первой главы рассматривается традиционная начальная задача для функционально-дифференциального уравнения вида

$$\frac{d}{dt}Mu_t = Ku_t + f(t),\ t > 0, \tag{1}$$

$$u_0(s) = g(s),\ s \in [-h, 0]. \tag{2}$$

Здесь $M : C([-h, 0], \mathbb{C}^r) \to \mathbb{C}^r$, $K : W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^r) \to \mathbb{C}^r$ – ограниченные линейные операторы, имеющие вид

$$M\varphi = \int_{-h}^{0} d\mu_M(s)\varphi(s), \quad K\varphi = \int_{-h}^{0} \mu_K(s)\varphi(s)ds + \int_{-h}^{0} \eta_K(s)\varphi'(s)ds,$$

где μ_M – матрица-функция ограниченной вариации, заданная на отрезке $[-h, 0]$; μ_K и η_K – матрицы-функции размера $r \times r$, элементы которых принадлежат пространству $L_2(-h, 0)$. Через u_t обозначена вектор-функция $u_t(s) = u(t + s),\ t > 0$, заданная на отрезке $s \in [-h, 0]$; постоянная $h > 0$.

Обозначим через $W^p_{2,\gamma}((a,b),\mathbb{C}^r)$, $-\infty < a < b \le +\infty, p \in \mathbb{N}$, весовые пространства Соболева вектор-функции со значениями в $\mathbb{C}^r$, снабженные нормами

$$\|\varphi\|_{W^p_{2,\gamma}((a,b),\mathbb{C}^r)} = (\int_a^b e^{-2\gamma t}(\sum_{j=0}^p \|\varphi^{(j)}(t)\|^2_{\mathbb{C}^r})dt)^{1/2},\ \gamma \ge 0.$$

В случае $\gamma = 0$ мы полагаем $W^p_{2,0}((a,b),\mathbb{C}^r) \equiv W^p_2((a,b),\mathbb{C}^r)$.

Определение. *Функцию u, принадлежащую пространству $W^1_2((-h,T),\mathbb{C}^r)$ для любого $T > 0$, назовем сильным решением задачи* (1), (2), *если u удовлетворяет почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ уравнению* (1) *и условию* (2).

Обозначим через $L(\lambda)$ матрицу-функцию вида

$$L(\lambda) = (K - \lambda M)e^{\lambda s} = \int_{-h}^0 e^{\lambda s}\mu_K(s)ds + \lambda\int_{-h}^0 e^{\lambda s}\eta_K(s)ds - \lambda\int_{-h}^0 e^{\lambda s}d\mu_M(s),$$

через $l(\lambda) = \det L(\lambda)$ – характеристическую функцию уравнения (1), через λ_q – нули функции $l(\lambda)$, упорядоченные в порядке возрастания модулей с учетом кратности ν_q, через Λ – множество всех нулей функции $l(\lambda)$. Заметим, что $l(\lambda)$ – голоморфная во всей комплексной плоскости (целая) функция, поэтому множество ее нулей Λ счетно, а кратности ν_q нулей конечны.

Собственные векторы, входящие в каноническую систему[1] собственных и присоединенных (корневых) векторов матрицы-функции $L(\lambda)$, отвечающие числу λ_q, обозначим через $x_{q,j,0}$ $(j = 1, 2, \cdots, r_q)$, их присоединенные порядка k – через $x_{q,j,k}$ $(k = 1, 2, \cdots, p_{qj})$. Индекс j показывает, каким по счету является вектор $x_{q,j,0}$ в специально выбранном базисе подпространства решений уравнения $L(\lambda_q)x = 0$.

Введем систему экспоненциальных решений однородного $(f \equiv 0)$ уравнения (1)

$$y_{q,j,k}(t) = e^{\lambda_q t}(\frac{t^k}{k!}x_{q,j,0} + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}x_{q,j,1} + \cdots + x_{q,j,k}). \tag{3}$$

Введем полугруппу T_t, $t \ge 0$, ограниченных операторов, действующих в пространстве $W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^r)$, согласно правилу $T_t g = u_t$, $t \ge 0$, где u – сильное решение однородной задачи (1), (2), отвечающей начальной функции g.

Лемма 1. *Пусть функция μ_M атомарна в 0, т. е.* $\det(\mu_M(0) - \mu_M(-0)) \ne 0$. *Тогда семейство операторов $\{T_t\}$ образует C^0-полугруппу в пространстве $W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^r)$ с генератором A, имеющим область определения*

$$Dom(A) = \{\varphi:\ \varphi \in W^2_2((-h,0),\mathbb{C}^r),\ M\varphi' = K\varphi\}$$

[1] Келдыш М. В. // УМН, 1971, Т. 26, № 4, С. 15-41.

и действующим по правилу $A\varphi = \varphi'$. При этом спектр оператора A совпадает с множеством Λ нулей функции $l(\lambda)$, а экспоненциальные решения (3) *однородного уравнения* (1) *при $t \in [-h, 0]$ являются его корневыми функциями.*

Лемма 2. *Пусть μ_M атомарна в точках 0 и $-h$, т. е. $\det(\mu_M(-h+0) - \mu_M(-h)) \neq 0$. Тогда*

1) конечны величины $\varkappa_+ = \sup_{\lambda_q \in \Lambda} \mathrm{Re}\lambda_q$, $\varkappa_- = \inf_{\lambda_q \in \Lambda} \mathrm{Re}\lambda_q$,

2) система корневых векторов $y_{q,j,k}$ оператора A полна и минимальна в пространстве $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^r)$.

