

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Звягин Александр Васильевич

**Динамическое разрушение твердых сред при движении в них
жестких и деформируемых включений**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре газовой и волновой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор Ю.В. Петров

доктор физико-математических наук,
профессор Л. В. Никитин

доктор физико-математических наук,
профессор В. Д. Кулиев

Ведущая организация: Институт Проблем Механики РАН,
г. Москва

Защита состоится 8 июня 2007 года в 16 часов 20 мин. на заседании Диссертационного совета Д 501.001.91 по механике при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992 ГСП-2, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико – математический факультет, аудитория 16–10
Работа выполнена на кафедре газовой и волновой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан “ _____ ” _____ 2007 года.

Ученый секретарь
Диссертационного совета
доктор физико-математических наук

С. В. Шешенин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задачи разрушения и движения инородных включений в деформируемых твердых средах являются составной частью многих важных прикладных проблем. По исследуемым вопросам можно выделить задачи обработки материалов резанием, задачи внешней баллистики тел при проникании в деформируемые среды, теорию гидравлического разрыва сред. Не менее важной проблемой является задача сохранности проникающих тел. Поскольку перечисленные выше вопросы были постоянно востребованы практикой, то они являлись предметом исследований многих поколений ученых на разных этапах развития знаний по математике и механике.

Настоящая работа состоит из трех основных частей, связанных общей темой исследований – контактным разрушением деформируемой твердой среды инородными телами.

В первой части рассмотрены плоские задачи расклинивания или разрезания упругой среды конечным абсолютно твердым телом. В истоках постановки таких задач стоят работы Г. И. Баренблатта, Г. П. Черепанова (1960). Автомодельные решения для сверхзвукового движения клина и конуса получены А. Л. Павленко, Ж. Г. Апияном (1969, 1970). В этих работах в качестве расклинивающих объектов рассматривались полубесконечные тела, а в качестве разрушаемой среды – неограниченное упругое пространство. В настоящей работе аналитически исследована плоская задача движения твердого тела конечных размеров в неограниченной упругой среде и в упругом полупространстве со свободной поверхностью. Задача рассмотрена во всем диапазоне скоростей движения тела. Исследован вклад трения на поверхности контакта тела и среды.

Данный класс проблем сводится к решению стационарных задач теории упругости со смешанными граничными условиями. Места смены граничных условий для тел с гладким контуром также неизвестны и определяются при построении решения. В системе координат, связанной с движущимся телом, необходимо решить уравнения для потенциалов $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ соответственно продольных и поперечных волн

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad M_1 = \frac{V_0}{a}, \quad M_2 = \frac{V_0}{b} \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} = 0, \quad \sigma_{nr} = 0 & \text{ – равенство нулю вектора напряжений} \\ & \text{на участках свободной поверхности;} \\ V_n = V_{0n}, \quad \sigma_{nr} = -k\sigma_{nn} & \text{ – условие контакта и условие} \\ & \text{сухого трения на участках} \\ & \text{касания поверхности тела и среды.} \end{aligned} \quad (2)$$

В (1), (2) были использованы следующие обозначения:

$a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $b = \sqrt{\mu/\rho}$ – соответственно скорость продольных и скорость

поперечных волн; λ, μ – модули упругости; \vec{V} – вектор скорости среды; V_0 – величина скорости тела; $\vec{n}, \vec{\tau}$ – внешний нормальный и касательный единичные векторы к контуру поверхности; σ_{nn}, σ_{nt} – компоненты вектора напряжений на площадке с нормалью \vec{n} , k – коэффициент трения. Компоненты вектора скорости и тензора напряжений выражаются с помощью потенциалов:

$$\begin{aligned} V_x &= V_0(\varphi_{,xx} + \psi_{,xy}); & V_y &= V_0(\varphi_{,xy} - \psi_{,xx}); \\ \frac{\sigma_{xx}}{\mu} &= (n-2) \cdot \Delta\varphi + 2 \cdot (\varphi_{,xx} + \psi_{,xy}); \\ \frac{\sigma_{yy}}{\mu} &= (n-2) \cdot \Delta\varphi + 2 \cdot (\varphi_{,yy} - \psi_{,xy}); \\ \frac{\sigma_{xy}}{\mu} &= 2 \cdot \varphi_{,xy} + \psi_{,yy} - \psi_{,xx}, \end{aligned} \quad (3)$$

где μ – модуль сдвига, $n = a^2/b^2 = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$, ν – коэффициент Пуассона. Здесь и ниже запятая с последующими за ней символами означает соответствующую частную производную функции (например $\varphi_{,xx} = \partial^2\varphi/\partial x^2$, $\psi_{,xy} = \partial^2\psi/\partial x\partial y$), $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа.

Тип каждого уравнения системы (1) может изменяться с эллиптического при дозвуковом движении на гиперболический при сверхзвуковом движении в зависимости от рассматриваемого интервала скоростей режущего тела.

Во второй части работы аналитически и численно исследована задача разрушения среды жидкостью – задача гидравлического разрыва. Первая постановка и решение данной задачи при отсутствии прочности среды сделаны в работах С. А. Христиановича, Ю. П. Желтова (1955). Авторы обратили внимание на следующий факт: в рамках рассмотренной постановки задачи давление в жидкости стремится к бесконечно большому отрицательному значению в вершине трещины. В настоящей работе эта задача решена с учетом прочности материала среды при разрушении и при наличии области отставания жидкости от вершины трещины. Условие несовпадения переднего фронта жидкости и вершины трещины делает давление в жидкости конечным во всей области, занятой жидкостью. В данной части работы впервые поставлена и исследована задача о взаимодействии трещины гидравлического разрыва с естественным разломом пласта. В качестве численного метода решения использован метод разрывных перемещений хорошо адаптированный к решению задач для упругих тел с системой трещин.

В третьей части работы предложены методики расчета ряда прикладных задач нестационарного трехмерного взаимодействия упругопластических тел. Рассмотрены конкретные задачи взрывной штамповки и наклонного проникания. В качестве метода решения системы уравнений, описывающей движение упругопластической среды,

использовался метод М. Уилкинса. Движение газа моделировалось с помощью метода крупных частиц Ю. М. Давыдова – О. М. Белоцерковского.

Поэтому исследование и решение перечисленных задач является актуальным. В работе удалось построить аналитические и численные решения, позволившие исследовать ряд важных вопросов в проблемах резания, гидравлического разрыва, наклонного проникания и ударного взаимодействия трехмерных упругопластических тел.

Целью работы является систематическое исследование основных закономерностей контактного разрушения при проникании и движении инородных включений в деформируемой твердой среде. В частности, целью работы является решение следующих проблем:

В первой части работы –

- Исследование влияния формы контура тела;
- Влияние величины скорости тела на выбор модели расклинивания среды;
- Влияние трения на силу сопротивления и отрыв среды от поверхности;
- Влияние свободной от напряжений границы среды на процесс расклинивания;

Во второй части работы –

- Исследование влияния прочности среды на процесс разрушения, а также вязкости жидкости на характеристики трещины гидравлического разрыва (скорость движения трещины, форма ее берегов, распределение давления жидкости вдоль трещины);
- Исследование влияния области свободной от жидкости (отставание переднего фронта жидкости от вершины движущейся трещины) на основные характеристики процесса гидравлического разрыва;
- Исследование напряженно-деформированного состояния среды вблизи берегов разлома при приближении к нему трещины гидравлического разрыва;
- Прогнозирование поведения гидравлического разрыва после слияния сформированной им трещины с трещиной естественного разлома;

В третьей части работы –

- Приближенная методика расчета наклонного проникания жесткого тела вращения в жесткопластическую преграду конечной толщины;
- Возможность определения углов рикошета;
- Исследование влияния геометрических параметров задачи (толщина пластины, толщина слоя ВВ, геометрия жесткой формы штампа) на процесс штамповки взрывом упругопластической пластины в жесткую форму;
- Исследование вклада воздушной прослойки между пластиной и жесткой формой в процесс штамповки;
- Влияние прочности материала метаемой взрывом пластины;

- Исследование характера разрушения упругопластической преграды конечной толщины в зависимости от скорости и угла подлета при наклонном ударе жестким цилиндром;
- Численное исследование сохранности и прочности корпуса полого упругопластического тела с наполнителем из другого материала при пространственном взаимодействии с мишенью.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в том, что в первой части результаты работы являются точными аналитическими решениями и носят достаточно общий характер. Они могут быть использованы в целях оценки и прогнозирования в задачах проникания и резания материалов. Результаты второй и третьей части имеют самое непосредственное отношение соответственно к практике гидравлического разрыва и к задачам пространственного взаимодействия и проникания тел.

Методы исследования.

В первой части работы использовался математический аппарат теории функций комплексной переменной и уравнений математической физики. В дозвуковом случае движения режущего тела полученные смешанные краевые задачи сводятся к задаче Римана – Гильберта для системы двух аналитических функций. При сверхзвуковом случае движения решение сводится к уравнениям гиперболического типа с общим решением искомого вида.

Во второй части работы использовался метод разложения искомым функций в ряд по базовым точным решениям статических уравнений теории упругости, поэтому уравнения теории упругости в области выполнялись точно. Граничные условия были выполнены на дискретном, но достаточно плотном множестве точек границы.

В третьей части работы использовались достаточно хорошо известные и апробированные численные методы решения упругопластических задач и задач газовой динамики.

Достоверность полученных результатов:

- В первой части работы определяется применением строгих математических методов решения поставленных задач.
- Во второй части применялся численный метод решения, который можно назвать полуаналитическим, так как искомые величины определялись в виде линейной комбинации точных аналитических решений теории упругости. Приближенный характер решения состоит в том, что граничные условия были выполнены не на всей границе, а на достаточно плотном множестве ее точек. Составленная программа тестировалась путем сравнения с имеющимися аналитическими решениями и это сравнение показало очень хорошее согласование численных и аналитических результатов.

- В третьей части составленная программа тестировалась путем сравнения с аналитическими решениями и результатами других авторов. Результаты тестовых сравнений содержатся в диссертации.

