**Московский Государственный Университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-Математический факультет**

На правах рукописи
УДК 519.233.2, 519.233.3

Сорокин Алексей Александрович

ОСТАТОЧНЫЕ ЭМПИРИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В СТАТИСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.

Специальность: 01.01.05 — Теория вероятностей и математическая статистика.

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007

Работа выполнена на кафедре математической статистики и теории случайных процессов Механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, академик РАН В.В. Козлов, кандидат физико-математических наук, доцент М.В. Болдин.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Д.М. Чибисов, кандидат физико-математических наук, с.н.с. Г.В. Мартынов.
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский Государственный Университет (СПбГУ).

Защита диссертации состоится 16 марта 2007 года в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские Горы, МГУ, Главное Здание, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 16 февраля 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Т.П. Лукашенко.

1 Общая характеристика работы.

Актуальность темы.

Временные ряды, определяемые стохастическими разностными уравнениями, давно привлекают внимание статистиков. Долгое время исследователи ограничивались процессами, порожденными линейными моделями с конечным числом параметров типа авторегрессии (AR), авторегрессии - скользящего среднего (ARMA) и родственными им. Основными задачами являлись оценка параметров, построение прогнозов и проверка гипотез о структуре моделей, в частности, гипотез о порядке соответствующих уравнений. Они решались, как правило, либо в параметрической постановке в предположении нормальности инноваций, либо с использованием различных вариантов процедуры наименьших квадратов. Исчерпывающим образом эта тематика представлена, например, в известной монографии Brockwell, Davis[1].

Желание строить процедуры с лучшей асимптотической эффективностью, устойчивые к выбросам различного рода ("робастные") процедуры, а также появившиеся новые постановки задач заставили обратиться к иным, непараметрическим методам.

Замечательно, что многие результаты, полученные в этом направлении, используют единый подход, основанный на остаточном эмпирическом процессе (о.э.п.). Такие процессы определяются как аналоги классических эмпирических процессов для независимых одинаково распределенных данных, в которых ненаблюдаемые инновации заменяются на остатки. Интересующие нас статистики представляются функционалами от о.э.п., что позволяет перенести асимптотические свойства процессов (линейные разложения, слабую сходимость в подходящих пространствах и т.п.) на исследуемые статистики. Таким способом был получен целый ряд содержательных результатов. Выделим лишь некоторые из них. В AR модели Koul[2] изучал обобщенные M, ранговые и оценки минимального расстояния, Kreiss[3] строил тесты для проверки линейных гипотез, а Болдин[4],[5] - тесты типа Колмогорова-Смирнова и омега-квадрат. Задачи проверки линейных гипотез при помощи оптимальных ранговых тестов в ARMA модели решали Hallin и Puri[6], знаковых - Болдин и Штуте[7]. Различ-

[1] P. Brockwell, R.A. Davis, *Time Series: Theory and Methods*, Springer, New York, 1987.

[2] H.L. Koul, *Weighted Empiricals and Linear Models*, IMS, Hayward, CA, 1992.

[3] J.P. Kreiss, Testing linear hypotheses in autoregression, *Ann. Statist.*, Vol. 18, pp. 1470 - 1482, 1990.

[4] М.В. Болдин, Оценка распределения возмущений в схеме авторегрессии, *Теория Вероятн. и ее применения*, Том 27, н. 4, сс. 886-871, 1982.

[5] М.В. Болдин, Проверка гипотез в схемах авторегрессии критериями Колмогорова и омега-квадрат, *ДАН СССР*, Том 273, Н. 1, стр. 19-22, 1983.

[6] M. Hallin, M.L. Puri, Optimal rank-based procedure for time series analysis: testing an ARMA model against other ARMA models, *Ann. Statist.*, Vol. 16, pp. 402-432, 1988.

[7] М.В. Болдин, В. Штуте, О знаковых тестах в ARMA модели с возможно бесконечной дисперсией ошибок, *Теор.*

ные задачи разладки и последовательные о.э.п. в AR и ARMA моделях изучали Bai[8], Ling[9], Koul[10]. Кроме того, Koul[10] распространил некоторые из упомянутых процедур на нелинейные модели с аддитивными "шумами".

В последние два десятилетия большое внимание исследователей привлекает к себе специальный класс моделей, применяемый для эконометрических приложений. Он образован нелинейными гетероскедастическими моделями с мультипликативными "шумами". Базовой для этого обширного семейства является ARCH(p) (аббревиатура от Auto Regression Conditional Heteroscedastic) модель, предложенная в 1982 году в работе Engle[11]. В настоящее время ARCH(p) модель и ее производные (например, весьма популярная GARCH(p, q) модель, предложенная Bollerslev[12]) широко освещаются в теоретической литературе и используются в финансовой математике и эконометрике. Описание многочисленных обобщений ARCH и GARCH моделей вместе с обширной библиографией можно найти, например, в монографии Ширяева[13].

Наиболее исследованный класс оценок для ARCH модели образуют оценки квази-максимального правдоподобия (Weiss[14], Lee, Hansen[15]). Это аналог оценок наименьших квадратов в линейных моделях. Как и последние, такие оценки не являются робастными, а также могут обладать низкой асимптотической эффективностью. Поэтому для гетероскедастических моделей актуальна проблема построения непараметрических робастных процедур с большей, чем у оценок квази-правдоподобия, асимптотической эффективностью.

Естественные кандидаты на роль таких оценок - процедуры обобщенного M оценивания, соответствующие им тесты, а также оценки и тесты минимального расстояния (MD процедуры). Как и в линейных моделях, удобный аппарат для построения и асимптотического исследования таких процедур - остаточный эмпирический процесс. К сожалению, прямой перенос результатов на модели с мультипликативными "шумами" невозможен. В частности, даже построение MD и GM оценок представляет собой содержательную задачу. Кроме того, гетероскедастические модели технически значительно сложнее для исследования, чем линейные. Поэтому и спектр результатов для них значительно беднее. От-

---

вероятн. и ее прим., т. 49, вып. 3, сс. 436-460, 2004.

[8] J. Bai, Weak convergence of the sequential empirical processes of residuals in ARMA models, *Ann. Statist.*, Vol. 22, pp. 2051-2061, 1994.

[9] S. Ling, Weak convergence of the sequential empirical processes of residuals in nonstationary autoregressive models, *Ann. Statist.*, Vol. 26, pp. 741-754, 1998.

[10] H.L. Koul, Asymptotics of some estimators and sequential residual empiricals in nonlinear time series, *Ann. Statist.*, Vol. 24, No. 1, pp. 380–404, 1996.

