МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

Баштова Елена Евгеньевна

СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПУАССОНОВСКИМИ ПОТОКАМИ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2006

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Л. Г. Афанасьева
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. Ю. Королев
	доктор физико-математических наук вед.н.с. В. И. Афанасьев
Ведущая организация:	Институт проблем информатики РАН

Защита диссертации состоится 2 марта 2007 года в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 2 февраля 2007 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор Т. П. Лукашенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Во многих реально существующих объектах (таких как большие транспортные сети, информационные системы, диспетчерские службы в аэропортах и т.д.) возникают потоки, интенсивность которых не только неоднородна по времени, но и зависит от случайных обстоятельств. Поэтому введение пуассоновского потока со случайной интенсивностью позволяет строить модели, которые более точно описывают поведение реальных систем.

С другой стороны, дополнительная случайность обобщает математическую постановку задачи, так как при различных видах интенсивности дважды стохастический пуассоновский процесс может оказаться и процессом с независимыми приращениями, и процессом с ограниченным последействием, и полумарковским процессом.

Системы обслуживания с зависящими от времени и случайными параметрами рассматривались в работах многих авторов. Начало изучения систем с непостоянной интенсивностью было положено в статьях А.Кларка [1,2] в 1953 году, а двумя годами позже Д.Кокс [3] предложил рассматривать потоки, интенсивность которых зависит от состояний некоторой марковской цепи. Такой поток позже был назван марковски-модулированным или процессом Кокса, а его обобщение — дважды стохастическим пуассоновским процессом. Среди дальнейших можно выделить работы Д.Харрисона и А.Лемуана[4,5], Л.Г.Афанасьевой[6,7], Т.Рольски[8,9].

Первой задачей, возникающей при исследовании систем обслуживания, является

[1]Clarke A.B. (1953) The time-dependent waiting line problem. *Univ.Michigan Rept. M720-1R39, 1953.*

[2]Clarke A.B. On time-dependent waiting line processes. *Ann.Math.Statist. v.24(1953), p.491-492.*

[3]Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes *Proc.Cambr.Phil.Soc. 1955 v.51, n.3 p.433-441.*

[4]Harrison J.M., Lemoin A.J. (1977) Limit theorems for periodic queues. *J.Appl.Prob. v.14(1977), p.566-576.*

[5]Lemoin A.J. (1981) On queues with periodic Poisson input.*J.Appl.Prob. v.18(1981), p.889-900.*

[6]Афанасьева Л.Г. Кибкало А.А. (1985) Равномерные оценки для периодического решения в системе $M(t)|G|1|\infty$. *Пробл. уст. стох. моделей. Труды семинара ВНИИСИ.*

[7]L.G.Afanas'eva (1984) On waiting-time process in periodic queues.*Lect.Notes Math. Stab. probl.stoch.models 1984.*

[8]Rolski T. (1986) Upper bounds for single server queues with doubly stochastic Poisson arrivals. *Math. Oper. Res.*, Vol. 11. 442–450.

[9]Rolski T. (1989) Queues with nonstationary input. *Queueing systems*, Vol. 5. 113–130.

определение условий стохастической ограниченности таких характеристик системы, как время ожидания и количество требований в очереди. Стохастическая ограниченност позволяет считать, что очередь не будет неограниченно возрастать, и, значит, можно надеяться получить какие-либо оценки или построить компьютерную модель. Если же сделать дополнительные предположения о свойствах входящего процесса, то стохастическая ограниченность влечет за собой существование предельного режима.

Явные формулы для предельных распределений удается найти лишь в очень редких случаях, поскольку системы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, появляющиеся при анализе моделей массового обслуживания с нестационарным или дважды стохастическим входящим потоком, как правило, имеют высокую размерность и часто — непостоянные коэффициенты. Все это привело к тому, что изучаются крайние случаи: ситуации большой или малой загрузки, быстро или медленно меняющейся интенсивности входного потока и т.п.

