Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.9

Клепцын Виктор Алексеевич

Показатели Ляпунова, аттракторы и слоения

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2006

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова, и в Математической лаборатории Высшей Нормальной Школы г. Лиона.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Ю. С. Ильяшенко, ведущий научный сотрудник, академик Э. Жис
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. З. Гринес, доктор физико-математических наук, профессор В. И. Оселедец
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук (ПОМИ РАН).

Защита состоится "02" марта 2007 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "02" февраля 2007 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Лукашенко Т. П.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В теории динамических систем одним из важнейших направлений является качественное исследование динамики системы, в том числе описание аттракторов системы. По-видимому, честь создания этой области следует отнести А. Пуанкаре, классифицировавшему возможные варианты динамического поведения гомеоморфизма окружности и (совместно с И. Бендиксоном) векторного поля на плоскости и на сфере. Данная область затем интенсивно развивалась, в частности, в связи с тем, что динамические системы часто встречаются и в прикладных задачах. Необходимо здесь упомянуть выдающиеся работы А. А. Андронова по теории бифуркаций, С. Смейла и Д. В. Аносова, которым мы обязаны теорией гиперболических систем, А. Н. Колмогорова по турбулентности.

В дальнейшем, качественной теорией динамических систем занимались ведущие отечественные и зарубежные математики, такие, как А. А. Андронов, С. Х. Арансон, Д. В. Аносов, В. И. Арнольд, К. Бонатти, Р. Боуэн, В. З. Гринес, Э. Жис, Ю. С. Ильяшенко, А. Каток, А. Н. Колмогоров, Р. Мане, Дж. Милнор, Ш. Ньюхаус, В. И. Оселедец, Д. Палис, Я. Песин, Д. Рюэлль, Я. Г. Синай, С. Смейл, А. М. Степин, Д. Сулливан,Ф. Такенс, У. Тёрстон, Дж. Франкс, А. Н. Шарковский, Л. П. Шильников, М. Шуб, и многие другие.

К сожалению, оказывается, что задача классификации всех возможных (или даже типичных) динамических систем в высокой размерности наталкивается на практически непреодолимые (по крайней мере, на текущий момент) трудности. Известны лишь (впрочем, довольно большие) некоторые области систем, поддающихся исследованию: диффеоморфизмы Морса-Смейла, гиперболические и частично-гиперболические динамические системы, области применимости теории КАМ.

Более того, существенные трудности представляет исследование даже одного заданного векторного поля в размерностях, начиная с 3, и одного отображения уже для динамики на плоскости.

Трансверсально конформные слоения, тем самым, являются естественным объектом для исследования, являясь, в определённом смысле, случаем динамики нескольких отображений (а именно, отображений голономии вдоль слоёв), которые могут рассматриваться как одномерные (поскольку из-за конформности к ним применима лемма об искажении, в каждой точке имеется только один показатель Ляпунова, и т. д.).

В случае, если на слоях слоения задана риманова метрика, Л. Гарнетт[1] предложила рассматривать броуновское движение вдоль слоёв и исследовать его асимптотические свойства; ею же было введено понятие *гармонической меры*.

Вопросы, обсуждаемые в первой главе диссертации, получаются при применении подхода Гарнетт к трансверсально конформным неособым слоениям. Эти вопросы могут рассматриваться как развитие теории случайных динамических систем. Напомним, что обычная случайная динамическая система на метрическом компакте X это вероятностная мера на множестве эндоморфизмов X. Простейшим случаем является задание конечного множества отображений T_j и соответствующих им вероятностей их применения p_j.