[11] R.F. Engle, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of the Variance of U.K. Inflation, *Econometrica*, Vol. 50, pp. 987-1008, 1982.

[12] T. Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *J. Econometrics*, Vol. 31, 307-327, 1986.

[13] А.Н. Ширяев, *Стохастические модели финансовой математики*, Москва, Наука, 1998.

[14] A.A. Weiss, Asymptotic Theory for ARCH Models: Estimation and Testing, Econometric Theory 2, 107-131, 1986.

[15] S.W. Lee, B. Hansen, Asymptotic Theory for the GARCH(1, 1) quasi-maximum likelihood estimator, *Econometric Theory*, Vol. 10, pp. 29-53, 1994.

метим среди них монографию Koul[16] и работы Болдина[17], [18], Horvath и др.[19], Lee, Taniguchi[20], Koul, Ling[21].

В диссертации мы продолжаем построение новых оценок и тестов в ARCH модели, основанных на о.э.п. Мы строим тесты для проверки линейных гипотез о порядке модели и определяем их мощность при локальных альтернативах. Наши результаты для "базовой" ARCH модели открывают путь к исследованию всего обширного семейства родственных гетероскедастических моделей.

Таким образом, тема диссертации представляется актуальной как с теоретической точки зрения, так и для приложений.

Цель работы.

Целью работы является построение и исследование с помощью остаточных эмпирических процессов двух новых процедур оценивания и проверки гипотез в ARCH модели - MD и GM процедур.

Научная новизна.

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Установлена асимптотическая нормальность обобщенных M оценок и оценок минимального расстояния в ARCH(p) модели в схеме наблюдений с вектором параметров, зависящим от числа наблюдений. Показано, что такие оценки могут обладать большей асимптотической эффективностью, чем классические оценки квази-максимального правдоподобия.

2. Построено два типа тестов для проверки гипотезы о размерности ARCH(p) модели. Для них найдена асимптотическая мощность при локальных альтернативах. Показано, что наши тесты могут обладать большей асимптотической мощностью по сравнению с основанными на оценках квази-максимального правдоподобия.

3. Для оценки минимального расстояния в ARCH модели установлено два типа устойчивости оценок против засорений - качественная и состоятельная

[16] H. L. Koul, *Weighted Empirical Processes in Dynamic Nonlinear Models*, 2nd ed., Lecture Notes in Statistics, Vol 166, Springer, New York, 2002.

[17] M.V. Boldin, On empirical processes in heteroscedastic time series and their use for hypothesis testing and estimation, *Math. Methods of Stat.* Vol. 9, No. 1, pp.65-89, 2000.

[18] M.V. Boldin, On sequential empirical processes in heteroscedastic time series, *Math. Methods of Stat.*, Vol. 4, No. 4, pp. 453-464, 2002.

[19] L. Horváth, P. Kokoszka, G. Teyssiére, Empirical process of squared residuals of ARCH sequence, *Ann. Statist.*, Vol. 29, No. 2, pp. 445-469, 2001.

[20] S. Lee, M. Taniguchi, Asymptotic Theory for ARCH-SM Models: LAN and Residual Empirical Processes, *Statistica Sinica*, Vol. 15, pp. 215-234, 2005.

[21] H.L. Koul, S. Ling, Fitting an Error Distribution in Some Heteroscedastic Time Series Models, *Ann. Statist.*, Vol. 34, No. 2, pp. 994–1012, 2006.

робастность.

4. Установлена экспоненциальная оценка коэффициента сильного перемешивания для решения общего уравнения нелинейной авторегрессии. Как следствие, получена оценка для ARCH(p) модели, равномерная по ее параметрам.

5. Для остаточного эмпирического процесса в нелинейной авторегрессии общего вида установлено максимальное неравенство, систематически используемое при исследовании асимптотической нормальности и робастности процедур типа минимального расстояния в ARCH модели.

Методы исследования.

В работе используются методы математического и функционального анализа, а также методы теории вероятностей. Основным объектом и методом исследования выступает остаточный эмпирический процесс. При доказательстве основных теорем используются равномерные линейное разложение и максимальное неравенство для него.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть полезны специалистам по математической статистике, теории временных рядов и эконометрике.

Апробация работы.

Основные результаты работы неоднократно докладывались на семинаре "Непараметрическая Статистика и Временные Ряды" под руководством проф. Ю.Н. Тюрина, доц. М.В. Болдина и проф. В.Н. Тутубалина в МГУ в 2003, 2004 и 2005 годах. Также были сделаны доклады на нескольких конференциях: Симпозиуме по Прикладной и Промышленной Математике, Кисловодск, 2004, Ломоносовских Чтениях, Москва, 2004, 2006, 25-ой Европейской Конференции Статистиков (25th European Meeting of Statisticians), Осло, 2005 и на семинаре "Econometrics" под руководством проф. А. Рабека в Университете Копенгагена, 2006.

Публикации.

Результаты работы изложены в публикациях автора [1] - [5], список которых приведен в конце автореферата. Публикаций, сделанных в соавторстве, нет.

Структура работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, списка обозначений и списка используемой литературы, насчитывающего 79 наименований. Формулы, леммы и теоремы будут иметь номер, состоящий из двух чисел. Первое из них соответствует номеру главы, а второе - номеру формулы (леммы, теоремы) в данной главе. Формулы, леммы и теоремы из введения будут нумероваться одним числом. Ссылки на работы других авторов нумеруются по алфавиту, согласно фамилии первого из них. Общий объем диссертации - 123 страницы.

2 Краткое содержание диссертации.

Диссертация посвящена построению и исследованию новых процедур для оценки параметров и проверки гипотез в гетероскедастических моделях. Наши целевые функционалы и тестовые статистики основаны на остаточных эмпирических процессах.

Мы начнем с описания предмета исследования. Затем будут кратко описаны полученные в работе результаты, и мы сравним их с уже известными в литературе. Отметим, что в автореферате сохранены оригинальные номера теорем, но номера условий отличны от диссертации.

Введем необходимые определения.

Определение 1. *ARCH(p) модель определяется как решение системы уравнений*

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = 1 + a_1 y_{t-1}^2 + \ldots + a_p y_{t-p}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

где $\{y_t\}$*-наблюдения,* $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_p)^*$*-вектор неизвестных параметров* ($*$ *- знак транспонирования),* $a_1 \geq 0, \ldots, a_p \geq 0$, $\{\sigma_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ *- процесс волатильности,* $\{\varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ *- независимые одинаково распределенные (далее н.о.р.) случайные величины (далее с.в.) с неизвестной функцией распределения (далее ф.р.)* $G(x)$.