Основные положения, выносимые на защиту:

По первой части работы –

- Аналитические решения задач о движении симметричного тела со скоростью меньшей, чем скорость поперечных волн, но превышающей скорость поверхностных волн Рэлея.
- Аналитические решения задач о движении симметричного тела со скоростью меньшей, чем скорость волн Рэлея, при хрупком и вязком разрушении среды.
- Аналитические решения о движении симметричного тела с трансзвуковой скоростью (скорость тела меньше скорости продольных волн, но больше скорости поперечных волн).
- Аналитические решения о движении симметричного тела со сверхзвуковой скоростью.
- Аналитическое решение задачи о движении пластины под углом атаки в безграничной среде.
- Аналитическое решение задачи о движении пластины под углом атаки в среде со свободной поверхностью.

По второй части работы –

- Аналитическое решение автотельной задачи раскрытия сомкнутых стенок канала вязкой жидкостью при нелокальном упругом взаимодействии жидкости с границами канала.
- Решение и исследование задачи гидравлического разрыва с учетом прочности среды при разрушении и с учетом отсутствия жидкости вблизи вершины трещины.
- Постановка и исследование задачи влияния трещины гидравлического разрыва на уже существующий в среде разлом (разлом моделируется сомкнутой трещиной).

По третьей части работы –

- Методика приближенного моделирования наклонного проникания в жесткопластическую преграду конечной толщины.
- Исследование процесса метания взрывом упругопластической пластины конечной толщины в жесткую форму.
- Исследование характера разрушения упругопластической мишени при наклонном проникании жесткого цилиндра.
- Исследование прочности и сохранности неоднородного тела при пространственном проникании в мишень.

Апробация работы. Основные положения и результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались и обсуждались на следующих научных форумах:

- Всесоюзная конференция по механике сплошных сред, Ташкент, 1979.
- Всесоюзная конференция по распространению упругих и упругопластических волн, Фрунзе, 1983.
- Всесоюзная конференция. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Арм. ССР, г. Горис, 1987.
- Всесоюзная конференция. Современные проблемы физики и ее приложений. Москва. Апрель. 1990.
- Материалы международного симпозиума по проблемам деформируемых тел, Москва, МГУ, 2001.
- V International Congress on mathematical modeling. Dubna. 2002.
- Ломоносовские чтения. Научная конференция, Секция механики, Москва, 2005.
- The 2nd International Conference on Thermal Engineering Theory and Applications, Alain, United Arab Emirates, 2006.
- Семинары механико-математического факультета МГУ, Института прикладной механики РАН.

Публикация результатов. По теме диссертации опубликовано более 20 работ. В них опубликованы основные результаты диссертации. Из совместных публикаций в диссертацию включены результаты, полученные непосредственно автором. Список основных публикаций по теме диссертации приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, шести глав, заключения, списка литературы и содержания. Диссертация изложена на 223 страницах, включая 12 страниц списка литературы. В работе 102 рисунка и 226 библиографических ссылок.

Основное содержание работы

Во введении указаны основные цели и новизна результатов, дана общая характеристика, изложено краткое содержание работы.

В разделе обзор литературы приведен обзор работ по темам связанным с диссертацией, даны ссылки на работы, в которых рассматриваются идейно близкие к теме диссертации вопросы, и показана новизна и отличие рассмотренных в ней задач.

В первой главе приведены модели сред, используемые в диссертации. В ней также обсуждаются используемые автором численные методы и приведены результаты тестирования численных методик путем сравнения с аналитическими решениями и результатами расчетов других авторов.

В первом параграфе приводятся уравнения установившегося движения упругой среды (1) и выражения для компонент вектора скорости и тензора напряжений (3). В случае дозвуковой скорости движения уравнения (1) удовлетворяются тождественно, если искать решение для потенциалов в виде

$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z_1)$, $\psi(x, y) = \operatorname{Re} \Psi(z_2)$, $z_1 = x + i \cdot \alpha y$, $z_2 = x + i \cdot \beta y$, (4)
где $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$ – произвольные аналитические функции своих комплексных аргументов.

Во втором и третьем параграфах первой главы содержатся определения базовых решений теории упругости и основные этапы решения краевых задач методом граничных элементов (поскольку в качестве базовых в диссертации используются решения задач о разрыве вектора перемещения, данная разновидность метода граничных элементов называется методом разрывных смещений). В статических задачах базовыми будут решения двух задач теории упругости:

Задача I.

$$y = 0; |x| < h: [u_y] = D_y; \sigma_{xy} = 0.$$

Задача II.

$$y = 0; |x| < h: [u_x] = D_x; \sigma_{yy} = 0,$$

где использовано обозначение $[f] = f^+ - f^-$.

Перемещения u_x, u_y и напряжения $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ представляются формулами Колосова – Мусхелишвили (штрихи означают дифференцирование)

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z) = 4 \operatorname{Re} \Phi(z);$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2(\varphi''(z)\bar{z} + \psi''(z)) = 2(\Phi'(z)\bar{z} + \Psi'(z));$$

$$\frac{E}{1+\nu}(u_x + i \cdot u_y) = (3 - 4\nu)\varphi(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z}) \cdot z - \bar{\psi}'(\bar{z}).$$

Задача I имеет решение

$$\sigma_{xx} = \operatorname{Re} T'(z) - y \operatorname{Im} T''(z), \quad \sigma_{yy} = \operatorname{Re} T'(z) + y \operatorname{Im} T''(z), \quad \sigma_{xy} = -y \operatorname{Re} T''(z),$$

$$2\mu \cdot u_x = (1 - 2\nu) \operatorname{Re} T(z) - y \operatorname{Im} T'(z), \quad 2\mu \cdot u_y = 2(1 - \nu) \operatorname{Im} T(z) - y \operatorname{Re} T'(z),$$

$$\text{где } T(z) = \frac{\mu D_y}{2\pi(1-\nu)} \ln \frac{z-h}{z+h}. \quad (5)$$

Задача II имеет решение

$$\sigma_{xx} = 2 \operatorname{Re} Q'(z) - y \operatorname{Im} Q''(z); \quad \sigma_{yy} = y \operatorname{Im} Q''(z); \quad \sigma_{xy} = -\operatorname{Im} Q'(z) - y \operatorname{Re} Q''(z);$$

$$2\mu \cdot u_x = 2(1 - \nu) \operatorname{Re} Q(z) - y \operatorname{Im} Q'(z); \quad 2\mu \cdot u_y = (1 - 2\nu) \operatorname{Im} Q(z) - y \operatorname{Re} Q'(z),$$

$$\text{где } Q(z) = \frac{\mu D_x}{2\pi i (1-\nu)} \ln \frac{z-h}{z+h}. \quad (6)$$

Решения (5), (6) используются в методе граничных элементов.

Тестирование программы проведено сравнением с аналитическим решением для одиночной трещины. Сравнение показало, что на расстояниях больших длины граничного элемента от трещины ошибка не превышает одного процента. Если использовать специальные граничные элементы на концах трещины, асимптотическое поведение решения на продолжении трещины совпадает с поведением аналитического решения. Это позволяет уверенно использовать данный численный метод при решении задач для упругого тела, ослабленного системой трещин.

В четвертом параграфе первой главы приведены основные этапы расчетов методом Уилкинса для трехмерных нестационарных задач конечного упругопластического тела. Модель среды описывается системой уравнений

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}; \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0; \quad \frac{dU}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\rho} S_{ij} e_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + S_{ij}, \quad p = -\frac{\sigma_{kk}}{3}, \quad \frac{DS_{ij}}{Dt} + \lambda S_{ij} = 2G \left(e_{ij} - \frac{e_{kk}}{3} \delta_{ij} \right), \quad (7)$$

$$S_{ij} S_{ij} = k^2, \quad k = \sqrt{2/3} \cdot S_T, \quad p = K (\rho/\rho_0 - 1),$$

где: V_i – компоненты вектора скорости; ρ – плотность; S_{ij} – компоненты девиатора напряжений; p – давление; G – модуль сдвига; K – модуль всестороннего сжатия; S_T – предел упругости при чистом растяжении; ρ_0 – начальная плотность; D/Dt – производная по времени от компонент тензора в смысле Яумана

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} = \frac{dS_{ij}}{dt} - S_{ik} \omega_{ik} - S_{jk} \omega_{ik}, \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

Скалярная функция процесса λ определяется в зависимости от того, идет нагрузка или разгрузка, следующим образом

$$\lambda = \frac{3GS_{ij}e_{ij}}{S_T^2} H(S_{ij}e_{ij}), \quad H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Программа расчета составлялась согласно рекомендациям работ М. Уилкинса (1967), М. Уилкинса, М. У. Гуинана (1973).

Для проведения тестирования программ, использующих метод Уилкинса, было проведено численное решение известной задачи о соударении упругопластического цилиндрического стержня с жесткой неподвижной плитой. Сравнение показало удовлетворительное совпадение результатов данной работы с данными работ И. А. Велича (1976) и А. Н. Гулидова, В. М. Фомина (1980).

Во второй главе рассмотрены плоские задачи движения симметричного тела во всем диапазоне скоростей, превышающих скорость волн Рэлея. Первый параграф является вводным. В нем приведены выражения величин

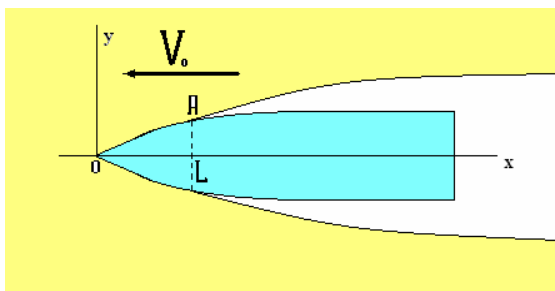


Рис.1 Движение тела в упругой среде:
 V_0 – величина скорости тела,
 OA – область контакта,
 $x = L$ – координата точки отрыва.

