Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Дильман Степан Валерьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ МУЛЬТИИНДЕКСИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Специальность: 01.01.05 — Теория вероятностей и
математическая статистика.

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2006

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор А.В. Булинский.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор М.А. Лифшиц, доктор физико-математических наук, профессор Ю.С. Хохлов.
Ведущая организация:	С.-Петербургское отделение Математического Института им В.А. Стеклова РАН (ПОМИ РАН).

Защита диссертации состоится 16 матра 2007 года в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские Горы, МГУ, Главное здание, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 16 февраля 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Т.П. Лукашенко.

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Исследования асимптотических свойств частичных сумм, построенных по семейству независимых случайных величин, относится к классическому ядру современной теории вероятностей. В разное время в этом направлении работали Э.Борель, Г.Харди, Д.Литтлвуд, Г.Штейнгауз, А.Я.Хинчин, С.Н.Бернштейн, А.Н.Колмогоров, Б.В.Гнеденко, П.Леви, В.Феллер, Ю.В.Прохоров, А.А.Боровков, А.В.Скороход, В.Штрассен, И.А.Ибрагимов, В.М.Золотарев, В.В.Петров и многие другие выдающиеся ученые. Обзор результатов этой области представлен, например, в известных книгах В.В.Петрова[1], И.А.Ибрагимова и Ю.В.Линника[2], Д.Хошневисана[3].

Одним из наиболее ярких результатов, описывающих флуктуации сумм независимых слагаемых, является закон повторного логарифма, установленный А.Я.Хинчиным[4] в 1924 году. Можно сказать, что был сделан новый шаг в уточнении усиленного закона больших чисел. Следует также отметить подход к оценке асимптотического поведения частичных сумм, основанный на изучении вероятностей, с которыми эти суммы превышают определенные уровни. Заметную роль здесь играет классическая теорема Баума - Каца[5], выявляющая связь между запасом абсолютных моментов слагаемых и скоростью сходимости в законе больших чисел. Эти результаты стали источником различных обобщений, в том числе на случай зависимых слагаемых и схем, более сложных, чем последовательность случайных величин. Достаточно упомянуть работы М.И.Гордина, А.Ю.Зайцева, М.Иосифеску, В.М.Круглова, В.Ю.Королева, Ю.С.Хохлова, М.Талаграна, М.Леду, В.Филиппа, В.Стаута, Й.-Ч.Ки, М.Чёргё и других исследователей. Среди многочисленных резуль-

[1] Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.:Наука, 1987.

[2] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные случайные величины М.:Наука, 1965.

[3] Khoshnevisan D. Multiparameter processes. An introduction to Random Fields. Springer, 2002.

[4] Khinchine, A. Ueber einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. // Fund. Math. 1924, vol. 6, pp. 9-12.

[5] Baum L.E., Katz M.. Convergence rate in the law of large numbers. // Trans. Amer. Math. Soc. 1965, vol. 120, pp. 108-123.

татов выделим работы А.В.Булинского, М.А.Лифшица, А.И.Мартикайнена, К.Хейде, В.А.Егорова, О.И.Клесова, А.Д.Розальского, А.Бовье, П.Пикко, Л.Чанга, инициировавшие исследования, проведенные в диссертации.

В данной диссертации изучается предельное поведение нормированных сумм (в том числе взвешенных) независимых случайных величин. При этом внимание уделяется как результатам, выполняющимся почти наверное, так и асимптотическим оценкам вероятностей превышения заданных уровней. Описание проводится в терминах сходимости или расходимости рядов, элементами которых являются указанные вероятности, умноженные на некоторые весовые коэффициенты. В последние годы значительные результаты, развивающие этот подход к описанию скорости сходимости в законе больших чисел, были установлены А.Гутом, А.Спатару, Л.В.Розовским, Х.Ланцингером, У.Штадтмюллером, Д.Пио, И.Фазекашем и многими другими математиками.

Новые эффекты возникают при изучении сумм мультииндексированных случайных величин. Именно анализу таких массивов в диссертации уделяется основное внимание.

Таким образом, тема диссертации представляется весьма актуальной.

Цель работы.

Целью работы является описание всех универсальных (не зависящих от распределения слагаемых) нормировок в законах повторного логарифма для последовательностей независимых одинаково распределенных слагаемых и для семейства геометрически взвешенных рядов случайных величин, а также распространение на случай многомерных массивов слагаемых некоторых недавних результатов, обобщающих фундаментальную теорему Баума - Каца о скорости сходимости в законе больших чисел.