Будем предполагать, что у $G(x)$ существует плотность $g(x)$ относительно меры Лебега. Пусть выполнено следующее

Условие 1.

$$E\varepsilon_1 = 0, \quad E\varepsilon_1^2 < \infty, \quad E\varepsilon_1^2(a_1 + \ldots + a_p) < 1, \quad g(x) > 0.$$

Тогда (см. стр. 106-107 в работе Doukhan[22]), уравнение (1) имеет единственное строго стационарное решение. Будем обозначать его $\{y_t\}$ или $\{y_t^a\}$, если мы хотим подчеркнуть его зависимость от параметра. Будем также полагать $\mathbf{Y}_t^a := (y_t^a, \ldots, y_{t-p+1}^a)^*$ для $t \in \mathbb{Z}$. Отметим, что стационарное решение существует и

[22] P. Doukhan, *Mixing: Properties and Examples*, Lecture Notes in Statistics, Vol. 85, Springer, New York, 1994.

без предположения $g(x) > 0$. Мы включаем последнее в условие 1 для удобства (с таким предположением процесс $\{y_t\}$ обладает сильным перемешиванием, и это будет использоваться в дальнейшем).

Мы будем предполагать, что имеет место

Условие 2. *Для некоторого известного* $\beta_a > 0$ $E\varepsilon_1^2 \geq \beta_a$.

Основные результаты могут быть доказаны и без такого предположения, но выкладки будут более громоздкими.

Будем обозначать $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|$ соответственно L_1 и L_2 нормы в $\mathbb{R}^p$. С учетом условий 1 и 2 $\|\mathbf{a}\|_1 < \beta_a^{-1}$. Таким образом, область допустимых значений для $\mathbf{a}$ имеет вид

$$\Theta := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p : a_1 \geq 0, \dots a_p \geq 0,\ \|\mathbf{a}\|_1 \leq \beta_a^{-1}\}.$$

Перейдем к построению нужного нам остаточного эмпирического процесса для ARCH(p) модели. Мы будем полагать

$$s(\theta, \mathbf{U}) := 1 + \theta_1 U_1^2 + \ldots + \theta_p U_p^2, \quad \sigma_t^2(\theta) := s(\theta, \mathbf{Y}_{t-1})$$

для $\theta \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^p$. Определим для $\theta \in \mathbb{R}^p$ *остатки* соотношением $\varepsilon_t(\theta) := y_t \sigma_t^{-1}(\theta)$, если $\sigma_t^2(\theta) > 0$, и положим $\varepsilon_t(\theta) = 1$ в противном случае. Положим

$$G_n(x, \theta) := n^{-1} \sum_{t=1}^{n} I\{\varepsilon_t(\theta) \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{R}^p,$$

где $I\{\cdot\}$ - индикатор события.

Здесь и в дальнейшем множество интегрирования совпадает с $\mathbb{R}$*, суммирование проводится по* t *от* 1 *до* n*, и предельный переход осуществляется при* $n \to \infty$*, если не указано обратное.*

Функция $G_n(x, \theta)$ называется остаточной эмпирической функцией распределения. Она является аналогом недоступной для построения истинной эмпирической ф.р. $G_n(x) := n^{-1} \sum I\{\varepsilon_t \leq x\}$.

Пусть $\varphi(\mathbf{U}, \theta) := (\varphi_1(\mathbf{U}, \theta), \ldots, \varphi_p(\mathbf{U}, \theta))^*$ - фиксированная измеримая функция, $\varphi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$.

Определение 2. *Случайно-взвешенный остаточный эмпирический процесс (в дальнейшем о.э.п.)* $\mathbf{W}_n(x, \theta)$ *для ARCH(p) модели определяется соотношениями*

$$\mathbf{W}_n(x, \theta) := (W_{n,1}(x, \theta), \ldots, W_{n,p}(x, \theta))^*, \tag{2}$$

$$W_{n,j}(x, \theta) := n^{-1/2} \sum \varphi_j(\mathbf{Y}_{t-1}, \theta)[I\{\varepsilon_t(\theta) \leq x\} - G_n(x, \theta)],$$

где $j = 1, \ldots, p$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}^p$.

В диссертации рассматриваются два типа оценок параметров ARCH(p) модели. Первая из них, оценка минимального расстояния (Minimum Distance, MD), была введена в работе автора [3]. Ранее такие оценки рассматривались лишь для моделей с аддитивными "шумами", см., например, [2], главы 5, 7.

Определение 3. *Пусть фиксирована ф.р. $F(x)$. Обозначим*

$$K_n(\theta) := \int \|\mathbf{W}_n(x,\theta)\|^2 dF(x).$$

MD оценка для ARCH(p) модели определяется как решение экстремальной задачи

$$\hat{\mathbf{a}}_{n,MD} = \underset{\theta\in\Theta}{argmin}\, K_n(\theta).$$

Второй тип оценок, которые мы рассматриваем - обобщенные M (Generalized M, GM) оценки, предложенные для ARCH(1) модели Болдиным[17]. Предположим, что в дополнение к φ фиксирована также борелевская функция $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение 4. *Назовем GM оценкой решение $\hat{\mathbf{a}}_{n,GM}$ уравнения*

$$\mathbf{l}_n^0(\theta) := n^{-1/2} \sum \varphi(\mathbf{Y}_{t-1},\theta)[\psi(\varepsilon_t(\theta)) - \overline{\psi}_n(\theta)] = \mathbf{0}, \tag{3}$$

где $\overline{\psi}_n(\theta) := n^{-1} \sum \psi(\varepsilon_t(\theta))$.

Для дальнейшего нам понадобится следующее

Условие 3.

$$\lim_{|x|\to\infty} xg(x) = 0, \quad \sup_x (1+x^2)|g'(x)| < \infty, \quad \int |g'(x)x|dx < \infty.$$

Первая глава диссертации состоит из трех параграфов. В ней исследуется MD оценка для параметра ARCH(1) модели. В первой главе мы будем писать a вместо $\mathbf{a}$, $W_n(x,a)$ вместо $\mathbf{W}_n(x,\mathbf{a})$ и т.п. Будем предполагать, что наблюдаются величины $y_0, y_1, \ldots, y_n$, и обозначать $\hat{a}_n$ MD оценку, построенную по ним.

Без ограничения общности считаем $\beta_a = 1$ (где β_a - то же, что и в условии 2). Тогда, как следует из условий 1 и 2, $a < 1$. Таким образом, оценка для a будет искаться на интервале $(0,1)$. Нам понадобятся следующие условия.

