МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Научно-исследовательский институт механики

На правах рукописи

Майлыбаев Алексей Абаевич

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва – 2006

Работа выполнена в лаборатории механики природных процессов Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный консультант:

доктор физико–математических наук
Сейранян Александр Паруйрович

Официальные оппоненты:

доктор физико–математических наук, профессор
Агафонов Сергей Алексеевич

доктор физико–математических наук, профессор
Голубев Юрий Филиппович

член-корреспондент РАН, профессор
Леонов Геннадий Алексеевич

Ведущая организация:

Институт проблем механики РАН

Защита диссертации состоится 23 марта 2007 года в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при МГУ им. М.В. Ломоносова по адресу:
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ,
механико-математический факультет, аудитория 16–10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан ____________ 2007 года

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент

В.А. Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена развитию многопараметрических методов теории устойчивости с приложениями к задачам механики. Всякая физическая система содержит параметры, и основной целью настоящей диссертации является исследование того, как устойчивое положение равновесия или стационарное движение становится неустойчивым, или наоборот, при изменении многих параметров. В многопараметрических задачах устойчивости пространство параметров разбивается на области устойчивости и неустойчивости для конкретного положения равновесия или стационарного режима. Таким образом, актуальным является анализ границы между этими областями – границы области устойчивости.

Как известно, граница области устойчивости состоит из гладких поверхностей, но может иметь разного рода особенности. Классификация типичных особенностей границы области устойчивости для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от двух или трех параметров, была проведена В.И.Арнольдом (1972). Возникновение особенностей на границах областей устойчивости во многих случаях связано с недифференцируемым поведением собственных значений в зависимости от параметров в окрестности точек кратности. В прикладном аспекте актуально перенести качественные результаты теории особенностей и катастроф в пространство параметров задачи, тем самым сделав эту теорию также количественной, то есть конструктивной и практичной.

В связи с этим возникает ряд общих актуальных вопросов. Каковы законы движения собственных значений на комплексной плоскости при изменении параметров задачи? Каковы соотношения между собственными значениями и свойствами границы области устойчивости в пространстве параметров? Каковы особенности поведения механических систем со свойствами симметрии, таких как гироскопические и консервативные системы? Как устроена граница области устойчивости в случае периодических систем и как исследовать ее особенности? Какие механические эффекты связаны с возникновением особенностей на границах областей устойчивости?

Именно этим вопросам и задачам посвящена диссертация. В ней развиты аналитические и численные методы, позволяющие конструктивно проводить многопараметрический анализ области устойчивости в окрестности регулярных и особых точек ее границы. Описываются свойства и структура областей устойчивости и их границ для систем различного вида: консервативных и неконсервативных, автономных и периодических. Решается ряд конкретных задач об устойчивости и параметрическом резонансе механических систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы. Дается новое объяснение ряду механических эффектов и парадоксов в терминах теории особенностей и катастроф. Наконец, приводятся результаты экспериментов по параметрическому резонансу, подтверждающие эффективность разработанных методик.

Целью диссертации является создание аналитических и численных методов многопараметрического анализа границ областей устойчивости для консервативных и неконсервативных, автономных и периодических динамических систем, описание механических эффектов, связанных с особенностями границ областей устойчивости, решение задач об устойчивости и параметрическом резонансе для конкретных механических систем, а также экспериментальное подтверждение полученных результатов.

Основные результаты и их научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- Развиты аналитические и численные методы анализа бифуркаций кратных собственных значений матриц, зависящих от многих параметров. Разработан метод численного определения кратных собственных значений с жордановыми клетками в многопараметрических семействах матриц.

- Получены асимптотические выражения, локально описывающие область устойчивости в окрестности регулярных и особых точек границы для механических систем различного типа: неконсервативных, потенциальных, гамильтоновых и периодических. Дана классификация особенностей границ областей устойчивости для потенциальных, гамильтоновых и периодических систем.

- Получены новые асимптотические формулы для областей параметрического резонанса для систем с большим числом степеней свободы, зависящих от трех параметров: параметра диссипативных сил, амплитуды и частоты параметрического возбуждения.

- Проведен общий многопараметрический анализ устойчивости при резонансе между критической частотой флаттера автономной неконсервативной системы и частотой параметрического возбуждения.

- Показано, что парадокс дестабилизации неконсервативной системы малыми диссипативными силами (парадокс Циглера) связан с особенностью типа “тупик на ребре” на границе области устойчивости.

- Выявлена связь бимодальных решений в оптимизации упругих конструкций по критерию устойчивости с конической особенностью на границе области устойчивости.

- Решены задачи об устойчивости механических систем, в которых ключевую роль играют особенности на границе области устойчивости. К ним относятся задача о гироскопической стабилизации вращающейся системы упруго сочлененных тел, задача В.В.Болотина о комбинационном резонансе изгибно-крутильных колебаний балки под действием периодических моментов, задача о параметрическом резонансе и оптимизации балок переменного сечения под действием периодических осевых нагрузок, задача о резонансе упругой консольной трубы, проводящей пульсирующую жидкость.

- Проведены экспериментальные исследования параметрического резонанса балок постоянного и переменного сечения.

