На правах рукописи

Шатина Альбина Викторовна

ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Специальность: 01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре Высшей математики Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета)

Научный консультант:

доктор физико-математических наук,
профессор Вильке Владимир Георгиевич.

Официальные оппоненты:

член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор Белецкий Владимир Васильевич;

доктор физико-математических наук,
профессор Баркин Юрий Владимирович;

доктор физико-математических наук,
профессор Марков Юрий Георгиевич.

Ведущая организация:

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Российской академии наук.

Защита диссертации состоится 18 мая 2007 года в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан___________________________2007 года

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент

В.А. Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию эволюции поступательно-вращательного движения механических систем с бесконечным числом степеней свободы, моделируемых либо вязкоупругими телами, либо твердыми телами с жестко прикрепленными к ним вязкоупругими элементами.

Вопрос о влиянии внутреннего вязкого трения на поступательно-вращательное движение деформируемого тела возник много лет назад, прежде всего в связи с изучением приливной эволюции движения планет Солнечной системы. В небесной механике для описания движений естественных и искусственных тел, как правило, используются простейшие модели классической механики – материальная точка и абсолютно твердое тело, а приливная теория базируется на ряде гипотез относительно величины приливных горбов и их расположения относительно вращающейся планеты.

Первые фундаментальные работы по изучению приливной эволюции в системе “планета-спутник” были выполнены в конце XIX века небесным механиком и космогонистом Дж.Г. Дарвиным. В 60-е годы XX века новая научная информация о планетах и спутниках, полученная с помощью космических аппаратов и радиолокационной астрономии возродила интерес к приливной теории. Макдональд Г., Гойлдрах П., Пил С., Каула У. и ряд других авторов провели более детальное исследование эффектов приливного трения.

Приливные силы оказывают влияние не только на орбиты спутников, но также и на их вращательные движения, и являются важнейшим диссипативным фактором, приводящим произвольное первоначальное движение тела к захвату в резонансный режим движения. Ряд важных результатов по приливной эволюции вращательного движения небесных тел был получен Белецким В.В. (1975, 1978).

Исследования по влиянию деформируемости и внутренней вязкости материала на движение тела стали также актуальны в связи с попыткой объяснения расхождений между теоретическим результатами и данными наблюдений в динамике Земли, с появлением искусственных спутников и обнаружением новых эффектов в их угловых движениях, обусловленных упругими свойствами.

При изучении динамики систем, содержащих вязкоупругие элементы большой жесткости, широко применяется асимптотический метод, предложенный Черноусько Ф.Л. (1978, 1980). Получаемые с помощью этого метода уравнения движения имеют вид уравнений динамики твердого тела с дополнительными слагаемыми, обусловленными внутренней упругостью и диссипацией, и описывают движение системы, устанавливающееся после затухания собственных упругих колебаний и вызванное внешними силами и силами инерции.

Для исследования эволюции движения механических систем, содержащих вязкоупругие элементы большой жесткости, используется асимптотический метод разделения движений и усреднения (Вильке В.Г., 1983), который позволяет перейти от уравнений в бесконечномерных банаховых пространствах к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, неизвестными в которой являются переменные “действие” невозмущенной задачи.

Одно из важных направлений, посвященных изучению динамики распределенных систем, представлено в монографиях Вильке В.Г. (1986, 1997), где хорошо развитые методы классической аналитической механики обобщаются на случай систем с бесконечным числом степеней свободы. Для ряда моделей рассматриваемых систем доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений уравнений движения. Рассмотрены задачи о движении вязкоупругого тела в центральном ньютоновском поле сил, системы вязкоупругих тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Эти и другие задачи являются модельными задачами в теории приливов на новом ее этапе развития, когда на смену моделей абсолютно твердого тела и материальной точки приходит модель пространственного вязкоупругого тела.

Цель диссертации состоит в развитии и углублении методов исследования эволюции движения систем с бесконечным числом степеней свободы и применении этих и ранее известных методов к исследованию диссипативной эволюции движения естественных и искусственных тел в задачах небесной механики и механики космического полета.

Основные результаты диссертации и их научная новизна.

- Для исследования эволюции поступательно-вращательного движения вязкоупругого тела, а также твердого тела с жестко прикрепленными к нему вязкоупругими элементами, предложен асимптотический метод, сочетающий в себе метод разделения движений и метод Крылова-Боголюбова для систем с быстрыми и медленными переменными. Этот метод в предположении больших коэффициентов жесткости и демпфирования вязкоупругой среды, а также наличия малых внешних периодических возмущений, позволяет получить приближенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую медленную диссипативную эволюцию поступательно-вращательного движения изучаемой механической системы.
- Получена эволюционная система уравнений и проведен ее анализ в задаче о поступательно-вращательном движении вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил. Указанная система уравнений описывает взаимное изменение параметров орбиты и вращательного движения вязкоупругого шара и может быть использована при изучении приливной эволюции движения планет Солнечной системы.
- Исследована эволюция поступательно-вращательного движения вязкоупругого шара в ограниченной круговой задаче трех тел, являющейся модельной задачей небесной механики. Рассмотрен случай, когда массивные тела, моделируемые материальными точками с массами 1 и m ($m \ll 1$), и центр масс вязкоупругого шара движутся в одной плоскости, а вращение вязкоупругого шара относительно центра масс происходит вокруг нормали к этой плоскости. Показано, что эволюция движения вязкоупругого шара разбивается на три этапа, характеризующихся различными временами. Получены уравнения, описывающие движение вязкоупругого шара на каждом из этих этапов в классе квазикруговых орбит.
- Исследована эволюция движения двойной планеты, моделируемой материальной точкой массы и однородным деформируемым вязкоупругим шаром массы m, в гравитационном поле

неподвижного центра – материальной точки единичной массы m ($m << \boldsymbol{m} << 1$) в классе квазикруговых орбит. Рассмотрен случай, когда движение центра масс вязкоупругого шара и материальной точки массы m происходит в одной плоскости, проходящей через притягивающий центр, а вращение шара относительно центра масс происходит вокруг нормали к этой плоскости. Построены фазовые портреты, позволяющие выявить взаимосвязь между изменением радиуса орбиты центра масс двойной планеты и расстоянием между составляющими ее элементами.

- Получена эволюционная система уравнений, описывающая поступательно-вращательное движение сферически симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями в центральном ньютоновском поле сил. Найдены многообразия стационарных решений и исследована их устойчивость на основе уравнений в вариациях.
- Исследована эволюция вращательного движения динамически симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями на круговой орбите. Получены приближенные уравнения, описывающие поведение рассматриваемой механической системы на этапах “быстрой” и “медленной” диссипативной эволюции. Для этапа “медленной” диссипативной эволюции построены фазовые портреты.
- Рассмотрен пространственный вариант задачи о двойной планете. Методом разделения движения построена возмущенная система уравнений, описывающая поступательно-вращательное движение планеты и спутника с учетом возмущений, вызываемых упругостью и диссипацией. Проведен анализ квазистатических деформаций вязкоупругой планеты, моделируемой однородным изотропным вязкоупругим шаром. Получено квазистатическое решение задачи теории упругости в случае, когда планета моделируется механической системой, состоящей из абсолютно твердой невесомой сферы, к которой с внешней стороны жестко прикреплена вязкоупругая сферическая оболочка, а внутри имеется подвижное внутреннее ядро.

Все результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования. В работе используются методы аналитической механики, метод разделения движений, применяемый к механическим системам, содержащим деформируемые элементы большой жесткости (Черноусько Ф.Л. (1980), Вильке В.Г. (1983)), метод усреднения, асимптотический метод Крылова-Боголюбова для систем с быстрыми и медленными переменными (Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. (1985)).

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы получены на основе сформулированных в ней гипотез и строго обоснованы.

