На правах рукописи
УДК 511

Петриков Александр Васильевич

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Чубариков
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Н. М. Добровольский
	кандидат физико-математических наук, доцент О. В. Тырина
Ведущая организация:	Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 2 марта 2007 г. в 16 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП–2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 30 января 2007 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор В. Н. Чубариков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Обобщением классической проблемы Гаусса о числе целых точек в круге является задача получения асимптотической формулы для числа попадающих в шар растущего радиуса точек решетки, образованной некоторой дискретной подгруппой движений в римановом пространстве. Пусть $d(z,z')$ — геодезическое расстояние между точками z и z' риманова пространства $\mathfrak{R}$, Γ — *дискретная* подгруппа движений $\mathfrak{R}$, т. е. подгруппа, обладающая следующим свойством: для любой точки $z \in \mathfrak{R}$ и любой последовательности $\{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ различных элементов из Γ последовательность $\{\gamma_n z\}_{n\geqslant 1}$ не имеет точек накопления в $\mathfrak{R}$. Для точек $z_0 \in \mathfrak{R}$ и $z \in \mathfrak{R}$ рассмотрим множество

$$S(T; z_0, z) = \{\gamma z | \gamma \in \Gamma, d(z_0, \gamma z) \leqslant T\},$$

где T — большое положительное число. Предметом изучения является асимптотическое поведение при $T \to \infty$ величины

$$N(T; z_0, z) = |S(T; z_0, z)|,$$

равной числу точек решетки в шаре радиуса T, если z не является неподвижной точкой Γ, и равной этому числу, умноженному на порядок стабилизатора z в Γ, если z — неподвижная точка Γ. Дальнейшими обобщениями проблемы являются вопросы распределения орбит точек под действием дискретных подмножеств преобразований. Наибольшее число работ данной тематики посвящено пространству Лобачевского. С исследованием рассматриваемых задач связаны имена Ж. Дельсарта[1, 2], Х. Хубера[3, 4, 5], А. Сельберга[6], Ф. Фрикера[7], Л. Берар-Бержери[8, 9],

---

[1] *Delsarte J.* Sur le gitter fuchsien // C. R. Acad. Sc. 1942. **214**. 147–149.

[2] *Delsarte J.* Le gitter fuchsien // Œuvres de Jean Delsarte. **II**. Paris, 1971. 829–845.

[3] *Huber H.* Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene I // Comment. Math. Helv. 1956. **30**. 20–62.

[4] *Huber H.* Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen // Math. Ann. 1959. **138**. 1–26.

[5] *Huber H.* Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen II // Math. Ann. 1961. **142**. 385–398; Math. Ann. 1961. **143**. 463–464.

[6] *Selberg A.* On the estimation of Fourier coefficients of modular forms // Proc. Symp. Pure Math. 1965. **8**. 1–15.

[7] *Fricker F.* Ein Gitterpunktproblem im dreidimensionalen hyperbolischen Raum // Comment. Math. Helv. 1968. **43**. 402–416.

[8] *Bérard-Bergery L.* Sur les longueurs des géodésiques périodiques et le spectre des formes d'espace hyperbolique compactes // Séminaire de Géométrie Riemannienne 1970–1971. Variétés à courbure négative. Paris: M. Berger. Universite de Paris VII. 1971. 84–126.

[9] *Bérard-Bergery L.* Laplacien et géodésiques fermées sur les formes d'espace hyperbolique compactes // Séminaire Bourbaki. 24e année. 1971/72. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag. Lect. Notes Math. 1973. **317**. 107–122.

П. Гюнтера[10, 11], П. Тёрнера[12, 13], П. Д. Лакса, Р. С. Филлипса[14], Б. М. Левитана[15], М. Н. Хаксли[16], В. Рёльке[17], Ж. -М. Дезуйе, Г. Иванца[18], К. Моззочи[19], Ф. Грюневальда, Й. Меннике, Ю. Эльстродта[20], П. Сарнака[21], Г. И. Архипова, В. Н. Чубарикова[22, 23], Е. В. Подсыпанина[24], М. Суги[25] и др.