Научная новизна.

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Получены аналоги закона повторного логарифма Хартмана - Винтнера для независимых одинаково распределенных случайных величин (вместе с его обращением, установленным В.Штрассеном) и закона повторного логарифма, доказанного А.Бовье и П.Пикко для геометрически взвешенных рядов, вовлекающие нормировки, отличные от корня из удвоенного повторного логарифма.

2. Исследовано асимптотическое поведение должным образом взвешенных вероятностей превышения заданных уровней, зависящих от параметра $\varepsilon > 0$, модулями частичных сумм многомерного массива случайных величин. Также изучены предельные свойства случайных величин, возникающих при суммировании бесконечного множества независимых одинаково распределенных слагаемых, взвешенных специальным образом.

3. Распространен на случай мультииндексировнных семейств слагаемых результат Д.Пио о связи так называемого свойства Ф - *сходимости* случайных величин и скорости сходимости нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин к их среднему значению.

Методы исследования.

В работе активно использовались методы теории вероятностей такие как симметризация случайных величин, неравенства для сумм последовательностей случайных величин (Леви, Хоффмана - Йоргенсена), гауссовская аппроксимация, классические предельные теоремы. Для различного рода оценок активно применялся аппарат математического и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть полезны специалистам в области предельных теорем теории вероятностей.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в шести работах автора. Их список приведен в конце автореферата ([1] - [6]).

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на Международной конференции, посвященной 90 - летию академика Б.В.Гнеденко, Киев, июнь 2002г., на XXVI-й конференции молодых ученых механико-математического ф-та МГУ, Москва, апрель 2004г., на XIV-й Европейской конференции молодых вероятностников и статистиков, Будапешт, август 2005г., на Ломоносовских чтениях, Москва, апрель 2006г., на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико - математического факультета МГУ (рук. член-корр. РАН, проф. А.Н.Ширяев) в октябре 2006г. и на С.-Петербургском городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике (рук. акад. РАН, проф. И.А.Ибрагимов) в декабре 2006г.

Структура работы.

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка основных обозначений и списка цитируемой литературы, содержащего 79 наименований. Общий объем работы составляет 88 страниц.

2 Краткое содержание диссертации

Диссертация посвящена изучению поведения частичных сумм независимых случайных величин[6]. Приводятся две группы результатов, относящихся к широко известным областям предельных теорем теории вероятностей. Первая из них связана с законом повторного логарифма для последовательностей (в том числе взвешенных) независимых одинаково распределенных (н.о.р.) слу-

[6] Ширяев А.Н. Вероятность – 1. М.:МЦНМО 2004., стр. 57.

чайных величин. Вторая посвящена изучению скорости сходимости в законе больших чисел для мультииндексированных семейств случайных величин.

Во введении дается обзор классических результатов, представляющих данную область теории вероятностей, а также приводятся факты, непосредственно послужившие базой для исследований, проведенных в диссертации. Кроме того, вводятся основные обозначения, используемые на протяжении всей работы.

В главе 1 собраны результаты, связанные с законом повторного логарифма. Изучается модель независимых слагаемых, а также случайных величин, являющихся суммой ряда, состоящего из н.о.р. слагаемых, взятых с весами, образующими геометрическую прогрессию.

Последовательность н.о.р. случайных величин $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ назовем *стандартной последовательностью*, если справедливы соотношения

$$\mathsf{E}X_1 = 0 \;\text{ и }\; \mathsf{E}X_1^2 = 1. \tag{1}$$

Для последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ случайных величин будем полагать

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Обозначим также

$$LLx = \log\log x, \text{ при } x \geq 3, \text{ и } LLx = 1 \text{ при } 0 < x < 3.$$

В 1941г. П.Хартман и А.Винтнер доказали следующий вариант закона повторного логарифма.

Теорема (П.Хартман и А.Винтнер)[7] *Пусть $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – стандартная последовательность. Тогда справедливы соотношения*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2nLLn}} = 1 \text{ п.н.}, \tag{2}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2nLLn}} = -1 \text{ п.н.} \tag{3}$$

[7] Hartmann P., Wintner A. On the law of the iterated algorithm. // Amer. J. Math. 1941, vol. 63, pp. 169-176.