Практическая ценность работы. Результаты диссертационной работы, полученные в задачах о поступательно-врашательном движении вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил, в задаче о двойной планете и в ограниченной круговой задаче трех тел, могут найти применение в приливной теории движения планет и их спутников и геодинамике. Результаты исследования поступательно-вращательного движения спутника с гибкими вязкоупругими стержнями в центральном ньютоновском поле сил и вращательного движения спутника на круговой орбите могут быть использованы на этапе предварительного проектирования больших космических конструкций. Методические приемы, использованные при выводе точных уравнений движения в рамках рассматриваемой модели и получении приближенной системы уравнений, описывающей поступательно-вращательное движение, могут быть полезны при исследовании сложных механических систем.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на III-ем и IV-ом Международных симпозиумах по классической и небесной механики (Великие Луки, 1998, 2001), на Международном научном симпозиуме по проблемам механики деформируемых тел, посвященном 90-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 2001), на Восьмом Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001), на VIII-ой Международной конференции Устойчивость, управление и динамика твердого тела (Донецк, 2002). Результаты диссертации докладывались на научных семинарах механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова под руководством акад. Румянцева В.В. и проф. Карапетяна А.В. (1999, 2002, 2007), под руководством чл.-корр. РАН Белецкого В.В. и проф. Голубева Ю.Ф. (2001, 2002), под руководством проф. Вильке В.Г. и проф. Самсонова В.А. (2001); на научном семинаре в ГАИШ им. Штернберга П.К. под руководством проф. Баркина Ю.В. (2001), на научном семинаре кафедры теоретической механики Московского энергетического института под руководством проф. Мартыненко Ю.Г. (2001), на 52-ой, 53-ей, 54-ой научно-технических конференциях МИРЭА (Москва, 2003, 2004, 2005), на семинаре под руководством проф. Шевалье Л. и Паскаль М. в университете Пьера и Мари Кюри (Париж, Франция, 2001).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 13 статьях (из них 10 – в рецензируемых отечественных журналах), список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах с Вильке В.Г. авторы внесли равный вклад и несут равную ответственность за полученные результаты.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 34 рисунка. Общий объем диссертации составляет 250 страниц. Список цитируемой литературы включает 141 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы, приведен обзор литературы соответствующей тематики и кратко изложено содержание диссертации.

Глава 1. Асимптотические методы в механике систем с бесконечным числом степеней свободы.

В первой главе диссертации формулируется постановка задачи о поступательно-вращательном движении механической системы с бесконечным числом степеней свободы, выводятся уравнения движения и излагаются асимптотические методы исследования. Под механической системой с бесконечным числом степеней свободы понимается либо вязкоупругое тело, либо твердое тело с жестко прикрепленными к нему вязкоупругими элементами.

Постановка задачи и вывод уравнений движения в форме уравнений Рауса из вариационного принципа Д’Аламбера-Лагранжа составляют содержание §1.1.

Предполагается, что рассматриваемая механическая система занимает область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ в евклидовом пространстве E^3, причем Ω_1 – это область, занимаемая твердым телом, а Ω_2 – вязкоупругим в естественном недеформированном состоянии (в случае вязкоупругого тела $\Omega_1 = \varnothing$). Помимо инерциальной системы координат $OXYZ$ вводятся система осей Кенига $Cx_1x_2x_3$ и подвижная система координат $Cx_1x_2x_3$ с началом в центре масс механической системы в деформированном состоянии. Положение точки $M \in \Omega$ относительно инерциальной системы координат $OXYZ$ определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R}(\mathbf{r},t) = \mathbf{R}_C(t) + \Gamma(t)(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r},t)), \tag{1}$$

где $\mathbf{r} \in \Omega$, $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ – вектор упругого смещения, обращающийся в нуль для точек твердого тела, $\mathbf{R}_C$ – радиус-вектор точки C, Γ – оператор перехода от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к системе осей Кёнига $Cx_1x_2x_3$.

Радиус-вектор $\mathbf{R}_C$ и “связанная” с деформируемой системой система координат $Cx_1x_2x_3$ определяются однозначно по заданному векторному полю $\mathbf{R}(\mathbf{r},t)$ следующими условиями:

$$\mathbf{R}_C(t) = \frac{1}{m}\int\limits_{\Omega} \mathbf{R}(\mathbf{r},t)\, r(\mathbf{r})dx, \quad \int\limits_{\Omega_2} \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\, r(\mathbf{r})dx = 0, \quad \int\limits_{\Omega_2} \operatorname{rot}\mathbf{u}\, r(\mathbf{r})dx = 0, \tag{2}$$

где m – масса всей системы, r – распределенная плотность, $dx = dx_1dx_2dx_3$.

Предполагается, что деформируемая часть рассматриваемой механической системы однородна, изотропна и имеет постоянную плотность r, а относительные перемещения точек при деформациях $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ малы.

Потенциальная энергия упругих деформаций задается в соответствии с линейной теорией упругости квадратичным функционалом $\mathsf{E}[\mathbf{u}]$, который по предположению содержит множителем “большой” параметр N, характеризующий жесткость упругой среды. Вводится малый параметр $e = N^{-1}$. При $e = 0$ вектор-функция $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ полагается равной нулю, и механическая система представляет собой абсолютно твердое тело. Функционал внутренних диссипативных сил

$\mathsf{D}[\dot{\mathbf{u}}]$ определяется соотношением $\mathsf{D}[\mathbf{u}] = c\mathsf{E}[\mathbf{u}]$, где $c > 0$ – коэффициент внутреннего вязкого трения, т.е. рассматривается модель Кельвина-Фойгта.

Кинетическая энергия системы определяется равенством:

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \dot{\mathbf{R}}^2 r\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left[\Gamma^{-1}\dot{\mathbf{R}}_C + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}\right]^2 r\,dx, \ \ \boldsymbol{\omega}\times(\cdot) = \Gamma^{-1}\dot{\Gamma}(\cdot), \tag{3}$$

а функционал потенциальной энергии внешних сил полагается заданным в виде:

$$\Pi = \Pi[\mathbf{R}, a, m], \qquad \Pi[\mathbf{R}, a + 2p, m] = \Pi[\mathbf{R}, a, m], \tag{4}$$

где $a(t) = w_0 t + a(0)$, $w_0 = const$, $m -$ малый параметр.

Вариационный принцип Д'Аламбера-Лагранжа имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega} \ddot{\mathbf{R}}\,d\mathbf{R}\,r\,dx + (\nabla_{\mathbf{R}}\Pi, d\mathbf{R}) + \left(\nabla_{\mathbf{u}}\mathsf{E}[\mathbf{u}] + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathsf{D}[\dot{\mathbf{u}}], d\mathbf{u}\right)_{\Omega_2} +$$

$$+\,\boldsymbol{\lambda}_1 \int\limits_{\Omega_2} d\mathbf{u}\,dx + \boldsymbol{\lambda}_2 \int\limits_{\Omega_2} \mathrm{rot}\,d\mathbf{u}\,dx = 0, \qquad \forall d\mathbf{u} \in \mathsf{B}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_1(t)$, $\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\lambda}_2(t)$ – неопределенные множители Лагранжа, порожденные условиями (2).

Конфигурационным пространством системы является прямое произведение $\mathsf{M}\times\mathsf{B}$, где M – шестимерное дифференцируемое многообразие с локальными координатами $q_1,\ldots,q_6$, а B – банахово пространство векторных функций $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$. Обобщенные координаты $q_1,\ldots,q_6$ определяют положение точки C в системе координат $OXYZ$ и ориентацию подвижной системы координат $Cx_1x_2x_3$ относительно осей Кенига $Cx_1x_2x_3$:

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{R}_C(q_1, q_2, q_3), \quad \Gamma = \Gamma(q_4, q_5, q_6),$$

откуда следует, что $T = T[\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}]$, $\Pi = \Pi[\mathbf{q}, \mathbf{u}, a, m]$.

Уравнения движения выводятся из вариационного принципа Д'Аламбера-Лагранжа (5) и выписываются в форме уравнений Рауса, причем канонические переменные $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, где $\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T$ – обобщенные импульсы, используются для описания поступательно-вращательного движения деформированной системы, а лагранжевы переменные $u_i(\mathbf{r},t)\,(i = 1,2,3)$ для описания деформаций.

Функционал Рауса определяется равенством

$$\mathsf{R} = \sum_{i=1}^{6} p_i \dot{q}_i - T + \Pi + \mathsf{E}[\mathbf{u}] \Big|_{(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})\to(\mathbf{p},\mathbf{q})},$$

а уравнения движения имеют вид:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathsf{R}}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial \mathsf{R}}{\partial p_k}, \quad k = 1,\ldots,6, \tag{6}$$

$$\left(-\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathsf{R} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathsf{R} + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathsf{D}[\dot{\mathbf{u}}] + \boldsymbol{\lambda}_1, d\mathbf{u}\right)_{\Omega_2} + \boldsymbol{\lambda}_2 \int_{\Omega_2} \mathrm{rot}\, d\mathbf{u} dx = 0 \quad \forall d\mathbf{u} \in \mathsf{B} \tag{7}$$

Система уравнений (6)–(7) представляет собой сложную систему интегродифференциальных уравнений в банаховом пространстве, содержащую малые параметры e и m. Малый параметр e отвечает за возмущения, связанные с нежесткостью рассматриваемой механической системы, а малый параметр m – с малыми возмущениями, индуцируемыми полем внешних сил. Предполагается, что при $e = 0,\ m = 0$ задача является интегрируемой, а потому в целях использования асимптотических методов от переменных $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ осуществляется переход к переменным $(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi})$, которые в невозмущенной задаче (т.е. при $e = 0,\ m = 0$) являются переменными “действие-угол”. В классе рассматриваемых в данной диссертации задач в роли таких переменных выступают переменные Андуайе-Делоне.