Методы исследования. В диссертации используются методы возмущений кратных собственных значений, развитые М.И. Вишиком, Л.А. Люстерником (1960) и В.Б. Лидским (1966), и способ их применения в многопараметрическом случае, предложенный А.П. Сейраняном (1990), качественные методы теории версальных деформаций, разработанные В.И. Арнольдом (1971). Развиваются конструктивные аналитические и численные методы теории бифуркаций кратных собственных значений, теории версальных деформаций, а также методы определения и аппроксимации особенностей на границах областей устойчивости.

Достоверность. Результаты диссертации строго математически и физически обоснованы. Исследования по параметрическому резонансу получили экспериментальное подтверждение.

Практическая ценность. Полученные результаты могут быть применены при проектировании и оптимизации широкого класса механических и физических систем, подверженных явлениям статической и динамической неустойчивости и параметрического резонанса, например, летательных аппаратов, изделий машиностроения, строительных сооружений, электрических сетей и т.д. Результаты диссертации вошли в спецкурс кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ и монографию по многопараметрической теории устойчивости с приложениями в механике.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на всероссийских и международных конгрессах, конференциях и симпозиумах: Международных конгрессах по структурной и междисциплинарной оптимизации (Закопане, Польша, 1997; Буффало, США, 1999), Всероссийской конференции с международным участием "Проблемы небесной механики" (Санкт-Петербург, 1997), VII Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением" (Казань, 1997), Международных математических конгрессах (Берлин, 1998; Пекин, 2002), Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина (Москва, 1998), Симпозиуме AIAA/USAF/NASA/ISSMO по междисциплинарному анализу и оптимизации (Сент-Луис, США, 1998), Международном симпозиуме "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" (Москва, 1999), Конференции "Современные проблемы механики", посвященной 40-летию Института механики МГУ (Москва, 1999), Всероссийской конференции, посвященной 40-летию со дня основания кафедры "Аэрокосмические системы" МГТУ им.

Н.Э. Баумана (Москва, 2000), Международных конференциях по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2000 и 2006), Европейских математических конгрессах (Барселона, 2000; Стокгольм, 2004), Международных конгрессах IUTAM по теоретической и прикладной механике (Чикаго, 2000; Варшава, 2004), Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной И.Г.Петровскому (Москва, 2001), Конференции MIT по вычислительной механике жидкости и твердого тела (Кембридж, США, 2001), Международной школе по динамическим и управляемым системам (Суздаль, 2001), Всероссийских съездах по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2002; Нижний Новгород, 2006), Международной конференции "Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания" (Обнинск, 2002), Летней школе "Современные проблемы механики" (Санкт-Петербург, 2002), Международной конференции по уравнениям в частных производных: теория, вычисления и приложения (Рио-де-Жанейро, 2003 – приглашенный доклад), Международных научных конференциях по механике "Поляховские чтения" (Санкт-Петербург, 2003 и 2006 – пленарный доклад), Международных конференциях "Физика и управление" (Санкт-Петербург, 2003 и 2005), VI Международном конгрессе по вычислительной механике (Пекин, 2004), Международной школе "Хаотические автоколебания и образование структур" (Саратов, 2004), Международной конференции по несамосопряженным гамильтонианам в физике (Стамбул, 2005 – пленарный доклад), Конференции EUROMECH по нелинейной динамике (Эйндховен, Нидерланды, 2005).

Результаты диссертации также докладывались на научных семинарах в России: на семинарах механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова под руководством академика В.И.Арнольда, академика Н.С.Бахвалова, академика А.Ю.Ишлинского, академика В.В.Козлова, академика В.В.Румянцева, академика В.А. Садовничего, академика А.Т.Фоменко, чл.-корр.РАН В.В.Белецкого и проф. Ю.Ф. Голубева, проф. В.В. Александрова, проф. Н.Х.Розова, проф. Б.Е.Победри, проф. А.А.Шкаликова, на семинарах Института проблем механики РАН под руководством академика Ф.Л.Черноусько и академика Д.М. Климова, на семинаре Московского физико-технического института под руководством проф. В.Б.Лидского, на семинаре Института проблем машиноведения РАН под руководством академика К.В.Фролова, на семинаре Института вычислительной математики РАН под руководством проф. Е.Е.Тыртышникова и на семинаре Саратовского государственного университета под руководством проф. В.С. Анищенко. А также за рубежом: в Датском техническом университете на семинаре под руководством проф. П.Педерсена, на семинаре факультета прикладной математики Политехнического университета Каталонии (Барселона, Испания), в Университете префектуры г.Осака на семинаре под руководством проф. Й.Сугиямы (Япония), в Университете г.Цукуба на семинаре под руководством проф. Х.Ябуно (Япония), в Университете г.Саппоро на семинаре под руководством проф. Ш.Изумия (Япония), в Даляньском техническом университете на семинаре под руководством академика Г.Ченга (Далянь, Китай) и в Массачусетском технологическом институте на семинаре под руководством проф. А.Эдельмана (Кембридж, США).