Одно из наиболее популярных направлений в теории массового обслуживания является исследование системы в условиях большой загрузки. При этом основные вопросы ставятся следующим образом: можно ли считать характеристики изучаемой системы близкими к характеристикам системы с более простыми, например усредненными, параметрами; нет ли хорошо изученных процессов и распределений, которые бы аппроксимировали процесс виртуального времени ожидания и длину очереди при увеличении нагрузки. При этом понятие высокой нагрузки допускает несколько различных математических трактовок.

В тех ситуациях, когда существует предельный стационарный или периодический режим, можно изучать его поведение при увеличении интенсивности входящего потока или при замедлении обслуживания[10, 11]. Если возникает необходимость изучать работу нагруженной системы до вхождения в предельный режим, или

[10]L.G.Afanas'eva (1984) On waiting-time process in periodic queues.*Lect.Notes Math. Stab. probl.stoch.models 1984.*

[11]Боровков А.А. (1972) *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.*. Наука, Москва.

предельного режима вообще не существует, то рассматривают схему серий, то есть модель, в которой время и параметр нагрузки увеличиваются синхронно. Сюда относятся задачи о диффузионной аппроксимации и анализ переходных явлений[12, 13, 14].

Другим предельным случаем, позволяющим получать оценки и приблизительный вид распределений, является ситуация малой нагрузки. Результаты, касающиеся условий малой нагрузки можно найти, например, в работах А.А.Боровкова[15], Т.Рольски[16].

Вследствие популярности и активного развития теории массового обслуживания вообще и изучения систем со сложно устроенным входящим потоком в частности, проблематика диссертации и подходы, предложенные в ней, представляются весьма актуальными.

Цель работы.

Асимптотический анализ систем массового обслуживания с дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком с целью аппроксимации распределений основных характеристик (таких как виртуальное время ожидания, число требований и т.д.) в условиях высокой и малой загрузки.

Научная новизна.

Все полученные результаты являются новыми. Следует отметить, что, как правило, рассматриваются два основных вида непостоянной интенсивности: либо интенсивность предполагается некоторой зависящей от времени детерминированной функцией, либо стационарным марковским процессом. В настоящей же диссертации при доказательстве общих теорем рассматривается нестационарный дважды

[12] Ю.В.Прохоров (1963) Переходные явления в теории массового обслуживания. *Лит.Мат.сб. т.3 № 1, стр.199-206*

[13] D.Y.Burman (1979) An analytic approach to diffusion approximations in queueing *Ph.D. New York Univ.*

[14] G.I.Falin (1989) Periodic queues in heavy traffic *Adv.Appl.Prob. v.21, p.485-487*

[15] Боровков А.А. (1972) *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания..* Наука, Москва.

[16] Rolski T. B.Blaszczyszyn (1993), Queues in series in light traffic. *Ann.Appl.Prob. v.3 No. 3, 881-896*

стохастический пуассоновский процесс. Дополнительные конкретизирующие условия появляются лишь при подсчете явного вида тех или иных выражений в различных случаях.

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Найдены условия, при которых имеет место стохастическая ограниченность и существование предельного периодического или стационарного распределения для виртуального времени ожидания в системах с дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком.

2. В ситуации высокой загрузки доказана сходимость предельной функции распределения нормированного времени ожидания нагруженной системы к экспоненциальному распределению.

3. В тех же условиях высокой загрузки доказана C-сходимость нормированного времени ожидания к процессу броуновского движения на каждом конечном интервале.

4. Получена формула для вычисления параметра экспоненциального распределения, являющегося также коэффициентом диффузии броуновского движения. Для ряда случаев этот коэффициент вычислен в явном виде.

5. В ситуации малой загрузки найдено асимптотическое разложение по параметру загрузки для периодического распределения времени ожидания.

Методы исследования.