Условие 4. *Для $u \in \mathbb{R}$ и $\theta \in (0,1)$ существует $\frac{\partial\varphi(u,\theta)}{\partial\theta}$, и*

$$\lim_{\delta\to 0} E \sup_{|\theta-a|<\delta} \left| \frac{\partial\varphi(y_0,\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi(y_0,a)}{\partial\theta} \right| = 0,$$

$$E[\varphi(y_0,a)]^4 < \infty, \quad E\left[\frac{\partial\varphi(y_0,a)}{\partial\theta}\right]^4 < \infty.$$

Условие 5. *(i) Для всех* $u \in \mathbb{R}, \theta \in (0,1)$ *и некоторой функции* $\Phi(u)$

$$0 \le \varphi(u,\theta) \le \Phi(u), \quad E\Phi(y_0) < \infty.$$

(ii) Для всех $u \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0,1)$ $\varphi(u,\theta) = \varphi(-u,\theta)$, *при* $u \ge 0$ $\varphi(u,\theta)$ *не убывает по* u, *и для некоторых* $0 < D_- < D_+ < \infty$, $\delta_1 > 0$

$$\varphi(D_+,\theta) - \varphi(D_-,\theta) > \delta_1, \quad \theta \in (0,1).$$

Положим

$$e(U,\theta) := U^2/(1+\theta U^2), \quad \psi_F(v) := \int [I\{v \le x\} - G(x)]xg(x)dF(x),$$

$$\Sigma_1(\varphi) := 4\frac{D[\varphi(y_0,a)]}{[cov\{e(y_0,a),\varphi(y_0,a)\}]^2}, \quad \sigma_2(g,\psi) := \frac{E\psi^2(\varepsilon_1)}{[\int (xg(x))d\psi(x)]^2}.$$

Основной результат первого параграфа составляет

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия 1 - 5. Тогда при* $n \to \infty$

$$n^{1/2}(\hat{a}_n - a) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

где

$$\sigma^2 = \Sigma_1(\varphi)\sigma_2(g,\psi_F). \tag{4}$$

Пользуясь представлением (4), несложно проверить, что для любого фиксированного $C < \infty$ можно подобрать такое распределение ε_1, что отношение асимптотической дисперсии оценки квази-максимального правдоподобия к σ^2 составляет величину не меньшую, чем C. Таким образом, MD оценка может быть сколь угодно асимптотически эффективнее последней.

Во втором параграфе исследуются робастные свойства MD оценки. Мы рассматриваем схему засорения данных одиночными грубыми выбросами. Напомним ее определение. Пусть фиксирован некоторый класс ф.р. $\mathcal{G}_\xi$. Пусть $\{z_t^\gamma\}$ - независимые бернуллиевские величины с параметром γ, $0 \le \gamma \le 1$, $\{\xi_t\}$ - н.о.р. случайные величины с функцией распределения $G_\xi \in \mathcal{G}_\xi$, и последовательности $\{z_t^\gamma\}, \{\xi_t\}, \{y_t\}$ независимы между собой. Предположим, что вместо $\{y_t\}$ наблюдаются величины

$$y_t^\gamma = y_t + z_t^\gamma \xi_t, \quad t = 0,1,\ldots,n. \tag{5}$$

Величины ξ_t интерпретируются как выбросы, а γ - как их доля в выборке. Случай $\gamma = 0$ соответствует выборке без засорений.

Мы устанавливаем два типа робастности для MD оценки. Первый из них - *качественная робастность* (подобную характеризацию робастности предложили Martin и Yohai в работе [23]). А именно, пусть $\{\hat{a}_n, n \ge 1\}$ - последовательность

[23] R.D. Martin, V.J. Yohai, Influence functionals for time series, *Ann. Statist.*, Vol. 12, pp. 843-863, 1986.

оценок параметра a, построенная по выборке с уровнем засорения γ. Предположим, что для любого достаточно малого $\gamma > 0$ при $n \to \infty$ выполняется соотношение

$$\hat{a}_n \xrightarrow{P} a^\gamma(G_\xi)$$

для некоторого неслучайного $a^\gamma(G_\xi)$, $a^0(G_\xi) = a$. Тогда функционалом влияния оценки $\hat{a}_n$ называется величина

$$IF(a^\gamma(G_\xi), G_\xi) := \lim_{\gamma \to 0+} \frac{a^\gamma(G_\xi) - a}{\gamma}$$

в том случае, когда она определена (IF есть аббревиатура от "Influence Functional"). $IF(a^\gamma(G_\xi), G_\xi)$ является коэффициентом в главном члене разложения асимптотического смещения $[a^\gamma(G_\xi) - a]$ по γ,

$$a^\gamma(G_\xi) - a = IF(a^\gamma(G_\xi), G_\xi)\gamma + o(\gamma).$$

Мы будем, следуя [23], называть оценку $\hat{a}_n$ качественно робастной в схеме (5), если $IF(a^\gamma(G_\xi), G_\xi)$ определен на $\mathcal{G}_\xi$, и величина

$$GES(\mathcal{G}_\xi, \hat{a}_n) := \sup_{G_\xi \in \mathcal{G}_\xi} |IF(a^\gamma(G_\xi), G_\xi)|,$$

называемая чувствительностью к грубым выбросам, конечна.

Наряду с описанным определением робастности, мы рассмотрим еще одну характеристику. Она была введена в работе автора [3] для MD оценки. Предлагаемое определение аналогично состоятельности оценки при стремлении к 0 доли выбросов в выборке. Поэтому мы будем называть оценку *состоятельно робастной* в схеме (5), если для любого $\delta > 0$ существуют $\gamma_0 > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, такие что для всех $n > N, \gamma < \gamma_0$ и $G_\xi \in \mathcal{G}_\xi$ справедливо соотношение

$$P(|\hat{a}_n^\gamma - a| > \delta) < \delta.$$

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия 1 - 5. Предположим дополнительно, что функция φ равномерно ограничена. В таком случае MD оценка является состоятельно робастной для случая, когда $\mathcal{G}_\xi$ есть множество* всех *ф.р. на $\mathbb{R}$.*

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия 1 - 5. Пусть также функции φ и $\partial\varphi(u,\theta)/\partial\theta$ являются равномерно ограниченными. Тогда MD оценка является качественно робастной для класса $\mathcal{G}_2$ распределений выбросов с конечным вторым моментом.*

Теоретическое исследование робастности оценок для гетероскедастических моделей на настоящий момент довольно редко встречается в литературе. Выделим лишь работы Болдина[17] и Вязилова[24], в которых устанавливается каче-

[24] A.E. Vyazilov, Empirical processes and robust estimation of parameters of the GARCH model, *Math. Methods of Stat.*, Vol. 12, No. 2, pp. 231-245, 2003.