Обозначим через $B(\lambda_q, \rho)$ круг радиуса ρ с центром в точке λ_q и положим

$$G(\Lambda, \rho) \equiv \mathbb{C} \setminus (\cup_{\lambda_q \in \Lambda} B(\lambda_q, \rho)).$$

Лемма 3. *Если μ_M атомарна в точках 0 и $-h$, то найдутся такие постоянные α и β, ($\alpha < \varkappa_- \leq \varkappa_+ < \beta$), что система замкнутых контуров*

$$\Gamma_n = \{\mathrm{Re}\lambda = \alpha,\ \gamma_n \leq \mathrm{Im}\lambda \leq \gamma_{n+1}\} \cup \{\alpha \leq \mathrm{Re}\lambda \leq \beta,\ \mathrm{Im}\lambda = \gamma_{n+1}\} \cup$$
$$\cup \{\mathrm{Re}\lambda = \beta,\ \gamma_n \leq \mathrm{Im}\lambda \leq \gamma_{n+1}\} \cup \{\alpha \leq \mathrm{Re}\lambda \leq \beta,\ \mathrm{Im}\lambda = \gamma_n\},$$

целиком принадлежит области $G(\Lambda, \rho)$ при некотором достаточно малом $\rho > 0$. При этом выполняются условия:

1) последовательность вещественных чисел $\{\gamma_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, такова, что

$$0 < \delta \leq \gamma_{n+1} - \gamma_n \leq \Delta < +\infty,$$

где δ и Δ – некоторые положительные постоянные,

2) количество $N(\Gamma_n)$ нулей $l(\lambda)$ (с учетом кратности), лежащих в областях, границами которых являются контуры Γ_n, равномерно ограничено по n, т. е. существует постоянная $N > 0$ такая, что $\max\limits_n N(\Gamma_n) \leq N$.

Обозначим через W_n подпространства пространства $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^r)$, являющиеся линейной оболочкой всех экспоненциальных решений $y_{q,j,k}$ однородного уравнения (1), отвечающих числам λ_q, лежащим в областях, границами которых являются контуры Γ_n.

Теорема 1. *Пусть μ_M атомарна в точках 0 и $-h$. Тогда семейство подпространств $\{W_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образует базис Рисса из подпространств пространства $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^r)$.*

Заметим, что, несмотря на то, что система корневых векторов $y_{q,j,k}$ оператора A минимальна, она не образует, вообще говоря, равномерно минимальную систему и, тем самым, базис Рисса. Таким образом, путем объединения нулей функции $l(\lambda)$ в группы, как это описано в лемме 3, мы добиваемся того, что система $y_{q,j,k}$ образует базис Рисса со скобками (базис Рисса из подпространств).

Теорема 2. *Пусть μ_M атомарна в точках 0 и $-h$, $g \in W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^r)$ и $f \in L_2((0,T),\mathbb{C}^r)$ для любого $T > 0$. Тогда существует и единственно сильное решение и задачи (1), (2), которое удовлетворяет оценке*

$$\|u_t\|_{W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^r)} \leq d_1(t+1)^{N-1}e^{\varkappa_+ t}\|g\|_{W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^r)}+$$

$$+d_2\sqrt{t}\left(\int_0^t (t-s+1)^{2(N-1)}e^{2\varkappa_+(t-s)}\|f(s)\|^2_{\mathbb{C}^r}ds\right)^{1/2},\ t \geq 0, \tag{4}$$

где константы d_1 и d_2 не зависят от функций g и f.

Замечание. *Отметим, что оценка (4) является неулучшаемой в том смысле, что величины N и $\varkappa_+$ нельзя взять меньшими во всем классе начальных функций g и правых частей f. Более того, величину $\sqrt{t}$, фигурирующую в оценке (4), нельзя опустить.*

Заметим, что из результатов (теорема 1) о базисности Рисса экспоненциальных решений однородного уравнения (1) непосредственно вытекает оценка (4) решения однородного ($f \equiv 0$) уравнения. Результаты теоремы 2 в случае произвольного f получены с помощью процедуры получения оценки решения неоднородного уравнения на основании оценки решения однородного уравнения, которая впервые встречается в работе В. В. Власова, Дж. Ву[2].

Рассмотрим оператор $\widetilde{A}$, имеющий область определения

$$Dom(\widetilde{A}) = \{(c,\varphi) \in \mathbb{C}^r \otimes L_2((-h,0),\mathbb{C}^r), \varphi \in W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^r), M\varphi = c\}$$

и действующий по правилу $\widetilde{A}(c,\varphi) = (K\varphi,\varphi')$.

По аналогии с оператором A, спектр оператора $\widetilde{A}$ совпадает с множеством Λ нулей функции $l(\lambda)$, а векторы $(My_{q,j,k}, y_{q,j,k}(t))$ при $t \in [-h,0]$ являются его корневыми функциями и образуют полную и минимальную систему в пространстве $\mathbb{C}^r \otimes L_2((-h,0),\mathbb{C}^r)$.

Обозначим через $\widetilde{W_n}$ подпространства пространства $\mathbb{C}^r \otimes L_2((-h,0),\mathbb{C}^r)$, являющиеся линейной оболочкой всех корневых векторов $(My_{q,j,k}, y_{q,j,k}(t))$ оператора $\widetilde{A}$, отвечающих числам λ_q, лежащим в областях, границами которых являются контуры Γ_n.