Можно поставить естественный вопрос: какому необходимому и достаточному условию должна удовлетворять последовательность положительных чисел $\{\phi(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, монотонно стремящаяся к бесконечности, чтобы для любой стандартной последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выполнялись соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}\phi(n)} = 1 \text{ п.н.}, \tag{4}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}\phi(n)} = -1 \text{ п.н.} \tag{5}$$

Последовательности, удовлетворяющие (4) и (5), будем называть *универсальными нормировками.*

В 1977 году А.В.Булинский[8] получил исчерпывающее описание класса универсальных нормировок для случая, когда семейство всех стандартных последовательностей заменяется на множество всех последовательностей случайных величин, удовлетворяющих критерию Колмогорова - Петровского - Эрдёша - Феллера.[9] Позднее, им же[10] были получены результаты, обобщающие и функциональный закон повторного логарифма на случай нормирующих множителей отличных от корня из удвоенного повторного логарифма.

Следующий результат из главы 1 описывает все множество универсальных нормировок для класса стандартных последовательностей.

Теорема 1.1.1. *Неубывающая последовательность положительных чисел $\{\phi(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, является универсальной нормировкой для класса стандартных последовательностей тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{\sqrt{2nLLn}} = 1 \ \textit{п.н.} \tag{6}$$

[8] Булинский А.В. Замечание о нормировке в законе повторного логарифма. // Теория вероятн. и ее примен. 1977, том 22, №2, стр. 407-409.

[9] Feller, W. The general form of the so-called law of the iterated logarithm. // Trans. Amer. Math. Soc. 1943, vol. 54, №3, pp. 373-402.

[10] Булинский А.В. Новый вариант функционального закона повторного логарифма. // Теория вероятн. и ее примен. 1980, том 25, №3, стр. 502-511.

Теорема Хартмана - Винтнера допускает следующее важное обращение, полученное В.Штрассеном в 1966 году.

Теорема (В.Штрассен)[11] *Пусть* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *– последовательность н.о.р. случайных величин, удовлетворяющая соотношениям* (2) *и* (3). *Тогда у* X_1 *существует конечный второй момент и имеют место равенства* (1).

Справедливо обобщение этого результата.

Теорема 1.1.2. *Пусть* $\{\phi(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *– некоторая универсальная нормировка. Пусть дана некоторая последовательность н.о.р. случайных величин* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *для которой выполнены условия* (4) *и* (5). *Тогда у этих величин существует второй момент и справедливы соотношения* (1).

В заключение первой главы устанавливается результат, обобщающий закон повторного логарифма Бовье - Пикко для геометрически взвешенных рядов.

Рассмотрим стандартную последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ и введем следующие обозначения. Для $\beta \in (0,1)$ положим

$$\xi(\beta) = \Sigma_{n=0}^{\infty}\beta^n X_n, \tag{7}$$

$$\tau(\beta) = \mathsf{E}(\xi(\beta)^2) = \Sigma_{n=0}^{\infty}\beta^{2n} = \frac{1}{1-\beta^2}. \tag{8}$$

Теорема (А.Бовье и П.Пикко)[12] *Пусть* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$*– стандартная последовательность случайных величин. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\limsup_{\beta\to 1-} \frac{\xi(\beta)}{\sqrt{2\tau(\beta)LL(\tau(\beta))}} = 1 \text{ п.н.} \tag{9}$$

$$\liminf_{\beta\to 1-} \frac{\xi(\beta)}{\sqrt{2\tau(\beta)LL(\tau(\beta))}} = -1 \text{ п.н.}, \tag{10}$$

Числовую функцию $\psi(x)$ $(x > 0, 0 < \psi(x) \nearrow \infty)$ назовем *универсальной нормировкой для геометрически взвешенных рядов* если для всякой стандартной последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ выполняются соотношения

$$\limsup_{\beta\to 1-} \frac{\xi(\beta)}{\sqrt{\tau(\beta)}\psi(\tau(\beta))} = 1 \text{ п.н.} \tag{11}$$

[11] Strassen, V. A converse to the law of the iterated logarithm. // Z. Wahrsch. verw. Geb. 1966, vol. 4, №4, pp. 265-268.

[12] Bovier A., Picco P. A law of the iterated logarithm for geometric series. // Ann. Probab. 1993, vol. 21, №1, pp. 168-184.

$$\liminf_{\beta\to 1-} \frac{\xi(\beta)}{\sqrt{\tau(\beta)}\psi(\tau(\beta))} = -1 \text{ п.н.} \tag{12}$$

Следующая теорема описывает все универсальные нормировки для геометрически взвешенных рядов.