В §1.2 дано описание переменных Андуайе-Делоне, выписаны соотношения, позволяющие выразить функционал Рауса в этих переменных, т.е. представить его в виде $\mathsf{R} = \mathsf{R}[\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi},\dot{\mathbf{u}},\mathbf{u},a,m]$. Показано, что уравнения (6) в переменных $(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi})$ сохраняют свою структуру, т.е. имеют вид:

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial \mathsf{R}}{\partial j_k}, \quad \dot{j}_k = \frac{\partial \mathsf{R}}{\partial I_k}, \quad k = 1,\ldots,6. \tag{8}$$

и совместно с уравнениями (7) и условиями (2) образуют полную систему уравнений, определяющую движение данной механической системы.

На следующем шаге к полученной системе уравнений применяется метод разделения движений, описание которого содержится в §1.3.

При $e = 0$, когда жесткость упругой среды бесконечно велика, перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ обращаются в нуль, и рассматриваемая механическая система движется как твердое тело. Функционал Рауса в этом случае имеет вид:

$$\mathrm{R}[\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi},0,0\alpha,\mu] = \mathrm{R}_0(\mathbf{I}) + \mu K[\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi},\alpha,\mu],$$

а уравнения (0.8) выглядят следующим образом:

$$\dot{I}_k = -\mu\frac{\partial K}{\partial \varphi_k},\quad \dot{\varphi}_k = \omega_k(\mathbf{I}) + \mu\frac{\partial K}{\partial I_k},\quad k = 1,\ldots,6,\ \omega_k(\mathbf{I}) = \frac{\partial \mathrm{R}_0}{\partial I_k}. \tag{9}$$

Уравнение (7) после умножения обеих его частей на N^{-1} становится сингулярно возмущенным, т.е. содержащим малый параметр при старшей производной по времени. Из уравнения (7) определяется вектор-функция $\mathbf{u}$, описывающая вынужденные колебания точек вязкоупругой среды, обусловленные действием внешних сил и сил инерции, которые называются квазистатическими. Указанное решение представляется в виде:

$$\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}_1(\mathbf{r},\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi},\alpha,\chi,\mu) + O(\varepsilon(\chi\omega)^2), \tag{10}$$

где $\omega = \max\limits_k \omega_k(\mathbf{I}(0))$.

После линеаризации правых частей уравнений (8) по $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$ и подстановки в них вместо $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$ найденного частного решения (10) получается замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных, описывающих поступательно-вращательное движение механической системы, и учитывающая возмущения, связанные с внутренней упругостью и диссипацией.

Математическое обоснование и оценка погрешности метода разделения движений в динамике систем с упругими и диссипативными элементами в случае, когда эта система имеет конечное число степеней свободы, изложено в работах Черноусько Ф.Л., Шамаева А.С. (1983), Синицына Е.В. (1991) на основе метода пограничных функций для систем сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений (Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. (1973)), а в работе Сидоренко В.В. (1995) на основе метода теории интегральных многообразий (Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. (1973), Стрыгин В.В., Соболев В.А. (1988)). В работе Шатиной А.В. (1990) получено асимптотическое представление решения линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве с малым параметром при старшей производной и неоднородном члене.

В §1.4 излагаются асимптотические методы исследования полученной в §1.3 системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая имеет вид:

$$\dot{I}_k = -\mu \frac{\partial K}{\partial \varphi_k} + \varepsilon F_k(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \alpha, \chi, \mu), \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\dot{\varphi}_l = \omega_l(\mathbf{I}) + \mu \frac{\partial K}{\partial I_l} + \varepsilon G_l(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \alpha, \chi, \mu), \quad l = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

В рассматриваемой постановке задачи $k, l = 1, \ldots, 6$. Однако, вследствие применения метода разделения движений правые части получаются независящими от некоторых угловых переменных и, следовательно, уравнения для этих переменных отделяются от системы (11). Порядок системы уравнений (11) в ряде случаев также понижается из-за наличия первых интегралов.

При $\varepsilon = 0$ система уравнений (11) становится стандартной в смысле применения к ней метода усреднения (Арнольд В.И. (1978)). Переменные “действие” в этом случае не эволюционируют, т.к. при отсутствии диссипации энергии, вызываемой внутренним вязким трением упругой среды, данная система является консервативной.

Если $K \equiv 0$, то система уравнений (11) исследуется методом усреднения. Усреднение по быстрым угловым переменным в предположении отсутствия резонансов приводит к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных действие и медленных угловых переменных.

Если $K(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \alpha, \mu) \neq 0$, то система уравнений (11) рассматривается как система с малым параметром μ при фиксированном значении параметра ε . Рассматривается ситуация, когда при $\mu = 0$ уравнения (11) выглядят следующим образом:

$$\dot{I}_k = \varepsilon \chi F_{k0}(\mathbf{I}), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

$$\dot{\varphi}_l = \omega_l(\mathbf{I}) + \varepsilon G_{l0}(\mathbf{I}), \quad l = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

Система уравнений (12) образует замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных действие. Предполагается, что она обладает притягивающим множеством – аттрактором, к которому стремятся почти все решения этой системы. Это притягивающее множество содержится во множестве стационарных решений, определяемых системой уравнений:

$F_{k0}(\mathbf{I})=0,\quad k=1,\ldots,n$.

Решение системы уравнений (11) по аналогии с методом методом Крылова-Боголюбова для систем с быстрыми и медленными переменными (Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. (1985)) ищется в виде:

$$I_k = J_k + mN_{k1}(\mathbf{J},\boldsymbol{\psi},e,c) + m^2 N_{k2}(\mathbf{J},\boldsymbol{\psi},e,c) + \mathbf{L},\ k=1,\ldots,n,$$

$$j_l = y_l + mM_{l1}(\mathbf{J},\boldsymbol{\psi},e,c) + m^2 M_{l2}(\mathbf{J},\boldsymbol{\psi},e,c) + \mathbf{L},\ l=1,\ldots,m, \qquad (14)$$

где $\mathbf{J}=(J_1,\ldots,J_n)$, $\boldsymbol{\psi}=(a, y_1,\ldots,y_m)$, функции N_{ks}, M_{lp} $2p$ -периодичны по угловым переменным $y_1,\ldots,y_m,a$ и имеют по этим переменным нулевое среднее.

Как функции времени переменные $J_1,\ldots,J_n$ и $y_1,\ldots,y_m$ определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{J}_k = A_{k0}(\mathbf{J},e,c) + mA_{k1}(\mathbf{J},e,c) + m^2 A_{k2}(\mathbf{J},e,c) + \mathbf{L},\ k=1,\ldots,n,$$

$$\dot{y}_l = B_{l0}(\mathbf{J},e) + mB_{l1}(\mathbf{J},e,c) + m^2 B_{l2}(\mathbf{J},e,c) + \mathbf{L},\ l=1,\ldots,m, \qquad (15)$$

где

$$A_{k0}(\mathbf{J},e,c) = ecF_{k0}(\mathbf{J}),\quad B_{l0}(\mathbf{J},e) = w_l(\mathbf{J}) + eG_{l0}(\mathbf{J}). \qquad (16)$$

Полагая в m -окрестности асимптотически устойчивого стационарного решения системы (12) $A_{k0}(\mathbf{J},e,c)=ecm\tilde{A}_{k0}(\mathbf{J})$ и подставляя разложения (14), (15) в уравнения (11), приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра m можно последовательно определить неизвестные функции $A_{kj}, N_{kj}, B_{lj}, M_{lj}$ $(k=1,\ldots,n,\ l=1,\ldots,m,\ \ j=1,2,\ldots)$ при условии отсутствия резонансных соотношений.

Если $A_{k1}(\mathbf{J},e,c) \not\equiv 0,\ k=1,\ldots,n$, то приближенные уравнения, описывающие эволюцию переменных действие на этапе медленной диссипативной эволюции, имеют вид:

$$\dot{J}_k = ecF_{k0}(\mathbf{J}) + ecmF_{k1}(\mathbf{J}),\ k=1,\ldots,n. \qquad (17)$$

Если же $A_{k1}(\mathbf{J},e,c) \equiv 0,\ k=1,\ldots,n$, то следует найти функции $A_{k2}(\mathbf{J},e,c)$, определяющие эволюцию переменных действие во втором приближении по малому параметру m . Функции $A_{k2}(\mathbf{J},e,c)$ второго приближения по малому параметру m необходимо искать также в случае, когда система уравнений (17) обладает асимптотически устойчивым стационарным решением. В m^2 - окрестности этого стационарного решения необходимо учитывать следующее приближение по m. Тогда эволюционная система уравнений примет вид:

$$\dot{J}_k = ec\,(F_{k0}(\mathbf{J}) + mF_{k1}(\mathbf{J}) + m^2 F_{k2}(\mathbf{J})),\ k = 1,\dots,n. \qquad (18)$$

Система уравнений (12) описывает “быструю” диссипативную эволюцию переменных действие, а приближенная система дифференциальных уравнений (17) (или (18)) описывает “медленную” диссипативную эволюцию этих переменных.