Такие системы интенсивно исследовались. Первой работой в этом направлении была работа Фюрстенберга о произведениях случайных матриц[2]. В этой работе показано, что под действием такого произведения (при несущественных предположениях типичности) почти наверное почти все направления в $\mathbb{R}^n$ сближаются. Другим важным результатом, также принадлежащим Фюрстенбергу[3], является следующее утверждение: образы стационарной меры при итерациях с обратным порядком почти наверное сходятся. В работе В. А. Каймановича и Г. Мазура[4], для случая динамики модулярной группы поверхности, доказано, что предельная мера почти наверное является мерой Дирака, что влечёт сближение орбит и единственность стационарной меры. Также в данной области есть много других работ, заслуживающих упоминания: И. Ле Жана[5], Г. Фюрстенберга и Ю. И. Ки-

---

[1] L. Garnett. Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion. *J. Funct. Anal.* **51** (1983), no. 3, pp. 285–311.

[2] H. Furstenberg. Non commuting random matrices product. *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), pp. 377–428.

[3] H. Furstenberg. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. In: *Poc. Sympos. Pure Math.*, **26** (1973), pp. 193–229.

[4] V. A. Kaimanovich, H. Masur. The Poisson boundary of the mapping class group, *Invent. Math*, **125** (1996), pp. 221–264.

[5] Y. Le Jan. Équilibre statistique pour les produits de difféomorphismes aléatoires indépendants. *Ann. Inst. Henri Poincaré.* **23** (1987), no. 1, pp. 111–120.

фера[6], Г. Фюрстенберга и Г. Кестена[7], Г. Крауэла[8].

Главным инструментом здесь является *стационарная мера*, то есть мера, совпадающая со средним своих итераций. Это обобщение понятия инвариантной меры для обычных динамических систем на случай случайных динамических систем.

Мы не можем не упомянуть здесь замечательные работы Т. Кайзера[9], где эффект сближения орбит был установлен для итераций одного аналитического диффеоморфизма, возмущаемых поворотами на случайные углы, и В. А. Антонова[10], где было установлено следующее общее утверждение: в двусторонне-минимальной случайной динамической системе на окружности либо имеется общая инвариантная мера, либо имеет место эффект сближения орбит. Эффекты, обоснованные в обеих этих работах, являются проявлениями того же общего принципа, которому (в случае слоений) соответствуют основные результаты главы 1: *"В случае одномерной динамики имеет место либо инвариантная мера, либо (локальное) сближение орбит"*

В случае гладкой динамической системы, П. Баксендейлом[11] доказано следующее утверждение: для гладкой случайной динамической системы на компактном многообразии, существует эргодическая стационарная мера, такая, что сумма соответствующих ей показателей Ляпунова неположительна, и обращается в ноль если и только если эта мера инвариантна под действием всех диффеоморфизмов. В частности, для динамической системы на окружности из этой теоремы вытекает, что либо найдётся мера, инвариантная под действием всех отображений, либо имеет место эффект сближения орбит.

Важным понятием современной качественной теории динамических систем является понятие аттрактора, т.е. притягивающего множества системы. Однако, у этого понятия существует много различных формализаций. В их числе необходимо упомянуть

[6] Furstenberg H., Kifer Yu. Random matrix products and measures on projective spaces, *Israel J. of Math.*, **46** (1983), no. 1-2, pp. 12–32.

[7] H. Furstenberg & H. Kesten. Product of random matrices. *Ann. Math. Stat.*, **31** (1960), pp. 457–469.

[8] H. Crauel, Extremal exponents of random dynamical systems do not vanish, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **2**, no. 3, pp. 245-291 (1990).

[9] T. Kaijser. On stochastic perturbations of iterations of circle maps, *Physica D*, **68** (1993), pp. 201–231.

[10] В. А. Антонов. Моделирование процессов типа циклической эволюции. Синхронизация случайным сигналом. *Вестник Ленинградского Университета*, 1984, вып. 2, N 7, Астрономия, с. 67–76.

[11] P. H. Baxendale. Lyapunov exponents and relative entropy for a stochastic flow of diffeomorphisms. *Probab. Theory Related Fields.* **81** (1989), pp. 521–554.

максимальный аттрактор A_{max} диссипативной динамической системы, предельное множество L, центр Биркгофа, милноровский, статистический и минимальный аттракторы (A_M, A_{stat} и A_{min} соответственно).