Теорема 1.3.2. *Функция $\psi(x)$ $(x > 0, 0 < \psi(x) \nearrow \infty)$ является универсальной нормировкой для геометрически взвешенных рядов тогда и только тогда, когда верно равенство*

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{\sqrt{2LLx}} = 1. \tag{13}$$

В главе 2 содержатся результаты, относящиеся к вопросу о скорости сходимости нормированных сумм н.о.р. мультииндексированных случайных величин к их математическому ожиданию. В основе этой области исследований лежит классическая теорема, носящая название *усиленного закона больших чисел* (у.з.б.ч.).

Для любого $d \geq 1$ и любых векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$, принадлежащих множеству $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, (в частности для $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$) будем писать $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ $(\mathbf{x} > \mathbf{y})$, когда $x_i \geq y_i$ $(x_i > y_i)$ для каждого i. Также будем обозначать

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = (x_1y_1, \dots, x_dy_d),$$

$$\mathbf{x}/\mathbf{y} = (x_1/y_1, \dots, x_d/y_d), \quad \text{когда } y_i \neq 0 \text{ при всех } i,$$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{y}} = (x_1^{y_1}, \dots, x_d^{y_d}) \;\text{ для } \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{y} \text{ таких, что } x_i^{y_i} \text{ имеет смысл при всех } i,$$

$$\langle \mathbf{x} \rangle = x_1 \dots x_d \;\text{ для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Сумму векторов и умножение вектора на скаляр, как обычно, определим покомпонентно. Кроме того, для каждого действительного c обозначим $\mathbf{c} = (c, \dots, c)$. Наконец, будем писать $\log x$, подразумевая логарифм по основанию e, и положим $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ для $x > 0$.

Для мультииндексированного семейства $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}$ случайных величин положим

$$S_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}.$$

Теорема (Усиленный закон больших чисел)[3] *Пусть* $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}$ $(d \geq 1)$– *семейство н.о.р. случайных величин, для которых выполнены условия*

$$\mathsf{E}X_{\mathbf{1}} = 0, \quad \mathsf{E}X_{\mathbf{1}}^2 = 1 \quad \text{и} \quad \mathsf{E}|X_{\mathbf{1}}|(\log^+|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1} < \infty. \tag{14}$$

Тогда с вероятностью единица справедливо соотношение

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{\langle \mathbf{n} \rangle} \to 0 \quad \text{при } \mathbf{n} \to \infty, \tag{15}$$

где $\mathbf{n} \to \infty$ *означает, что* $n_i \to \infty,\ i = 1, \ldots, d.$

Можно описывать отклонение нормированных сумм от среднего значения в терминах асимптотического поведения вероятностей

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{\mathbf{n}} - \mathsf{E}S_{\mathbf{n}}}{\langle \mathbf{n} \rangle}\right| > \varepsilon\right),\ \varepsilon > 0,$$

при $\mathbf{n} \to \infty$. Здесь важную роль играет понятие *сходимости вполне*, введенное для последовательностей П.Хсу и Х.Роббинсом[13] в 1947 году.

Говорят, что последовательность случайных величин $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится вполне к случайной величине Y, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon) < \infty.$$

С помощью этого понятия П.Хсу и Х.Роббинсом[13] и П.Эрдёшем[14] была описана скорость сходимости в усиленном законе больших чисел для последовательностей н.о.р. случайных величин.

Для произвольного числового семейства $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}$, имеющего при $\mathbf{n} \to \infty$ конечный предел a, можно описывать скорость сходимости $a_{\mathbf{n}}$ к пределу, подбирая подходящие функции $f : \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}_+$, для которых выполняется условие $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} f(\mathbf{n})|a_{\mathbf{n}} - a| < \infty$. Очень часто в роли $f(\mathbf{n})$ выступает $\langle \mathbf{n} \rangle^r$, для какого-либо действительного r.

Приведем теперь известный результат Л.Баума и М.Каца, давший импульс многим последующим исследованиям.

[13] Hsu P.L., Robbins H. Complete convergence and the law of the large numbers. // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1947, vol. 33, pp. 25-31.

[14] Erdös P. On a theorem of Hsu and Robbins. // Ann. Math. Statist. 1949, vol. 20, pp. 286-291.