Премии: Работа [10] была отмечена второй премией Всероссийского конкурса молодых ученых по механике и процессам управления, посвященного 100-летию А.И. Лурье (2001г.), работа [12] получила премию издательства “Elsevier” за лучшую статью, опубликованную в журнале “Прикладная математика и механика” (2002г.), а работа [28] – премию Европейского общества по механике (EUROMECH) за лучшую работу молодого ученого на Международной конференции по нелинейной динамике (2005г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в монографии (издательство World Scientific) и 28 статьях (из них 25 – в рецензируемых отечественных и международных журналах). В совместных работах с А.П. Сейраняном, С.С. Григоряном, Х. Ябуно и Х. Канеко авторы внесли равный вклад и несут равную ответственность за полученные результаты.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 281 страницу. Она содержит 78 рисунков и 3 таблицы. Список литературы включает 253 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации. Приведен обзор литературы, касающийся вопросов поведения собственных значений многопараметрических систем в окрестности точек кратности, методов и приложений теории версальных деформаций матриц, методов анализа границ областей устойчивости и их особенностей, роли этих особенностей в поведении механических систем, методов теории параметрического резонанса и некоторых близких к теме работы приложений в теории управления. Указаны основные цели работы, кратко изложена структура диссертации, охарактеризована ее научная новизна, а также научная и практическая значимость, сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

Глава 1. Бифуркации собственных значений

В первой главе разрабатывается теория бифуркаций собственных значений матриц, гладко зависящих от параметров. Результаты этой главы составляют методологическую основу работы и используются далее во всех частях диссертации.

В §1 приводятся формулы для производных любого порядка от простого собственного значения и собственного вектора по параметрам. §2 и §3 посвящены многопараметрическому анализу бифуркации кратного собственного значения с жордановой клеткой. Здесь используется метод, основанный на анализе собственных значений и собственных векторов при возмущении вдоль гладкой кривой в пространстве параметров $\mathbf{p}(\varepsilon)$ с малым вещественным параметром возмущения ε. Предполагается, что вектор параметров $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ отвечает матрице с кратным собственным значением. Данный подход позволяет свести задачу к однопараметрической для отдельной кривой, характеризуемой начальным направлением $\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{p}}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}$ и производными более высоких порядков.

Возмущения кратных собственных значений при наличии малого параметра ε исследовались М.И. Вишиком, Л.А. Люстерником (1960) и В.Б. Лидским (1966) в невырожденном случае. Наличие же многих параметров приводит к тому, что вдоль отдельных кривых нарушаются условия невырожденности. Эти вырождения типичны и имеют особое значение с точки зрения теории устойчивости. В главах 2 и 3 показано, что возмущения параметров, стабилизирующие динамическую систему, могут определяться вырожденными направлениями. В §2 и §3 в многопараметрической постановке наряду с невырожденными случаями рассмотрены основные виды вырождений. Основная трудность анализа связана с недифференцируемостью собственных значений по параметрам в точках кратности. Это приводит к асимптотическим разложениям по дробным степеням ε, причем дробные показатели степеней зависят от типа вырождения. В §3 подробно рассматривается важный случай двукратного собственного значения с жордановой клеткой.

В §4 проводится аналогичное исследование для полупростого собственного значения, которому отвечает число линейно независимых собственных векторов равное его алгебраической кратности. В §5 подробно рассматривается случай полупростого двукратного собственного значения.

При высокой кратности собственного значения анализ возмущений вдоль кривых в пространстве параметров существенно усложняется. Это связано с увеличением числа различных "существенных" вырождений. В этом случае полезными оказываются методы теории версальных деформаций (нормальных форм), часто используемые при качественном анализе в теории особенностей. В §6 и §7 разрабатывается подход, позволяющий использовать эти методы для количественного анализа кратных собственных значений. В §6 анализ кратных корней полиномов проводится при помощи подготовительной теоремы Вейерштрасса, а для анализа кратных собственных значений матриц в §7 используется теория версальных деформаций матриц В.И. Арнольда (1971). Научное содержание §6 и §7 состоит в развитии конструктивных методов, позволяющих находить преобразования исходного многопараметрического семейства матриц или характеристических полиномов к нормальной форме вблизи точек с кратными собственными значениями. В дальнейшем это позволило применить методы теории версальных деформаций к количественному многопараметрическому анализу устойчивости. Заметим, что ранее данные методы использовались преимущественно для качественного анализа.

Для приложения полученных в главе 1 результатов необходимо развитие численных методов определения значений параметров задачи, при которых возникает кратное собственное значение того или иного типа. Трудности определения этих значений, как уже отмечалось выше, связаны с негладкостью собственных значений в точках кратности. Дополнительной трудностью является необходимость работать в пространстве параметров, а не в пространстве матриц, как это обычно делалось в численных методах линейной алгебры. В §8 разработан численный метод определения кратных собственных значений в многопараметрических семействах матриц. При помощи этого метода определяются значения вектора параметров, при которых возникает кратное собственное значение, само собственное значение и соответствующие векторы цепочки Жордана. Рассмотрен случай кратных собственных значений, которым отвечает одна цепочка Жордана. Этот случай наиболее типичен для семейств несимметрических матриц. Метод основан на теории версальных деформаций, при помощи которой удалось построить линейную аппроксимацию искомых величин. Далее эта аппроксимация используется в методе Ньютона для нахождения точных значений. Разработанный численный метод реализован в виде набора процедур в пакете MATLAB.

Глава 2. Особенности границ областей устойчивости автономных систем

Данная глава посвящена анализу границ областей устойчивости динамических систем общего вида. Задача об определении области асимптотической устойчивости в пространстве параметров сводится к анализу спектра линеаризованной системы, т.е. к определению собственных значений матрицы, зависящей от параметров.