при помощи введенных аналитических функций (4):

$$\begin{aligned}
u_x &= \operatorname{Re} \Phi'(z_1) - \beta \operatorname{Im} \Psi'(z_2); \quad u_y = -\alpha \operatorname{Im} \Phi'(z_1) - \operatorname{Re} \Psi'(z_2); \\
V_x &= V_o \cdot (\operatorname{Re} \Phi''(z_1) - \beta \operatorname{Im} \Psi''(z_2)); \quad V_y = V_o \cdot (-\alpha \operatorname{Im} \Phi''(z_1) - \operatorname{Re} \Psi''(z_2)); \\
\sigma_{xx}/\mu &= (1 - \beta^2 + 2\alpha^2) \operatorname{Re} \Phi''(z_1) - 2\beta \operatorname{Im} \Psi''(z_2); \\
\sigma_{yy}/\mu &= -(1 + \beta^2) \operatorname{Re} \Phi''(z_1) + 2\beta \operatorname{Im} \Psi''(z_2); \\
\sigma_{xy}/\mu &= -2\alpha \operatorname{Im} \Phi''(z_1) - (1 + \beta^2) \operatorname{Re} \Psi''(z_2).
\end{aligned} \tag{8}$$

Во втором параграфе при отсутствии трения рассматривается движение симметричного тела (Рис.1) со скоростью превышающей скорость волн Рэлея, но меньшей, чем скорость поперечных волн. В предположении, что угол γ наклона касательной контура к оси x является малой величиной, а тело – тонким, граничные условия (2) можно линеаризовать и снести на ось x (Рис.1):

условия на поверхности контакта $y = 0^+$, $0 < x < L$, $V_y = V_0 \gamma(x)$, $\sigma_{xy} = k \sigma_{yy}$, где $\gamma(x) \approx y'_0(x)$, $y = y_0(x)$ – уравнение контура тела;

условия на свободной поверхности $y = 0^+$, $L < x$, $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = 0$; (9)

условия симметрии движения $y = 0^+$, $x < 0$, $V_y = 0$, $\sigma_{xy} = 0$.

Поскольку одно из условий (9) выполняется на всей границе, краевую задачу (9) удастся свести к задаче Римана – Гильберта для одной функции, а ее решение для произвольного контура получить в виде

$$\begin{aligned}
\Phi''(z_1) &= \frac{1 + \beta^2}{\alpha(1 - \beta^2)} \frac{\sqrt{z_1 - L}}{\pi i} \int_0^L \frac{\gamma(x) dx}{\sqrt{L - x(x - z_1)}}; \\
\Psi''(z_2) &= \frac{2}{(1 - \beta^2)} \frac{\sqrt{z_2 - L}}{\pi} \int_0^L \frac{\gamma(x) dx}{\sqrt{L - x(x - z_2)}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Полученное аналитическое решение (10) позволило исследовать влияние геометрии контура и определить характер распределения сил, действующих на поверхности проникающего тела. Для сравнения рассмотрены три контура: в виде конечного клина; выпуклый контур постоянного радиуса кривизны (оживал); вогнутый контур постоянного радиуса кривизны. Для рассмотренных конкретных тел решение удастся получить в конечном виде. Это позволяет найти силу сопротивления движению тела со стороны среды. Для сравнения рассмотрены тела трех перечисленных выше типов, имеющие одинаковую толщину и одинаковый угол раствора носовой части. Для клина и вогнутого тела точка срыва среды с поверхности известна и совпадает с длиной носовой части.

Место отрыва среды от поверхности тела (параметр L) в случае выпуклого гладкого контура определяется в ходе решения. Следует отметить, что в разных разделах механики задача нахождения положения данной точки далека от полного и исчерпывающего решения. Все существующие критерии дают одностороннюю оценку для места отрыва. В данной диссертации точка отрыва среды от выпуклой поверхности определялась условием равенства нулю производной от давления,

вычисленной вдоль контура тела. Показано, что давление и указанная производная равны нулю только в одной точке поверхности, которая и считается точкой отрыва. В этом случае кривая контура свободной поверхности среды имеет касание второго порядка к контуру тела. Примечательно, что при отсутствии трения, положение точки отрыва не зависит от скорости тела и целиком определяется видом поверхности. Для рассмотренного тела с выпуклым гладким контуром длина области контакта L равна половине длины носовой части.

Найденные значения силы сопротивления среды движению тела имеют следующие выражения:

$$\text{для клина} \quad F_x = -\frac{6\Delta L_0 \mu}{\alpha(1-\beta^2)} \gamma^2; \quad \text{для вогнутого контура} \quad F_x = -\frac{8\Delta L_0 \mu}{\alpha(1-\beta^2)} \gamma^2;$$

$$\text{для выпуклого контура} \quad F_x = -\frac{4,5 \cdot \Delta \mu L_0}{\alpha(1-\beta^2)} \gamma^2, \quad \text{где } \Delta = (2 - M_2^2)^2 - 4\alpha\beta.$$

Сравнение полученных выражений показывает, что при одинаковой толщине сопротивление тела выпуклой формы является наименьшим из трех рассмотренных форм. Сила сопротивления для тела клиновидной формы на треть, а для тела с вогнутым контуром почти в два раза больше, чем для тела с выпуклым контуром. Этот факт в какой-то мере соответствует действительности, поскольку при изготовлении проникающих снарядов часто используется выпуклая форма контура носовой части типа «оживал».

В третьем параграфе данной главы рассмотрены плоские задачи движения симметричного тела при наличии трения в области контакта среды с поверхностью тела.

В этом случае получается краевая задача Римана – Гильберта для двух функций

$$A(x) \operatorname{Re} \vec{T}(x) + B(x) \operatorname{Im} \vec{T}(x) = \vec{c}(x), \quad (11)$$

где $\vec{T} = \begin{pmatrix} \Phi'' \\ \Psi'' \end{pmatrix}$ – подлежащая определению вектор-функция, а матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) \end{bmatrix} \quad \text{и вектор } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{– заданные}$$

функции точек контура. Задача (11) в общем случае не имеет аналитического решения. Но для случая граничных условий (2) коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$ являются кусочно-постоянными функциями. В этом случае удалось найти такую замену искомых функций, которая позволила свести решение к стандартной задаче Римана-Гильберта для одной функции и получить аналитическое решение. Например, напряжение σ_{yy} в области контакта равно

$$\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = \frac{\Delta}{\Omega} \left(\cos(\pi m) \cdot \gamma(x) + \frac{(L-x)^m \sin(\pi m)}{\pi x^{m-\frac{1}{2}}} \int_0^L \left(\frac{L-t}{t} \right)^{\frac{1}{2}-m} \frac{\gamma(t) dt}{\sqrt{L-t(t-x)}} \right),$$

а значение скорости за точкой отрыва, на свободной поверхности $y = 0$, $x > L$ будет таким

$$\frac{V_y}{V_0} = -\frac{\alpha(1-\beta^2)}{\Omega} (x-L)^m x^{\frac{1}{2}-m} \frac{1}{\pi_0} \int_0^L \frac{\gamma(t) dt}{(t-L)^m t^{\frac{1}{2}-m} (t-x)},$$

где $m = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha(1-\beta^2)}{k(1+\beta^2-2\alpha\beta)}$, $\Omega = \sqrt{\alpha^2(1-\beta^2)^2 + k^2(1+\beta^2-2\alpha\beta)^2}$.

Для тела с клиновидной носовой частью (Рис.2(а)) и тела с выпуклым контуром (Рис.2(б)), имеющим одинаковую толщину δ ,

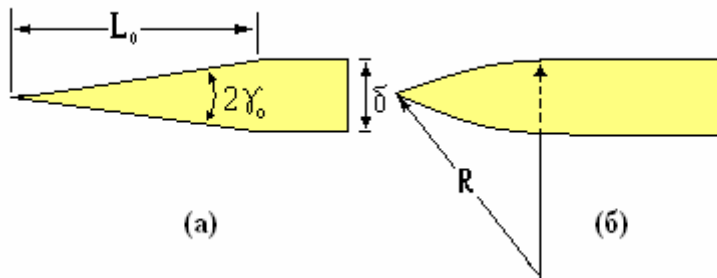


Рис.2 Клин – (а),
оживал – (б).

удалось получить аналитические решения и исследовать влияние скорости и трения на параметры движения тел с различной выпуклостью контура.

Оказалось, что наличие трения является существенным фактором. В отличие от рассмотренного в первом параграфе движения без трения, оно, как и скорость, увеличивает область контакта среды с поверхностью выпуклого тела.

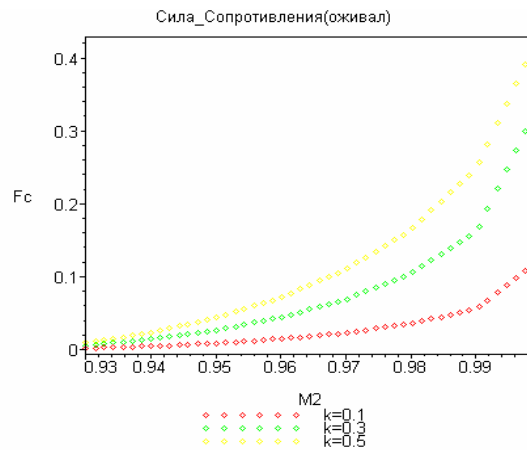


Рис. 3

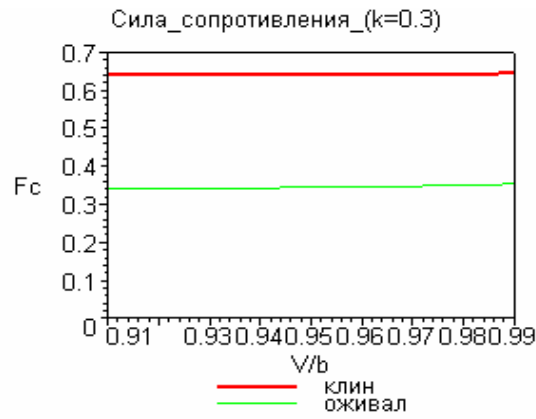


Рис.4

На Рис.3 приведена зависимость безразмерной силы сопротивления $F_c = F_c / (\mu \delta)$ от числа Маха M_2 для трех значений коэффициента трения в случае выпуклого контура ($k = 0,1$ – нижняя кривая, $k = 0,3$ – верхняя кривая, δ – толщина тела).