Теорема 3. *Пусть μ_M атомарна в точках 0 и $-h$. Тогда семейство подпространств $\{\widetilde{W_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса из подпространств пространства $\mathbb{C}^r \otimes L_2((-h,0),\mathbb{C}^r)$.*

Отметим, что теоремы 1 и 3 о базисности обобщают соответствующие результаты, установленные С. В. Лунелом и Д. В. Якубовичем[3], поскольку помимо атомарности μ_M в точках 0 и $-h$ авторы требуют выполнение условия

[2] Vlasov V. V., Wu J. // Functional Differential Equations, 2005, V. 12, № 3-4, P. 437-461.

[3] Verduyn Lunel S. M., Yakubovich D. V. // Integr. equ. oper. theory, 1997, V. 27, P. 347-378.

отделимости $\inf|\lambda_q - \lambda_p| > 0$ множества Λ. Эти теоремы также обобщают соответствующие результаты Р. Рабаха, Г. Скляра, А. Резуненко[4], поскольку в указанной работе рассматривается уравнение с одним сосредоточенным запаздыванием.

Изучение свойств операторов A, $\widetilde{A}$ и их резольвент тесно связано с исследованием задачи (1), (2). Спектральный анализ оператора дифференцирования (полнота, разложение по собственным функциям, равносходимость), главным образом, в скалярном случае и в пространствах $L_p(a,b)$, $C[a,b]$ с несколько иными граничными условиями проводился В. Ю. Любичем, В. А. Молоденковым, А. П. Хромовым, А. М. Седлецким. Библиография и комментарии по этой и близкой к ней тематике о биортогональных разложениях в ряды экспонент представлены в обстоятельном обзоре А. М. Седлецкого[5]. К рассматриваемому в первой главе диссертации кругу вопросов примыкает и изучение дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях. Из наиболее близких и, на наш взгляд, завершенных работ в этом направлении укажем статью А. А. Шкаликова[6]. Развитие ее для векторного случая было продолжено в работе Л. М. Лужиной[7]. Изучением нелокальных задач на протяжении ряда лет занималось много авторов. Из наиболее близких работ укажем здесь обзор А. Кролла[8] и работы А. А. Шкаликова[9] и А. Л. Скубачевского и Г. М. Стеблова[10].

Теорема 4. *Пусть μ_M атомарна в точках 0 и $-h$, $g \in W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^r)$ и $f \in L_2((0,T),\mathbb{C}^r)$ для любого $T > 0$. Тогда сильное решение и задачи (1), (2) удовлетворяет оценке*

$$\|(Mu_t, u_t)\|_{\mathbb{C}^r \otimes L_2((-h,0),\mathbb{C}^r)} \leq d_1 (t+1)^{N-1} e^{\varkappa_+ t} \|(Mg, g)\|_{\mathbb{C}^r \otimes L_2((-h,0),\mathbb{C}^r)} +$$

$$+ d_2 \int_0^t (t-s+1)^{N-1} e^{\varkappa_+(t-s)} \|f(s)\|_{\mathbb{C}^r}, \ t \geq 0, \tag{5}$$

где константы d_1 и d_2 не зависят от g и f.

Замечание. *Отметим, оценка (5) неулучшаема в том смысле, что величины $\varkappa_+$ и N нельзя взять меньшими во всем классе начальных функций g и правых частей f.*

Оценки, аналогичные (4) и (5), для которых величина $\varkappa_+$ заменяется на $\varkappa_+ + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), давно и хорошо известны (см. например монографии А. Д. Мыш-

[4] Rabath R., Sklyar G., Resounenko A. // C. R. Acad. Sci. Paris, 2003, V. 1337, P. 19-24.

[5] Седлецкий А. М // УМН, 1982, Т. 37, вып. 5, С. 51-95.

[6] Шкаликов А. А. // Тр. семин. им. И. Г. Петровского, 1983, вып. 9, С. 190-229.

[7] Лужина Л. М. // Вестник Моск. университета. Сер. 1. Математика и механика, 1988, № 1, С. 31-35.

[8] Krall A. M. // Rocky Mountain J. Math., 1975, V. 5, № 4, P. 493-542.

[9] Шкаликов А. А. // Вестник МГУ, Сер. матем., 1982, № 6, С. 12-21.

[10] Скубачевский А. Л., Стеблов Г. М., // ДАН СССР, 1991, Т. 321, № 6, С. 1158-1163.

киса[11], Р. Беллмана и К. Кука[12], Дж. Хейла[13], В. Б. Колмановского и В. Р. Носова[14] и работу Д. Хенри[15]). В этой связи и в связи с рассмотрением критического и сверхкритического случаев (т. е. когда имеются цепи корней характеристического квазимногочлена, приближающиеся или лежащие на мнимой оси) естественно возникла задача о получении более точных оценок решений уравнений нейтрального типа и, в частности, вопрос о том, можно ли положить $\varepsilon = 0$. Теоремы 2 и 4 дают положительный ответ на данный вопрос и посвящены исследованию указанной задачи.

Теорема 5. *(Принцип Фрагмена-Линделефа) Пусть μ_M атомарна в точках 0 и $-h$, $g \in W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^r)$, $f = 0$ и для решения u задачи* (1), (2) *выполнено условие*

$$\forall\delta > 0,\ \|u(t)\|_{\mathbb{C}^r} < c(\delta)e^{-\delta t},\ t \geq 0$$

где константа $c(\delta)$ не зависит от t. Тогда $u \equiv 0$.

Близкими вопросами занимались такие авторы, как Дж. Хейл, Ф. Каппель, Д. Хенри. Из недавних публикаций укажем здесь работу С. В. Лунела[16] (см. также указанную там библиографию).