Глава 2. Эволюция движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию эволюции движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил.

В §2.1 формулируется постановка задачи, выводятся уравнения движения в форме уравнений Рауса с использованием переменных Андуайе-Делоне, составляющих гамильтонову часть переменных и описывающих поступательно-вращательное движение шара. Обобщенные координаты, описывающие деформацию шара, составляют лагранжеву часть переменных. В данной задаче поле внешних сил центральное, и, следовательно, сохраняется вектор момента количеств движения $\mathbf{G}_0$ относительно притягивающего центра, который равен сумме векторов моментов количеств движения в орбитальном движении и в движении относительно центра масс: $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{K}$. Инерциальная система координат $OXYZ$ выбирается так, что ее начало совпадает с притягивающим центром, а ось OZ направлена по вектору $\mathbf{G}_0$.

Деформированное состояние шара описывается классической теорией упругости малых деформаций, в частности функционал потенциальной энергии упругих деформаций имеет вид:

$$\mathrm{E}[\mathbf{u}] = \int_{\Omega_2} a_1 (I_{\mathrm{E}}^2 - a_2 II_{\mathrm{E}})dx,\quad a_1 > 0,\ 0 < a_2 < 3,$$

$$a_1 = \frac{\mathrm{E}(1-n)}{2(1+n)(1-2n)},\quad a_2 = \frac{2(1-2n)}{1-n},$$

$$I_{\mathrm{E}} = \sum_{i=1}^{3} e_{ii}\,, \quad II_{\mathrm{E}} = \sum_{i<j}^{3} (e_{ii}e_{jj} - e_{ij}^2), \;\; e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

где E – модуль упругости Юнга, n – коэффициент Пуассона.

Потенциальная энергия внешнего и внутреннего гравитационных полей представляется функционалами

$$\Pi = -g\int_{\Omega} \frac{r\,dx}{\sqrt{\left(\mathbf{R}_C + \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})\right)^2}}, \qquad \Pi_1 = \int_{\Omega} \frac{fm(\mathbf{r},\mathbf{u})}{r_0^3} r\,dx,$$

где $g = fm_1$, f – гравитационная постоянная, m_1 – масса притягивающего центра, m - масса вязкоупругого шара, r_0 – его радиус в естественном недеформированном состоянии.

В §2.2 методом разделения движений и усреднения осуществляется построение приближенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных “действие”, описывающих диссипативную эволюцию поступательно-вращательного движения вязкоупругого шара в центральном поле сил.

В соответствии с рассматриваемой в первой главе моделью жесткость деформируемого шара предполагается большой, и вводится малый параметр e, обратно пропорциональный модулю упругости Юнга. При $e = 0$ соответствующая система уравнений описывает движение абсолютно твердого шара в центральном ньютоновском поле сил. Эта система является интегрируемой, а движение, ею описываемое, таково: центр масс шара движется по кеплеровской орбите как материальная точка с массой, равной массе шара; при этом шар равномерно вращается вокруг оси, неизменно ориентированной в инерциальной системе координат. Рассматриваются финитные движения, когда кеплеровская орбита в невозмущенном движении представляет собой эллипс. Это невозмущенное движение используется в качестве порождающего для определения вынужденных колебаний вязкоупругого шара.

Решение задачи о деформации шара при отсутствии массовых сил было получено Томсоном с использованием сферических функций. Специальный вид массовых сил в исследуемой задаче позволяет получить ее решение в виде суммы однородных сферических функций третьего и первого порядков (Ляв А. (1935), Лейбензон Л.С. (1942)). Функции, описывающие вынужденные колебания вязкоупругого шара, используются для формирования правых частей “возмущенной” системы уравнений, описывающей его поступательно-вращательное движение. Далее применяется метод усреднения (рассматривается нерезонансный случай).

Полученные в результате указанной процедуры эволюционные уравнения представляют собой замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка относительно переменных действие:

$$\dot{I}_1 = -\Delta w_4^4\left(1-e^2\right)^{-9/2}\cos d_2\left\{\frac{1+z^2}{2}F_1(e)w_2 - zF_2(e)w_4\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right\},$$

$$\dot{I}_2 = -\Delta w_4^4\left(1-e^2\right)^{-9/2}\left\{\frac{1+z^2}{2}F_1(e)w_2 - zF_2(e)w_4\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right\},$$

$$\dot{I}_3 = -\Delta w_4^4\left(1-e^2\right)^{-9/2}\left\{\frac{1}{2}(z\cos i+\cos d_1)F_1(e)w_2 - \cos iF_2(e)w_4\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right\},$$

$$\dot{L} = \Delta w_4^4\left(1-e^2\right)^{-6}\left\{zF_2(e)w_2 - F_3(e)w_4\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right\},$$

$$\dot{G} = \Delta w_4^4\left(1-e^2\right)^{-9/2}\left\{zF_1(e)w_2 - F_2(e)w_4\left(1-e^2\right)^{-3/2}\right\},$$

$$\dot{H} = -\dot{I}_3, \qquad (19)$$

где

$$\Delta = 18ecr^2 D_2,\ D_2 = \frac{4pr_0^7(1+n)(9n+13)}{105(5n+7)},\ w_4 = \frac{g^2m^3}{L^3},\ w_2 = \frac{I_2}{A},\ \cos d_1 = \frac{I_3}{I_2},$$

$$\cos d_2 = \frac{I_1}{I_2},\ \cos i = H/G,\ z = \cos(d_1+i),\ e^2 = 1-G^2/L^2,$$

$$F_1(e) = 1+3e^2+\frac{3}{8}e^4,\quad F_2(e) = 1+\frac{15}{2}e^2+\frac{45}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6,$$

$$F_3(e) = 1+\frac{31}{2}e^2+\frac{255}{8}e^4+\frac{185}{16}e^6+\frac{25}{64}e^8.$$

Здесь $I_2 = |\mathbf{K}|$, $\mathbf{K}$ – вектор момента количеств движения шара относительно центра масс, I_1, I_3 - проекции вектора $\mathbf{K}$ на оси Cx_3 и Cx_3 соответственно, L, G, H - переменные Делоне, описывающие орбиту центра масс. Переменная G – модуль вектора момента количеств движения $\mathbf{G}$ в орбитальном движении, H – проекция вектора $\mathbf{G}$ на ось

OZ , e – эксцентриситет орбиты центра масс шара, i – наклонение орбиты, $\cos i = H / G$.

Уравнения (19) имеют три первых интеграла. Два из них являются следствием закона сохранения момента количеств движения $\mathbf{G}_0$; третий является следствием сферической симметрии и соответствует тому факту, что в усредненных уравнениях угол между осью Cx_3 связанной с шаром подвижной системы координат, и вектором кинетического момента $\mathbf{K}$ относительно точки C остается неизменным. Эти уравнения описывают приливную эволюцию поступательно-вращательного движения вязкоупругой планеты в поле притягивающего центра.

В §2.3 проводится анализ эволюционной системы уравнений. Находятся стационарные решения системы и исследуется их устойчивость на основе уравнений в вариациях. Показано, что в стационарном движении центр масс движется по круговой орбите, ортогональной вектору $\mathbf{G}_0$, ось вращения шара направлена по нормали к плоскости орбиты, при этом деформированный шар обращен одной стороной к притягивающему центру. Если модуль вектора $\mathbf{G}_0$ удовлетворяет условию

$$G_0 > \frac{4}{3}\sqrt[4]{3Ag^2m^3}, \tag{20}$$

где A – момент инерции недеформированного шара относительно его диаметра, g – гравитационная постоянная, m – масса шара, то имеются две стационарные орбиты. Если $G_0 = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3Ag^2m^3}$, то такая орбита одна. В случае, когда $G_0 < \frac{4}{3}\sqrt[4]{3Ag^2m^3}$, стационарных решений эволюционная система не имеет. В случае двух стационарных орбит устойчивым является стационарное движение, соответствующее орбите большего радиуса, а стационарное движение с меньшим радиусом орбиты неустойчиво. Этот результат соответствует полученному ранее в работе Вильке В.Г. (1980) при анализе векторных эволюционных уравнений относительно вектора кинетического момента вращательного движения $\mathbf{K}$ и радиус-вектора центра масс шара.