В §1 приводятся общие результаты теории особенностей, позволяющие выделить случаи общего положения при многопараметрическом исследовании устойчивости. В §§2–4 развиваются количественные методы анализа области устойчивости в окрестности регулярных и особых точек ее границы. Подробно рассмотрены особенности, возникающие на границах областей устойчивости в двух и трехпараметрических системах. Многие особые точки на границе устойчивости связаны с возникновением кратных собственных значений, лежащих на мнимой оси. Это определяет особый (недифференцируемый) характер поведения собственных значений при изменении параметров, что в конечном счете отражается на сингулярной форме области устойчивости. Используя результаты главы 1, выводятся асимптотические формулы, позволяющие определить область устойчивости и ее границу в окрестности особенности каждого типа. Конструктивность полученных формул определяется тем, что для их использования требуется лишь информация о системе в точке особенности: производные матрицы системы по параметрам, собственные и присоединенные векторы.

В §5 на примере двухзвенного маятника под действием следящей силы показано, что эффект дестабилизации неконсервативной системы малыми диссипативными силами (парадокс Г.Циглера, 1952) может быть объяснен в терминах особенностей границы области устойчивости. Показано, что граница области устойчивости системы в пространстве трех параметров (величина следящей силы p и два коэффициента вязкого трения в шарнирах γ_1 и γ_2) имеет особенность типа "ребро" с окончанием в точке особенности "тупик на ребре" p_0. Эти особенности лежат на оси следящей силы p, т.е. отвечают системе без диссипации, рис. 1. Геометрия области устойчивости в окрестности особенности "тупик на ребре" определяется из общей теории, приведенной в §§1–4. Геометрические свойства данной особенности приводят к таким эффектам, как скачок (резкое уменьшение) критической нагрузки при

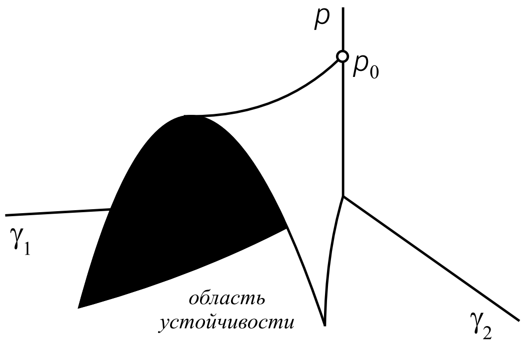

Рис. 1: Особенность "тупик на ребре" на границе области устойчивости иллюстрирует парадокс дестабилизации Г.Циглера.

введении сколь угодно малого демпфирования и отсутствие предела критической нагрузки при стремлении параметров диссипации к нулю.

В §6 дается обобщение полученных результатов на случай особенностей произвольной коразмерности для систем с произвольным числом параметров. Приводятся явные асимптотические формулы, определяющие область устойчивости в окрестности особых точек ее границы. Эти результаты получены методами теории версальных деформаций, разработанными в §6 и §7 главы 1.

Глава 3. Границы областей устойчивости консервативных систем

В третьей главе исследуются границы областей устойчивости консервативных систем. В §1 рассматриваются колебательные системы с потенциальными силами. Положение равновесия такой системы устойчиво при условии, что функция потенциальной энергии имеет в данной точке минимум. При помощи анализа возмущений простых и кратных частот колебаний описывается регулярная часть границы области устойчивости и классифицируются ее особенности. В частности показано, что в случае общего положения граница области устойчивости двухпараметрической системы не имеет особенностей, а единственной особенностью в случае трех параметров является конус. Выводятся формулы, позволяющие определять область устойчивости в окрестности произвольной регулярной или особой точки ее границы по собственным векторам и производным функции потенциальной энергии, вычисленным в рассматриваемой точке.

В §2 исследуется устойчивость упругого составного стержня, нагруженного продольной силой F. Стержень состоит из четырех звеньев равной длины, соединенных упругими шарнирами с различными коэффициентами жесткости a_i^2 (конечномерная модель упругого стержня переменного сечения). При определенном выборе коэффициентов жесткости критическая нагрузка является бимодальной, т.е. одной и той же критической силе отвечают две линейно независимые формы потери устойчивости. При ограничении на жесткость системы (условии, аналогичном постоянству объема стержня) бимодальное решение соответствует максимуму критической силы как функции коэффициентов жесткости, т.е. бимодальное решение является оптимальным. Оптимальность бимодальных решений определяется геометрией конической особенности границы области устойчивости, рис. 2. Этот эффект, очевидно, является общим, что и объясняет естественность оптимальных упругих конструкций с бимодальными критическими нагрузками. В течение последних 30 лет решения такого типа были найдены разными авторами в различных механических системах.

§3 посвящен исследованию границ областей устойчиво-

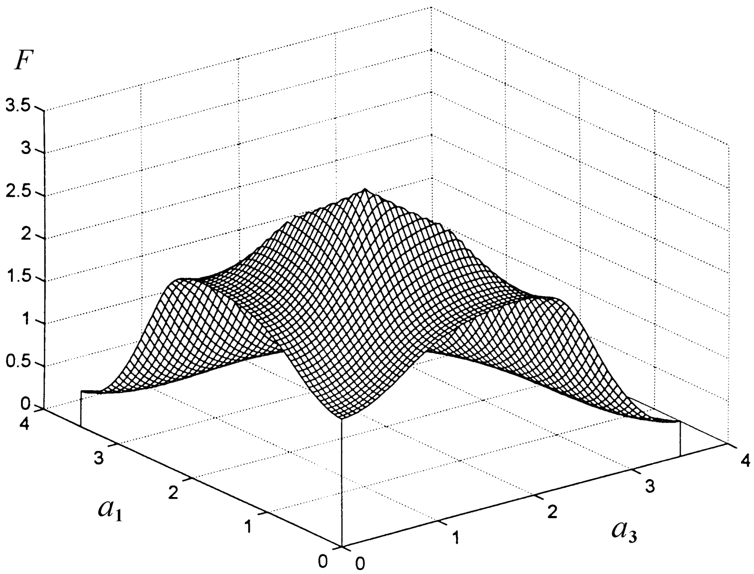

Рис. 2: Коническая особенность в точке максимума критической нагрузки (бимодальное решение).