На рис.4 приведена зависимость приведенных сил сопротивления $F_c = F_c^* = F_c \cdot 2\Omega / (\mu \Delta \delta)$ от числа Маха $M_2 = V_0 / b$ для клина (верхняя кривая) и оживала (нижняя кривая) при постоянном коэффициенте трения $k = 0,3$.

Сопротивление движению имеет линейный характер зависимости от коэффициента трения и толщины, что подтверждается характером зависимости от коэффициента k на Рис.3. Зависимость сопротивления от скорости имеет почти квадратичный вид. Данные результаты близки к законам сопротивления, используемым в практических расчетах проникания тел в среды.

В четвертом параграфе второй главы рассмотрена задача о движении со скоростью, превышающей скорость поперечных волн, но меньшей скорости продольных волн (трансзвуковое движение), а также движение со скоростью большей скорости продольных волн. Для сверхзвукового движения безразмерное давление в области контакта определяется выражением

$$P(x) = -\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = \gamma(x) \frac{(\beta_1^2 - 1)^2 + 4\alpha_1\beta_1(1 + k\beta_1 - \beta_1)}{\alpha_1(\beta_1^2 + 1) + k(1 + 2\beta_1 - \beta_1^2)}, \quad \beta_1^2 = M_2^2 - 1, \quad \alpha_1^2 = M_1^2 - 1$$

а сила сопротивления $F_c = 2\mu k \int_0^L P(x) dx$ будет соответственно равной величине

$$F_c = \mu k \delta \cdot C(V_0, k), \quad C(V_0, k) = \frac{(\beta_1^2 - 1)^2 + 4\alpha_1\beta_1(1 + k\beta_1 - \beta_1)}{\alpha_1(\beta_1^2 + 1) + k(1 + 2\beta_1 - \beta_1^2)},$$

где δ – максимальная толщина тела.

Для сверхзвукового движения оказалось, что величина скорости тела, равная скорости продольных волн, является особым значением, т.к. при предельном переходе $M_1 \rightarrow 1$, $F_c \rightarrow \infty$. В линейной постановке движение с такими скоростями приводит к бесконечно большим значениям сил, действующих на тело. Напротив, переход через скорость поперечных волн порождает более слабую особенность, поскольку при таком переходе сила

сопротивления остается конечной. Физически это связано с тем, что основной вклад в силу сопротивления вносят эффекты, связанные с продольными волнами. Зависимость коэффициента $C(V_0, k)$ от скорости и коэффициента трения для больших скоростей ($M_1 \geq 1.2$) близка к линейной зависимости и может быть аппроксимирована функцией

$$C(M_1, k) = -3,13 + 2,69 \cdot M_1 + 4,03 \cdot k.$$

Интересно, что, как и в аэродинамике, контур с клиновидной носовой частью при одинаковой длине L и одинаковой толщине δ имеет меньшее сопротивление по сравнению с выпуклым контуром.

При транзвуковом движении первое уравнение системы (1) для потенциала продольных волн φ является эллиптическим, а второе уравнение системы для потенциала поперечных волн ψ – гиперболическим. Решение смешанной системы уравнений в случае отсутствия трения удастся получить в аналитическом виде. В таблице 1 приведена зависимость длины области контакта от числа Маха M_2 для выпуклого тела с постоянным радиусом кривизны. Длина области контакта имеет немонотонный характер зависимости от скорости. При скорости $V_0 = \sqrt{2} \cdot b$ она достигает максимума, а потом убывает.

Таблица 1. Длина области контакта L/L_0 в зависимости от числа Маха M_2 .

M_2	1.01	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.72
L/L_0	0.649	0.819	0.858	0.878	0.879	0.861	0.849	0.768	0.697

На Рис.5 приведены графики зависимости приведенной силы сопротивления $F = 2L_0 F_c / (\mu \delta^2)$ от числа Маха M_2 для клина (верхняя кривая) и контура в форме оживала (нижняя кривая).

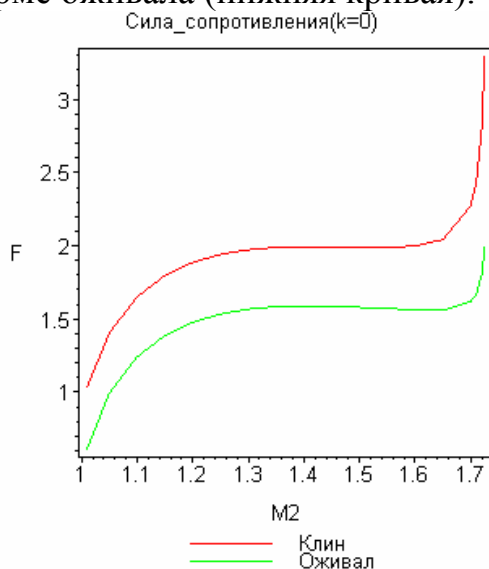


Рис.5

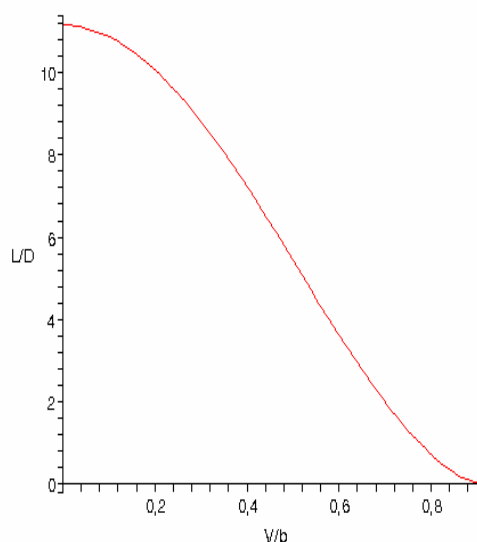


Рис.6

При движении с трением решение существенно сложнее. Оказалось, что в рамках выбранной схемы обтекания решение удастся построить только для скоростей с числом Маха $M_2 \leq \sqrt{2}$. При движении со скоростью большей, чем $\sqrt{2}b$ найденное аналитическое решение теряет физический смысл, т.к. участвующие в нем интегралы становятся расходящимися. При предельном значении $M_2 = \sqrt{2}$ интегралы вычисляются в конечном виде, что позволяет определить значения всех компонент скорости и тензора напряжений. Например, касательное напряжение и сила сопротивления равны: $\sigma_{xy}(x)/\mu = \frac{2k}{k+1}\gamma(x)$; $F_c = \frac{2\mu k}{k+1}\delta$, δ – толщина тела.

Для произвольных скоростей в интервале $1 \leq M_2 \leq \sqrt{2}$ решение удастся построить и при наличии трения. В таблице 2 приведены значения длины области контакта и силы сопротивления от числа Маха для выпуклого тела. В таблице 3 приведены значения силы сопротивления в зависимости от числа Маха для тела с клиновидной носовой частью. Из таблиц следует, что в случае трансзвукового движения (как и при дозвуковом движении) сопротивление для выпуклого тела меньше, чем сопротивление для клина. Область контакта с ростом коэффициента трения и с ростом скорости быстро стремится к длине всей носовой части.

Таблица 2. Зависимость длины области контакта $l_0 = L/(\gamma R)$ и силы $F_c/(2\mu k \gamma L)$ от числа Маха $M_2 = V_0/b$ при $k = 0.3$ при движении тела с контуром в виде оживала.

M_2	1.01	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.4
l_0	0.71	0.87	0.93	0.95	0.995	1.	1.	1.
$F_c/(2\mu k \gamma L)$	0.461	0.562	0.644	0.689	0.719	0.746	0.764	0.770

Таблица 3. Зависимость силы $F_c/(k \gamma L)$ от числа Маха $M_2 = V_0/b$ для значения $k = 0.3$ в случае движения тела с клиновидной носовой частью.

M_2	1.01	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.4
$F_c/(2\mu k \gamma L)$	0.919	1.143	1.292	1.386	1.449	1.491	1.517	1.538

Таким образом, в первой главе получены аналитические решения во всем диапазоне скоростей движения тела при условии, что эта скорость превышает скорость волн Рэлея.

В третьей главе рассматриваются возможные схемы движения тела со скоростью меньшей, чем скорость волн Рэлея. Следует отметить важную роль, которую играет скорость поверхностных волн в задачах разрушения и в контактных задачах. В плоскопараллельных задачах о распространении трещин эта скорость является теоретически предельной для трещин нормального разрыва. В контактной задаче разрушения среды телом для

сохранения контакта в носовой части необходимо вводить область ослабленных связей перед телом или трещину, предшествующую телу и бегущую впереди него.

В диссертации рассматривались схемы движения с областями ослабленных связей (области предразрушения). Поскольку реальные тела имеют конечную толщину вплоть до режущей кромки, впереди движущегося тела вводилась область разрушенной среды со свойствами, отличными от свойств упругого тела. Длина этой области L определялась в процессе решения задачи.

В первом параграфе была рассмотрена схема движения с хрупким разрушением. В качестве критерия разрушения выбрано равенство критическому значению коэффициента интенсивности напряжений $K_I = K_c$. Материал разрушенной среды считался идеальным и несжимаемым. В результате получено аналитическое решение. Для величины давления P перед затупленным телом и длины области разрушений L получены выражения

$$P = \frac{\alpha M_2^2 K_c^2}{4\mu\delta\Delta}, \quad \sqrt{L} = \frac{\sqrt{2\pi}\Delta\mu}{\alpha M_2^2 K_c} \delta, \quad (12)$$

где δ – толщина тела.

На Рис.6 приведена зависимость длины трещины от скорости для коэффициента Пуассона равного 0,25. На горизонтальной оси отложено число Маха $M_2 = V_0/b$, на вертикальной оси отложена приведенная длина трещины – L/D , $D = \mu^2 \delta^2 / K_c^2$. Длина трещины стремится к нулю, когда скорость тела приближается к скорости волн Рэлея (функция Рэлея $\Delta \rightarrow 0$).

Выражения (12) показывают, что при приближении скорости тела к скорости волн Рэлея длина трещины L стремится к нулю, а давление P стремится к бесконечности. Для случая клина удалось показать, что длина области разрушения не зависит от угла носовой части.