ственная робастность GM оценки против грубых засорений соответственно для ARCH(1) и GARCH$(1,1)$ моделей.

Основной результат третьего параграфа состоит в доказательстве максимального неравенства специального вида для мультииндексированного эмпирического процесса (теорема 1.1). Мы же используем следствие из нее:

Следствие 1.1. *Пусть имеют место условия 1, 2 и 3. Пусть m - натуральное, $f_1,\ldots,f_m$ - борелевские функции, причем $Ef_j^4(y_0)<\infty$ для $j=1,\ldots,m$. Положим для $(x_1,\ldots,x_m)^*\in\mathbb{R}^m$*

$$S_n^0(x_1,\ldots,x_m):=n^{-1/2}\sum\sum_{j=1}^{m}[f_j(y_{t-1})I\{\varepsilon_t\le x_j\}-Ef_j(y_0)G(x_j)].$$

Тогда

$$\sup_{x_1,\ldots,x_m}|S_n^0(x_1,\ldots,x_m)|=O_p(1).$$

Это следствие используется при доказательстве теоремы 1.1.

Вторая глава диссертации состоит из трех параграфов. В ней мы будем предполагать, что наблюдается выборка из стационарного решения ARCH(p) модели с зависящим от n параметром $\mathbf{a}$.

А именно, пусть фиксированы некоторые (неизвестные) $\mathbf{b}\in\Theta$ и $\delta>0$, для которых

$$E\varepsilon_1^2(||\mathbf{b}||_1+\delta)<1. \tag{6}$$

Предположим, что для $n\ge1$ наблюдаются величины $y_{1-p}^n,\ldots,y_0^n,y_1^n,\ldots,y_n^n$, являющиеся выборкой из стационарного решения (1) с параметром

$$\mathbf{a}_n\in\Theta^\delta:=\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^p:\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|_1\le\delta\}\cap\Theta, \tag{7}$$

зависящим от n. В дальнейшем мы будем говорить о (7) как о схеме наблюдений с зависящим от n параметром. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, будем полагать

$$\mathbf{Y}_{t-1}^n:=\mathbf{Y}_{t-1}^{a_n},\quad \sigma_{tn}^2(\theta):=s(\theta,\mathbf{Y}_{t-1}^n),$$

$$\varepsilon_t^n(\theta):=y_t^n/\sigma_{tn}(\theta),\quad G_n(x,\theta):=n^{-1}\sum I\{\varepsilon_t^n(\theta)\le x\}$$

для $t=1,\ldots,n$. Компоненты о.э.п. для схемы наблюдений (7) имеют вид

$$W_{n,j}(x,\theta):=n^{-1/2}\sum\varphi_j(\mathbf{Y}_{t-1}^n,\theta)[I\{\varepsilon_t^n(\theta)\le x\}-G_n(x,\theta)],\quad j=1,\ldots,p.$$

Такая схема позволит установить асимптотическую мощность тестов для проверки гипотезы о размерности модели при близких альтернативах.

Нам понадобится усилить условия, сформулированные ранее.

Условие 6. *Существуют функции $\Phi(\cdot)$, $M(\cdot)$, а также константа $\beta_0>0$, для которых:*

i) Для $\mathbf{U}\in\mathbb{R}^p,\ \theta\in\Theta$

$$|\varphi_j(\mathbf{U},\theta)|\le\Phi(\mathbf{U}),\quad \sup_{a\in\Theta^\delta}E|\Phi(\mathbf{Y}_0^a)|^{4+\beta_0}<\infty.$$

ii) Для $\theta\in\Theta^\delta,\ j,k=1,\dots,p$ *и п.в.* $\mathbf{U}\in\mathbb{R}^p$ *существует непрерывная по* θ $d_{j,k}(\mathbf{U},\theta):=\frac{\partial\varphi_j(\mathbf{U},\theta)}{\partial\theta_k}$, *причем*

$$\|d_{j,k}(\mathbf{U},\theta)\|\le M(\mathbf{U}),\quad \sup_{a\in\Theta^\delta}E|M(\mathbf{Y}_0^a)|^{2+\beta_0}<\infty.$$

Условие 7. *Для некоторого* $\beta_0>0$ $\sup_{a\in\Theta^\delta}E|y_0|^{8+\beta_0}<\infty$.

В первом параграфе мы формулируем утверждения об асимптотической нормальности MD и GM оценок для ARCH(p) модели. Положим для $\mathbf{a}\in\Theta^\delta,\ \theta\in\Theta$

$$\mathbf{b}^a(x,\theta):=E\varphi(\mathbf{Y}_0^a,\theta)I\{\varepsilon_1^a(\theta)\le x\}-E\varphi(\mathbf{Y}_0^a,\theta)P(\varepsilon_1^a(\theta)\le x).$$

Условие 8. *Для некоторого* $\delta_0>0$ *и любых* $\mathbf{a}\in\Theta^\delta,\ \theta\in\Theta$ $\int\|\mathbf{b}^a(x,\theta)\|^2dF(x)\ge\delta_0||\theta-\mathbf{a}||^2$.

Как и в первой главе, из сформулированных условий следует асимптотическая нормальность MD оценки. Мы установим более общий результат. Будем называть оценку $\hat{\mathbf{a}}_n$ асимптотически нормальной в схеме (7), если для некоторой положительно определенной матрицы $\Sigma(\mathbf{a}),\ \mathbf{a}\in\Theta^\delta$ имеет место соотношение

$$n^{1/2}\Sigma^{-1/2}(\mathbf{a}_n)(\hat{\mathbf{a}}_n-\mathbf{a}_n)\to\mathcal{N}_p(0,I_{p\times p}).$$

Очевидно, $\Sigma(\mathbf{a})$ совпадает с асимптотической матрицей ковариаций оценки $\hat{\mathbf{a}}_n$ для случая постоянного параметра $\mathbf{a}_n\equiv\mathbf{a},\ n\in\mathbb{N}$. Положим

$$\mathbf{e}(\mathbf{U},\theta):=(e_1(\mathbf{U},\theta),\dots,e_p(\mathbf{U},\theta))^*,\quad e_j(\mathbf{U},\theta):=U_j^2/s(\theta,\mathbf{U}),\quad \mathbf{U}\in\mathbb{R},\ j=1,\dots,p,$$

$$S_{\varphi,e}(\mathbf{a}):=Cov(\varphi(\mathbf{Y}_0^a,\mathbf{a}),\mathbf{e}(\mathbf{Y}_0^a,\mathbf{a})),\quad S_{\varphi,\varphi}(\mathbf{a}):=Cov(\varphi(\mathbf{Y}_0^a,\mathbf{a}),\varphi(\mathbf{Y}_0^a,\mathbf{a})),$$
$$\Sigma_1(\mathbf{a},\varphi):=[S_{\varphi,e}(\mathbf{a})]^{-1}S_{\varphi,\varphi}(\mathbf{a})[S^*_{\varphi,e}(\mathbf{a})]^{-1}.$$