Следует отметить, что в случае существования одной стационарной орбиты ее радиус равен $\sqrt{1{,}2}r_0$, где r_0 – радиус шара, а в случае двух стационарных орбит радиус меньшей орбиты меньше этого значения. Однако эволюционные уравнения выводятся в предположении, что радиус шара много меньше расстояния от его центра масс до притягивающего центра. Это предположение исключает из рассмотрения орбиты с радиусами порядка r_0. В изолированной системе планета – притягивающий центр (Солнце) условие (20) выполнено для всех планет Солнечной системы. Таким образом, можно утверждать, что диссипативная эволюция поступательно-вращательного движения планеты в центральном ньютоновском поле сил протекает так, что ее движение стремится к стационарному.

Тот факт, что приливные силы приводят первоначальное вращение тела к захвату в резонансный режим движения, когда период обращения по орбите и период вращения вокруг оси совпадают, был установлен Белецким В.В. (1965) при исследовании вращательного движения твердого тела под действием приливных сил, момент которых определялся феноменологически. В Солнечной системе почти стационарное движение осуществляет Луна относительно Земли, спутники Юпитера Ио, Европа, Ганимед, Каллисто, ряд других спутников планет.

В силу полученной эволюционной системы уравнений найдены производные по времени от наклонения орбиты i (угла между векторами $\mathbf{G}_0$ и $\mathbf{G}$), угла d_1 между векторами $\mathbf{G}_0$ и $\mathbf{K}$, и эксцентриситета орбиты e. Показано, что существует класс движений, когда вращение вязкоупругого шара относительно центра масс происходит вокруг нормали к плоскости орбиты, совпадающей с вектором $\mathbf{G}_0$. Если $i \neq 0$, то $\frac{di}{dt} < 0$, и, следовательно, наклонение орбиты в процессе эволюции уменьшается. Эволюция угла d_1 имеет более сложный характер. В частности, в случае обратных вращений (когда $p/2 \leq d_1 + i \leq p$) угол d_1 уменьшается, а в случае прямых вращений ($0 < d_1 + i < p/2$) может происходить увеличение угла d_1, если угловая скорость вращения планеты вокруг своей оси превышает ее среднее движение по орбите. Эффект возможного увеличения угла d_1 с последующим его уменьшением до нуля описан в работах Белецкого В.В. (1975) при исследовании приливной эволюции вращательного движения планет.

Показано, что уравнения движения допускают класс орбит с нулевым эксцентриситетом. Если $e \neq 0$, то в случае обратных вращений e уменьшается, а в случае прямых вращений может происходить увеличение эксцентриситета при достаточно большой угловой скорости собственного вращения по сравнению с орбитальной.

В §2.4 рассмотрен частный случай задачи о движении вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил, когда центр масс шара движется в плоскости OXY, а вращение относительно центра масс происходит вокруг нормали к плоскости орбиты. Правые части “возмущенной” системы уравнений в этом случае зависят лишь от одной угловой переменной – истинной аномалии, по которой и производится усреднение. Проблема резонансов в данном случае отсутствует. Построены фазовые портреты в плоскости переменных (L, I), где $I = |\mathbf{K}|$ в случае прямого вращения и $I = -|\mathbf{K}|$ в случае обратного вращения, а $L = |\mathbf{G}|(1-e^2)^{-0.5}$, а также в плоскости переменных (I, e).

Третья глава диссертации посвящена исследованию эволюции движения вязкоупругого шара в ограниченной круговой задаче трех тел. Рассматривается следующая постановка задачи. Два массивных тела, моделируемых материальными точками M_1 и M_2 с массами равными единице и m, где $m << 1$, движутся по круговым орбитам под действием сил ньютоновского притяжения вокруг общего центра масс O в плоскости OXY. При этом $OM_2 = b,\ \ OM_1 = mb$, а угол a между осью OX и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}_2$ точки M_2 изменяется по закону $a(t) = w_3 t/(1+m) + a(0), \quad w_3 = \sqrt{fb^{-3}}$, где f – гравитационная постоянная. Третье тело – это вязкоупругий шар массы $m,\ m << m$. Предполагается, что третье малое по массе тело не влияет на движение первых двух и движется в гравитационном поле, порожденном первыми двумя телами. Его центр масс C движется в плоскости OXY, а вращение относительно центра масс происходит вокруг нормали к этой плоскости, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки C.

Потенциальная энергия внешних гравитационных полей задается функционалом:

$$\Pi = -\int\limits_{\Omega} \frac{frdx}{\sqrt{(\mathbf{R}_1 + \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u}))^2}} - \int\limits_{\Omega} \frac{mfrdx}{\sqrt{(\mathbf{R}_2 + \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u}))^2}},$$

где $\mathbf{R}_1 = \overrightarrow{M_1 C} = \mathbf{R} + mb\mathbf{e}$, $\mathbf{R}_2 = \overrightarrow{M_2 C} = \mathbf{R} - b\mathbf{e}$, $\mathbf{e} = (\cos a, \sin a, 0)$.

В §3.1 формулируется постановка задачи и выводятся уравнения движения в форме уравнений Рауса с использованием канонических переменных Андуайе-Делоне, описывающих поступательно-вращательное движение вязкоупругого шара, и лагранжевых переменных $u_i(\mathbf{r},t)$, $i = 1,2,3$, описывающих его деформации. Конфигурационное пространство данной механической системы есть прямое произведение трехмерного дифференцируемого многообразия M и банахова пространства векторных функций $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$. Полученная система уравнений движения содержит малый параметр e, обратно пропорциональный модулю упругости шара, и малый параметр m. При $e = 0$ соответствующие уравнения описывают движение абсолютно твердого шара в ограниченной круговой задаче трех тел. К этим уравнениям можно применить метод усреднения. Переменные “действие”, определяющие орбиту центра масс шара и момент количеств движения относительно центра масс, в усредненных уравнениях в этом случае не изменяются.

В §3.2 методом разделения движений и асимптотическим методом, аналогичным методу Крылова-Боголюбова для систем с быстрыми и медленными переменными, строится приближенная система уравнений, описывающая диссипативную эволюцию переменных “действие”. Равенству $m = 0$ соответствует задача о движении вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил, рассмотренная в §2.4. Эта задача имеет в качестве притягивающего множества стационарное решение – гравитационно-стабилизированное вращение вязкоупругого шара на круговой орбите. Показано, что уравнения движения допускают класс квазикруговых орбит, т.е. орбит с нулевым эксцентриситетом. В этом классе движений строится приближенная система уравнений относительно переменных действие, описывающих изменение радиуса орбиты центра масс вязкоупругого шара и его вращательного движения.

Показано, что эволюция движения вязкоупругого шара разбивается на три этапа, характеризующихся различными временами. На этапе “быстрой” диссипативной эволюции, протекающей со скоростью порядка

ec (нулевое приближение по малому параметру m), уравнения, описывающие эволюцию переменных действие, имеют вид:

$$\dot{I} = 18ecD_2 r^2 w_2^4 (w_2 - w_1), \ \dot{\Lambda} = -18ecD_2 r^2 w_2^4 (w_2 - w_1)\,, \qquad (21)$$

где $I = |\mathbf{K}|$ в случае прямого вращения шара и $I = -|\mathbf{K}|$ в случае обратного вращения шара, $\mathbf{K}$ – вектор момента количеств движения шара относительно центра масс,

$$\Lambda = \sqrt{fm^2 R}\,, \ w_1 = \frac{I}{A}, \ w_2 = \frac{f^2 m^3}{\Lambda^3}, \quad w_3 = \sqrt{\frac{f}{b^3}}\,,$$

A - момент инерции недеформированного шара относительно диаметра.

Система уравнений (21) имеет асимптотически устойчивое стационарное решение, соответствующее режиму гравитационной стабилизации шара на круговой орбите. В m -окрестности указанного стационарного решения учитывается первое приближение по малому параметру m.

Приближенные уравнения, описывающие эволюцию переменных I, Λ с учетом членов первого приближения по малому параметру m , имеют вид (для ясности изложения здесь сохранены обозначения для переменных действие):

$$\dot{I} = 18ecD_2 r^2 w_2^4 \{(w_2 - w_1) + 2mw_2 a(q)\},$$
$$\dot{\Lambda} = -18ecD_2 r^2 w_2^4 \{(w_2 - w_1) + 2mw_2 a(q)\}, \qquad (22)$$

где $a(q) = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_0^{2p} \frac{1 - q\cos y}{(1 - 2q\cos y + q^2)^{3/2}} dy$, $\quad q = \dfrac{b}{R}$.