Во втором параграфе рассмотрена схема движения с вязким разрушением. Считалось, что в области перед телом среда пластически деформируется. На границе упругой среды и области пластического течения выполнялось условие пластичности Треска $\tau_{\max} = \tau_m$. Решение удалось построить в конечном виде для затупленного тела с прямоугольным в сечении контуром (пластина толщиной δ). В этом случае длина области пластического течения стремится к бесконечности при стремлении скорости тела к скорости волн Рэлея. Величина давления перед телом определяется выражением

$$P = \tau_m \frac{[4\alpha\beta - (1 + \beta^2)^2](1 - \beta^2)}{[(\alpha - \beta)^2 + (1 - \alpha\beta)^2](1 + \beta^2)}.$$

При малых скоростях размер пластической области определяется выражением

$$L_1 = \delta \frac{\rho V_0^2}{2\tau_m} \left(1 + \frac{b^4}{a^4} \right). \quad (13)$$

Следует отметить, что длина пластической области (13) пропорциональна отношению сил инерции среды к максимальному касательному напряжению. График зависимости приведенной длины $L = L_1 \tau_m / (\delta \mu)$ от числа Маха M_2 построен на Рис.7. При этом взято значение коэффициента Пуассона – $\nu = 0,25$. График зависимости безразмерного давления $P = P/\tau_m$ от числа Маха при малых скоростях движения показан на Рис.8. В случае малых скоростей движения давление практически не зависит от скорости и определяется величиной максимального касательного напряжения среды.

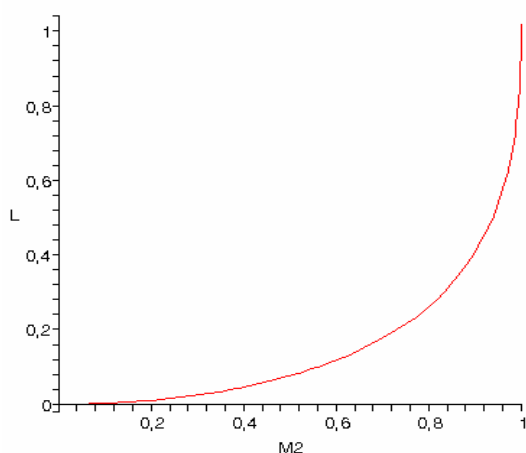


Рис.7

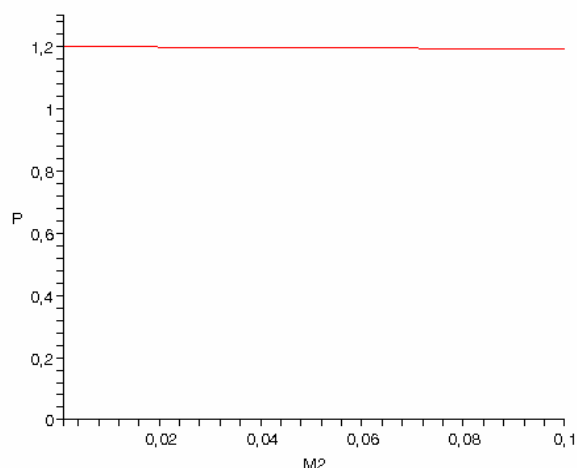


Рис.8

В третьем параграфе рассмотрено движение тела в среде под давлением P_0 на бесконечности. Считается, что перед телом образуется застойная зона из разрушенной среды, которая движется вместе с телом. На границе этой зоны действует предельное касательное напряжение τ_0 и давление P_1 . Длина области L определялась условием хрупкого разрушения $K_I = K_{Ic}$. Для пластины толщиной δ удалось построить решение в конечном виде. Так, длина области определяется выражением

$$L = \frac{K_c^{*2} (\pi \alpha M_2^2 + 2k(1 + \beta^2 - 2\alpha\beta))^2 + 16(1 + \beta^2 - 2\alpha\beta)\delta(kP_0^* + \tau_0^*)\Delta}{16\pi(1 + \beta^2 - 2\alpha\beta)^2(kP_0^* + \tau_0^*)^2} -$$

$$\frac{K_c^* (\pi \alpha M_2^2 + 2k(1 + \beta^2 - 2\alpha\beta))}{16\pi(1 + \beta^2 - 2\alpha\beta)^2(kP_0^* + \tau_0^*)^2} \times$$

$$\times \sqrt{K_c^{*2} (\pi \alpha M_2^2 + 2k(1 + \beta^2 - 2\alpha\beta))^2 + 32(1 + \beta^2 - 2\alpha\beta)\pi(kP_0^* + \tau_0^*)\delta\Delta},$$

где $P_0^* = P_0/\mu$, $P^* = (P_1 - P_0)/\mu$, $\tau_0^* = \tau/\mu$, $K_c^* = K_{Ic}/\mu$.

Сила сопротивления равна

$$\frac{F_c}{\mu\delta} = (P_0^* + \tau^* L/\delta) + k \frac{K_c^* \sqrt{L}}{\sqrt{2\pi} \delta} + \frac{K_c^*}{\sqrt{2\pi} L}.$$

Анализ полученных выражений позволил сделать следующие выводы:

- Построено решение задачи о движении тела в виде полосы с плоским передним срезом с учетом эффектов разрушения среды перед телом и трения;

- При стремлении скорости тела к скорости волн Рэлея длина зоны разрушения L стремится к нулю. При этом давление перед телом, а значит и сила сопротивления, стремятся к бесконечности;
- Сила сопротивления удовлетворяет неравенству

$$\frac{F_c}{\mu\delta} \geq P_0^* (1 + kL/\delta) + \frac{K_c^* \sqrt{k}}{\sqrt{2\pi\delta}}.$$

В четвертой главе рассмотрены две задачи. В первой задаче режущее тело движется при отсутствии симметрии. В качестве примера рассмотрено движение пластины длиной l под углом атаки в неограниченной упругой среде.

Для силы сопротивления F_c и подъемной силы F_{Π} получены их значения с точностью до величин второго порядка малости по углу атаки γ_0 и коэффициенту трения k :

$$F_c = F_x = \frac{\Delta_1 l}{4} \mu |\gamma_0| \pi (k + |\gamma_0| (1 + 2k^2));$$

$$F_{\Pi} = F_y = \frac{\Delta_1 l}{4} \mu \gamma_0 \pi \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \arctg^2(k\Delta_2) \right).$$

Отсюда следует, что при увеличении коэффициента трения сила сопротивления возрастает, а подъемная сила убывает. Если считать малыми одного порядка величины γ_0, k и оставить только величины до второго порядка малости включительно, получим

$$F_c = \frac{\Delta_1 \mu |\gamma_0| \pi l}{4} (k + |\gamma_0|); \quad F_{\Pi} = \frac{\Delta_1 \mu \gamma_0 \pi l}{4}. \quad (14)$$

Во втором параграфе рассмотрена задача о движении тела под углом атаки параллельно свободной поверхности упругой среды (Рис.9).

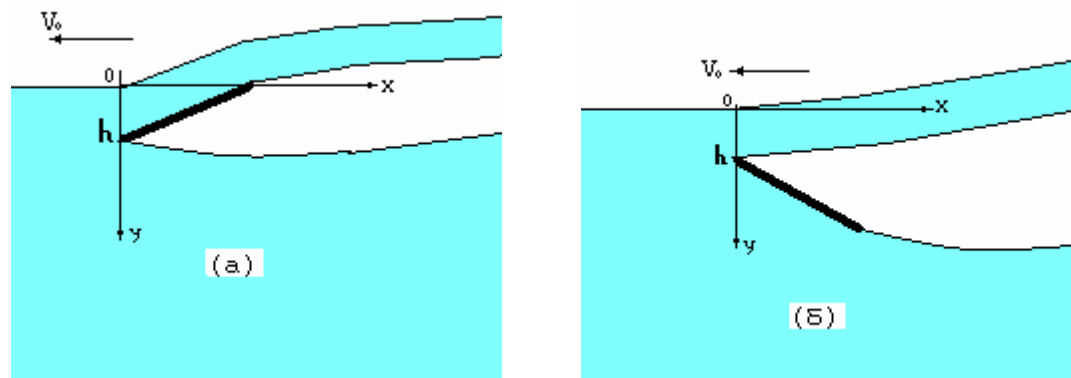


Рис.9 Движение пластины: (а) – угол наклона $\gamma = -\gamma_0$; (б) – угол наклона $\gamma = \gamma_0$.

Для случая движения пластины решение находится в конечном виде. Рассмотрены два предельных случая движения, когда толщина отрезаемого слоя h много больше длины пластины L и случай, когда много меньше L .

В зависимости от расположения пластины относительно свободной поверхности полупространства возможны два случая, приведенные соответственно на Рис.9(а) и Рис.9(б).

Случай (а): угол наклона пластины $\gamma = -\gamma_0$; точка схода среды на нижней поверхности пластины совпадает с режущей кромкой $u_0^+ = 1$; точка схода среды на верхней поверхности пластины совпадает с задней кромкой $x^- = L$. Значения напряжения и скорости соответственно равны:

$$\sigma_{yy}(u) = \frac{4\alpha\beta - (2 - M_2^2)^2}{2\alpha M_2^4} \gamma_0 \sqrt{\frac{u - u_0^-}{1 - u}}, \quad u_0^- < u < 1;$$

$$V_x = \frac{2 - M_2^2 - 2\alpha\beta}{\alpha M_2^2} \gamma_0 \sqrt{\frac{|u - u_0^-|}{|u - 1|}}, \quad V_y = -\gamma_0 \quad \text{в области контакта};$$

$$V_x = 0, \quad V_y = \mp \gamma_0 \left(\sqrt{\frac{|u - u_0^-|}{|u - 1|}} - 1 \right) \quad \text{на свободной поверхности и на границе}$$

каверны. Величина u_0^- является корнем уравнения

$$\frac{L\pi}{h} = u_0^- - \ln |u_0^-| - 1.$$

Для случая слоя большой толщины $h/L \gg 1$ получим:

На границе каверны в окрестности режущей кромки пластины

$$\left(\text{при } x \rightarrow 0^+, y = h^+ \right) \quad V_y \cong \gamma_0 \sqrt[4]{L/x};$$

В бесконечно удаленной точке свободной поверхности

$$\left(\text{при } x \rightarrow -\infty, y = 0 \right) \quad V_y \cong -\gamma_0 \sqrt{\frac{Lh}{2\pi|x|}} \frac{1}{|x|};$$

На нижней границе каверны в бесконечно удаленной точке

$$\left(\text{при } x \rightarrow +\infty, y = h^+ \right) \quad V_y \cong \gamma_0 \sqrt{\frac{Lh}{2\pi x}} \frac{1}{x};$$

На верхней границе каверны в бесконечно удаленной точке

$$\left(\text{при } x \rightarrow +\infty, y = h^- \right) \quad V_y \cong -\gamma_0 \sqrt{\frac{\pi L}{2h}}.$$

Последнее выражение позволяет сделать вывод о том, что скорость отщепляемого слоя вдали от режущего тела практически постоянна. Она стремится к нулю лишь при условии, что толщина слоя стремится к бесконечности.