В диссертации используются классические и современные методы теории массового обслуживания и теории случайных процессов (мажорирование, теорема Смита, метод Кифера - Вольфовица, теорема Боровкова о диффузионной аппроксимации, анализ случайных блужданий, анализ систем на расширяющихся интервалах времени, интегро-дифференциальные уравнения Такача). Доказательство асимптотического разложения потребовало привлечения методов комбинаторного анализа.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Её методы и результаты могут найти применение в дальнейшем исследовании систем обслуживания с дважды стохастическими входящими потоками.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре "Современные проблемы теории массового обслуживания"(руководитель - д.ф.-м.н., профессор Л.Г. Афанасьева), на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (2004-2006 гг.), а также на XXIV международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей (Юрмала, 10 - 15 сентября 2004г), на конференции "Современные проблемы и новые направления в теории вероятностей"(Черновцы, Украина, 26 -30 июня 2005г.) и на Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (Воронеж, 24-28 января 2004 г., 27-30 января 2006 г.) Тематика работы была поддержана грантом РФФИ 05-01-00256.

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приведён в конце автореферата.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав (разбитых на разделы), заключения и списка литературы, насчитывающего 50 наименований. Общий объём диссертации — 97 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приведён краткий исторический обзор по тематике работы, изложены цели и методы исследования, а также структура диссертации.

В **первой главе** изучаются условия стохастической ограниченности и существования предельного режима. Вначале даются необходимые определения и приводятся примеры систем с дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком (ДСПП).

Определение 1 *Пусть на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *задан случайный процесс* $\Lambda(t)$, *имеющий с вероятностью 1 неубывающие непрерывные справа траектории, и на том же вероятностном пространстве задан стандартный пуассоновский процесс,* $\{A^*(s), s \geq 0\}$, *не зависящий от* $\{\Lambda(t), t \in \mathbf{R}\}$. *Тогда дважды стохастический пуассоновский процесс* $\{A(t), t \geq 0\}$ *определяется при помощи формулы*

$$A(t) = A^*(\Lambda(t)). \tag{1}$$

В диссертации предполагается, что $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(u)du$, где $\{\lambda(t, \omega), t \geq 0\}$ - неотрицательный и ограниченный с вероятностью 1 случайный процесс. При этом процесс $\Lambda(t)$ называется ведущим процессом, а $\lambda(t)$ интенсивностью дважды стохастического пуассоновского процесса $\{A(t), t \geq 0\}$.

В диссертации приведено несколько примеров дважды стохастического пуассоновского процесса, возникающих в классических системах обслуживания. Укажем один из них. Рассмотрим r-канальную систему, в которую поступает пуассоновский поток требований интенсивности λ. Время обслуживания каждого требования экспоненциально с параметром μ. Вновь прибывшее требование поступает на обслуживание, если в системе находится $k < r$ требований. Если в системе находится $k \geq r$ требований, то новое требование с вероятностью f_k присоединяется к очереди, а с вероятностью $1 - f_k$ теряется.

Пусть $Q(t)$ - число требований в системе в момент t, а $X(t)$ - число потерянных требований за $(0, t)$. Тогда $X(t)$ является дважды стохастическим пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda(1-f_{Q(t)})$. Кроме того, поскольку в данном случае $Q(t)$ - стационарный марковский процесс, то $X(t)$ — пример часто изучаемого в литературе марковски-модулированного потока (процесса Кокса).

Основное внимание в диссертации уделяется одноканальной системе обслуживания S с дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком $A(t)$ интенсивности $\lambda(t,\omega)$.

Времена обслуживания $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ суть независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $B(x)$ и
средним b.

Изучается процесс виртуального времени ожидания $W(t)$, который, как известно[17], задается формулой:

$$W(t) = W(0) + Y(t) - inf\{Y(s) : 0 \leq s \leq t\} \text{ где} \tag{2}$$

$$Y(t) = X(t) - t, \text{ а } X(t) \;=\; \xi_1 + \xi_2 + \; ... \; + \xi_{A(t)}.$$

Для одноканальной системы с входящим ДСПП имеет место следующая теорема.