Гипотеза Палиса[12] предлагает, что для типичной динамической системы все эти определения дают одно и то же множество. С другой стороны, гипотеза Рюэля[13] утверждает, что существуют типичные примеры несовпадения аттракторов. Впрочем, поскольку в этих гипотезах используются разные определения типичности (метрическая типичность в гипотезе Палиса и топологическая в гипотезе Рюэлля), эти гипотезы не являются взаимоисключающими.

Эти определения изучались, в частности, в работах[14,13,12]. Известно[15], что

$$A_{max} \supset L \supset A_M \supset A_{stat} \supset A_{min};$$

более того, для всех включений, кроме последнего, имелись примеры, показывающие, что эти включения могут быть строгими. С другой стороны, для последнего включения такой пример не был известен, в связи с чем А. С. Городецким и Ю. С. Ильяшенко[16] был поставлен вопрос о совпадении минимального и статистического аттракторов.

В главе 2 мы приводим пример динамической системы, для которой минимальный и статистический аттракторы не совпадают.

Глава 3 посвящена исследованию ячейки Черри. В 1881 году А. Пуанкаре[17] поставил вопрос о существовании потока на двумерной поверхности, у которого существовало бы исключительное (т.е. трансверсально канторово) минимальное множество. В 1932 г.,

---

[12] J. Palis. A global view of dynamics and a conjecture on the dynamics of finitude of attractors, *Géometrié complexe et systèmes dynamiques*, Orsay 1995, Astérisque **261** (2000), xiii–xiv, pp. 335–347.

[13] D. Ruelle. Historical behaviour in smooth dynamical systems. *Global analysis of dynamical systems*, pp. 63–66, Inst. Phys., Bristol, 2001.

[14] А. С. Городецкий, *Минимальные аттракторы и частично гиперболические инвариантные множества динамических систем.* Текст кандидатской диссертации, Московский Государственный Университет, 2001.

[15] А. С. Городецкий, *Минимальные аттракторы и частично гиперболические инвариантные множества динамических систем.* Текст кандидатской диссертации, Московский Государственный Университет, 2001.

[16] A. Gorodetski, Yu. Ilyashenko. Minimal and strange attractors, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1996, v. 6, N. 6, pp. 1177–1183.

[17] H. Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles, I, II, III, IV. *J. Math. Pure et Appl.*, **2** (1881, 82, 85, 86), pp. 151–217.

А. Данжуа[18] показал, что такого C^2-гладкого потока без особых точек на торе не существует, а затем это утверждение было обобщено А. Шварцем[19] на общий случай произвольного потока на двумерной поверхности. Поток Черри был предложен Т. Черри[20,21] в 1937 году как пример гладкого потока на двумерном торе с исключительным *квази*минимальным множеством; это пример, наиболее близкий к тому, что интересовало Пуанкаре.

В этой главе мы исследуем частный случай потоков Черри: потоки с одной ячейкой. Будут исследованы временны́е средние такого потока, и будет показано, что для ячейки Черри имеет место несовпадение милноровского и минимального аттракторов. Этот пример имеет коразмерность $1-0$, и соответственно, является наиболее типичным из известных примеров такого несовпадения.

Цель работы.

Целью настоящей работы является исследование показателей Ляпунова и аттракторов для случайной динамики слоений, предъявление явного примера несовпадения минимального и статистического аттракторов, а также исследование поведения временны́х средних в потоке Черри с одной ячейкой.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- Исследована динамика отображений голономии вдоль типичного броуновского пути в слое для неособых слоений коразмерности 1. Получена альтернатива "наличие трансверсальной инвариантной меры либо экспоненциальное сжатие для типичной голономии". В случае отсутствия трансверсальной инвариантной меры получен результат о сходимости решений послойного уравнения теплопроводности.

[18] A. Denjoy. Sur les courbes définies par des équation différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pure et Appl.*, **11** (1932), pp. 333–375.