Во втором параграфе первой главы рассматривается традиционная начальная задача для дифференциально-разностного уравнения m-го дифференциального порядка

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{kj}u^{(j)}(t-h_k) + \sum_{j=0}^{m}\int_0^h B_j(s)u^{(j)}(t-s)ds = f(t),\ t > 0, \tag{6}$$

$$u(t) = g(t),\ t \in [-h, 0]. \tag{7}$$

Здесь A_{kj} – матрицы размера $r \times r$ с постоянным комплексными элементами, элементы матриц-функций $B_j(s)$ принадлежат пространству $L_2(0,h)$, числа h_k таковы, что $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_n = h$.

По аналогии с первым параграфом рассмотрим матрицу-функцию вида

$$L(\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{kj}\lambda^j e^{-\lambda h_k} + \sum_{j=0}^{m}\lambda^j\int_0^h e^{-\lambda s}B_j(s)ds,$$

---

[11] Мышкис А. Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* — М.: Наука, 1972.

[12] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* — М.: Мир, 1967.

[13] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* — М.: Мир, 1984.

[14] Kolmanovskii V., Nosov V. *Stability of Functional Differential Equations.* — Academic Press, San Diego, 1986.

[15] Henry D. // J. Diff. Equat., 1974, V. 15, P. 106-128.

[16] Verduyn Lunel S.M. // J. Different. Equat., 1990, V. 85, № 1, P. 17-53.

а также сохраним соответствующие обозначения для $\det L(\lambda)$, нулей функции $l(\lambda)$ и их кратностей, собственных и присоединенных векторов матрицы-функции $L(\lambda)$ и экспоненциальных решений однородного уравнения (6).

Определение. *Функцию u, принадлежащую пространству $W_2^m((-h,T),\mathbb{C}^r)$ при любом $T>0$, назовем сильным решением задачи* (6), (7), *если u удовлетворяет почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ уравнению* (6) *и условию* (7).

Введем полугруппу V_t, $t \geq 0$, ограниченных операторов, действующих в пространстве $W_2^m((-h,0),C^r)$, согласно правилу $(V_t g)(s) = u(t+s)$, $t \geq 0$, $s \in [-h,0]$, где u – сильное решение однородной задачи (7), (6), отвечающее начальной функции g.

Лемма 4. *Пусть* $\det A_{0m} \neq 0$. *Тогда семейство операторов V_t образует C^0-полугруппу в пространстве $W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$ с генератором D, имеющим область определения*

$$Dom(D) = \{\varphi \in W_2^{m+1}((-h,0),\mathbb{C}^r),$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{kj}\varphi^{(j)}(-h_k) + \sum_{j=0}^{m}\int_0^h B_j(s)\varphi^{(j)}(-s)ds = 0\},$$

и действующим по правилу $D\varphi = \varphi'$.

Изучение оператора D и его резольвенты тесно связано с исследованием задачи (6), (7). Так при выполнении условия $\det A_{0m} \neq 0$ спектр оператора D совпадает с множеством Λ нулей функции $l(\lambda)$, а экспоненциальные решения $y_{q,j,k}(t)$ однородного уравнения (6) при $t \in [-h,0]$ являются его корневыми функциями.

По аналогии с результатами первого параграфа из условия $\det A_{0m} \neq 0$, $\det A_{nm} \neq 0$ вытекает, что конечны величины $\varkappa_+ = \sup_{\lambda_q \in \Lambda} \mathrm{Re}\lambda_q$, $\varkappa_- = \inf_{\lambda_q \in \Lambda} \mathrm{Re}\lambda_q$, система экспоненциальных решений $y_{q,j,k}(t)$ полна и минимальна в пространстве $W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$, а множество Λ можно заключить внутри системы контуров Γ_n, описанной в лемме 3, с сохранением всех условий леммы.

Обозначим через W_n подпространства пространства $W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$, являющиеся линейной оболочкой всех экспоненциальных решений $y_{q,j,k}(t)$ однородного уравнения (6), отвечающих числам λ_q, лежащим в областях, границами которых являются контуры Γ_n.

Теорема 6. *Пусть* $\det A_{0m} \neq 0$ *и* $\det A_{nm} \neq 0$. *Тогда семейство подпространств $\{W_n\}_{n \in Z}$ образует базис Рисса из подпространств пространства $W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$.*

Теорема 6 обобщает соответствующие результаты работы С. В. Лунела и Д. В. Якубовича[3] и работы Р. Рабаха, Г. Скляра, А. Резуненко[4], поскольку рассматриваемое уравнение (6) является функционально-дифференциальным уравнением m-го дифференциального порядка, в то время как в упомянутых работах рассматривается случай $m = 1$.

Теорема 7. *Пусть* $\det A_{0m} \neq 0$, $\det A_{nm} \neq 0$, $g \in W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$ *и* $f \in L_2((0,T),\mathbb{C}^r)$ *для любого* $T > 0$. *Тогда существует и единственно сильное решение и задачи* (6), (7), *которое удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_2^m((t-h,t),\mathbb{C}^r)} \leq d_1(t+1)^{N-1}e^{\varkappa_+ t}\|g\|_{W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)}+$$

$$+d_2\sqrt{t}\Big(\int_0^t (t-s+1)^{2(N-1)}e^{2\varkappa_+(t-s)}\|f(s)\|^2_{\mathbb{C}^r}ds\Big)^{1/2},\ t \geq 0, \qquad (8)$$

где постоянные d_1 *и* d_2 *не зависят от функции* g *и* f.