Теорема 1 *Пусть существуют числа* $0 < c < C < \infty$ *и последовательность марковских моментов* $T_1 < T_2 < \dots$ *относительно потока*
$F_t = \sigma(\Lambda(u), u \leq t)$*, такая что* $c < \mathbf{E}(T_n - T_{n-1}) < C$ *и для всех достаточно больших* n *выполняется:*

$$\frac{\mathbf{E}\Lambda(T_{n-1}, T_n)}{\mathbf{E}(T_n - T_{n-1})}\, b < 1$$

Тогда процесс $W(t)$ *стохастически ограничен.*

Доказательство проводится методом Кифера и Вольфовица [18].

Формулировка теоремы 1, будучи ограниченной на случай детерминированной интенсивности, эквивалентна теореме о стохастической ограниченности в работе

[17] см. напр. Боровков А.А. (1972) Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. Наука, Москва.

[18] Kiefer J., Wolfowitz J. (1955) On the theory of queues with many servers.// Trans.Amer.Math.Soc. v.78, 1, p. 1-18

Т.Рольски[19]. Таким образом теорема 1, обобщает соответствующую теорему Т.Рольски.

Если же сделать дополнительные предположения о природе ведущего процесса, то, используя теорему Смита[20], можно доказать не только стохастическую ограниченность, но и существование предельного режима.

Предположим, что $\lambda(t,\omega)$ - регенерирующий, ограниченный с вероятностью 1 случайный процесс и $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательные моменты регенерации $\lambda(t,\omega)$, а $\{\tau_n = t_n - t_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$- длительности периодов регенерации ($\mathbf{E}\tau_n < \infty$). Тогда для системы S **коэффициент загрузки** определяется следующим образом:

$$\rho = \frac{b}{\mathbf{E}\tau_1}\mathbf{E}\int_0^{\tau_1} \lambda(t,\omega)\,dt. \tag{3}$$

Определение 2 *Случайный процесс $\{V(t), t \geq 0\}$ - периодический с периодом T, если все его конечномерные распределения периодичны с периодом T.*

Определение 3 *Случайный процесс $\{V(t), t \geq 0\}$ - периодический регенерирующий процесс, если регенерирующим является процесс*
$\{V(nT), n \in \mathbf{N}\}$.

Теорема 2 *Если интервалы между регенерациями $\lambda(t,\omega)$ имеют нерешетчатое распределение, то существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} P(W(t) \leq x) = H(x)$$

Если же $\lambda(t,\omega)$ - периодический регенерирующий процесс с периодом T (в смысле определения 3), то для каждого $t \geq 0$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} P(W(nT+t) \leq x) = H(t,x)$$

где $H(t,x)$ - периодическая по t функция.
При этом функции $H(x)$, $H(t,x)$ являются функциями распределения тогда и только тогда, когда $\rho < 1$.
В противном случае они тождественно равны 0.

[19] Rolski T. (1989) Queues with nonstationary input. *Queueing systems*, Vol. 5. 113–130.
[20] Smith W.L.(1955) Regenerative stochastic processes.// Proc.Roy.Soc.London. Ser A 1955 v.232

В конце главы приводятся примеры систем, в которых можно выписать явные формулы для предельного распределения времени ожидания.

Вторая глава посвящена ситуации высокой загрузки для систем с входящим ДСПП. Рассмотрено два варианта постановки задачи. Сначала изучается поведение предельного периодического режима в условиях большой загрузки, а затем - диффузионная аппроксимация нормированного процесса времени ожидания в случае, когда нагрузка увеличивается вместе с течением времени. Предполагается, что изучаемая система является элементом последовательности систем $\{S_\varepsilon\}$ с общей функцией распределения $B(x)$ времен обслуживания. Интенсивность входящего потока $\lambda_\varepsilon(t)$ системы S_ε зависит от ε таким образом, что

$$\lambda_\varepsilon(t) = \frac{1-\varepsilon}{\rho}\lambda(t) \ \text{ и } \ \varepsilon \to 0. \tag{4}$$

Здесь, как и раньше, $\lambda(t)$ - периодический регенерирующий случайный процесс, представляющий собой интенсивность входящего потока.