Настоящая работа также посвящена исследованию свойств распределения орбит точек под действием целочисленных матриц в двумерном и трехмерном пространстве Лобачевского в модели Пуанкаре. Устанавливаемые утверждения относятся к количественной характеристике обнаруживаемого эффекта близости орбит точек под действием целочисленных матриц больших по абсолютной величине определителей и, в определенном смысле, описывают свойство плотности орбит точек в пространстве.

Постановка задачи принадлежит Е. В. Подсыпанину. Изучение данной проблематики и аналогичных вопросов начато в работе [24].

---

[10] *Günther P.* Problème de réseaux dans les espaces hyperboliques // C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A. 1979. **288**. 49–52.

[11] *Günther P.* Gitterpunktprobleme in symmetrischen Riemannschen Räumen vom Rang 1 // Math. Nachr. 1980. **94**. 5–27.

[12] *Thurnheer P.* Le terme de reste dans un problème de réseau hyperbolique // C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A. 1980. **290**. 581–583.

[13] *Thurnheer P.* Zu einem hyperbolischen Gitterpunktproblem // Comment. Math. Helv. 1981. **56**. 240–271.

[14] *Lax P. D., Phillips R. S.* The asymptotic distribution of lattice points in euclidien and non-euclidien spaces // J. of Funct. Anal. 1982. **46**. 3. 280–350.

[15] *Левитан Б. М.* Асимптотические формулы для числа точек решетки в пространствах Евклида и Лобачевского // Успехи матем. наук. 1987. **42**. 3. 13–38.

[16] *Huxley M. N.* Introduction to Kloostermania // Elementary and Analytic Theory of Numbers. Banach Centre Pub. 1985. **17**. 217–306.

[17] *Roelcke W.* Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. Abhandlung (1956) // Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. 1953–1954. **4**. 1–109.

[18] *Deshouillers J.-M., Iwaniec H.* Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms // Invent. Math. 1982. **70**. 219–288.

[19] *Mozzochi C. J.* An upper bound for λ_1 for $\Gamma(q)$ and $\Gamma_0(q)$ // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1990. **33**. 241–250.

[20] *Грюневальд Ф., Меннике Й., Эльстродт Ю.* Некоторые замечания о дискретных подгруппах $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ // Зап. науч. семин. Ленинградского отделения Матем. института АН СССР. 1987. **162**. 77–106.

[21] *Sarnak P.* The arithmetic and geometry of some hyperbolic three manifolds // Acta Math. 1983. **151**. 253–295.

[22] *Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* О числе точек решетки в шаре в трехмерном пространстве Лобачевского // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1994. 2. 24–27.

[23] *Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* Оценка снизу первого собственного значения оператора Бельтрами–Лапласа в трехмерном пространстве // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2002. 22. 22–36.

[24] *Подсыпанин Е. В.* Распределение целых точек на детерминантной поверхности // Исследования по теории чисел. 6. Зап. науч. семинаров ЛОМИ. Л.:Наука, 1980. **93**. 30–40.

[25] *Суги М.* Целые точки в областях на плоскости Н. И. Лобачевского // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1994. **207**. 299–325.

Одним из известных приложений данной задачи является исследование аппроксимаций гексагональной решетки на плоскости целочисленными решетками. Использование результатов спектральной теории автоморфных функций позволило В. А. Быковскому[26] применить оценку порядка сближения орбит точек под действием целочисленных матриц на двумерной плоскости Лобачевского для получения оценки определителя решетки, служащей для решения прикладных задач вычислительной математики.

Применение нового элементарного метода привело М. Суги[25] к улучшению в частном случае ранее полученных результатов.

В настоящей работе оценка, анонсированная в [25], распространена на множество целых точек плоскости Лобачевского, а также рассмотрена аналогичная задача в трехмерном пространстве.

Цель работы.

Целью работы является получение новых оценок близости орбит точек под действием целочисленных матриц для двумерного и трехмерного пространства Лобачевского.

Методы исследования.

В работе использованы методы и результаты аналитической теории чисел.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Для двух точек двумерного и трехмерного пространства Лобачевского, координаты которых связаны условием рациональной зависимости, элементарным методом установлены новые оценки минимума расстояния между элементами их орбит под действием целочисленных матриц с фиксированными значениями определителей.