[19] A. Schwartz. A generalization of Poincaré-Bendixon theorem to closed two dimensional manifolds. *Amer. J. Math.* **85** (1963), 453–458.

[20] T. Cherry. Topological properties of solutions of ordinary differential equations, *Amer. J. Math*, **59** (1937), pp. 957–982.

[21] T. Cherry. Analytic quasi-periodic discontinuous type on a torus, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **44** (1938), no. 2, pp. 175–215.

- Приведён пример динамической системы на плоскости, для которой минимальный и статистический аттракторы не совпадают.

- Исследована динамика потока Черри с одной ячейкой. Доказано, что для такого потока минимальный и статистический аттракторы состоят из одной точки (седла). Тем самым показано, что поток Черри является примером несовпадения милноровского и минимального аттракторов.

Методы иссследования

В работе используются методы эргодической теории, теории динамических систем (в том числе, существенную роль играет исследование показателей Ляпунова, и рассмотрение гармонических мер на слоениях), а также теории случайных процессов. Для исследования показателей Ляпунова применяются также методы функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть полезны в теории динамических систем с дискретным и непрерывным временем, а также в теории слоений.

Апробация работы.

Основные результаты настоящей диссертации докладывались:

- на семинаре механико-математического факультета МГУ под руководством проф. Ю. С. Ильяшенко (неоднократно, 2004–2006гг.),

- на международных конференциях “Hilbert 16th and related problems in dynamics” (Москва, декабрь 2003г.) и “Lyapunov exponents and related topics in dynamics and geometry” (Москва, январь 2005г.),

- на общем семинаре математического института Institut Mathematique de Bourgogne (Дижон, май 2006г.),

- на семинаре по геометрии, топологии и динамике лаборатории математики университета Paris-Sud (Париж, февраль 2005г.).

Публикации

Основное содержание работы опубликовано; список из трёх работ автора по теме диссертации приведен в конце автореферата.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, в совокупности включающих в себя 14 параграфов, и списка литературы, включающего 110 наименований. Полный объём диссертации 112 страниц.

Основное содержание диссертации

Главной целью диссертации является исследование различных феноменов типа притяжения в динамических системах.

В главе 1 мы, следуя определениям, предложенным Л. Гарнетт[1], исследуем динамические свойства слоений. Более точно, пусть на некотором компактном многообразии задано слоение, слои которого снабжены римановой метрикой. Тогда можно рассмотреть броуновское движение вдоль его слоёв и задать вопрос о поведении соответствующих отображений голономии. Для таких систем, в случае трансверсально конформных слоений (в частности, для слоений коразмерности 1), в настоящей работе получена следующая альтернатива. Показано, что либо существует трансверсально инвариантная мера (вырожденный случай, встречающийся исключительно редко), либо отображение голономии вдоль типичного пути экспоненциально сжимает. Отсюда выводится, в частности, строгая эргодичность такой системы на любом минимальном подмножестве.

Также исследуются свойства соответствующего послойного уравнения теплопроводности, для которого, как следствие, получена теорема стабилизации.

Все эти утверждения суммируются в следующей теореме:

Теорема 1.1.1 (Основной результат). *Пусть $\mathcal{F}$ трансверсально конформное слоение класса C^1 компактного многообразия M. Тогда либо найдётся трансверсальная инвариантная мера. Либо у $\mathcal{F}$ существует конечное число минимальных множеств $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_k$; найдутся такие меры $\mu_1, \dots, \mu_k$ на этих множествах, и $\alpha > 0$, что выполнены следующие утверждения:*

- ***Сжатие.*** *Для любой точки x из M и для почти всякого броуновского пути γ, начинающегося в x, найдётся окрестность T_γ точки x в T и константа $C_\gamma > 0$, такие, что при всех $t > 0$, отображение голономии $h_{\gamma|_{[0,t]}}$ определено в T_γ и*

$$|h_{\gamma|_{[0,t]}}(T_\gamma)| \leq C_\gamma \exp(-\alpha t).$$

- ***Распределение.*** *Для любой точки x из M и для почти всякого броуновского пути γ, начинающегося в x, путь γ стремится к одному из минимальных множеств $\mathcal{M}_j$ и распределён в соответствии с мерой μ_j, то есть*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma_* \mathrm{leb}_{[0,t]} = \mu_j,$$

где $\mathrm{leb}_{[0,t]}$ обозначает меру Лебега на отрезке $[0,t]$.