Теорема 2.1. *Пусть имеет место схема наблюдений (7) и выполнены условия 1, 2, 3, 6 - 8. Тогда*

$$n^{1/2}\Sigma_{MD}^{-1/2}(\mathbf{a}_n)(\hat{\mathbf{a}}_{n,MD}-\mathbf{a}_n)\to\mathcal{N}_p(0,I_{p\times p}),$$

где

$$\Sigma_{MD}(\mathbf{a}):=\Sigma_1(\mathbf{a},\varphi)\sigma_2(g,\psi_F).$$

Перейдем к рассмотрению GM оценки. Аналогом условия 8 для нее является

Условие 9. *Для некоторого* $\delta_0>0$ *и любых* $\mathbf{a}\in\Theta^\delta,\ \theta\in\Theta$ $\left\|\int\mathbf{b}^a(x,\theta)d\psi(x)\right\|\ge\delta_0||\theta-\mathbf{a}||$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 6, 7 и 9. Пусть, кроме того, ψ непрерывна и $var|_{-\infty}^{+\infty}\psi < \infty$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, существует решение уравнения (3) $\hat{\mathbf{a}}_{n,GM}$, и для любого такого решения*

$$n^{1/2}(\hat{\mathbf{a}}_{n,GM} - \mathbf{a}_n) = [\lambda_{GM}(\mathbf{a}_n)]^{-1}\mathbf{l}_n^0(\mathbf{a}_n) + o_p(1),$$

$$n^{1/2}\Sigma_{GM}^{-1/2}(\mathbf{a}_n)(\hat{\mathbf{a}}_{n,GM} - \mathbf{a}_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I_{p\times p}),$$

где

$$\Sigma_{GM}(\mathbf{a}) := \Sigma_1(\mathbf{a},\varphi)\sigma_2(g,\psi).$$

Отметим, и это важно, что асимптотические матрицы ковариаций для MD и GM оценок отличаются только скалярным множителем $\sigma_2(g,\psi)/\sigma_2(g,\psi_F)$. При оптимальных φ, ψ, F (т.е. минимизирующих асимптотическую матрицу ковариаций) оценки являются асимптотически эквивалентными. Кроме того, несложно проверить, что, как и в случае $p = 1$, MD и GM оценки могут иметь асимптотическую матрицу ковариаций сколь угодно меньшую, чем оценка квази-максимального правдоподобия.

Во втором параграфе второй главы мы рассматриваем задачу проверки гипотезы о размерности ARCH(p) модели. Будем для всех $\theta \in \mathbb{R}^p$ полагать $\theta = (\theta^{1*}, \theta^{2*})^*$, где $\theta^1 \in \mathbb{R}^q$, $\theta^2 \in \mathbb{R}^{p-q}$, $q < p$. Рассмотрим последовательность гипотез $H_{0n} := \{\mathbf{a}_n^1 \to \mathbf{a}^{01},\ \mathbf{a}_n^2 \equiv \mathbf{0}\}$, где $\mathbf{a}^0 := (\mathbf{a}^{01*}, \mathbf{0}^*)^* \in \Theta^\delta$ - фиксированный неизвестный вектор. Она состоит в том, что наблюдения $\{y_t^n\}$ при произвольном $n \geq 1$ на самом деле удовлетворяют уравнению (1) меньшей размерности $q < p$. Асимптотическую мощность тестов мы исследуем для последовательности альтернатив $H_{1n} := \{\mathbf{a}_n^1 \to \mathbf{a}^{01},\ \mathbf{a}_n^2 = n^{-1/2}\mathbf{d}\}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{p-q}$.

Обычно (см., например, Hajek и др.[25], van der Vaart[26]) распределение критериальных статистик при близких альтернативах находится при помощи третьей Леммы Ле Кама ([25], стр. 257). При этом требуется установить локальную асимптотическую нормальность модели. Вместо этого, мы получаем нужные результаты как следствие асимптотической нормальности оценок в схеме (7), включающей в себя случай альтернатив H_{1n}.

Мы рассматриваем два типа тестов. В качестве тестовой статистики для первого из них выступает величина $R_n^2 := n\hat{\mathbf{a}}_n^{2*}\hat{\Sigma}_{n,2,2}^{-1}\hat{\mathbf{a}}_n^2$, где $\hat{\mathbf{a}}_n$ - MD или GM оценка, $\hat{\Sigma}_n$ - произвольная состоятельная оценка $\Sigma(\mathbf{a}^0)$, и $\hat{\Sigma}_{n,2,2}$ - матрица, образованная последними $(p-q)$ строками и столбцами матрицы $\hat{\Sigma}_n$.

Второй тест строится, следуя подходу, предложенному в работе Kreiss[3] (см. также монографию Болдина и др.[27], в которой аналогичный подход использован для построения знаковых тестов в авторегрессии).

[25] J. Hajek, Z. Sidak, P.K. Sen, *Theory of Rank Tests*, 2nd Ed., Academic Press, San Diego, 1999.
[26] A. W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics*, Cambridge University Press, 1998.
[27] М.В. Болдин, Г.И.Симонова, Ю.Н.Тюрин, *Знаковый статистический анализ линейных моделей*, Москва, Наука, Физматлит, 1997.