2. Для двух точек двумерного и трехмерного пространства Лобачевского, координаты которых связаны некоторым арифметическим условием, установлены новые оценки минимума расстояния между элементами их орбит под действием целочисленных матриц с фиксированными значениями определителей.

---

[26] *Быковский В. А.* Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Матем. сб. 1988. **136(178)**. 4(8). 451–467.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы для дальнейшего изучения свойств распределения орбит точек в римановых пространствах под действием дискретных подмножеств преобразований.

Апробация диссертации.

Основные результаты диссертационной работы неоднократно докладывались:

- на научных семинарах по аналитической теории чисел под руководством д. ф.-м. н., проф. Г. И. Архипова и д. ф.-м. н., проф. В. Н. Чубарикова на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова,

- на IV Международной конференции "Современные проблемы теории чисел и ее приложения" в Туле в 2001 г. (10.09.2001 — 15.09.2001),

- на V Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" в Туле в 2003 г. (19.05.2003 — 20.05.2003),

- на VI Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" в Саратове в 2004 г. (13.09.2004 — 17.09.2004).

Публикации.

По теме диссертации опубликовано три работы, список которых приведен в конце автореферата [1–3]. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Текст диссертации изложен на 61 странице. Список литературы содержит 78 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** излагается история исследований по тематике диссертации, проводится сравнение полученных результатов с ранее известными и определяются необходимые понятия.

В **главе 1** содержатся доказательства оценок порядка близости орбит точек под действием целочисленных матриц для двумерной плоскости Лобачевского. Предлагаемый для решения данной задачи метод является обобщением метода, применяемого в работе М. Суги[25]. Наш подход основывается на реализации следующих двух идей. Первая — использование явной формулы для фундаментального инварианта пары точек на плоскости Лобачевского и решение возникающей двухпараметрической задачи геометрии чисел в классической формулировке[27]. Вторая — применение алгоритма приближений заданного числа двумя квадратами целых чисел.

Пусть $\mathbb{H}$ обозначает плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре, т. е. верхнюю полуплоскость комплексной плоскости

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}\ ,\ y > 0.$$

Группа собственных движений $\mathrm{SO}_+(1,2)$ на плоскости Лобачевского изоморфна группе

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{I}\}.$$

Действие элемента $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ на точку $z \in \mathbb{H}$ определяется формулой

$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d}\ .$$

Расстояние между точками z_1 и z_2 может быть выражено формулой

$$d(z_1, z_2) = \ln \frac{u(z_1, z_2) + 2 + \sqrt{u^2(z_1, z_2) + 4u(z_1, z_2)}}{2}\ ,$$

где функция $u(z_1, z_2)$ (*фундаментальный инвариант* пары точек на плоскости Лобачевского), определяемая выражением

$$u(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|^2}{\Im(z_1)\Im(z_2)}\ ,$$

является инвариантной относительно группы движений $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, т. е. для любого элемента $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ имеем $u(\gamma z_1, \gamma z_2) = u(z_1, z_2)$. Метрика пространства $\mathbb{H}$ порождает меру

$$d\mu(z) = \frac{dxdy}{y^2}\ ,$$

также инвариантную относительно группы движений $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

[27] *Касселс Дж. В. С.* Введение в геометрию чисел. М.:Мир, 1965.

Пусть символ

$$\Delta_q = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}; ad - bc = q \geqslant 1 \right\}$$

обозначает множество целочисленных матриц заданного определителя q.

В первой главе диссертации устанавливаются следующие оценки.

Теорема 1. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$; $\dfrac{\Im(z_2)}{\Im(z_1)} \in \mathbb{Q}$. Тогда справедлива оценка

$$\min_{\gamma \in \Delta_q} u(\gamma z_1, z_2) \ll_{z_1, z_2} q^{-\frac{1}{2}}.$$

Иррациональное число ω будем называть *числом типа* $< \psi$, если неравенство

$$v||v\omega|| \geqslant \frac{1}{\psi(v)}$$

справедливо при всех положительных целых v, $\psi(v)$ — неубывающая положительная функция, определенная по меньшей мере для всех положительных целых аргументов.