- ***Притяжение.*** *Вероятность $p_j(x)$ того, что вдольслойный броуновский путь, начинающийся в точке x (и не покидающий слоя $\mathcal{F}_x$), стремится к $\mathcal{M}_j$, является непрерывной послойно гармонической функцией.*

- ***Диффузия.*** *При t, стремящемся к бесконечности, образы при диффузии $D^t f$ непрерывной функции $f : M \to \mathbb{R}$ равномерно сходятся к сумме $\sum_j c_j p_j$, где $c_j = \int f d\mu_j$. В частности, функции p_j образуют базис в пространстве всех послойно гармонических непрерывных функций.*

Для доказательства теоремы 1.1.1 сначала устанавливается следующая:

Теорема A. *Пусть $\mathcal{F}$ — трансверсально конформное слоение класса C^1 на компактном многообразии, и пусть на некотором минимальном подмножестве $\mathcal{M}$ имеется гармоническая эргодическая мера μ с отрицательным показателем Ляпунова. Тогда имеют место следующие утверждения:*

- ***Сжатие.*** *Пусть выбрано α, $0 < \alpha < |\lambda(\mu)|$. Тогда для любого $x \in \mathcal{M}$, и для почти любого броуновского пути $\gamma \in \Gamma_x$, найдутся трансверсальная окрестность T_γ точки x и константа $C_\gamma > 0$, такие, что при всех such that for every $t > 0$, отображение голономии $h_{\gamma|_{[0,t]}}$ определено в T_γ, и*

$$|h_{\gamma|_{[0,t]}}(T_x)| \leq C_\gamma \exp(-\alpha t).$$

- ***Строгая эргодичность.*** *Для каждой точки $x \in \mathcal{M}$, почти любой броуновский путь, начинающийся в x, распределён в соответствии с мерой μ. Тем самым μ — единственная гармоничная мера на $\mathcal{M}$.*

- ***Диффузия.*** *Образы при диффузии $D^t f$ непрерывной функции $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ равномерно сходятся к константе, равной $\int_{\mathcal{M}} f d\mu$.*

- ***Притяжение.*** *Пусть $\mathcal{M} \neq M$, и обозначим через $p_{\mathcal{M}}(x)$ вероятность того, что броуновский путь, начинающийся в x, будет стремиться к $\mathcal{M}$, будет распределён в соответствии с мерой μ, и будет сжимать некоторую трансверсальную окрестность точки x. Тогда функция $p_{\mathcal{M}}$ полунепрерывна снизу и послойно гармонична. В частности, $p_{\mathcal{M}}$ отделена от нуля некоторой положительной константой в некоторой окрестности $\mathcal{M}$.*

Затем, используя определения гармонической меры, теоремы Хана-Банаха и конструкции предельных мер, в случае отсутствия меры с отрицательным показателем Ляпунова строится трансверсальная инвариантная мера:

Теорема B. *Пусть $\mathcal{F}$ — трансверсально конформное слоение компактного многообразия. Тогда на любом минимальном подмножестве либо существует трансверсальная инвариантная мера, либо гармоническая мера (на этом подмножестве) единственна и соответствующий ей показатель Ляпунова отрицателен.*

Из заключений этих двух теорем выводится теорема 1.1.1.