сти линейных гамильтоновых систем. Дается классификация особенностей общего положения на границах областей устойчивости в случае систем с двумя и тремя параметрами. Классификация проводится с использованием версальных деформаций гамильтоновых матриц, полученных Д.М. Галиным (1975). Далее выводятся конструктивные формулы, позволяющие находить область устойчивости в окрестности произвольной (регулярной или особой) точки границы. Гамильтоновы системы отличаются довольно большим числом типов особенностей и высокими кратностями собственных значений, определяющих особые точки, рис. 3. Так, в случае общего положения максимальная кратность собственного значения в точке на границе области устойчивости трехпараметрической системы равна шести (особенность типа “трехгранный шпиль” 0^6).

В §4 рассматриваются две механические задачи. В задаче об устойчивости упругой шарнирно опертой трубы, проводящей жидкость, исследована область гироскопической стабилизации. На границе этой области имеется особенность типа точки возврата. Вторая задача связана с вращением в поле силы тяжести системы, состоящей из тяжелого диска, соединенного с ротором при помощи двух стержней. Система является статически неустойчивой, но может быть стабилизирована вращением (гироскопическая стабилизация). Показано, что в пространстве трех параметров (частоты вращения и коэффициентов упругой податливости двух шаровых шарниров) область гироскопической стабилизации имеет особенность типа “трехгранный шпиль” $(\pm i\omega)^4$ (последняя особенность, изображенная на рис. 3). Эта особенность отвечает резонансу, в котором все четыре частоты системы совпадают, образуя жорданову клетку. В обеих задачах геометрия особенности существенно влияет на процесс гироскопической стабилизации. Наличие особенности приводит к тому, что область гироскопической стабилизации является очень узкой. Общие результаты §3 существенно облегчают анализ границы такой области.

Глава 4. Многопараметрическая теория параметрического резонанса

В четвертой главе развиваются общие методы многопараметрического анализа устойчивости линейных систем с коэффициентами, периодически зависящими от времени. Устойчивость периодической системы определяется при помощи метода Флоке, требующего вычисления фундаментальной матрицы системы. Тогда асимптотическая устойчивость опре-

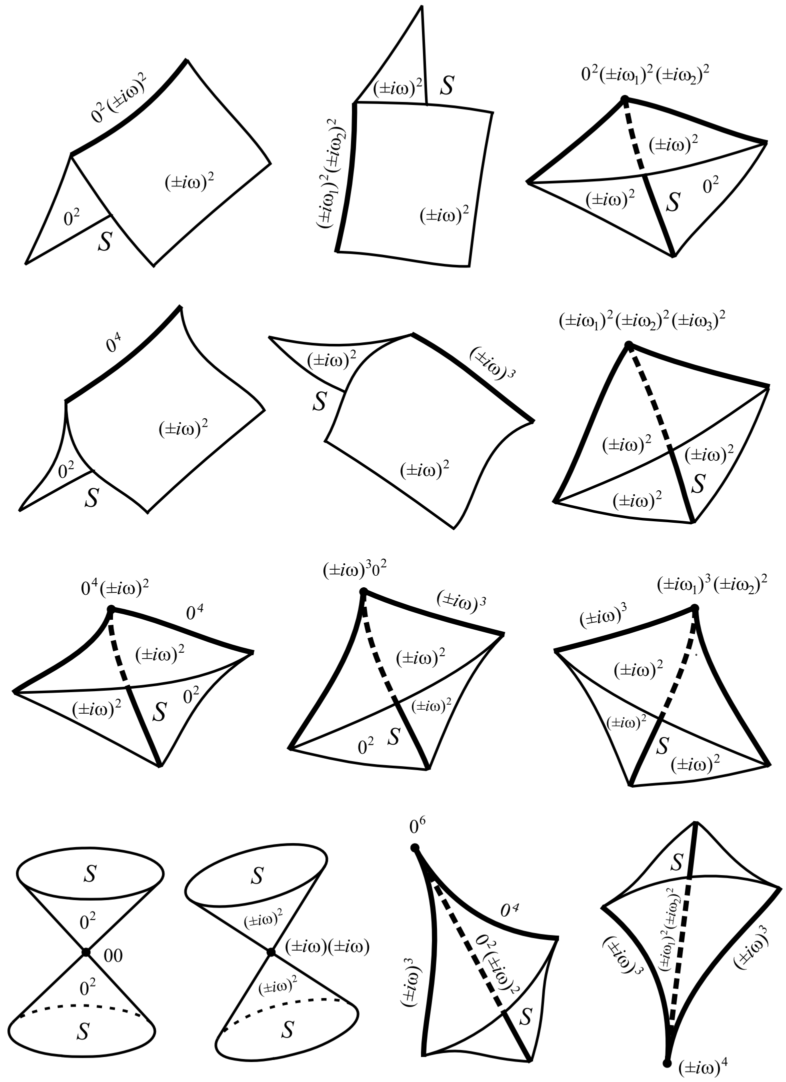

Рис. 3: Особенности общего положения на границе области устойчивости трехпараметрических гамильтоновых систем (“S” обозначает область устойчивости).