При $q = 1$ интеграл, определяющий функцию $a(q)$, расходится. При $q < 1$, т.е. для внешних орбит вязкоупругого шара, функция $a(q)$ принимает положительные значения, а при $q > 1$, т.е. для внутренних орбит вязкоупругого шара, функция $a(q)$ принимает отрицательные значения.

Из системы (22) следует, что и в первом приближении по малому параметру m сохраняется момент количеств движения G_0 относительно точки O : $\dot{G}_0 = 0, \ G_0 = I + \Lambda$. Система уравнений (22) также как и система (21), обладает асимптотически устойчивым стационарным решением, соответствующим движению шара, при котором его центр масс движется по орбите радиуса R_{01}, отличного от R_0, с угловой скоростью $w_1 = w_2(1+2ma(q))$.

Таким образом, на первом этапе “медленной” диссипативной эволюции, протекающей со скоростью порядка ecm, орбита вязкоупругого шара незначительно смещается к орбите тела массы m, т.е. для внутренних орбит вязкоупругого шара радиус квазикруговой орбиты увеличивается, а для внешних – уменьшается, стремясь к новому своему стационарному значению R_{01}.

В m^2 -окрестности этого асимптотически устойчивого стационарного решения учитывается следующее приближение по малому параметру m. Получено уравнение, описывающее эволюцию момента количеств движения G_0 в виде: $\dot{G}_0 = 18ecm^2 D_2 r^2 w_2^5(q) b(q)$. Показано, что эволюционная система уравнений с учетом членов второго порядка по малому параметру m стационарных решений не имеет. На втором этапе “медленной” диссипативной эволюции, протекающей со скоростью порядка ecm^2, орбита вязкоупругого шара удаляется от орбиты тела массы m : для внутренних планет радиус квазикруговой орбиты уменьшается, а для внешних – увеличивается.

Полученные на основе приближенных уравнений результаты справедливы для областей изменения радиусов квазикруговых орбит, исключающих окрестность точки b, в которой могут находиться точки либрации, так как в этом случае оказываются некорректными процедура усреднения по быстрой угловой переменной и разложение в ряд одного из гравитационных потенциалов.

В четвертой главе диссертации изучается эволюция поступательно-вращательного движения вязкоупругой планеты при взаимодействии приливов, порождаемых на ней центральным телом и спутником.

Двойная планета, моделируемая материальной точкой массы m и однородным деформируемым вязкоупругим шаром массы $\boldsymbol{m}$, движется в гравитационном поле неподвижного центра с массой, равной 1 ($m \ll \boldsymbol{m} \ll 1$). Предполагается, что движение центра масс деформируемой планеты и материальной точки происходит в одной плоскости, проходящей через притягивающий центр, а вращение вязкоупругой планеты относительно ее центра масс происходит вокруг нормали к этой плоскости. При этом радиус орбиты центра масс двойной планеты много больше взаимного расстояния между составляющими ее элементами.

В §4.1 выводятся уравнения движения в форме уравнений Рауса. Канонические переменные Андуайе-Делоне используются для описания орбиты центра масс двойной планеты и орбит вязкоупругого шара и материальной точки массы m относительно их общего центра масс, а также для описания вращательного движения вязкоупругого шара. Функции, описывающие деформации шара, составляют лагранжеву часть переменных. Показано, что уравнения движения допускают класс квазикруговых орбит, т.е. орбит с нулевыми эксцентриситетами. Дальнейшее исследование проводится в этом классе движений. Указанная упрощенная модель позволяет выявить наиболее важные закономерности эволюционных процессов, происходящих в рассматриваемой механической системе.

В соответствии с общей постановкой задачи, сформулированной в первой главе, жесткость вязкоупругого шара предполагается большой и вводится малый параметр e , обратно пропорциональный модулю упругости. При $e = 0$ шар представляет собой абсолютно твердое тело, и исходная задача распадается на три, не связанные друг с другом задачи: задачу о движении центра масс двойной планеты относительно притягивающего центра, задачу о движении связки двух планет относительно их общего центра масс и задачу о вращении шара относительно собственного центра масс. Рассеяние энергии при деформациях вязкоупругого шара вызывает “перекрестные” связи между этими независимыми задачами и является причиной эволюции рассматриваемой системы.

В §4.2 методом разделения движений и усреднения осуществляется построение приближенной системы эволюционных уравнений, которая представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка относительно переменных действие, описывающих изменение расстояния от притягивающего центра до центра масс двойной планеты, расстояния от центра масс вязкоупругого шара до материальной точки массы m и вращения вязкоупругого шара. Указанная система уравнений имеет вид:

$$\dot{\Lambda}_1 = -18ecr^2 D_2 w_1^4 (w_1 - w_3),$$

$$\dot{\Lambda}_2 = -18ecr^2 D_2 \frac{m^2 w_2^4}{(m+m)^2}(w_2 - w_3),$$

$$\dot{I} = -\dot{\Lambda}_1 - \dot{\Lambda}_2. \qquad (23)$$

Переменные Λ_1, Λ_2 выражаются через радиус орбиты центра масс двойной планеты R_1 и расстояние R_2 между центром масс деформируемого шара и спутником с помощью соотношений:

$$R_1 = \frac{\Lambda_1^2}{f(m+m)^2}, \; R_2 = \frac{\Lambda_2^2}{f_0 m_r^2}, \; m_r = \frac{mm}{m+m}, \quad f_0 = f(m+m).$$

Переменная I равна модулю момента количеств шара относительно центра масс, взятого со знаком плюс в случае прямого вращения, и со знаком минус в случае обратного вращения. Величины w_1, w_2, w_3, входящие в правые части уравнений (23), имеют вид:

$$w_1 = \frac{f^2(m+m)^3}{\Lambda_1^3}, \; w_2 = \frac{f_0^2 m_r^3}{\Lambda_2^3}, \; w_3 = \frac{I}{A},$$

где A - момент инерции недеформированного шара относительно диаметра, f - универсальная гравитационная постоянная. Уравнения (23) имеют первый интеграл: $I + \Lambda_1 + \Lambda_2 = G_0$, который является следствием закона сохранения момента количеств движения рассматриваемой механической системы относительно притягивающего центра.

В §4.3 на основе полученной в §4.2 системы уравнений проводится качественное исследование эволюции движения системы. Находятся стационарные решения, и исследуется их устойчивость на основе уравнений в вариациях. Показано, что в зависимости от величины модуля момента количеств движения G_0 существует либо два, либо одно, либо ни одного стационарного решения. В стационарном движении (в случае его существования) конфигурация двойной планеты неизменна в орбитальной системе координат, связанной с движением ее центра масс. Все стационарные решения являются неустойчивыми.

Построены фазовые портреты в плоскости переменных $(\Lambda_1, \tilde{\Lambda}_2)$, где $\tilde{\Lambda}_2 = \frac{(m+m)^{4/3}}{mm}\Lambda_2$. Соответствующая система уравнений имеет вид:

$$\dot{\Lambda}_1 = -\frac{\Delta}{\Lambda_1^{12}}\left[\frac{k}{\Lambda_1^3} - G_0 + \Lambda_1 + n\tilde{\Lambda}_2\right],$$

$$\dot{\tilde{\Lambda}}_2 = -\frac{æ\Delta}{\tilde{\Lambda}_2^{12}}\left[\frac{k}{\tilde{\Lambda}_2^3} - G_0 + \Lambda_1 + n\tilde{\Lambda}_2\right],$$

где $\Delta = 18ecr^2 D_2 f^8 (m + \mathrm{m})^{12} A^{-1}$, $æ = \dfrac{\mathrm{m}}{m(m + \mathrm{m})^{2/3}}$,

$n = \dfrac{\mathrm{m}m}{(m + \mathrm{m})^{4/3}}$, $\quad k = Af^2 (m + \mathrm{m})^3$.

Движение по фазовым траекториям происходит таким образом, что, в конце концов, либо двойная планета приближается к притягивающему центру, либо спутник (тело массы m) падает на планету. Численным методом получена фазовая траектория для двойной планеты Земля-Луна, движущейся в поле притяжения Солнца, в рамках рассматриваемой в этой главе постановки задачи. Эволюция движения системы Земля-Луна происходит так, что в настоящее время радиусы орбит R_1 и R_2 увеличиваются, а вращение Земли вокруг собственной оси замедляется. После того как угловая скорость вращения Земли сравняется с орбитальной в ее движении относительно Луны (период обращения Луны вокруг Земли при этом согласно полученным результатам увеличится в 1,476 раз и составит 40,32 современных суток) расстояние между Луной и Землей начнет уменьшаться. Следует отметить, что часть интегральной кривой, соответствующая уменьшению R_2, расположена вблизи кривой, на которой угловая скорость вращения Земли совпадает с орбитальной в ее движении относительно Луны. Подобную картину эволюции Земли и Луны описывал Дарвин и позже Макдональд. По последним оценкам увеличение суток за счет приливного трения составляет 0,003 с за 100 лет (Сидоренков Н.С., 2004).