Теорема (Л.Баум и М.Кац)[5] *Пусть дана последовательность* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *н.о.р. случайных величин и* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. *Пусть также заданы действительные числа* $a > 1/2$ *и* $q \geq 1/a$. *Тогда следующие три соотношения эквивалентны:*

$$\mathsf{E}|X_1|^q < \infty \text{ и, кроме того, } \mathsf{E}X_1 = 0 \text{ при } q \geq 1, \tag{16}$$

$$\sum_{n\geq 1} n^{qa-2}\mathsf{P}(|S_n| \geq \varepsilon n^a) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0, \tag{17}$$

$$\sum_{n\geq 1} n^{qa-2}\mathsf{P}(\max_{k\leq n}|S_k| \geq \varepsilon n^a) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0. \tag{18}$$

В случае $q > 1/a$ *эти условия также эквивалентны следующему:*

$$\sum_{k\geq 1} k^{qa-2}\mathsf{P}\left(\sup_{n\geq k}\frac{|S_n|}{n^a} \geq \varepsilon\right) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0. \tag{19}$$

Переходя от последовательностей к мультииндексированным семействам случайных величин, следует привести две теоремы, являющиеся существенными обобщениями теоремы Баума - Каца, приведенной выше.

Теорема (А.Гут)[15] *Пусть* $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}$ *– н.о.р. случайные величины и заданы действительные числа* $a > 1/2$ *и* $q \geq 1/a$. *Тогда следующие три соотношения эквивалентны:*

$$\mathsf{E}|X_{\mathbf{1}}|^q(\log^+|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1} < \infty \text{ и, кроме того, } \mathsf{E}X_1 = 0 \text{ при } q \geq 1, \tag{20}$$

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \langle\mathbf{n}\rangle^{qa-2}\mathsf{P}(|S_{\mathbf{n}}| \geq \varepsilon\langle\mathbf{n}\rangle^a) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0, \tag{21}$$

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \langle\mathbf{n}\rangle^{qa-2}\mathsf{P}\left(\max_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}}|S_{\mathbf{k}}| \geq \varepsilon\langle\mathbf{n}\rangle^a\right) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0, \tag{22}$$

В случае $q > 1/a$ *эти условия также эквивалентны следующему:*

$$\sum_{k\geq 1} k^{qa-2}\mathsf{P}\left(\sup_{\langle\mathbf{n}\rangle\geq k}\frac{|S_{\mathbf{n}}|}{\langle\mathbf{n}\rangle^a} \geq \varepsilon\right) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0. \tag{23}$$

[15] Gut. A. Marcinkiewicz laws and convergence rates in the law of large numbers for random variables with multidimensional indices. // Ann. Probab. 1978, vol. 6, №3, pp. 469-482.

В 1996 году, Д.Денг распространил этот результат на более общий случай нормирующих множителей.

Теорема (Д.Денг)[16] *Пусть наборы чисел* $\{a_i\}_{i=1}^d$ *и* $\{q_i\}_{i=1}^d$ *таковы, что*

$$1/2 < a_i \le 1 \text{ и } q_i \ge 1/a_i,\ i = 1, \ldots, d. \tag{24}$$

Положим

$$q = \max_{1\le i\le d} q_i \text{ и } r = \#\{i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le d : q_i = q\}. \tag{25}$$

Тогда условия

$$\mathsf{E}|X_{\mathbf{1}}|^q(\log^+|X_{\mathbf{1}}|)^{r-1} < \infty,\ \mathsf{E}X_{\mathbf{1}} = 0 \tag{26}$$

и

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \langle \mathbf{n}^{\mathbf{qa-2}}\rangle \mathsf{P}(\max_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} |S_{\mathbf{k}}| \ge \varepsilon\langle \mathbf{n}^{\mathbf{a}}\rangle) < \infty, \forall\varepsilon > 0, \tag{27}$$

эквивалентны. Здесь $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_d)$ *и* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$.