При таком определении $\lambda_\varepsilon(t)$ коэффициент загрузки системы S_ε (определенный для исходной системы соотношением (3)), стремится к 1 при $\varepsilon \to 0$, оставаясь меньше 1:

$$\rho_\varepsilon = \frac{\mathbf{E}\Lambda_\varepsilon(\tau)}{\mathbf{E}\tau} b = 1-\varepsilon \to 1 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Те параметры и характеристики системы S_ε, которые зависят от ε всюду далее будут отмечены значком ε .

Для предельного периодического или стационарного распределения имеет место

Теорема 3 *Пусть* $\rho < 1$ *и* $\mathbf{E}\xi_n^{2+\delta} < \infty$ *и* $\mathbf{E}\tau_n^{2+\delta} < \infty$ *для некоторого* $\delta > 0$. *Тогда существует*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} H_\varepsilon\left(t, \frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 - e^{-2x/\sigma^2}, \ \ \textit{где} \tag{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{b_2}{b} + \frac{\mathbf{D}\Lambda(\tau_n)\mathbf{E}\tau_n}{(\mathbf{E}\Lambda(\tau_n))^2} + \frac{\mathbf{D}\tau_n}{\mathbf{E}\tau_n} - \frac{2cov(\tau_n, \Lambda(\tau_n))}{\mathbf{E}\Lambda(\tau_n)} \tag{6}$$

В диссертации приведены два способа доказательства этой теоремы: один из них опирается на факторизационную технику для случайных блужданий, а второй основан на применении результата А.А.Боровкова[21] вместе с методом мажорирования.

При исследовании работы нагруженной системы до вхождения в предельный режим, или если предельного режима вообще не существует, изучают модель, в которой время и параметр нагрузки увеличиваются синхронно.

Рассматривается схема серий, т.е. последовательность систем $\{S_\varepsilon\}$, функционирующих в условиях высокой нагрузки (4) на удлиняющихся интервалах времени $U = \nu/\varepsilon^2$, где $\nu > 0$ фиксировано. Изучается нормированный процесс виртуального времени ожидания

$$Z_\varepsilon(t) = \varepsilon\, W_\varepsilon\left(t/\varepsilon^2\right).$$

Основной результат второго параграфа главы 2 составляет следующая теорема:

Теорема 4 *Пусть* $\mathbf{E}\xi_n^{2+\delta} < \infty$, $\mathbf{E}\tau_n^{2+\delta} < \infty$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и* $W(0) = 0$. *Тогда процесс* $Z_\varepsilon(t)$ *C-сходится*
на каждом конечном отрезке $[0, \nu]$ *к диффузионному процессу с с отражением от нулевой границы и коэффициентами* $(-1, \sigma^2)$, *где* σ^2 *определяется формулой (6).*

Доказательство этой теоремы существенным образом опирается на фундаментальную теорему Боровкова о диффузионной аппроксимации[22], которая применима к широкому классу процессов. Однако проверка условий этой теоремы для систем с входящим ДСПП представляет собой значительную трудность и требует применения разнообразных приемов и методов современной теории вероятностей (различные свойства стохастических неравенств, неравномерные оценки в классической ЦПТ, а также ЦПТ для зависимых случайных величин, предельные теоремы для процессов накопления).

[21] Боровков А.А. (1972) Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. Наука, Москва.

[22] Боровков А.А. (1980) Асимптотические методы в теории массового обслуживания. стр. 55, 77 теорема 2

В последнем параграфе второй главы представлено несколько способов вычисления параметра σ^2 в явном виде. В частности, для марковски-модулированного потока найдена формула для σ^2 в терминах переходных вероятностей управляющего процесса.