Замечание. *Отметим, что оценка* (8) *является неулучшаемой в том смысле, что величины* N *и* $\varkappa_+$ *нельзя взять меньшими во всем классе начальных функций* g *и правых частей* f. *Более того, величину* $\sqrt{t}$, *фигурирующую в оценке* (8), *нельзя опустить.*

Для решений задачи (6), (7) при выполнении условий теоремы 7 также справедлив принцип Фрагмена-Линделефа (аналог теоремы 5).

Отметим, что в недавней работе В. В. Власова и С. А. Иванова[17] получена оценка вида (8) без предположения $\det A_{nm} \neq 0$.

Добавим, что в диссертации также получены оценки, схожие с оценками (4), (5), (8), в которых величина $\varkappa_+$ заменяется на $\varkappa_-$, для решений соответствующих уравнений, рассматриваемых при отрицательных t. При этом существенно используется условие $\det A_{nm} \neq 0$. Помимо оценок сверху для решений нейтральных уравнений также получены оценки снизу. Наличие таких оценок для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа вносит существенное отличие их от запаздывающих уравнений.

Уравнения вида (1) с условием атомарности μ_M в точках 0 и $-h$ и уравнения вида (6) с условием невырожденности матриц A_{0m} и A_{nm} нередко называют нейтрально-нейтральными уравнениями. Впервые этот термин ввел Г. А. Каменский.

Глава 2 посвящена изучению уравнений запаздывающего типа. Для таких уравнений установлены оценки решений, сходные с соответствующими оценками решений нейтральных уравнений. Однако их получение основано на принципиально иных рассуждениях. Для уравнений нейтрального типа оценки получены на основании базисности Рисса системы экспоненциальных решений;

[17]Власов В. В., Иванов С. А. // ДАН, 2006, Т. 406, № 5, С. 1-3.

в то время как в случае уравнений запаздывающего типа система экспоненциальных решений не образует базис Рисса и соответствующие оценки решений устанавливаются на основании разложения (дихотомии) решения на конечную сумму экспоненциальных решений и функцию с меньшим показателем экспоненциального роста.

В первом параграфе второй главы рассматривается традиционная начальная задача для функционально-дифференциального уравнения вида

$$u'(t) = Mu_t + f(t),\ t > 0, \tag{9}$$

$$u(s) = g(s),\ s \in [-h, 0]. \tag{10}$$

Здесь $M : C([-h, 0], \mathbb{C}^r) \to \mathbb{C}^r$ - ограниченный линейный оператор, имеющий вид

$$M\varphi = \int_{-h}^{0} d\mu_M(s)\varphi(s),$$

где μ_M - матрица-функция ограниченной вариации, заданная на отрезке $[-h, 0]$. Через u_t обозначена вектор-функция $u_t(s) = u(t + s),\ t > 0$, заданная на отрезке $s \in [-h, 0]$; постоянная $h > 0$.

Обозначим через $L(\lambda)$ матрицу-функцию вида

$$L(\lambda) = \lambda I - Me^{\lambda s} = \lambda I - \int_{-h}^{0} e^{\lambda s} d\mu_M(s),$$

где I – единичная матрица в $\mathbb{C}^r$, и сохраним соответствующие обозначения для $\det L(\lambda)$, нулей функции $l(\lambda)$ и их кратностей, собственных и присоединенных векторов матрицы-функции $L(\lambda)$ и экспоненциальных решений однородного уравнения (9).

Заметим, что множество нулей $l(\lambda)$ не лежит в полосе, параллельной мнимой оси, как это было в случае нулей характеристической функции нейтральных уравнений, и его локализация описывается следующим утверждением: область $\{\lambda : \mathrm{Re}\lambda \geq 0, |\lambda| > R\} \cup \{\lambda : \mathrm{Re}\lambda < 0, |\mathrm{Im}\lambda| > ce^{-b\mathrm{Re}\lambda}\}$, где b, c и R – некоторые положительные постоянные, свободна от спектра $L(\lambda)$. Отсюда, в частности, вытекает, что конечны величины $\varkappa_+ = \sup_{\lambda_q \in \Lambda} \mathrm{Re}\lambda_q$, $\nu_+ = \max_{\lambda_q \in \Lambda,\, \mathrm{Re}\lambda_q = \varkappa_+} \nu_q$.

Сильное решение задачи (9), (10) определяется так же, как и сильное решение задачи (1), (2). Тогда, если $g \in W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^r)$ и $f \in L_2((0, T), \mathbb{C}^r)$ для любых $T > 0$, то сильное решение задачи (9), (10) существует и единственно (леммы 2.1.3 и 2.1.4). При этом его асимптотическое поведение описывается следующими утверждениями.