Для бесконечно-тонкого отщепляемого слоя $h/L \ll 1$ аналогичные выражения будут такими:

На границе каверны в окрестности режущей кромки пластины

$$\left(\text{при } x \rightarrow 0^+, y = h^+ \right) \quad V_y \cong \gamma_0 \sqrt[4]{h/(2\pi x)};$$

В бесконечно удаленной точке свободной поверхности

$$\left(\text{при } x \rightarrow -\infty, y = 0 \right) \quad V_y \cong -\gamma_0 \frac{h}{2\pi|x|};$$

На нижней границе каверны в бесконечно удаленной точке

$$\left(\text{при } x \rightarrow +\infty, y = h^+ \right) \quad V_y \cong \gamma_0 \frac{h}{2\pi x};$$

На верхней границе каверны в бесконечно удаленной точке

$$\left(x \rightarrow +\infty, y = h^- \right) \quad V_y \cong -\gamma_0.$$

Как и в предыдущем случае, скорость отщепляемого слоя стремится к постоянной величине, но в этом случае она практически не зависит от толщины, поскольку толщина слоя мала.

Ниже приведены значения сил, действующих на пластину.

Для большой толщины слоя $h/L \gg 1$

$$X/(\rho V_0^2) = \frac{\Omega \pi L \gamma_0^2}{4}; \quad Y/(\rho V_0^2) = \frac{\Omega \pi L \gamma_0}{4}; \quad (15)$$

Для бесконечно-тонкого отщепляемого слоя $h/L \ll 1$

$$X/(\rho V_0^2) = \frac{\Omega \gamma_0^2 h}{2}; \quad Y/(\rho V_0^2) = \frac{\Omega \gamma_0 h}{2}, \quad (16)$$

где $\Omega = ((2 - M_2^2)^2 - 4\alpha\beta)/(\alpha M_2^4)$.

Следует отметить, что значения (15), как и следовало ожидать, совпадают с соответствующими величинами (14), полученными в первом параграфе данной главы для движения пластины в неограниченной среде при отсутствии трения. Интересно, что согласно (16) для бесконечно тонкого слоя главные части в разложении сил определяются толщиной слоя и углом атаки и не зависят от длины пластины.

Случай (б): угол наклона пластины $\gamma = \gamma_0$; точка схода среды на верхней поверхности пластины совпадает с режущей кромкой $u_0^- = 1$; точка схода среды на нижней поверхности пластины совпадает с задней кромкой $x^+ = L$.

Соответствующие значения напряжения в области контакта и скорости будут такими:

$$\sigma_{yy}(u) = \frac{4\alpha\beta - (2 - M_2^2)^2}{2\alpha M_2^4} \gamma_0 \sqrt{\frac{u_0^+ - u}{u - 1}}, \quad 1 < u < u_0^+;$$

$$V_x = \frac{2 - M_2^2 - 2\alpha\beta}{\alpha M_2^2} \gamma_0 \sqrt{\frac{|u - u_0^+|}{|u - 1|}}, \quad V_y = \gamma_0 \quad \text{в области контакта};$$

$$V_x = 0, \quad V_y = \mp \gamma_0 \left(\sqrt{\frac{|u - u_0^+|}{|u - 1|}} - 1 \right) \quad \text{на свободной поверхности и на границе}$$

каверны. Величина u_0^+ является решением уравнения

$$\frac{L\pi}{h} = u_0^+ - \ln |u_0^+| - 1.$$

Для большой толщины $h/L \gg 1$ получим:

На границе каверны в окрестности режущей кромки пластины

$$\text{(при } x \rightarrow 0^+, y = h^- \text{)} \quad V_y \cong -\gamma_0 \sqrt[4]{L/x};$$

В бесконечно удаленной точке свободной поверхности

$$\text{(при } x \rightarrow -\infty, y = 0 \text{)} \quad V_y \cong -\gamma_0 \sqrt{\frac{Lh}{2\pi}} \frac{1}{|x|};$$

На нижней границе каверны в бесконечно удаленной точке

$$\text{(при } x \rightarrow +\infty, y = h^+ \text{)} \quad V_y \cong \gamma_0 \sqrt{\frac{Lh}{2\pi}} \frac{1}{x};$$

На верхней границе каверны в бесконечно удаленной точке

$$\text{(при } x \rightarrow +\infty, y = h^- \text{)} \quad V_y \cong -\gamma_0 \sqrt{\frac{\pi L}{2h}}.$$

Как видим, за исключением знака скорости в окрестности режущей кромки, выражения остались прежними.

Для бесконечно-тонкого отщепляемого слоя $h/L \ll 1$ аналогичные выражения будут такими:

На границе каверны в окрестности режущей кромки пластины

$$\text{(при } x \rightarrow 0^+, y = h^- \text{)} \quad V_y \cong -\gamma_0 \sqrt[4]{\pi L^2/(2hx)};$$

В бесконечно удаленной точке свободной поверхности

$$\text{(при } x \rightarrow -\infty, y = 0 \text{)} \quad V_y \cong -\gamma_0 \frac{L}{2|x|};$$

На нижней границе каверны в бесконечно удаленной точке

$$\text{(при } x \rightarrow +\infty, y = h^+ \text{)} \quad V_y \cong \gamma_0 \frac{L}{2x};$$

На верхней границе каверны в бесконечно удаленной точке

$$\text{(при } x \rightarrow +\infty, y = h^- \text{)} \quad V_y \cong -\gamma_0 \sqrt{\pi L/h}.$$

Для слоя малой толщины полученные выражения коренным образом отличаются от аналогичных значений при противоположном по знаку угле атаки (случай (а)), поскольку основное взаимодействие при рассматриваемом угле атаки происходит между пластиной и нижним полупространством.

При этом скорость отщепляемого слоя постоянна, но уже зависит от толщины и длины пластины. Причем она больше по величине, поскольку $L/h \gg 1$. Пластина как бы выдавливает отрезаемый слой.

Сопротивление и подъемная сила соответственно равны:

для большой толщины слоя $h/L \gg 1$

$$X/(\rho V_0^2) = \frac{\Omega \pi L \gamma_0^2}{4}; \quad Y/(\rho V_0^2) = -\frac{\Omega \pi L \gamma_0}{4}; \quad (17)$$

для бесконечно-тонкого отщепляемого слоя $h/L \ll 1$

$$X/(\rho V_0^2) = \frac{\Omega \pi L \gamma_0^2}{2}; \quad Y/(\rho V_0^2) = -\frac{\Omega \pi L \gamma_0}{2}, \quad (18)$$

где $\Omega = ((2 - M_2^2)^2 - 4\alpha\beta)/(\alpha M_2^4)$.

Для сил в случае толстого слоя выражения (17) и (15) отличаются только знаком подъемной силы, а их величины совпадают с аналогичным решением для бесконечной среды. Для тонкого слоя значения (18) существенно отличаются от тех же величин (16). В этом случае они явно не зависят от толщины слоя, но зависят от длины пластины и ее угла атаки. Что самое интересное, их величины ровно в два раза больше, чем аналогичные величины для случая бесконечной среды. Это можно объяснить только тем, что сопротивление движению тела имеет волновой характер. В этом случае увеличение силы сопротивления и подъемной силы происходит за счет эффектов образования поверхностных волн, т.к. площадь свободной поверхности в случае движения в полупространстве (границы каверны и граница полупространства) в два раза больше площади свободной поверхности для случая движения в неограниченной среде (границы каверны).

В пятой главе рассматриваются задачи разрушения среды жидкостью.

В первом параграфе изложено автомодельное решение о движении вязкой жидкости в канале с изначально сомкнутыми упругими стенками (Рис.10). При получении аналогичных аналитических решений обычно используется гипотеза о локальном взаимодействии жидкости со стенками канала. При получении излагаемого решения данная гипотеза не использовалась.

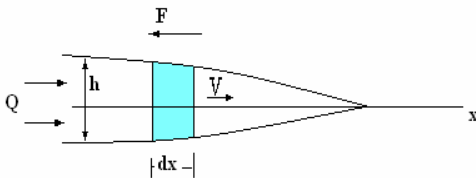


Рис.10

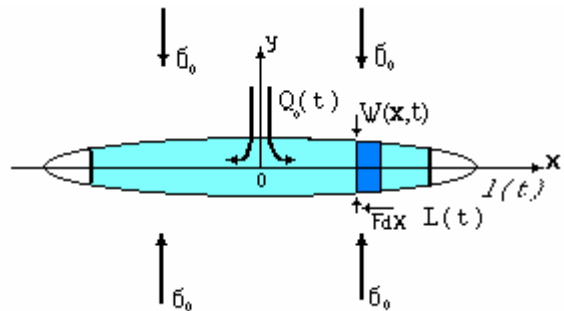


Рис.11

Уравнение баланса объема жидкости и сохранения импульса можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -F, \quad F(x,t) = \frac{12\mu}{h^2(x,t)}V(x,t). \quad (19)$$

где t – время, $V(x,t)$ – скорость жидкости, μ – вязкость жидкости, $F(x,t)$ – плотность вязких сил, действующих на единицу длины жидкости со стороны стенок. Уравнения (19) замыкаются связью между давлением в жидкости $P(x,t)$ и возникающим в результате действия этого давления перемещением стенок, которое характеризуется шириной канала $h(x,t)$. $L(t)$ – длина раскрытой части канала. В качестве замыкающего для системы (19) уравнения рассмотрена линейная связь вида

$$P(x,t) = K(L)h(x,t). \quad (20)$$

Определение автомодельного решения задачи (19),(20) для функции

$$h(x,t) = h_o(t) \cdot f(\xi), \quad \xi = x/L(t)$$

свелось к следующему уравнению для функции $y(\xi)$, ($f(\xi) = y'(\xi)$):

$$\frac{Kv}{L^2} \frac{y''(\xi)}{y(1)} = -\frac{12\mu L^2}{v^2} \left(\frac{y(1)}{y'(\xi)} \right)^2 \left\{ \frac{QL}{v} \frac{y(1)}{y'(\xi)} \left(1 - \frac{y(\xi)}{y(1)} \right) + \xi \cdot \dot{L} \right\},$$

где $v = \int_0^t Q(\tau) d\tau$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = 0$.