Рассмотрим марковски-модулированный поток, управляемый стационарной цепью Маркова с n состояниями и инфинитезимальной матрицей $||\alpha_{ij}||$. Поскольку для функции $H(t,x)$ в случае марковски-модулированного потока можно выписать уравнение, подобное уравнению Такача[23] , то в данном случае для вычисления коэффициента σ^2 удобно воспользоваться этим уравнением, переписанным в терминах преобразования Лапласа-Стилтьеса.

Обозначим $b^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} B(dx)$, $\quad H^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} H(dx)$

Введем матрицу $\mathbf{M}$(s)=$||m_{ij}(s)||$, $\quad m_{ij}(s) = \alpha_{ji}$ для $i \neq j$,
$m_{ii}(s) = s - \lambda_i(1-b^*) - \sum\limits_{j \neq i} \alpha_{ij}$

Согласно теореме 3

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} H^*_\varepsilon(s\varepsilon) = \frac{1}{1+\sigma^2 s} \tag{7}$$

Для марковски-модулированного потока удается в явном виде найти этот предел.

Теорема 5 *Обозначим* $\Delta(s) = det\, \mathbf{M}(s)$. *Тогда*

$$\sigma^2 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon\, \Delta_\varepsilon{}''(0)}{\Delta_\varepsilon{}'(0)} \tag{8}$$

Примером подсчета коэффициента σ^2 по формуле (8) может служить следствие для процесса размножения и гибели.

Следствие 1 *Пусть* $\alpha_{ii+1}(t) = \alpha$, $\alpha_{i+1i}(t) = \beta$, $\; i = \overline{1,\, n-1}$. *Тогда*

$$\sigma^2 = \frac{b_2}{b} - 2\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_i b}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\lambda_j b}{\rho}\right) \frac{\sum\limits_{k=j}^{i-1} \alpha^{k-1}\beta^{n-k-1}}{\sum\limits_{l=1}^{n} \alpha^{l-1}\beta^{n-l}}\,. \tag{9}$$

[23]Takács L. (1955) Investigation of waiting-time problems by reduction to Markov process.// Acta Math.Acad. Sci. Hungary, 6(1955) p.101-129.

В **главе 3** рассмотрена ситуация малой загрузки.

Предположим снова, что наша система является элементом последовательности систем $\{S_\varepsilon\}$ с общей функцией распределения $B(x)$ времен обслуживания. Интенсивность входящего потока $\lambda_\varepsilon(t)$ системы S_ε зависит от ε таким образом, что $\lambda_\varepsilon(t) = \varepsilon\lambda(t)$ и $\varepsilon \to 0$.

Основной результат главы составляет следующая теорема (асимптотическое разложение по малому параметру загрузки для периодического распределения времени ожидания):

Теорема 6 *Пусть* $\mathbf{E}\xi_1^{n^2+1+\delta} < \infty$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и натурального* n. *Тогда существуют функции* $F_i(t,y),\ i = \overline{1\ldots n}$, *такие что*

$$H_\varepsilon(t,y) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i F_i(t,y) + o(\varepsilon^n), \varepsilon \to 0, \tag{10}$$

Доказательство теоремы 6 разделено на две части. Сначала доказано несколько лемм оценочного характера.

Для фиксированного $t \geq 0$ и $c < 0$ обозначим интервалы $\Delta = (t - \varepsilon^c, t)$ и $\Delta^\infty = (-\infty, t - \varepsilon^c]$. Первые две леммы описывают асимптотическое поведение вероятности того, что хотя бы одно требование, пришедшее на промежутке Δ^∞, находится в системе в момент t. Третья лемма оценивает вероятность появления в системе более чем n требований на интервале Δ. Последняя лемма касается вероятности застать систему занятой в момент $t - \varepsilon^c$.

Таким образом, первая часть доказательства дает возможность фактически не учитывать требования, поступившие в систему вне некоторого интервала времени, а также считать, что на этом интервале поступило не более n требований.