Теорема 2. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$, $\varepsilon > 0$ — любое фиксированное, $\omega = \dfrac{\Im(z_2)}{\Im(z_1)}$ — иррациональное число типа $< c(\omega) \ln^{1+\varepsilon} 2v$, где $c(\omega)$ — положительная постоянная, зависящая от ω. Тогда

$$\min_{\gamma \in \Delta_q} u(\gamma z_1, z_2) \ll_{\varepsilon, z_1, z_2} q^{-\frac{1}{3}} \ln^{\delta} q$$

для любого $\delta > \frac{4}{3}(2 + \varepsilon)$.

В **главе 2** для случая трехмерного пространства Лобачевского получены аналогичные результаты.

Пусть $\mathbb{H}^3$ обозначает трехмерное пространство Лобачевского в модели Пуанкаре, т. е. верхнее полупространство

$$\mathbb{H}^3 = \{z = (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$$

с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dy^2}{y^2}, y > 0.$$

Группа собственных движений $\mathrm{SO}_+(1,3)$ в пространстве $\mathbb{H}^3$ изоморфна группе

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{I}\},$$

действующей над телом кватернионов. Действие элемента группы движений $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ на точку $z = x_1 + x_2 i + yj + 0 \cdot k$ определяется формулой

$$\gamma z = (az+b)(cz+d)^{-1}.$$

Расстояние между $z_1 = x_{11} + x_{21}i + y_1 j$ и $z_2 = x_{12} + x_{22}i + y_2 j$ может быть выражено формулой

$$d(z_1, z_2) = \ln \frac{u(z_1,z_2) + 2 + \sqrt{u^2(z_1,z_2) + 4u(z_1,z_2)}}{2} \ ,$$

где

$$u = u(z_1, z_2) = \frac{(x_{11}-x_{12})^2 + (x_{21}-x_{22})^2 + (y_1-y_2)^2}{y_1 y_2} \ .$$

Метрика пространства $\mathbb{H}^3$ порождает меру

$$d\mu(z) = \frac{dx_1 dx_2 dy}{y^3} \ ,$$

также инвариантную относительно группы движений $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Пусть символ

$$\Delta_q = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{G}; ad - bc = q, q \geqslant 1 \right\}$$

обозначает множество матриц заданного определителя q, коэффициентами которых являются элементы кольца $\mathbb{G}$ целых гауссовых чисел.

Во второй главе диссертации устанавливаются следующие оценки.

Теорема 3. Пусть $z_1 = x_{11}+x_{21}i+y_1 j, z_2 = x_{12}+x_{22}i+y_2 j \in \mathbb{H}^3; \frac{y_2}{y_1} \in \mathbb{Q}$. Тогда справедлива оценка

$$\min_{\gamma \in \Delta_q} u(\gamma z_1, z_2) \ll_{z_1,z_2} q^{-\frac{1}{2}}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $z_1 = x_{11}+x_{21}i+y_1j, z_2 = x_{12}+x_{22}i+y_2j \in \mathbb{H}^3$, $\varepsilon > 0$ — любое фиксированное, $\omega = \frac{y_2}{y_1}$ — иррациональное число типа $< c(\omega)\ln^{1+\varepsilon} 2v$, где $c(\omega)$ — положительная постоянная, зависящая от ω. Тогда

$$\min_{\gamma\in\Delta_q} u(\gamma z_1, z_2) \ll_{\varepsilon,z_1,z_2} q^{-\frac{1}{3}} \ln^{\delta} q$$

для любого $\delta > \frac{4}{3}(2+\varepsilon)$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору В. Н. Чубарикову и доктору физико-математических наук, профессору Г. И. Архипову за постоянное внимание и помощь в работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Петриков А. В.* Об орбитах точек на плоскости Лобачевского под действием целочисленных матриц // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2006. №6. 50–53.
2. *Петриков А. В.* Оценка близости орбит точек на плоскости Лобачевского под действием целочисленных матриц // Евразийский математический журнал. Астана, 2005. №3. 85–98.
3. *Петриков А. В.* О сближении орбит точек на плоскости Лобачевского под действием целочисленных матриц заданного определителя // IV Междунар. конф. по теории чисел. Тула, 2001. 94–95.