деляется условием $|\rho| < 1$ для всех мультипликаторов системы (собственных значений матрицы монодромии). Для вычисления производных матрицы монодромии по параметрам используются формулы, полученные в работе А.П.Сейраняна, Ф. Солема и П. Педерсена (1999).

В §1 выводятся формулы для производных по параметрам произвольного порядка для матрицы монодромии и ее мультипликаторов. Анализируются бифуркации кратных мультипликаторов при изменении параметров системы.

В §2 дается классификация особенностей на границе области устойчивости периодических систем в случае общего положения. Эти особенности геометрически аналогичны особенностям в случае автономных систем. Типы особых точек определяются перечислением собственных значений, лежащих на единичной окружности, и их жордановой структурой. Но в периодических системах имеются типы особых точек, существенно отличающиеся от случая автономных систем. Выводятся аппроксимации области устойчивости в окрестности регулярных и особых точек ее границы. В формулах для аппроксимаций требуется лишь информация о системе в рассматриваемой точке: производные матрицы системы по параметрам и времени, фундаментальная матрица, мультипликаторы, собственные и присоединенные векторы. Поскольку фундаментальная матрица обычно известна из анализа устойчивости в данной точке, предлагаемый подход позволяет эффективно определять локальную форму границы области устойчивости.

В §3 полученные результаты применяются к задаче об устойчивости упругой составной трубы, проводящей жидкость, для анализа влияния пульсаций на критическую среднюю скорость потока. Показано, как результаты §2 позволяют при существенно меньшем объеме численных расчетов (по сравнению с прямым применением метода Флоке) определять стабилизирующие направления в пространстве параметров.

В §4 рассматриваются колебательные системы с произвольным числом степеней свободы под действием малого параметрического возбуждения и при наличии малых диссипативных сил. Исследуется поведение мультипликаторов в окрестности точек простого и комбинационного резонансов (в точках резонанса возникают двукратные полупростые мультипликаторы). Выводятся общие формулы первого приближения для областей простого и комбинационного резонансов (областей неустойчивости) в невырожденном случае. Эти формулы записаны в терминах частот и форм собственных колебаний соответствующей невозмущенной консервативной системы. Для двух важных типов периодического возбуждения, определяемых скалярным периодическим множителем или симметрической матрицей возбуждения, области резонансов являются полуконусами в пространстве трех параметров: частоты и амплитуды параметрического возбуждения и параметра диссипации, рис. 4. Хорошо известные образы зон простого резонанса на плоскости частота–амплитуда возбуждения в системах без и при наличии диссипации являются вертикальными сечениями полуконуса плоскостью $\gamma = const$, ограниченными гиперболами. В случае комбинационного резонанса описан феномен дестабилизации малой диссипацией в терминах бифуркации кратного полупростого мультипликатора.

В §5 исследуется влияние малого периодического по времени возбуждения на устойчивость неконсервативной системы. Предполагается, что автономная система теряет устойчивость статическим (дивергенция) или динамическим (флаттер) способом. Выводятся формулы для аппроксимации границы области устойчивости при наличии малого периодического возбуждения. При этом считается, что система зависит от вектора постоянных параметров. Показано, что гра-

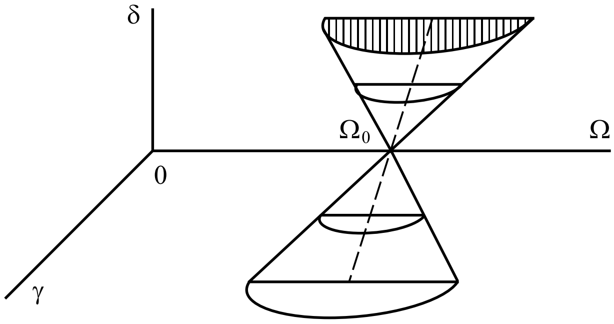

Рис. 4: Полуконус области параметрического резонанса в пространстве параметров.

ница области устойчивости является гладкой в случае дивергенции автономной системы, но может иметь особенности в случае флаттера. Особенности возникают в случае резонанса между частотой возбуждения Ω и частотой флаттера ω. Резонансное соотношение имеет вид $\Omega \approx 2\omega/k$ при целом $k > 0$. Это соотношение похоже на классическое условие простого параметрического резонанса колебательной системы, однако здесь ω – критическая частота флаттера системы, а не собственная частота колебаний.

Глава 5. Параметрический резонанс в механических системах

В пятой главе решаются задачи о параметрическом резонансе в конкретных механических системах. Рассматриваются бесконечномерные системы, которые методом Галеркина или методом конечных разностей сводятся к конечномерным.

В §1 решается задача о комбинационном резонансе для плоской формы балки под действием периодических моментов (задача В.В.Болотина). Изгибно-крутильные колебания балки описываются функциями, зависящими от продольной координаты и времени. В данной системе существенным является комбинационный резонанс, обусловленный взаимодействием изгибной и крутильной форм колебаний одного и того же тона. Используя результаты §4 главы 4, получена общая формула для зон комбинационного резонанса. Численные расчеты области резонанса, проведенные с помощью метода Флоке, хорошо согласуются с полученной асимптотической формулой.