Дальнейшие рассуждения представляют собой несколько индуктивных переходов, использующих комбинаторную технику, которые и позволяют (с учетом первой части) доказать теорему 6.

В последнем параграфе третьей главы приведен пример подсчета коэффициентов разложения для одного вида случайной интенсивности.

Пусть $v(t)$ - периодическая интегрируемая неотрицательная функция с периодом T и $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ($\eta_n \geq 0$ п.н.). Случайную интенсивность дважды стохастического пуассоновского потока определим так:

$$\lambda(nT + t, \omega) = v(t)\,\eta_n. \tag{11}$$

При таком определении величины η_n можно интерпретировать как случайные амплитуды, которые постоянны на n-ом периоде.

Для системы с такой интенсивностью входящего потока и экспоненциально распределенными (с параметром μ) временами обслуживания первые два коэффициента в разложении 10 имеют следующий вид:

$$F_1(t, y) = \frac{1}{\mu}\mathbf{E}\eta e^{-\mu y}$$

$$F_2(t, y) = \frac{1}{\mu}(\mathbf{E}\eta)^2 y e^{-\mu y} - \frac{2}{\mu}\mathbf{D}\eta y e^{-\mu y} +$$

$$+\frac{1}{\mu}\mathbf{D}\eta e^{-\mu(\{t\}+y)}\left(\mu\{t\}^2 + 2\mu\{t\}y - 2\{t\} + \frac{2\mu\{t\} + 2\mu y - 2}{e^{\mu} - 1} + \mu\frac{e^{\mu} + 1}{(e^{\mu} - 1)^2}\right)$$

На этом примере видно, что в случае периодического режима коэффициенты разложения, начиная со второго, существенно отличаются от коэффициентов для классического пуассоновского потока.

Таким образом, сравнивая результаты второй и третьей главы, можно сказать, что в ситуации высокой загрузки определяющим свойством является зависимость интенсивности от случая, а в ситуации малой загрузки - от времени.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Л. Г. Афанасьевой за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

1. Баштова Е.Е.(2004) Виртуальное время ожидания в одной системе с марковски-модулированным входным потоком. *Мат.заметки т.76 вып.6 стр.945-948*

2. Баштова Е.Е.(2006) Режим малой загрузки для системы обслуживания со случайной нестационарной интенсивностью. *Мат.заметки т.80 вып.3 стр.339-349*

3. Afanasieva L.G., Bashtova E.E. (2004)The queue with periodic double stochastic Poisson input. *Trans. XXIV Int.Sem. Stab.Probl.Stoch.Mod. Jurmala 2004 p.80-87*

   Л.Г.Афанасьевой принадлежит постановка задачи и идеи доказательств теорем о предельном режиме и о высокой загрузке в общем случае. Е.Е.Баштовой принадлежит реализация этих идей, теорема о малой загрузке и теорема о высокой загрузке для марковски-модулированных потоков.

4. Баштова Е.Е. (2004) Периодическое распределение в одноканальной системе с очередью. Условия малой загрузки. *Воронежская зимняя математическая школа - 2004. Тезисы докладов. стр.19*

5. Bashtova E.E. (2005)The queue with a periodic doubly stochastic Poisson input in the light traffic situation. *Trans. XXV Int. Sem. Stab.Probl.Stoch.Mod. Maiori/Salerno, Italy 2005 p.32-37*

6. Афанасьева Л.Г., Баштова Е.Е. (2005) Предельные теоремы для некоторой системы с входящим потоком переменной интенсивности. *Int.Conf.Modern Probl.New Trends in Probab.Th. Abstracts. Chernivtsi, Ukraine 2005 p.16-17*

   Л.Г.Афанасьевой принадлежит постановка задачи и идея доказательства теоремы о предельном режиме. Е.Е.Баштовой принадлежит реализация этой идеи и теорема о малой загрузке.