В пятой главе диссертации изучается эволюция поступательно-вращательного движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями в центральном ньютоновском поле сил.

Спутник представляет собой динамически симметричное твердое тело, по оси симметрии которого расположена пара гибких вязкоупругих стержней. При отсутствии деформаций в стержнях главные центральные моменты инерции спутника равны между собой, т.е. его центральный эллипсоид инерции – сфера. Диссипация энергии происходит за счет внутреннего трения в материале стержней. Жесткость стержней предполагается большой, и вводится малый параметр e, обратно пропорциональный жесткости упругих элементов.

В §5.1 формулируется постановка задачи и выводятся уравнения движения в форме уравнений Рауса. Используется линейная теория изгиба тонких нерастяжимых стержней. Канонические переменные Андуайе-Делоне описывают поступательно-вращательное движение спутника, а лагранжевы переменные $u_1(s,t), u_2(s,t)$ – деформации стержней (здесь s – координата точки стержня по оси симметрии спутника, t – время). Так как поле внешних сил центральное, то имеет место закон сохранения момента количеств движения относительно притягивающего центра.

В §5.2 методом разделения движений и усреднения строится приближенная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных “действие” и медленной угловой переменной g – долготы перигелия от восходящего узла, описывающая эволюцию движения рассматриваемой механической системы.

В §5.3 определяются многообразия стационарных решений усредненной системы уравнений, и исследуется их устойчивость на основе уравнений в вариациях. Стационарные точки эволюционной системы уравнений соответствуют стационарным движениям системы, на которых диссипация энергии равна нулю. Для одного класса стационарных движений спутника его центр масс описывает эллиптическую орбиту, стержни перпендикулярны плоскости орбиты, а скорость вращения вокруг оси симметрии, совпадающей со стержнями, произвольна. Описанное стационарное движение устойчиво практически только для прямых вращений спутника с угловой скоростью большей среднего движения по орбите.

Другой класс стационарных решений соответствует движению центра масс по круговой орбите, когда угловая скорость вращения спутника совпадает с орбитальной, а, вообще говоря, деформированные стержни имеют произвольную ориентацию в орбитальной системе координат. Так же, как и в задаче о поступательно-вращательном движении вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил, рассмотренной в главе 2, в зависимости от величины модуля момента количеств движения $\mathbf{G}_0$ число стационарных орбит может быть равно нулю, одному или двум. В случае двух стационарных орбит устойчивым является стационарное решение, соответствующее орбите большего радиуса.

В окрестности этого стационарного решения условие отсутствия резонансов нарушается, поэтому его исследование проводится на основе возмущенной системы уравнений, полученной в результате применения метода разделения движений. Точные уравнения движения допускают такой класс движений, при котором эксцентриситет и наклонение орбиты равны нулю, а ось вращения ортогональна плоскости орбиты. В указанном классе движений проводится исследование устойчивости стационарных решений, соответствующих режиму гравитационной стабилизации спутника на круговой орбите. Стационарные движения, соответствующие такому положению спутника, при котором стержни лежат в плоскости орбиты и направлены по радиус-вектору центра масс, неустойчивы. А стационарные решения, соответствующие расположению стержней по касательной к орбите, устойчивы.

В шестой главе диссертации изучается эволюция движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями на круговой орбите. Спутник моделируется осесимметричным твердым телом, по оси симметрии которого расположена пара гибких вязкоупругих стержней.

В §6.1 формулируется постановка задачи и выводятся уравнения движения. Для определения радиус-вектора точки стержня в связанной со спутником системе координат используется линейная теория изгиба тонких нерастяжимых стержней. Вводится малый параметр e , пропорциональный обратной величине жесткости упругих элементов, и малый параметр m , пропорциональный квадрату орбитальной угловой скорости. Для описания вращательного движения спутника относительно центра масс используются канонические переменные Андуайе.

В §6.2 методом разделения движений осуществляется построение “возмущенной” системы уравнений относительно переменных Андуайе. При $m = 0$ указанная система уравнений описывает быструю диссипативную эволюцию вращательного движения симметричного твердого тела с двумя вязкоупругими стержнями относительно центра масс, причем правые части этих уравнений не зависят от угловых переменных. Переменные I_2, I_3 (I_2 – модуль вектора кинетического момента **K** вращательного движения, I_3 – проекция вектора **K** на нормаль к плоскости орбиты) в этих уравнениях не эволюционируют, а скорость эволюции переменной I_1 (I_1 – проекция вектора **K** на ось симметрии недеформированного спутника) имеет порядок ec. В случае динамически вытянутого спутника ($A > C$) значение переменной I_1 уменьшается и стремится к нулю, а в случае динамически сжатого спутника ($A < C$) значение переменной I_1 увеличивается и стремится совпасть с I_2. Эволюционная система уравнений, описывающая быструю диссипативную эволюцию, имеет вид:

$$\dot I_1 = -ecd_1 r^2 \frac{(A-C)}{A^5 C}(I_2^2 - I_1^2) I_1^3, \;\; \dot I_2 = 0, \;\; \dot I_3 = 0 \quad (d_1 > 0).$$

В §6.3 изучается этап медленной диссипативной эволюции в случае $A > C$. Асимптотическим методом, аналогичным методу Крылова-Боголюбова для систем с быстрыми и медленными переменными, в окрестности аттрактора $I_1 = 0,\ I_2 = I_2(0),\ I_3 = I_3(0)$ получены уравнения, описывающие эволюцию переменных I_2, I_3 с учетом периодических возмущений, вызываемых переменной I_1. Скорость эволюции этих переменных имеет порядок ecm^2. С сохранением обозначений для переменных действие эволюционная система уравнений имеет вид:

$$\dot I_2 = -4n_1 \left\{ w_2(I_2)\left(1 + \frac{I_3^2}{I_2^2}\right) - 2\Omega \frac{I_3}{I_2} \right\},$$

$$\dot I_3 = -n_1 \left\{ 8 w_2(I_2) \frac{I_3}{I_2} + \Omega\left(3\frac{I_3^4}{I_2^4} - 6\frac{I_3^2}{I_2^2} - 5\right) \right\},$$

где $n_1 = \dfrac{9}{16} ecm^2 d_1 r^2 w_0^4 C^2 A^{-2}$, $w_2(I_2) = I_2 / A$, $\Omega = \sqrt{\dfrac{g}{R^3}}$, $g = fm_1$, f – гравитационная постоянная, m_1 – масса притягивающего центра.

Построен фазовый портрет в плоскости переменных $x = I_3 I_2^{-1}$ и $y = I_2 A^{-1}$, который аналогичен фазовому портрету, полученному Белецким В.В. (1975) при анализе вращательного движения сферически симметричного твердого тела под действием приливного момента. Система дифференциальных уравнений относительно переменных x и y имеет единственное стационарное решение $x=1,\ y=\Omega$ (Ω – орбитальная угловая скорость), которое соответствует гравитационной стабилизации спутника в орбитальной системе координат. Соответствующая стационарная точка в плоскости (x, y) является устойчивым узлом. На основе неусредненной возмущенной системы уравнений получен следующий результат: положение равновесия, при котором ось симметрии спутника направлена по радиус-вектору его центра масс, устойчиво, а положение равновесия, при котором ось симметрии спутника направлена по касательной к орбите, неустойчиво.

В §6.4 изучается этап медленной диссипативной эволюции в случае $A<C$. Точные уравнения движения допускают такой класс решений, когда вектор кинетического момента **K** направлен по оси симметрии ($I_1 = I_2$). В этом классе движений асимптотическим методом Крылова-Боголюбова строится приближенная система уравнений, описывающая эволюцию переменных $I_2,\ I_3$. Скорость эволюции переменных $I_2,\ I_3$ имеет порядок ecm^2. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\dot{I}_2 = -n_2\left(1-\frac{I_3^2}{I_2^2}\right)\left\{\left(1+3\frac{I_3^2}{I_2^2}\right)\frac{I_2}{C} - 4\Omega\frac{I_3}{I_2}\right\},$$

$$\dot{I}_3 = -4n_2\left(1-\frac{I_3^2}{I_2^2}\right)\left\{\frac{I_3}{C} - \left(1+\frac{I_3^2}{I_2^2}\right)\Omega\right\},$$

где $n_2 = \frac{9}{8} ecm^2 d_1 r^2 w_0^4$.