Приведём здесь определение, необходимое для формулировки дальнейших результатов:

Определение. Слоение $(\mathcal{F}, \Delta)$, снабжённое оператором Лапласа, называется *подвижным*, если существует трансверсальное непрерывное слоение $\mathcal{G}$ дополнительной размерности $\operatorname{codim}(\mathcal{F})$, такое, что оператор Лапласа Δ инвариантен под действием голономии вдоль $\mathcal{G}$; тем самым $\mathcal{G}$ сохраняет метрику g и поле дрейфа V.

К основным результатам главы 1 могут быть также отнесены следующие утверждения:

Теорема C. *Пусть $(\mathcal{F}, \Delta)$ — подвижное слоение коразмерности один на компактном многообразии, оператор Δ которого получен добавлением к оператору Лапласа-*

Бельтрами для римановой метрики поля дрейфа, сохраняющего объём. Тогда на каждом минимальном подмножестве существует единственная гармоническая мера. Более того, если оператор Δ симметрический (т.е. дрейфа нет), то каждая эргодическая гармоническая мера сосредоточена на некотором минимальном множестве.

Теорема 1.4.6. *Пусть $(\mathcal{F}, \Delta)$ — подвижное слоение коразмерности 1, поле дрейфа которого сохраняет объём vol_g. Тогда, на каждом минимальном подмножестве $\mathcal{F}$ существует единственная гармоническая мера.*

Замечание 1.1.2. *Теорема A остаётся верной и если слоение особое, но минимальное множество не содержит особых точек. В частности, наш результат применим для случая голоморфных слоений с особенностями комплексных компактных поверхностей. К примеру, отсюда следует, что если $\mathcal{M}$ минимальное подмножество в голоморфном слоении комплексной проективной плоскости, то на $\mathcal{M}$ имеется единственная гармоническая мера и её показатель Ляпунова отрицателен. Этот результат был недавно получен Форнаессом и Сибони для C^1-ламинаций на голоморфные кривые, содержащихся в комплексной проективной плоскости.*

Использованная техника может быть применена во многих других случаях: “словарь Салливана” позволяет переносить полученные результаты на случай конформного действия групп и конформных соответствий.

Главы 2 и 3 посвящены исследованию различных типов аттракторов для обычных динамических систем. Существует много определений того, что следует считать аттрактором системы: максимальный аттрактор, предельное множество, неблуждающее множество, центр Биркгофа, милноровский, статистический и минимальный аттракторы. Иерархия (т.е. свойства включения) таких аттракторов уже широко исследовались, в частности, в работах Д. Рюэлля[22], А. С. Городецкого и Ю. С. Ильяшенко[16], А. С. Городецкого[23].

В главе 2 мы приводим пример динамической системы, для которой минимальный и

[22] D. Ruelle. Historical behaviour in smooth dynamical systems. *Global analysis of dynamical systems*, pp. 63–66, Inst. Phys., Bristol, 2001.

[23] А. С. Городецкий, *Минимальные аттракторы и частично гиперболические инвариантные множества динамических систем.* Текст кандидатской диссертации, Московский Государственный Университет, 2001.

статистический аттракторы не совпадают. Тем самым, получен отрицательный ответ на вопрос[16] об эквивалентности этих определений. Это первый пример, различающий эти два аттрактора.

Напомним их определения. Пусть (X, g^t) — гладкий полупоток на компактном многообразии X, и μ_L — мера Лебега на X.

Определение. Открытое множество U *несущественно для статистического аттрактора*, если для μ_L–почти всех $x \in X$

$$\frac{1}{T}\left|\left\{t \,|\, 0 \le t \le T, \quad g^t(x) \in U\right\}\right| \to 0, \qquad \text{при } T \to \infty,$$

где через $|Z|$ обозначена (одномерная) лебегова мера множества $Z \subset \mathbb{R}$.

Обозначим через $f_*\mu$ образ меры μ под действием отображения f: положим $(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$.

Определение. Открытое множество U *несущественно для минимального аттрактора*, если

$$\frac{1}{T}\int_0^T (g^t_*\mu_L)(U)\,dt \to 0, \qquad \text{при } T \to \infty.$$

Определение. *Статистический (соответственно, минимальный) аттрактор* это дополнение к объединению всех несущественных в соответствующем смысле открытых множеств. Он обозначается через A_{Stat} (соответственно, A_{Min}).