Из теоремы Д.Денга немедленно следует, что при условиях (26) для любого $\varepsilon > 0$ сходится и ряд

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \langle \mathbf{n}^{\mathbf{qa-2}}\rangle \mathsf{P}(|S_{\mathbf{n}}| \ge \varepsilon\langle \mathbf{n}^{\mathbf{a}}\rangle). \tag{28}$$

Рассмотрим соотношение (21), описывающее скорость сходимости в усиленном законе больших чисел. Можно поставить вопрос о том, как ведет себя сумма ряда в (21) при $\varepsilon \to 0+$. В 2003 году А.Гут и А.Спатару[17] ответили на этот вопрос, показав, что в случае $q \ge 2$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\varepsilon^{\frac{qa-1}{a-1/2}}}{|\log\varepsilon|^{d-1}} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \langle \mathbf{n}\rangle^{qa-2} \mathsf{P}(|S_{\mathbf{n}}| \ge \varepsilon\langle \mathbf{n}\rangle^a)$$

$$= \frac{\mathsf{E}|N|^{\frac{qa-1}{a-1/2}}}{(d-1)!(qa-1)(a-1/2)^{d-1}}. \tag{29}$$

[16] Deng. D., Complete convergence and convergence rates in Marcinkiewicz law of large numbers for random variables indexed by $\mathbb{Z}_+^d$. // Math. Appl. 1996, vol. 9, №4, pp. 441-448.

[17] A. Gut, A. Spatatu. Precise asymptotics in some strong limit theorems for multidimensionally indexed random variables. // Journal of Multivariate Analysis 2003, vol. 86, pp. 398-422.

Первая из теорем главы 2 диссертации отвечает на аналогичный вопрос об асимптотике ряда (28) при $\varepsilon \to 0+$.

Теорема 2.1.1. *Пусть наборы чисел* $\{a_i\}_{i=1}^d$ *и* $\{q_i\}_{i=1}^d$ *таковы, что*

$$1/2 < a_i \le 1 \text{ и } q_i \ge 2,\ i = 1, \ldots, d, \tag{30}$$

а величины q *и* r *фигурируют в формуле* (25). *Для* $i = 1, \ldots, d$ *положим*

$$b_i = \frac{q_i a_i - 1}{a_i - 1/2}, \quad b = \max_{1 \le i \le d}(b_i) \quad \text{и} \quad k = \#\{i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le d : b_i = b\} - 1. \tag{31}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$b_1 \le \cdots \le b_{d-k-1} < b_{d-k} = \cdots = b_d, \tag{32}$$

где $k \ge 0$. *Пусть семейство* $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d}$, *состоящее из н.о.р. случайных величин, таково, что выполнены условия* (26) *и* $\mathsf{E}X_{\mathbf{1}}^2 = 1$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varepsilon^{b_d}}{|\log \varepsilon|^k} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\mathbf{d}}} \langle \mathbf{n}^{\mathbf{qa-2}} \rangle \ \mathsf{P}(|S_{\mathbf{n}}| > \varepsilon \langle \mathbf{n}^{\mathbf{a}} \rangle) = D_{\mathbf{a},\mathbf{q}}, \tag{33}$$

где

$$D_{\mathbf{a},\mathbf{q}} = \frac{\mathsf{E}|N|^{b_d} \prod_{i=1}^{d-k-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{(a_i - 1/2)(b_i - b_d) - 1} \right)}{k! b_d (a_{d-k} - 1/2) \ldots (a_d - 1/2)}.$$

Всюду произведение по пустому множеству полагаем равным единице.

Обратимся теперь к результату, аналогичному теореме Баума - Каца, в котором конечные суммы случайных величин заменяются на суммы бесконечного числа слагаемых с некоторыми весами.

Рассмотрим класс Φ всех функций $\phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, непрерывных на $\mathbb{R}$, симметричных, невозрастающих на $[0, \infty)$ и принадлежащих $L_2(\mathbb{R})$. Всюду в работе, если рассматривается пространство L_2 на $\mathbb{R}$ и явно не указывается мера, то мера предполагается лебеговой. Для любой функции $\phi(.)$ из класса Φ будем обозначать $||\phi||$ ее норму в $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема (Х.Ланцингер и У.Штадтмюллер)[18] *Пусть последовательность н.о.р. случайных величин* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *такова, что для некоторого* $q \ge 2$ *вы-*

[18] H. Lanzinger, U.Stadtmuller. Refined Baum-Katz laws for weighted sums of i.i.d. random variables. // Statistics and Probability Letters 2004, vol. 69, pp. 357-368.