Будем сразу предполагать, что $\varphi = \varphi_{opt}$, и опускать для сокращения записи обозначение GM у $\Sigma_{GM}(\mathbf{a})$. Пусть $\hat{\mathbf{b}}_n$ - произвольная $n^{1/2}$-состоятельная оценка вектора $\mathbf{a}_n$. Как и ранее, представим $\hat{\mathbf{b}}_n$ в виде $(\hat{\mathbf{b}}_n^{1*}, \hat{\mathbf{b}}_n^{2*})^*$, и положим $\hat{\mathbf{b}}_n^0 := (\hat{\mathbf{b}}_n^{1*}, \mathbf{0}^*)^*$. Обозначим Pr ортогональную проекцию на последние $(p-q)$ координат. Определим матрицы $\Sigma_{1,1}(\mathbf{a})$ размерности $q \times q$, $\Sigma_{2,1}(\mathbf{a})$ размерности $(p-q) \times q$ и $\Sigma_{2,2}(\mathbf{a})$ размерности $(p-q) \times (p-q)$ равенством

$$\Sigma(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1}(\mathbf{a}) & \Sigma_{2,1}^*(\mathbf{a}) \\ \Sigma_{2,1}(\mathbf{a}) & \Sigma_{2,2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} \in \Theta.$$

Положим для $\mathbf{a} \in \Theta$

$$C(\mathbf{a}) := \Sigma_{1,1}(\mathbf{a}) - \Sigma_{2,1}^*(\mathbf{a})\Sigma_{2,2}^{-1}(\mathbf{a})\Sigma_{2,1}(\mathbf{a}),$$

$$V(\mathbf{a}) := [4\sigma_2(g,\psi)D\psi(\varepsilon_1)]^{-1/2} \begin{pmatrix} C^{1/2}(\mathbf{a}) & \Sigma_{2,1}^*(\mathbf{a})\Sigma_{2,2}^{-1/2}(\mathbf{a}) \\ \mathbf{0} & \Sigma_{2,2}^{1/2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Пусть $\hat{V}_n$ - состоятельная оценка $V(\mathbf{a}^0)$. В качестве статистики второго теста мы рассмотрим величину $Q_n^2 := n\| \, Pr\, \hat{V}_n^* \mathbf{l}_n^0(\hat{\mathbf{b}}_n^0)\|^2$.

Для обоих типов тестов установлена асимптотическая мощность при альтернативах H_{1n}, это основной результат параграфа. Пусть χ, $\chi(b^2)$ обозначают соответственно центральное и нецентральное с параметром b^2 распределения хи-квадрат.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теорем 2.1 и 2.2. Тогда при гипотезе H_{0n} $R_{n,MD}^2 \xrightarrow{d} \chi^2(p-q)$, $R_{n,GM}^2 \xrightarrow{d} \chi^2(p-q)$, а при альтернативе H_{1n}*

$$R_{n,MD}^2 \xrightarrow{d} \chi^2(p-q, \mathbf{d}^{2*}\Sigma_{2,2,MD}^{-1}(\mathbf{a}^0)\mathbf{d}^2),$$

$$R_{n,GM}^2 \xrightarrow{d} \chi^2(p-q, \mathbf{d}^{2*}\Sigma_{2,2,GM}^{-1}(\mathbf{a}^0)\mathbf{d}^2).$$

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 6 и 7. Пусть также $var|_{-\infty}^{+\infty}\psi < \infty$. Тогда при гипотезе H_0 $Q_n^2 \xrightarrow{d} \chi^2(p-q)$, а при альтернативе H_{1n}*

$$Q_n^2 \xrightarrow{d} \chi^2(p-q, \mathbf{d}^{2*}\Sigma_{2,2,GM}^{-1}(\mathbf{a}^0)\mathbf{d}^2).$$

В силу теорем 2.4 и 2.5, статистики $R_{n,GM}^2$ и Q_n^2 асимптотически эквивалентны. Но использование последней дает возможность выбора предварительной оценки $\hat{\mathbf{b}}_n$ и, кроме того, не требует непрерывности от ψ.

Напомним, что асимптотические матрицы ковариаций для MD и GM оценок отличаются только скалярным множителем $\sigma_2(g,\psi)/\sigma_2(g,\psi_F)$. Следовательно, асимптотическая относительная эффективность теста, основанного на MD оценке, относительно основанного на GM оценке, также есть $\sigma_2(g,\psi)/\sigma_2(g,\psi_F)$. При оптимальных φ, ψ, F тесты, как и оценки, асимптотически эквивалентны.

С целью сравнения наших оценок и тестов с процедурами (квази) максимального правдоподобия мы провели обширный численный эксперимент. Был фиксирован набор из нескольких типичных распределений, а именно стандартное нормальное, логистическое, распределение Коши, гиперболическое и два разных распределения Тьюки. Для g_1, g_2 из этого набора было численно рассчитано значение отношения $\sigma_2(g_1, \psi)/\sigma_2(g_1, \psi_F)$ в том случае, когда ψ и F выбраны оптимальными для распределения g_2. Результаты вычислений показывают, что, как и следовало ожидать, нет систематического предпочтения между MD и GM оценками и тестами. Кроме того, разумеется, MD и GM тесты асимптотически эффективнее тестов квази-правдоподобия для распределений g_1 с тяжелыми хвостами.

Доказательства теорем об асимптотической нормальности вынесены в третий параграф. Они основываются на равномерном линейном разложении о.э.п., устанавливаемом теоремой 3.4 из третьей главы. Для доказательства $n^{1/2}$ - состоятельности оценок мы используем максимальное неравенство из теоремы 3.6 третьего параграфа третьей главы.

Третья глава состоит из трех параграфов. Она содержит ключевые технические результаты, используемые в главе 2. Они представляют и самостоятельный интерес.

В первом параграфе основной является

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнены условия 1, 2 и 3. Тогда существуют $C < \infty$ и $\gamma > 0$, такие что для всех $\mathbf{a} \in \Theta^\delta$ коэффициент с.п. σ-алгебр $\sigma\{y_t^a,\ t \geq k\}$ и $\sigma\{y_t^a,\ t \leq 0\}$ не превосходит $C \exp\{-\gamma k\}$.*

Напомним (см., например, [22]), что коэффициентом α сильного перемешивания (в дальнейшем с.п.) для двух σ-алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ называется величина

$$\alpha := \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |P(A)P(B) - P(A \cap B)|.$$

Родственные теореме 3.2 (но не равномерные по параметрам) результаты для гетероскедастических моделей описывались в литературе многократно. В монографии[22] доказывалась экспоненциальная оценка коэффициента с.п. для ARCH(p) модели. Аналогичная оценка коэффициента с.п. для GARCH(p, q) модели устанавливается в работах Boussama[28] и Straumann, Mikosch[29].

Наш равномерный результат не следует из цитированных, мы вынуждены устанавливать его (теорему 3.2) самостоятельно. Равномерность оценки существенно используется при доказательстве теорем 3.4 (второй параграф) и 3.6 (третий параграф).

[28] F. Boussama, Ergodicité, mélange et estimation dans les modéles GARCH, *PhD Thesis*, Université 7 Paris, 1998.

[29] D. Straumann, T. Mikosch, Stable Limits of Martingale Transforms with Application to the estimation of GARCH Parameters, *Ann. Statist.*, Vol. 34, No. 1, pp. 493–522, 2006.