Теорема 8. *Пусть* $g \in W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^r)$, $f \in L_{2,\gamma_0}((0, +\infty), \mathbb{C}^r)$ *при некотором* $\gamma_0 < \varkappa_+$. *Тогда при любом* β *таком, что* $\gamma_0 < \beta < \varkappa_+$ *и прямая* $\{\lambda : \mathrm{Re}\lambda = \beta\}$

не содержит нулей функции $l(\lambda)$, для сильного решения и задачи (9), (10) справедливо разложение

$$u(t) = \sum_{\lambda_q \in \Lambda, \mathrm{Re}\lambda_q > \beta} c_{q,j,k} y_{q,j,k}(t) + u_\beta(t),\ t \geq 0,\ u_\beta \in W^1_{2,\beta}((0,+\infty), \mathbb{C}^r). \tag{11}$$

Теорема 9. *Пусть $g \in W^1_2((-h,0), \mathbb{C}^r)$ и $f \in L_2((0,T), \mathbb{C}^r)$ для любых $T > 0$. Тогда сильное решение и задачи (9), (10) удовлетворяет 1) оценке (4) с постоянной $N = \nu_+$, 2) оценке*

$$\|(u(t), u_t)\|_{\mathbb{C}^r \otimes L_2((-h,0),\mathbb{C}^r)} \leq d_3 (t+1)^{\nu_+ - 1} e^{\varkappa_+ t} \|(g(0), g)\|_{\mathbb{C}^r \otimes L_2((-h,0),\mathbb{C}^r)} +$$

$$+ d_4 \int_0^t (t-s+1)^{\nu_+ - 1} e^{\varkappa_+ (t-s)} \|f(s)\|_{\mathbb{C}^r} ds,\ \ t \geq 0, \tag{12}$$

где константы d_3 и d_4 не зависят от функций g и f.

Отметим, что обе оценки является неулучшаемыми в том смысле, что величины $N = \nu_+$ и $\varkappa_+$ нельзя взять меньшими во всем классе начальных функций g и правых частей f.

Во втором параграфе второй главы рассматривается традиционная начальная задача для функционально-дифференциального уравнения m-го дифференциального порядка

$$u^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} A_{kj} u^{(j)}(t-h_k) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^h B_j(s) u^{(j)}(t-s) ds = f(t),\ t > 0, \tag{13}$$

$$u(t) = g(t),\ t \in [-h, 0]. \tag{14}$$

Здесь A_{kj} – матрицы размера $r \times r$ с постоянным комплексными элементами, элементы матриц-функций $B_j(s)$ принадлежат пространству $L_2(0,h)$, числа h_k таковы, что $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_n = h$.

Обозначим через $L(\lambda)$ матрицу-функцию вида

$$L(\lambda) = \lambda^m I + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} A_{kj} \lambda^j e^{-\lambda h_k} + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^j \int_0^h e^{-\lambda s} B_j(s) ds,$$

и сохраним соответствующие обозначения для $\det L(\lambda)$, нулей функции $l(\lambda)$ и их кратностей, собственных и присоединенных векторов матрицы-функции $L(\lambda)$ и экспоненциальных решений однородного уравнения (13). Тогда множество нулей $l(\lambda)$ также лежит вне области $\{\lambda : \mathrm{Re}\lambda \geq 0, |\lambda| > R\} \cup \{\lambda : \mathrm{Re}\lambda < 0, |\mathrm{Im}\lambda| > ce^{-b\mathrm{Re}\lambda}\}$ с некоторыми положительными постоянными b, c и R, а величины $\varkappa_+ = \sup_{\lambda_q \in \Lambda} \mathrm{Re}\lambda_q$, $\nu_+ = \max_{\lambda_q \in \Lambda,\, \mathrm{Re}\lambda_q = \varkappa_+} \nu_q$ конечны.

Сильное решение задачи (13), (14) определяется так же, как и сильное решение задачи (6), (7). Тогда, если $g \in W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$ и $f \in L_2((0,T),\mathbb{C}^r)$ для любых $T > 0$, то сильное решение задачи (13), (14) существует и единственно (леммы 2.2.3 и 2.2.4). При этом оно удовлетворяет оценке (8) с $N = \nu_+$ (теорема 2.2.1), а в случае, когда f принадлежит пространству $L_{2,\gamma_0}((0,+\infty),\mathbb{C}^r)$ при некотором $\gamma_0 < \varkappa_+$, для него справедливо разложение (11) с функцией u_β, принадлежащей пространству $W_{2,\beta}^m((0,+\infty),\mathbb{C}^r)$ (теорема 2.2.2).

Заметим, что уравнения запаздывающего типа явились предметом изучения многих авторов. Укажем здесь монографии Р. Беллмана и К. Кука[12], А. Д. Мышкиса[11], В. Б. Колмановского и В. Р. Носова[14], Э. Пинни, Дж. Хейла[13], Л. Э. Эльсгольца, а также работы А. М. Зверкина[18] и ряда других авторов. Однако при этом оценка (12) является неулучшаемой и новой.

Глава 3 посвящена изучению функционально-дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются неограниченные операторы и оператор-функции, действующие в гильбертовом пространстве. Актуальность их исследования вызвана тем, что к таким уравнениям могут быть сведены некоторые классы уравнений в частных производных с запаздыванием по времени.

Изучение оператор-функций с экспоненциальным вхождением спектрального параметра является естественным развитием теории операторных пучков, берущих свое начало с фундаментальной работы М. В. Келдыша и развивавшейся впоследствии в работах В. В. Власова, М. Г. Гасымова, И. Ц. Гохберга, А. Г. Костюченко, М. Г. Крейна, Г. К. Лангера, В. Б. Лидского, В. И. Мацаева, А. С. Маркуса, М. Б. Оразова, Г. В. Радзиевского А. А. Шкаликова и ряда других. К анализу оператор-функций с экспоненциальным вхождением спектрального параметра приводят также нелокальные, в частности, многоточечные спектральные задачи. Нелокальным спектральным задачам для уравнений в частных производных посвящена значительная часть монографии А. Л. Скубачевского[19] (см. также указанную там библиографию).