полнены соотношения $\mathsf{E}|X_0|^q < \infty$, $\mathsf{E}X_0^2 = 1$, $\mathsf{E}X_0 = 0$ *и задана некоторая функция* $\phi \in \Phi$. *Пусть также заданы действительные числа* r *и* s, *удовлетворяющие условиям* $0 < s \le 1$ *и* $r > -s/2$. *Тогда для*

$$T_n = \frac{1}{n^s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(k/n^s) X_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{\varepsilon}{||\phi||} \right)^{\frac{q(r+s)-s}{r+s/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{q(r+s)-s-1} \mathsf{P}(|T_n| > \varepsilon n^r) = D_{q;r,s}, \tag{34}$$

где

$$D_{q;r,s} = \frac{\mathsf{E}(|N|^{\frac{q(r+s)-s}{r+s/2}})}{q(r+s)-s}.$$

Наш следующий результат обобщает эту теорему на случай мультииндексированных сумм.

Теорема 2.1.3. *Пусть зафиксировано натуральное* $d \ge 1$. *Пусть последовательность н.о.р. случайных величин* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *такова, что для некоторого* $q \ge 2$ *выполнены условия* $\mathsf{E}|X_0|^q (\log^+ |X_0|)^{d-1} < \infty$, $\mathsf{E}X_0^2 = 1$, $\mathsf{E}X_0 = 0$ *и задана некоторая функция* $\phi \in \Phi$. *Пусть также заданы векторы* $\mathbf{s}$ *и* $\mathbf{r}$ *из* $\mathbb{R}^d$, *причем* $\mathbf{0} < \mathbf{s} \le \mathbf{1}$, $\mathbf{r} > -\mathbf{s}/2$. *Обозначим*

$$\mathbf{b} = \frac{q(\mathbf{r}+\mathbf{s})-\mathbf{s}}{\mathbf{r}+\mathbf{s}/2}, \; b = \max_{1 \le i \le d}(b_i) \quad \textit{и} \quad k = \#\{i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le d : b_i = b\} - 1,$$

причем без ограничения общности считаем, что имеет место (32). *Тогда для*

$$T_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\langle \mathbf{n}^{\mathbf{s}} \rangle} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{k}{\langle \mathbf{n}^{\mathbf{s}} \rangle} \right) X_k, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d,$$

справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{\varepsilon}{||\phi||} \right)^{b_d} \frac{1}{|\log \varepsilon|^k} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \langle \mathbf{n}^{q(\mathbf{r}+\mathbf{s})-\mathbf{s}-\mathbf{1}} \rangle \mathsf{P}(|T_{\mathbf{n}}| > \varepsilon \langle \mathbf{n}^{\mathbf{r}} \rangle) = D_{q;\mathbf{r},\mathbf{s}}, \tag{35}$$

где

$$D_{q;\mathbf{r},\mathbf{s}} = \frac{\mathsf{E}|N|^{b_d} \prod\limits_{i=1}^{d-k-1} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{(r_i+s_i/2)(b_i-b_d)-1} \right)}{k! b_d (r_{d-k} + s_{d-k}/2) \ldots (r_d + s_d/2)}.$$

Заключительный раздел диссертации посвящен обобщению теоремы Баума - Каца для мультииндексированных слагаемых на случай неполиномиальных весов. Рассматривается еще один из способов, которым можно охарактеризовать сходимость нормированных сумм случайных величин к их математическому ожиданию.

Введем необходимые определения и обозначения.

Пусть функция Φ, определенная на $[0, +\infty)$, неотрицательная и неубывающая на всей области определения, удовлетворяет условиям:

1) $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = +\infty$,

2) $\exists\ C > 0$ такое, что для любого $x > 0$ справедливо неравенство

$$\Phi(2x) < C\Phi(x).$$

Такую функцию Φ назовем *умеренно возрастающей.*

Зафиксируем любое натуральное d и произвольное семейство случайных величин $\{Y_\mathbf{n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}$. Введем случайную величину

$$L_{d;\varepsilon}(\{Y_\mathbf{n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}; x) = \sup\left(\{0\} \cup \{\langle\mathbf{n}\rangle : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d, |Y_\mathbf{n} - x| > \varepsilon\}\right).$$

Следующее определение было использовано Д.Пио[19] для последовательности случайных величин.

Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $\{Y_\mathbf{n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}$ – произвольное семейство случайных величин. Пусть также Φ – умеренно возрастающая функция, а x – действительное число. Будем говорить, что семейство $\{Y_\mathbf{n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}$ Φ - *сходится* к x, если

$$\mathsf{E}\Phi\left(L_{d,\varepsilon}(\{Y_\mathbf{n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}; x)\right) < \infty.$$

[19] Piau D. Maximal generalization of Baum-Katz theorm and optimality sequential tests. // Prépublication du Laboratiore de Probabilité Statistique et Combinatoire, 2000, Université Claude Bernard, Lyon – 1. (http://arxiv.org/abs/math/0510043)

Приведем теперь результат, вовлекающий понятие Φ - сходимости, и являющийся естественным обобщением теоремы Баума - Каца.

Теорема (Д.Пио)[19] *Пусть последовательность* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *н.о.р. случайных величин такова, что* $\mathsf{E}|X_1| < \infty$ *и* $\mathsf{E}X_1 = 0$. *Пусть также* Φ *– умеренно возрастающая функция. Тогда следующие условия эквивалентны:*

$$\mathsf{E}|X_1|\Phi(|X_1|) < \infty, \tag{36}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\Phi(n)}{n}\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0, \tag{37}$$

$$\mathsf{E}\Phi(L_{1,\varepsilon}(\{S_n/n\}_{n\in\mathbb{N}};0)) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0. \tag{38}$$

Последняя теорема главы 2 диссертации дает обобщение предыдущего результата на тот случай, когда вместо последовательности случайных величин рассматривается мультииндексированное семейство.

Теорема 2.4.2. *Пусть задано* $d \in \mathbb{N}$ *и семейство* $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}$ *н.о.р. случайных величин таково, что*

$$\mathsf{E}|X_{\mathbf{1}}|(\log^+|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1} < \infty \text{ и } \mathsf{E}X_{\mathbf{1}} = 0. \tag{39}$$

Пусть Φ *– умеренно возрастающая функция. Тогда следующие условия эквивалентны:*

$$\mathsf{E}|X_{\mathbf{1}}|(\log^+(|X_{\mathbf{1}}|))^{d-1}\Phi(|X_{\mathbf{1}}|) < \infty, \tag{40}$$

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{\Phi(\langle\mathbf{n}\rangle)}{\langle\mathbf{n}\rangle}\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{\mathbf{n}}}{\langle\mathbf{n}\rangle}\right| \geq \varepsilon\right) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0, \tag{41}$$

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ такое, что } \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{\Phi(\langle\mathbf{n}\rangle)}{\langle\mathbf{n}\rangle}\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{\mathbf{n}}}{\langle\mathbf{n}\rangle}\right| \geq \varepsilon\right) < \infty, \tag{42}$$

$$\mathsf{E}\Phi(L_{d,\varepsilon}(\{S_{\mathbf{n}}/\langle\mathbf{n}\rangle\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d};0)) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0, \tag{43}$$

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ такое, что } \mathsf{E}\Phi(L_{d,\varepsilon}(\{S_{\mathbf{n}}/\langle\mathbf{n}\rangle\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d};0)) < \infty. \tag{44}$$

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю – профессору А.В.Булинскому за большую помощь в подготовке работы и постоянное внимание.

Работы автора по теме диссертации

[1] Дильман С.В. Асимптотика в формуле Баума-Каца для случайных полей. // Математические заметки 2006, том 72, №5, стр. 674-680.

[2] Дильман С.В. Обращение обобщенной теоремы Хартмана-Винтнера. // Вестн. Моск. ун-та. сер.1, математика. механика. 2003, №6, стр. 56-58.

[3] Булинский А.В., Дильман С.В. Универсальная нормировка в законе повторного логарифма. // Успехи матем. наук. 2002, том 57, №2, стр. 193-194.

А.В.Булинскому принадлежит постановка задачи об универсальных нормировках и схема использования в доказательстве нормальной аппроксимации. С.В.Дильману принадлежит построение и анализ свойств различных вспомогательных последовательностей случайных величин и выбор соответствующих им нормировок.

[4] Dilman S.V. The asymptotics in the Baum-Katz formula for multidimensionally indexed random variables. // Abstracts of 14-th European Young Statisticians Meeting, Budapest, 2005, p. 11.

[5] Дильман С.В. Уточнение закона повторного логарифма для геометрически взвешенных рядов. // Тезисы XXVI-й конференции молодых ученых механико-математического ф-та МГУ, Москва, 2004, стр. 26.

[6] Bulinski A.V., Dilman S.V. Some generalizations of the Hartmann-Wintner theorem. Abstracts of the International Gnedenko 90-th Anniversary Conference, Kiev, 2002, p. 11.