В §2 исследуются колебания упругой балки переменного сечения, нагруженной периодической осевой силой. Рассматривается произвольный периодический закон изменения осевой силы и учитывается внешнее демпфирование. Выводятся общие формулы для зон простого и комбинационного резонансов в терминах собственных частот и мод свободных колебаний балки. Определяются критические значения амплитуды возбуждения и поправки к значениям соответствующих резонансных частот.

В §3 решается задача оптимизации формы балки по критериям параметрического резонанса. Рассматривается плоская балка переменной ширины и фиксированной массы под действием периодической осевой силы. Формулируются две задачи оптимизации: максимизация критической амплитуды силы и минимизация ширины области резонансных частот для заданной зоны резонанса. Показано, что эти задачи эквивалентны при условии малости амплитуды возбуждения и коэффициента внешнего демпфирования. Более того, оптимальное решение оказывается не зависящим от закона периодического изменения силы, коэффициента внешнего демпфирования и номера резонанса, однако существенно зависит от граничных условий. Разработан конструктивный метод оптимизации, в котором задача сводится к минимизации функционала, зависящего только от частот и мод свободных колебаний стержня. Таким образом, нет необходимости использовать метод Флоке в процессе оптимизации. Численно найдены оптимальные решения для шарнирно опертой балки и балок с граничными условиями упругой и жесткой заделки. Существенно, что предложенный метод может быть использован в других задачах оптимизации по критериям параметрического резонанса.

В §4 приводятся экспериментальные результаты по определению зон параметрического резонанса для однородного и оптимального шарнирно опертых стержней. Эксперименты проводились автором совместно с Х.Ябуно и Х.Канеко в лаборатории нелинейной динамики университета г.Цукуба (Япония). Форма оптимального стержня определяется решением, полученным в предыдущем параграфе. На рис. 5 изображены границы областей параметрического резонанса на плоскости: частота – амплитуда возбуждающей силы. Пустые и черные кружки обозначают экспериментальные данные для однородного и оптимального стержней, соответственно. Пунктирной и сплошной линиями показаны границы, полученные теоретически. Экспериментальные результаты свидетельствуют о хорошем совпадении с теорией.

В §5 исследуется влияние пульсаций жидкости на устойчивость упругой трубы. Труба консольно закреплена в вертикальном положении со свободным концом внизу. В случае постоянной скорости потока жидкости потеря устойчивости вертикального положения равновесия происходит динамическим способом (флаттер). Критическим является третий тон колебаний. Исследуются нерезонансный и резонансный режимы пульсаций скорости потока жидкости. При определенных значениях параметров системы показано, что в нерезонансном режиме пульсации стабилизируют систему: критическая средняя скорость потока возрастает (в главном члене – пропорционально квадрату амплитуды пульсаций).

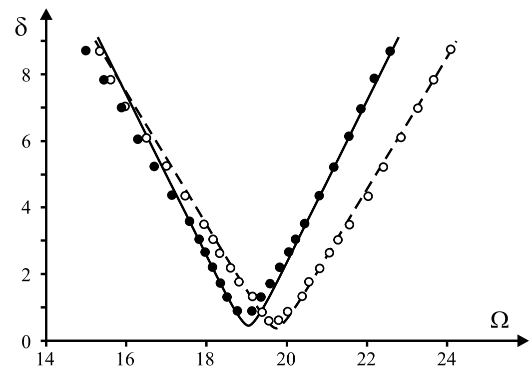

Рис. 5: Теоретические и экспериментальные границы зоны параметрического резонанса для однородного и оптимального стержней.

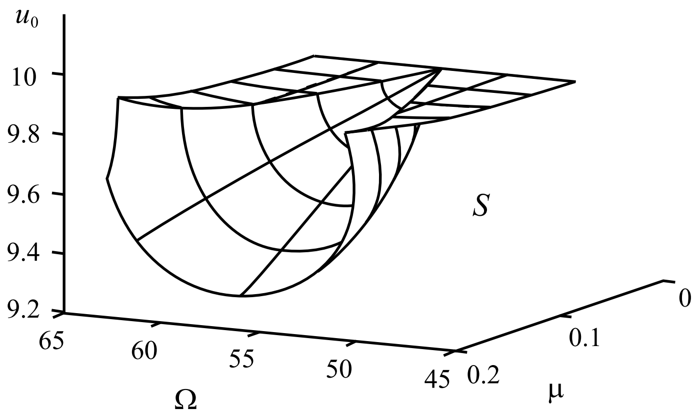

Рис. 6: Граница области устойчивости для трубы, проводящей жидкость, при резонансном режиме пульсаций скорости жидкости.

В случае резонанса между частотой пульсаций и критической частотой флаттера $\Omega \approx 2\omega$ наблюдается "провал" на границе области устойчивости, рис. 6 (параметры: частота Ω и амплитуда μ пульсаций и средняя скорость потока u_0; область устойчивости находится под изображенной поверхностью). При этом пульсации могут существенно понизить критическую среднюю скорость потока. Полуконическая особенность, которая реализуется в данном случае, подобна полуконусу области резонанса колебательной системы (рис. 5). Однако как физические параметры системы, так и сам резонансный эффект в данном случае – другие. В частности, резонанс в данной задаче возможен только на критическом тоне флаттера. При значениях средней скорости потока ниже критической скорости для автономной системы наблюдаются выпуклые области резонанса на плоскости: частота–амплитуда пульсаций (сечения конической части границы горизонтальной плоскостью $u_0 = const$). Это объясняет, почему в данной системе не наблюдаются области резонанса на первом тоне колебаний. Используя симметрию задачи, в §5 показано, что резонансный режим пульсаций всегда приводит к такой же особенности на границе области устойчивости с характерным провалом при частотах, близких к резонансным.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монография:

1. Seyranian A.P. and Mailybaev A.A. *Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications.* New Jersey: World Scientific, 2003. 420p.