В третьей главе рассматривается традиционная начальная задача для функционально-дифференциального уравнения вида

$$u'(t) + Au(t) + \sum_{k=1}^{n} B_k Au(t-h_k) + \int_0^h B(s)Au(t-s)ds = f(t),\ t > 0, \quad (15)$$

$$u(t) = g(t),\ t \in [-h,0]. \quad (16)$$

Здесь A – положительный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и имеющий компактный обратный. Операторы B_k

[18]Зверкин А. М. // Тр. семин. по теор. дифф. ур. с откл. арг., 1965, Т. 5, С. 3-37.

[19]Skubachevskii A. L. *Elliptic functional differential equations and applications.* — Birkhäuser: Birkhäuser Verlag, 1997.

имеют вид $B_k = T_k A^{-\theta_k}$, где T_k - ограниченные операторы. Оператор-функция $B(s)$ имеет вид $B(s) = T(s)A^{-\theta_0}$, где $T(s)$ – ограниченная сильно непрерывная оператор-функция. Постоянные θ_k и h_k таковы, что $0 < \theta_k \leq 1$, $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n = h$.

Обозначим через $W^1_{2,\gamma}(a,b;A)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, весовое пространство Соболева вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве H (подробнее см. Ж. Л. Лионса, Э. Мадженеса[20], гл. 1.) с нормой

$$\|\varphi\|_{W^1_{2,\gamma}(a,b;A)} = (\int_a^b e^{-2\gamma t}(\|A\varphi(t)\|^2_H + \|\varphi'(t)\|^2_H)dt)^{1/2},$$

через $L_{2,\gamma}(a,b)$ – весовое гильбертово пространство вектор-функций со значениями в H с нормой

$$\|\varphi\|_{L_{2,\gamma}(a,b)} = (\int_a^b e^{-2\gamma t}\|\varphi(t)\|^2_H dt)^{1/2}.$$

В случае $\gamma = 0$ будем писать $W^1_2(a,b;A)$ и $L_2(a,b)$ соответственно.

Определение. *Функцию u, принадлежащую для любого $T > 0$ пространству $W^1_2(-h,T;A)$, назовем сильным решением задачи* (15), (16), *если u удовлетворяет почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ уравнению* (15) *и условию* (16).

Обозначим через $L(\lambda)$ оператор-функцию вида

$$L(\lambda) = \lambda I + A + \sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda h_k} B_k A + \int_0^h e^{-\lambda s} B(s) A ds,$$

где I – тождественный оператор в H. На основании леммы М. В. Келдыша[1] устанавливается, что $L^{-1}(\lambda)$ – конечномероморфная оператор-функция с дискретным спектром. Поэтому мы сохраним соответствующие обозначения для собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$ и их кратностей, собственных и присоединенных векторов, входящих в каноническую систему[1] собственных и присоединенных (корневых) векторов оператор-функции $L(\lambda)$, и экспоненциальных решений однородного уравнения (15).

Отметим, что в случае конечномерного пространства $H = \mathbb{C}^r$ $(\mathbb{R}^r)$ имеется обширная библиография работ, посвященных изучению характеристических квазимногочленов $l(\lambda) = \det L(\lambda)$, распределению их нулей и их оценкам. Ограничимся здесь упоминанием монографий Р. Белмана и К. Кука, Б. Я. Левина, Э. Пинни, Н. Левинсона, А. Ф. Леонтьева, а также результатов А. М. Зверкина, В. Б. Лидского, Л. С. Понтрягина, В. А. Садовничего, А. М. Седлецкого, Я. Д. Тамаркина, Л. Э. Эльсгольца.

[20] Лионс Ж. Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* — М.: Мир, 1971.

В случае бесконечномерных пространств и, в частности, гильбертова пространства H, оператор-функции аналогичные $L(\lambda)$ изучались существенно в меньшей степени. Наиболее близкими работами, посвященными собственно изучению таких оператор-функций, описанию их резольвентных множеств и их оценкам, являются работы В. В. Власова[21]. В указанных работах автор установил, что спектр оператор-функции $L(\lambda)$ так же, как и в случае запаздывающих уравнений в конечномерном пространстве, лежит вне области $\{\lambda : \mathrm{Re}\lambda \geq 0, |\lambda| > R\} \cup \{\lambda : \mathrm{Re}\lambda < 0, |\mathrm{Im}\lambda| > ce^{-b\mathrm{Re}\lambda}\}$ с некоторыми положительными постоянными b, c и R, а величины $\varkappa_+ = \sup_{\lambda_q \in \Lambda} \mathrm{Re}\lambda_q$, $\nu_+ = \max_{\lambda_q \in \Lambda,\, \mathrm{Re}\lambda_q = \varkappa_+} \nu_q$ конечны. В упомянутых работах также установлены существование и единственность сильного решения, понимаемого в смысле данного выше определения, задачи (15), (16) с начальной функцией $g \in W_2^1(-h, 0; A)$, и правой частью $f \in L_2(0, T)$ для любых $T > 0$.