Если ввести безразмерные коэффициенты $k = 12\mu QL^5 / Kv^4$, $\lambda = v\dot{L}/QL$, то для нормированной искомой функции $q(\xi) = 1 - y(\xi)/y(1)$ уравнение примет форму

$$q'^3 q'' = -kq + \lambda k \xi \cdot q'$$

с краевыми условиями $q(0) = 1$, $q(1) = 0$, $q'(1) = 0$. Полученное уравнение имеет аналитическое решение

$$q = (1 - \xi)^m,$$

где коэффициенты связаны $m = 4/3$, $\lambda m = 1$, $k = m^4(m - 1)$.

Из условий возможности осуществления искомого автомодельного течения приходим к уравнениям для определения длины деформированной части канала $L(t)$ и необходимого расхода $Q(t)$,

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{3}{4} \frac{Q(t)}{\int_0^t Q(\tau) d\tau}, \quad \frac{12\mu Q(t)L^5}{K \left(\int_0^t Q(\tau) d\tau \right)^4} = m^4(m - 1).$$

Первое из уравнений интегрируется при произвольной зависимости $Q(t)$

$$L = c_o \cdot (v(t))^{3/4},$$

где c_o – постоянная интегрирования. Из второго уравнения следует, что форма автомодельного решения во многом определяется видом зависимости $K(L)$. Например для обратно пропорциональной зависимости $K = K_o/L$ (такая зависимость характерна для случая движения жидкости в упругой среде) решение имеет вид

$$v(t) = B \cdot t^{2/3}, \quad Q(t) = \frac{2}{3} B \cdot t^{-1/3}, \quad B = \left(\frac{K_o}{8\mu c_o^6} m^4(m - 1) \right)^{2/3}.$$

В случае локального закона (K не зависит от величины L) получим другую зависимость для скорости $v(t)$ и расхода $Q(t)$

$$v(t) = A \cdot t^{4/3}, \quad Q(t) = \frac{4}{3} A \cdot t^{-1/3}, \quad A = \left(\frac{K}{16\mu c_o^5} m^4(m - 1) \right)^{3/4}.$$

Следует отметить, что в случае нелокальной связи между давлением и раскрытием расход жидкости имеет степенную интегрируемую особенность при предельном переходе $t \rightarrow 0$.

Для размерных искомых величин в случае обратно пропорциональной зависимости $K = K_o/L$ получаются следующие выражения:

$$h(x,t) = \frac{4\sqrt[4]{B}}{3c_o} t^{\frac{1}{6}} (1-x/L)^{\frac{1}{3}}, \quad V(x,t) = \frac{c_o B^{\frac{3}{4}}}{2} t^{-\frac{1}{2}}, \quad p(x,t) = \frac{4K_o}{3c_o^2 \sqrt{B}} t^{-\frac{1}{3}} (1-x/L)^{\frac{1}{3}}.$$

Характерным является то, что скорость жидкости для фиксированного момента времени постоянна вдоль канала, а давление независимо от величины модуля K убывает до нуля на переднем фронте ($x \rightarrow L$) по характерному закону $P \approx C t^{-\frac{1}{6}} (1-x/L)^{\frac{1}{3}}$.

Полученное решение позволяет решить обратную задачу – найти вид зависимости между давлением и раскрытием стенок для заданного закона изменения давления на входе или расхода закачиваемой жидкости из условий осуществимости данного автомодельного решения. Например, для постоянного расхода жидкости на входе в канал ($Q(t) = Q_o$) зависимость имеет вид $K(L) = K_o / \sqrt[3]{L}$, а остальные параметры на входе будут такими

$$h_o(t) = \frac{4Q_o}{3c_o} t^{\frac{1}{4}}, \quad V(t) = \frac{3}{4} t^{-\frac{1}{4}}, \quad p(0,t) = 4K_o Q_o / c_o^{\frac{4}{3}} = const.$$

Это означает, что в этом случае давление на входе также постоянно.

Таким образом, получено аналитическое решение автомодельной задачи о раскрытии канала с упругими стенками при втекании в него вязкой жидкости. Поскольку решение аналитическое, оно позволяет оценить характер поведения основных параметров задачи от времени и по длине раскрытой части канала.

Во втором параграфе рассмотрена задача гидравлического разрыва в которой учитывается прочность среды при разрушении и возможное отставание переднего фронта жидкости от вершины трещины разрыва (Рис.11). В трещину длиной $2l(t)$ закачивается жидкость с объемным расходом $Q_o(t)$. На бесконечности заданы напряжения σ_o , текущее раскрытие обозначено – $w(x,t)$, F – плотность вязких сил, действующих на выделенный участок жидкости, μ – вязкость жидкости, $L(t)$ – текущее положение переднего фронта жидкости. Движение жидкости описывается уравнениями:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wV)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial P_f}{\partial x} = -F; \quad F(x,t) = \frac{12\mu}{w^2(x,t)} V(x,t). \quad (21)$$

Среда моделируется упругой в рамках квазистатического приближения, поэтому уравнения (21) решаются совместно с уравнениями упругой среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0; \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}]; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}]; \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнения (21), (22) связаны граничными условиями на берегах трещины $y = 0^\pm, |x| < l$, где $2l(t)$ – длина трещины при заданной скорости в центре трещины $V_0(t) = Q/w_0(t)$

$$y = 0^\pm, |x| < l(t) \quad \sigma_{xy}^\pm = 0, \quad \sigma_{yy}^\pm = -P_f(x, t). \quad (23)$$

В качестве критерия разрушения используется равенство коэффициента интенсивности напряжений критическому значению (прочность материала упругой среды)

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \int_{-l}^l (P_f(\xi, t) - \sigma_0) \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} d\xi = K_{Ic}, \quad (24)$$

где K_{Ic} – критическая величина коэффициента интенсивности напряжений.

Положение фронта жидкости $x = L(t)$ определяется условием равенства нулю давления жидкости на фронте $x = L(t)$, $P_f(L(t), t) = 0$. (25)

На бесконечности в упругой среде должны быть выполнены граничные условия: $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\sigma_0$, $\sigma_{xy} = 0$. (26)

Задача (21) – (26) решена численно методом граничных элементов с использованием базовых решений (5), (6). Отметим, что при такой постановке передний фронт жидкости не совпадает с вершиной трещины ($l(t) \neq L(t)$). Полученное решение сравнивается с решением аналогичной задачи, полученной другими авторами. Там решение получено в упрощенной постановке, где пренебрегалось прочностью среды при разрушении, а фронт жидкости совпадал с вершиной трещины. Для удобства сравнения величины приведены к безразмерной форме записи. В качестве величин обезразмеривания использовались: $T = 12\mu/E'$ – временной масштаб, $L' = \sqrt{Q_0 T}$ – масштаб длины. Использовались: безразмерная координата $\xi = x/L'$ и безразмерное время $\tau = t/T$; безразмерная длина трещины $\chi(\tau) = l/L'$; давление $\Pi(\xi, \tau) = (P_f - \sigma_0)/E'$; раскрытие трещины $\Omega(\xi, \tau) = w/L'$; безразмерное критическое значение коэффициента интенсивности напряжений $K = K_{Ic}/(E'\sqrt{L'})$ (прочность среды).

На Рис.12 представлены графики зависимости от безразмерного времени $\tau \cdot 10^{-12}$: безразмерного давления $\Pi \cdot 10^4$ жидкости в месте закачки

жидкости – I кривая; безразмерного раскрытия $\Omega \cdot 10^{-3}$ в середине трещины – II кривая; безразмерной длины трещины $X \cdot 10^{-7}$ – III кривая.

На Рис.13 для фиксированной прочности $K = 3,5 \cdot 10^{-1}$ представлены графики распределения по длине трещины: давления $\tau^{1/3} \Pi \cdot 10$ – I кривая; безразмерного раскрытия $\tau^{-1/3} \Omega / \lambda$ в середине трещины – II кривая для перечисленных фиксированных моментов времени.