Предъявляемый нами пример получается модификацией примера Боуэна: одно из сёдел в седловой связке заменяется на седлоузел. Для полученной системы, доказывается, что итерации меры Лебега стремятся к мере Дирака, сосредоточенной в седлоузле. Напротив, все точки при этом время от времени уходят от седлоузла на протяжении значительного (и разного для разных точек) промежутка времени, проводя это время в окрестности седла. В результате, минимальный аттрактор состоит из одной точки (седлоузла), а статистический из двух: седла и седлоузла. Основными результатами главы, соответственно, являются следующие утверждения:

Теорема 2.3.1. *Для модифицированного примера Боуэна,* $A_{Stat} = \{A, B\}$.

Теорема 2.3.2. *Для модифицированного примера Боуэна,* $A_{Min} = \{A\}$.

В главе 3, мы исследуем динамику ячейки Черри. Ячейка Черри — гладкое векторное поле на двумерном торе, имеющее исключительное (т.е. канторово) квазиминимальное множество, проходящее через седловую особую точку. Мы показываем, что почти всякая (по мере Лебега) точка тора проводит почти всё время в окрестности этого седла; соответственно, статистическим аттрактором является это седло. С другой стороны, милноровский аттрактор совпадает с квази-минимальным множеством. Следовательно, милноровский и статистический аттракторы для ячейки Черри не совпадают. Эти результаты сформулированы в следующих утверждениях:

Теорема 3.3.1. *Для любой точки x из бассейна отталкивания R временные средние итераций меры Дирака δ_x сходятся к мере Дирака δ_S, сконцентрированной в седле S.*

Следствие 3.3.2. *Минимальный и статистический аттракторы ячейки Черри состоят из одной точки, седла S. В частности, минимальный и милноровский аттракторы для ячейки Черри не совпадают.*

Отметим, что в типичном однопараметрическом семействе векторных полей на торе, множество значений параметра, соответствующих ячейке Черри, это канторово множество (без его концевых точек). Следовательно, ячейка Черри является примером несовпадения милноровского и статистического аттракторов, встречающимся неизолированным образом в типичном однопараметрическом семействе. Соответственно, данный пример более типичен, чем петля сепаратрисы (встречающаяся в однопараметрическом семействе дискретным образом), являвшаяся до настоящего момента примером наиболее общего положения из известных примеров несовпадения данных аттракторов.

Автор выражает свою глубокую и искреннюю признательность своим научным руководителям, доктору физ.-мат. наук, профессору Ю. С. Ильяшенко и ведущему научному сотруднику, академику Э. Жису, за постановку задач, постоянное внимание к работе, ценные советы и вдохновляющие обсуждения.

Список работ автора по теме диссертации

[1] А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко, В. А. Клепцын, М. Б. Нальский, Неустранимость нулевых показателей Ляпунова, *Функциональный анализ и его*

приложения, **39** (2005), no. 1, с. 27–38.

В работе [1] А. С. Городецкому и Ю. С. Ильяшенко принадлежат постановка задачи и идея её решения, М. Б. Нальскому доказательства лемм 1, 3 и 4, а В. А. Клепцыну доказательство леммы 2 и теоремы 3. Теорема 2 выводится из лемм 1, 2 и 3, а теорема 1 из теорем 2 и 3.

[2] В. А. Клепцын, Б. А. Рабинович, Классификация фуксовых особых точек, *Математические заметки*, **76** (2004), no. 3, с. 372–383.

В работе [2] Б. А. Рабиновичу принадлежит доказательство основного результата в случае диагонализуемой матрицы-вычета, а В. А. Клепцыну его обобщение на общий случай.

[3] V. Kleptsyn, An example of non-coincidence of minimal and statistical attractors, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **26** (2006), pp. 759–768.