Во втором параграфе третьей главы устанавливается равномерная асимптотическая линейность (AUL) о.э.п. в ARCH(p) модели. Рассмотрен остаточный эмпирический процесс $\mathbf{U}_n(x,\theta)$, задающийся для схемы наблюдений (7) соотношениями

$$\mathbf{U}_n(x,\theta) := n^{-1/2}\sum \varphi(\mathbf{Y}_{t-1}^n,\theta)I\{\varepsilon_t^n(\theta)\le x\},\quad x\in\mathbb{R},\ \theta\in\mathbb{R}^p.$$

Положим $M_n(B) := \{\theta\in\Theta : \|\theta-\mathbf{a}_n\|\le n^{-1/2}B\}$,

$$\mathbf{H}(\mathbf{U},\theta) := (h_{j,k})_{j,k=1,\dots,p},\quad h_{j,k} := \frac{\partial\varphi_k(\mathbf{U},\theta)}{\partial\theta_j},\ j,k=1,\dots,p,$$

$$S_{\varphi,e}^1(\mathbf{a}) := E\varphi(\mathbf{Y}_0^a,\mathbf{a})\mathbf{e}^*(\mathbf{Y}_0^a,\mathbf{a}),\quad \mathbf{a}\in\Theta^\delta.$$

В качестве линейного приближения для $\mathbf{U}_n(x,\theta)$ будет выступать процесс

$$\widetilde{\mathbf{U}}_n(x,\theta) := \mathbf{U}_n(x,\mathbf{a}_n)+$$
$$+n^{1/2}\Big[2^{-1}xg(x)S_{\varphi,e}^1(\mathbf{a}_n)+G(x)E\mathbf{H}^*(\mathbf{Y}_0^n,\mathbf{a}_n)\Big](\theta-\mathbf{a}_n).$$

Теорема 3.4. *Пусть имеет место схема наблюдений (7) и выполнены условия 1, 2, 3, 6 и 7. Тогда для всех $B<\infty$*

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\theta\in M_n(B)}\|\widetilde{\mathbf{U}}_n(x,\theta)-\mathbf{U}_n(x,\theta)\| = o_p(1).$$

Для доказательства теоремы 3.4 используется результат об AUL для о.э.п. *общего вида* в модели с мультипликативными шумами, установленный в работе Болдина[17]. Для моделей с аддитивными шумами аналогичный результат был установлен в работе Koul, Ossiander[30].

В третьем параграфе устанавливается максимальное неравенство специального вида для о.э.п. в модели общей нелинейной авторегрессии. Мы рассматриваем строго стационарный процесс $\{\xi_t^\tau,\ t\in\mathbb{Z}\}$, где $\tau\in\mathcal{T}$ для некоторого параметрического множества $\mathcal{T}$. Положим $\Xi_t^\tau := (\xi_t^\tau,\xi_{t-1}^\tau,\dots)$. Предполагается, что последовательность $\{\varepsilon_t,\ t\in\mathbb{Z}\}$ - н.о.р. случайные величины, и при каждом $\tau\in\mathcal{T}$ процесс удовлетворяет уравнению

$$\xi_t^\tau = H(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1},\dots,\tau),\quad t\in\mathbb{N},$$

где $H:\mathbb{R}^\infty\times\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ - измеримая функция. Например, для строго стационарного решения (G)ARCH модели это условие выполнено. Пусть фиксированы $q\in\mathbb{N}$, компакт $\mathbf{Z}\subset\mathbb{R}^q$ и, для каждого $\tau\in\mathcal{T}$, элемент $\mathbf{z}^{0\tau}\in\mathbf{Z}$ и борелевские функции $\Delta^\tau(x,\mathbf{z},\mathbf{U}):\mathbb{R}\times\mathbf{Z}\times\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$, $\lambda^\tau(\mathbf{z},\mathbf{U}):\mathbf{Z}\times\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$. Рассмотрим определенный при $\mathbf{z}\in\mathbf{Z},\ x\in\mathbb{R}$ процесс

$$T_n^\tau(x,\mathbf{z}) := n^{-1/2}\sum\lambda^\tau(\mathbf{z},\Xi_{t-1}^\tau)I\{\varepsilon_t\le\Delta^\tau(x,\mathbf{z},\Xi_{t-1}^\tau)\}-$$

[30] H.L. Koul, M. Ossiander, Weak convergence of randomly weighted dependent residual empiricals with applications to autoregression, *Ann. Statist.*, Vol. 22, pp. 540-562, 1994.

$$-n^{1/2}E\lambda^{\tau}(\mathbf{z},\Xi_0^{\tau})G(\Delta^{\tau}(x,\mathbf{z},\Xi_0^{\tau})).$$

Основной результат третьего параграфа составляет теорема 3.6, устанавливающая максимальное неравенство для процесса $T_n^{\tau}(x,\mathbf{z})$. Мы сформулируем лишь интересующее нас следствие из нее, устанавливающее максимальное неравенство для ARCH(p) модели.

Лемма 2.2. *Пусть имеет место схема наблюдений (7) и выполнены условия 1, 2, 3, 6 и 7. Тогда для* $k=1,\dots,p$ *и любого* $\rho>0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\theta\in\Theta}(W_{n,k}(x,\theta)-n^{1/2}[b_k^n(x,\theta)\pm\rho\|\theta-\mathbf{a}_n\|])^{\pm}=O_p(1), \tag{9}$$

Автор выражает глубокую благодарность профессору, академику РАН В.В. Козлову и доценту М.В. Болдину, под руководством которых проходила работа над диссертацией, за постановку задач и постоянное внимание. Я также благодарен профессорам Ю.Н. Тюрину и В.Н. Тутубалину за многочисленные обсуждения и ценные замечания.

Работы автора по теме диссертации.

[1] А.А. Сорокин, Равномерная оценка коэффициента сильного перемешивания и максимума остаточного эмпирического процесса в ARCH(p) модели, *Обозрение прикладной и промышленной математики*, т. 14, в. 1, стр. 35-68, 2007.

[2] А.А. Сорокин, М-оценивание и проверка линейных гипотез в ARCH-модели, *Успехи Математических Наук*, т. 61, н. 2, стр. 362-363, 2006.

[3] A.A. Sorokin, On The Minimum Distance Estimates in ARCH Model, *Mathematical Methods of Statistics*, Vol. 13, No. 3, pp. 329-355, 2004.

[4] A.A. Sorokin, On Robust Minimum Distance Estimates in ARCH(p) model, *abstracts of 25th European Meeting of Statisticians*, p. 225, 2005.

[5] A.A. Sorokin, On parameter estimation and testing hypotheses on dimension in ARCH(p) model, *Mathematical Methods of Statistics*, Vol. 15, N. 3, pp. 327-348, 2006.