Теорема 10. *Пусть* $g \in W_2^1(-h, 0; A)$, $f \in L_{2,\gamma_0}(0, +\infty)$ *при некотором* $\gamma_0 < \varkappa_+$. *Тогда при любом* β *таком, что* $\gamma_0 < \beta < \varkappa_+$ *и прямая* $\mathrm{Re}\lambda = \beta$ *не содержит собственных значений функции* $L(\lambda)$, *для сильного решения и задачи* (15), (16) *справедливо разложение*

$$u(t) = \sum_{\lambda_q \in \Lambda, \mathrm{Re}\lambda_q > \beta} c_{q,j,k} y_{q,j,k}(t) + u_\beta(t),\ t \geq 0,\ u_\beta \in W_{2,\beta}^1(0, +\infty; A). \qquad (17)$$

Теорема 11. *Пусть* $g \in W_2^1(-h, 0; A)$ *и* $f \in L_2(0, T)$ *для любых* $T > 0$. *Тогда сильное решение и задачи* (15), (16) *удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_2^1(t-h,t;A)} \leq d_1(t+1)^{\nu_+-1} e^{\varkappa_+ t} \|g\|_{W_2^1(-h,0;A)} +$$

$$+ d_2\sqrt{t}\Big(\int_0^t (t-s+1)^{2(\nu_+-1)} e^{2\varkappa_+(t-s)} \|f(s)\|_H^2 ds\Big)^{1/2},\ t \geq 0,$$

где константы d_1 *и* d_2 *не зависят от функций* g *и* f.

Отметим, что наиболее близкими к предмету изучения третьей главы являются работы Г. Ди Блазио, К. Куниша, Е. Синестрари[22], К. Куниша, М. Мастинсека[23] и К. Куниша, В. Шаппахера[24]. Однако авторами не изучалось поведение функции $L^{-1}(\lambda)$ и не были получены результаты теоремы 10. В указанных работах отсутствуют также аналоги теоремы 11, для решений показан лишь подэкспоненциальный рост (без указания оценки роста). Более того, в

[21] Власов В. В. // Изв. вузов. Математика, 1992, вып. 8 (363), С. 80-83., Власов В. В. // Изв. вузов. Математика, 1993, № 5, С. 24-35., Власов В. В. // Мат. сб., 1995, Т. 186, № 8, С. 67-92.

[22] Di Blasio G., Kunisch K., Sinestrari E. // J. Math. Anal. and Appl., 1984, V. 102, P. 38-57., Di Blasio G., Kunisch K., Sinestrari E. // Izrael Journal of Mathematics, 1985, V. 50, № 3, P. 231-263.

[23] Kunish K., Mastinšek M. // Diff. and Integral Equations, 1990, V. 3, № 4, P. 733-756.

[24] Kunish K., Shappacher W. // J. Diff. Equations, 1983, V. 50, P. 49-79.

упомянутых работах рассматривается случай одного сосредоточенного запаздывания (это соответствует $n = 1$) и скалярной функции $B(s)$.

Заметим, что частным случаем задачи (15), (16) являются задачи для дифференциально-разностных уравнений в пространстве $H = \mathbb{C}^r$. Однако из результатов третьей главы не вытекают результаты второй главы. Так в первом параграфе второй главы рассматриваются уравнения более общего вида, чем уравнения вида (15) в случае конечномерного пространства H, поскольку содержат «размазанные» запаздывания в виде интеграла Лебега-Стильтьеса, а во втором параграфе второй главы рассматриваются дифференциально-разностные уравнения произвольного дифференциального порядка.

Автор глубоко и искренне благодарен своим научным руководителям д.ф.-м.н., профессору В. В. Власову и д.ф.-м.н., профессору А. Г. Костюченко за постоянное внимание к работе, за многочисленные обсуждения, за ценные советы и замечания.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Власов В. В., Медведев Д. А. *Оценки решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа.* // Доклады Академии наук, 2003, Т. 389, № 2, С. 156-158.

   В работе Власову В. В. принадлежат постановка задачи, формулировки основных определений, утверждения основных теорем, относящиеся к уравнению без запаздываний, выраженных интегральными членами (без «размазанных» запаздываний), Медведеву Д. А. принадлежат полные доказательства основных теорем в общем случае.

2. Власов В. В., Медведев Д. А. *Об оценках решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.* // Известия высших учебных заведений, Математика, 2004, № 6, С. 21-29.

   В работе Власову В. В. принадлежат постановка задачи, формулировки основных определений, утверждения основных теорем, относящиеся к уравнению без запаздываний, выраженных интегральными членами (без «размазанных» запаздываний), Медведеву Д. А. принадлежат полные доказательства основных теорем в общем случае.

3. Медведев Д. А. *Асимптотическое поведение решений уравнений с последействием в гильбертовом пространстве* // Успехи математических наук, 2007, Т. 62, вып. 1, С. 201-202.

4. Vlasov V. V. and Medvedev D. A. *On asymptotic behavior and estimates of solutions to neutral equations.* // Functional Differential Equations, 2006, V. 13, № 2, P. 207-223.

В работе Власову В. В. принадлежат постановка задачи, формулировки основных определений, формулировка и доказательство теоремы 2, Медведеву Д. А. принадлежат формулировка и доказательство основной теоремы 1, исследование уравнений, включающие в себя операторы, выраженные через интегралы Стилтьеса.

5. Власов В. В., Медведев Д. А. *Об асимптотических свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Современная математика. Фундаментальные направления, 2006, Т. 15, № 3, С. 112-125.

В работе Власову В. В. принадлежат постановка задачи, формулировки основных определений, формулировка и доказательство теоремы 2, Медведеву Д. А. принадлежат формулировка и доказательство основной теоремы 1, исследование уравнений, включающие в себя операторы, выраженные через интегралы Стилтьеса.

6. Медведев Д. А. *Асимптотическое поведение решений уравнений с запаздывающим аргументом в гильбертовом пространстве* // Современная математика. Фундаментальные направления, 2007, Т. 21, № 1, С. 83-92.

Результаты работ 1, 2, 4, 5 нашли отражение только в первой главе диссертации.