Статьи:

2. Майлыбаев А.А. О касательных конусах к области устойчивости семейства действительных матриц. *Вестник Московского университета. Математика, механика.* 1998. Вып. 6. С. 51–54.

3. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Особенности границ областей устойчивости. *Прикладная математика и механика.* 1998. Т. 62. № 6. С. 984–995.

4. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Об особенностях границы области устойчивости. *Доклады РАН.* 1998. Т. 359. № 5. С. 632–636.

5. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. О границах областей устойчивости гамильтоновых систем. *Прикладная математика и механика.* 1999. Т. 63. № 4. С. 568–579.

6. Майлыбаев А.А. Приведение семейств матриц к нормальным формам и приложение к теории устойчивости. *Фундаментальная и прикладная математика.* 1999. Т. 5. № 4. С. 1111–1133.

7. Майлыбаев А.А. Метод приведения семейств матриц к нормальным формам. *Доклады РАН.* 1999. Т. 367. № 2. С. 168–172.

8. Сейранян А.П., Майлыбаев А.А. Об особенностях границ областей устойчивости гамильтоновых и гироскопических систем. *Доклады РАН.* 1999. Т. 365. № 6. С. 756–760.

9. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Об особенностях границ параметрического резонанса. *Доклады РАН.* 2000. Т. 373. № 5. С. 623–627.

10. Майлыбаев А.А. Об устойчивости полиномов, зависящих от параметров. *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2000. № 2. С. 5–12.

11. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. О границах области параметрического резонанса. *Прикладная математика и механика.* 2000. Т. 64. № 6. С. 947–962.

12. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Параметрический резонанс в системах с малой диссипацией. *Прикладная математика и механика.* 2001. Т. 65. № 5. С. 779–792.

13. Майлыбаев А.А. Вычисление кратных собственных значений и жордановых цепочек векторов для матриц, зависящих от параметров. *Доклады РАН.* 2001. Т. 379. № 2. С. 165–169.

14. Сейранян А.П., Майлыбаев А.А. Параметрический резонанс в системах с малой диссипацией. *Доклады РАН.* 2001. Т. 378. № 5. С. 633–638.

15. Григорян С.С., Майлыбаев А.А. О подготовительной теореме Вейерштрасса. *Математические заметки.* 2001. Т. 69. № 2. С. 194–199.

16. Сейранян А.П., Майлыбаев А.А. Трехмерные области параметрического резонанса. *Труды МИАН.* 2002. Т. 236. С. 304–317.

17. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Взаимодействие собственных значений при изменении параметров. *Доклады РАН.* 2003. Т. 393. № 5. С. 609–614.

18. Mailybaev A.A. and Seyranian A.P. Sensitivity analysis of eigenvalues and singularities of stability domains. *Proceedings of the 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium*

on Multidisciplinary Analysis and Optimization (St.Louis, USA). 1998. V. 3. P. 2166–2176.

19. Mailybaev A.A. Transformation of families of matrices to normal forms and its application to stability theory. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 1999. V. 21. No. 2. P. 396–417.

20. Mailybaev A.A. and Seyranian A.P. On singularities of a boundary of the stability domain. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 1999. V. 21. No. 1. P. 106–128.

21. Seyranian A.P. and Mailybaev A.A. Multimodal optimal solutions and singularities of stability boundary. *Proceedings of the 3nd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization* (Buffalo, USA). 1999. V. 3. P. 156–158.

22. Mailybaev A.A. and Seyranian A.P. Singularities of Stability Boundaries in Optimization Problems. *Proceedings of the II International Conference "Strength, Durability and Stability of Materials and Structures"* (Panevezys, Lithuania). 1999. P. 282–287.

23. Seyranian A.P. and Mailybaev A.A. On stability boundaries of conservative systems. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP).* 2001. V. 52. No. 4. P. 669–679.

24. Mailybaev A.A. Transformation to versal deformations of matrices. *Linear Algebra Appl.* 2001. V. 337. No. 1–3. P. 87–108.

25. Mailybaev A.A. and Seyranian A.P. Stability boundaries of linear periodic systems. *Proceedings of the 1st MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics* (Cam-

bridge, USA). 2001. V. 2. P. 1613–1616. Amsterdam: Elsevier, 2001.

26. Mailybaev A.A. On stability domains of nonconservative systems under small parametric excitation. *Acta Mechanica*. 2002. V. 154. No. 1–4. P. 11–33.

27. Seyranian A.P. and Mailybaev A.A. Interaction of eigenvalues in multi-parameter problems. *Journal of Sound and Vibration*. 2003. V. 267. P. 1047–1064.

28. Mailybaev A.A., Yabuno H. and Kaneko H. Optimal shapes of parametrically excited beams. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2004. V. 27. No. 6. P. 435–445.

29. Mailybaev A.A. Computation of multiple eigenvalues and generalized eigenvectors for matrices dependent on parameters. *Numerical Linear Algebra with Applications*. 2006. V. 13. P. 419–436.