Построен фазовый портрет системы в плоскости переменных (x, y). Анализ эволюционной системы уравнений позволяет сделать вывод, что в случае $A<C$ движение спутника стремится к прямому вращению вокруг оси симметрии, направленной по нормали к плоскости орбиты. Значение предельной угловой скорости определяется начальными условиями.

В 7-ой главе диссертации рассмотрен пространственный вариант задачи о двойной планете: исследуется поступательно-вращательное движение вязкоупругой планеты в гравитационном поле притягивающего центра и спутника, которые моделируются материальными точками. Спутник и планета движутся относительно общего центра масс, которые в свою очередь совершают движение относительно притягивающего центра.

В §7.1 из вариационного принципа Даламбера-Лагранжа выводится точная система уравнений движения рассматриваемой механической системы в рамках линейной модели теории вязкоупругости.

В §7.2 методом разделения движений строится возмущенная система уравнений, описывающая поступательно-вращательное движение планеты и спутника с учетом возмущений, вызываемых упругостью и диссипацией.

В §7.3 проводится анализ квазистатических деформаций вязкоупругой планеты, моделируемой однородным изотропным вязкоупругим шаром. Деформированное состояние вязкоупругой планеты, вызываемое полем гравитационных сил и сил инерции, описывается вектором упругого смещения

$$\mathbf{u} = e\mathbf{u}_1 = e(\mathbf{u}_{10} + \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{120} - c\dot{\mathbf{u}}_{120} + \mathbf{u}_{130} - c\dot{\mathbf{u}}_{130}), \tag{24}$$

где

$$\mathbf{u}_{10} = r\left(\frac{2}{3}w^2 - \frac{fm}{r_0^3}\right)[d_1 r^2 + d_2 r_0^2]\mathbf{r},$$

$$\mathbf{u}_{11} = r\left\{a_1\left[\frac{1}{6}w^2 r^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})^2\right]\mathbf{r} + (a_2 r^2 + a_3 r_0^2)\left[\frac{1}{3}w^2\mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}\right]\right\},$$

$$\mathbf{u}_{120} = -\frac{3rfm}{R_2^3}\left\{a_1\left[\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{2}(\xi_2,\mathbf{r})^2\right]\mathbf{r} + (a_2 r^2 + a_3 r_0^2)\left[\frac{1}{3}\mathbf{r} - (\xi_2,\mathbf{r})\xi_2\right]\right\},$$

$$\mathbf{u}_{130} = -\frac{3rf}{Q_1^3}\left\{a_1\left[\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{2}(\xi_1,\mathbf{r})^2\right]\mathbf{r} + (a_2 r^2 + a_3 r_0^2)\left[\frac{1}{3}\mathbf{r} - (\xi_1,\mathbf{r})\xi_1\right]\right\},$$

$\boldsymbol{\omega}$ - вектор угловой скорости системы координат, интегральным образом связанной с шаром, $Q_1 = |\mathbf{Q}_1|$, $R_2 = |\mathbf{R}_2|$, $\mathbf{Q}_1 = \overrightarrow{OD}$, $\mathbf{R}_2 = \overrightarrow{DF}$, D - центр масс деформируемого шара, F - материальная точка, моделирующая спутник, ξ_1, ξ_2 - единичные векторы, направленные по $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{R}_2$ соответственно, коэффициенты $a_i, d_j, i = 1,2,3,\ j = 1,2$ являются дробно-рациональными функциями коэффициента Пуассона n , $e = \mathrm{E}^{-1}$, Е - модуль Юнга, r_0 - радиус шара в естественном недеформированном состоянии, r - его плотность. Зависимость от времени вектора упругого смещения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ осуществляется через $\boldsymbol{\omega}$, Q_1, R_2 , ξ_1, ξ_2 из невозмущенной системы уравнений, описывающей поступательно-вращательное движение абсолютно твердого шара в гравитационном поле притягивающего центра и спутника.

Получено уравнение поверхности вращающейся планеты, определяемое слагаемыми $\mathbf{u}_{10}, \mathbf{u}_{11}$ в правой части (24). Найдены главные центральные моменты инерции вращающейся планеты в виде:

$$A = A_0[1 + erw^2 r_0^2 f_1(n) - erfmr_0^{-1} f_2(n)],$$

$$C = A_0[1 + erw^2 r_0^2 f_3(n) - erfmr_0^{-1} f_2(n)],$$

где $f_1(n) = \dfrac{95n^3 - 13n^2 - 167n + 53}{35(1-n)(5n+7)}$, $f_2(n) = \dfrac{4(1-2n)(4-3n)}{35(1-n)}$,

$f_3(n) = \dfrac{2(25n^3 - 39n^2 - 61n + 59)}{35(1-n)(5n+7)}$, $A_0 = \dfrac{2}{5} mr_0^2$, m - масса планеты.

Получены значения модуля вектора упругого смещения, позволяющие оценить величину приливных горбов, создаваемых притягивающим центром и спутником и определяемых слагаемыми $\mathbf{u}_{120}, \mathbf{u}_{130}$ в формуле (24).

В §7.4 найдены стационарные движения и исследована их устойчивость на основе уравнений в вариациях. Показано, что в стационарном движении, когда диссипация энергии равна нулю, центр масс планеты и спутник движутся по круговым орбитам относительно притягивающего центра, располагаясь с ним на одной прямой. Вязкоупругая планета в стационарном движении неподвижна в орбитальной системе координат. Показано, что указанное стационарное движение является неустойчивым.

В §7.5 в качестве модели вязкоупругой планеты рассматривается система, состоящая из абсолютно твердой невесомой сферы, к которой с внешней стороны жестко прикреплена вязкоупругая сферическая оболочка, а внутри имеется подвижное внутреннее ядро. Получено квазистатическое решение задачи теории упругости, которое описывает деформации упругого слоя планеты под действием гравитационных сил и сил инерции. Показано, что действие внешних гравитационных полей в рассматриваемом приближении вызывает центрально симметричные деформации упругого сферического слоя планеты, а колебания внутреннего ядра нарушают эту симметрию.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1) *Шатина А.В.* Об асимптотических свойствах решений одного класса механических систем с бесконечным числом степеней свободы // Вестник МГУ, сер. 1, матем.-мех., №4, 1990, с. 85-89.

2) *Вильке В.Г., Шатина А.В.* Эволюция движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями в центральном ньютоновском поле сил // Космические исследования, т.37, вып.3, 1999, с. 289-295.

3) *Вильке В.Г., Шатина А.В.* Эволюция движения вязкоупругого шара в ограниченной круговой задаче трех тел // Прикладная математика и механика, т.64, вып.5, 2000, с. 772-782.

4) *Шатина А.В.* Эволюция движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Космические исследования, 2001, т.39, №3, с.303-315.

5) *Вильке В,Г., Шатина А.В.* Эволюция движения двойной планеты // Космические исследования, 2001, т.39, №3, с. 316-323.

6) *Вильке В.Г., Шатина А.В.* Эволюция движения вязкоупругого шара в ограниченной круговой задаче трех тел // Нелинейная механика. М.: Наука, Физматлит, 2001, с. 385-401.

7) *Шатина А.В.* Эволюция вращательного движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями // Космические исследования, 2002, т.40 №2, с. 178-192.

8) *Вильке В.Г., Шатина А.В.* Медленная диссипативная эволюция движения вязкоупругого шара в ограниченной круговой задаче трех тел //Прикладная математика и механика, т.66, вып.5, 2002, с. 782-792.

9) *Шатина А.В.* Эволюция поступательно-вращательного движения вязкоупругого шара // Механика твердого тела, ISSN 0321-1975, 2002, Вып.32, с. 194-202.

10) *Шатина А.В.* Эволюция движения вязкоупругой планеты // Новая геометрия природы. Труды международной научной конференции (август 25-сентябрь 5, 2003) Т. III. Астрономия. Образование.

Естественнонаучная философия. Казань: Казанский гос. университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2003, с. 166-170.

11) *Шатина А.В.* Быстрая и медленная диссипативная эволюция в механических системах, содержащих вязкоупругие элементы // Известия РАН, Механика твердого тела, №2, 2004, с. 14-23.

12) *Вильке В.Г., Шатина А.В.* О поступательно-вращательном движении вязкоупругого шара в гравитационном поле притягивающего центра и спутника // Космические исследования, 2004, т. 42, №1, с 95-106.

13) *Шатина А.В.* О деформациях планеты, содержащей подвижное внутреннее ядро, в гравитационном поле центрального тела и спутника // Известия РАН, Механика твердого тела, №1, 2005, с. 3-12.