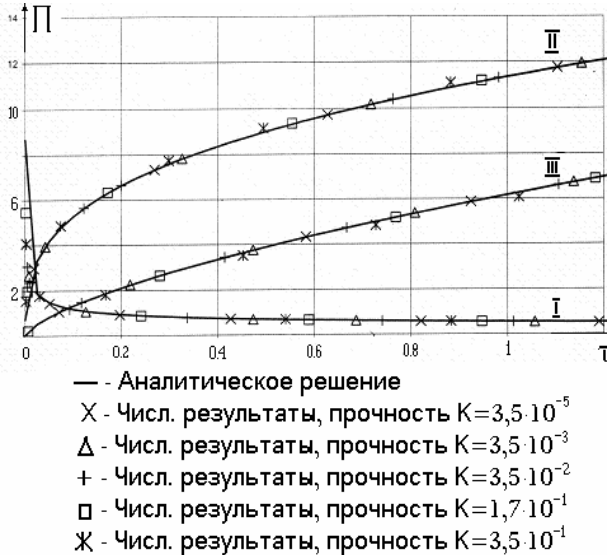


Рис.12

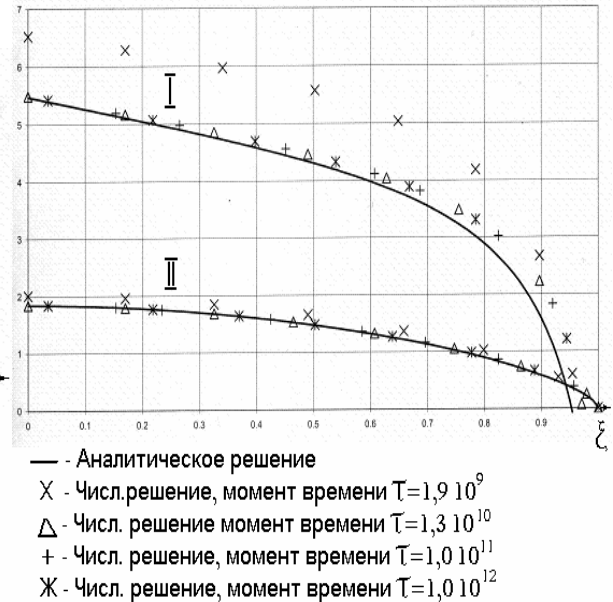


Рис.13

Для малых значений прочности и большого времени постановки задач становятся близкими, поскольку длина трещины в большие моменты времени намного превышает длину пустой области (область между фронтом жидкости и вершиной трещины). Сравнение с аналитическими кривыми (Рис.12) показывает хорошее совпадение для больших моментов времени. Аналогичные тенденции прослеживаются на графиках (Рис.13), которые соответствуют большой прочности. Наибольшие расхождения наблюдаются для большой прочности среды и при малых временах.

В третьем параграфе пятой главы рассмотрена задача о взаимодействии основной трещины гидравлического разрыва с уже имеющимся естественным разломом пласта. Задача решалась с учетом напряжений, действующих на бесконечности. Разлом моделировался трещиной, берега которой могут раскрываться или проскальзывать относительно друг друга. Области возможного раскрытия и взаимного скольжения определялись в ходе решения методом последовательных приближений. Считалось, что в случае взаимного скольжения они взаимодействуют по закону Кулона – Мора. Основным исследуемым параметром служил угол между направлением распространения основной трещины гидравлического разрыва и трещиной разлома. Определялось поведение перемещений и напряжений у берегов трещин в окрестности их точки взаимодействия. Проверялись разные возможные пути эволюции гидравлического разрыва после взаимодействия с разломом.

В экспериментах отмечено, что возможно как продолжение движения гидравлического разрыва в первоначальном направлении, так и поворот движения жидкости по направлению разлома.

В расчетах показана возможность реализации одного из трех сценариев развития (Рис.14). При малых углах между трещинами более вероятен поворот жидкости с дальнейшим движением вдоль разлома. При углах близких к величине 90° , когда трещина разлома перпендикулярна основной, более вероятно продолжение движения без изменения его направления. При средних углах наклона возможна более сложная комбинация, когда жидкость сначала поворачивает вдоль разлома, а затем повторно меняет направление своего движения.

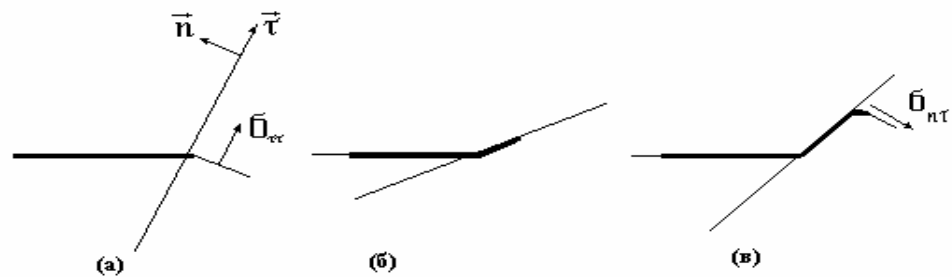


Рис.14

Эти выводы сделаны на основе анализа поля напряжений вблизи берегов трещины. Определялись главные разрывающие напряжения и максимальные касательные напряжения сдвига, а также площадки их действия.

В шестой главе рассмотрены численные решения нескольких важных для приложений задач, связанных с ударным взаимодействием упругопластических тел.

В первом параграфе шестой главы изложена методика приближенного расчета косоугольного проникновения затупленного жесткого тела в плиту конечной толщины в рамках гипотезы локального взаимодействия. Материал плиты полагается жесткопластическим. На каждом шаге по времени для контактных точек поверхности тела решается нестационарная одномерная задача пластического течения материала преграды в криволинейной системе координат, учитывающей локальную кривизну поверхности проникающего тела. В результате аналитического решения данной задачи удастся определить величину локального давления и деформацию преграды. Известное распределение давления на поверхности контакта позволяет проинтегрировать уравнения движения на текущем шаге по времени и свести задачу к исходной для нового шага по времени. Предложенная методика использована для расчетов проникновения тел. Показана возможность определения углов рикошета.

Во втором параграфе шестой главы исследуется задача взрывного метания упругопластической пластины (уравнения 7) в жесткую форму. Целью работы было исследование влияния на штамповку прочности пластины, толщины слоя ВВ, толщины пластины и геометрии жесткой формы, а также вклад газовой прослойки.

К этому времени разными авторами был решен ряд задач о взрывной штамповке пластины в жесткую форму. При этом использовались различные предположения. Основным приближением было то, что пластина рассматривалась как мембрана, или как тонкая оболочка. Влияние газовой прослойки не учитывалось. Одной из целей данной работы, была проверка достоверности таких предположений в зависимости от параметров задачи.

На Рис.15(а), (б), Рис.16(а) показана расчетная форма пластины при штамповке в сферическую форму. На Рис.16(б) контур формы штампа меняет знак выпуклости.

В таблицах 4, 5 приводятся величины кинетической энергии E , работы продуктов детонации $A_{ПД}$, энергии газа A_G , работы сил трения $A_{ТР}$ соответственно для "толстой" (таблица 4, $H_{П}/R_{П} = 3/40$) и для "тонкой" (таблица 5, $H_{П}/R_{П} = 3/160$) пластин, где $H_{П}$ - толщина пластины, $R_{П}$ - радиус пластины. Отметим, что названия "толстая" ("тонкая") для пластины условны, так как толщина пластины уменьшается всего в четыре раза. Тем не менее, как показывают расчеты, это существенно влияет на процесс.

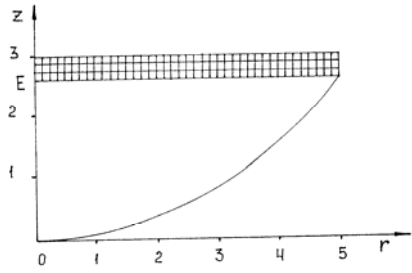
ТАБЛИЦА 3.

t (мкс)	E (КДж)	$A_{ПД}$ (КДж)	A_G (КДж)	$A_{ТР}$ (КДж)
4,2	180	270	0,05	0,34
9,6	130	300	0,12	1,6
14	70	300	0,16	2,6
19	48	300	0,19	3,3
22	25	302	0,29	4,1

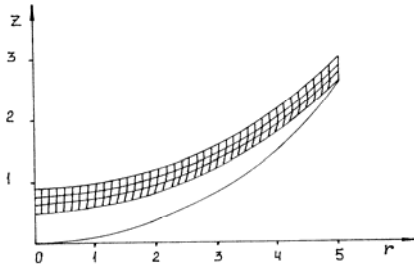
ТАБЛИЦА 4.

t (мкс)	E (КДж)	$A_{ПД}$ (КДж)	A_G (КДж)	$A_{ТР}$ (КДж)
1,0	270	360	0,14	0,10
2,3	380	650	0,91	0,58
3,8	350	750	2,4	2,40
5,1	160	760	3,9	4,40

Оказалось, что вклад газовой прослойки действительно мал. Основной вклад в энергетический баланс системы вносит работа на пластических деформациях. Моделирование пластины тонкой мембраной оправдано, если ее толщина составляет порядка одной сороковой от радиуса формы, причем на таком этапе ее движения, когда скорость точки контакта пластины и поверхности формы превышает скорость поперечных волн.

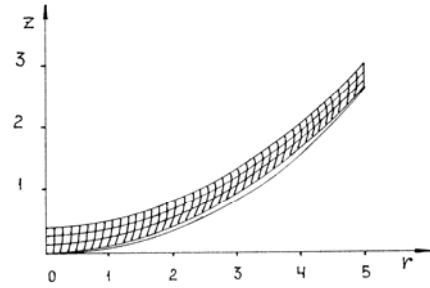


а)

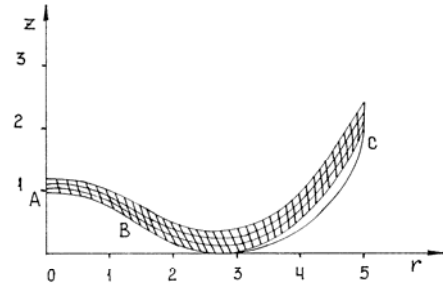


б)

Рис.15



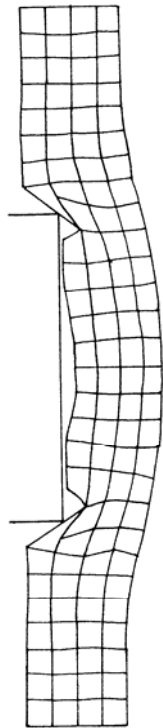
а)



б)

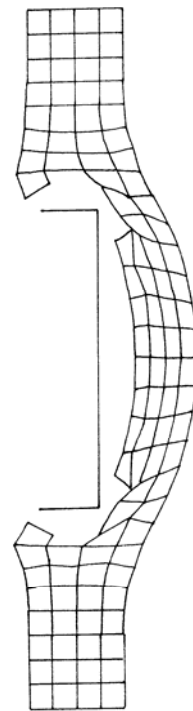
Рис.16

В третьем параграфе шестой главы рассматривается задача трехмерного проникания тела в упругопластическую плиту (уравнения 7) конечной толщины (Рис.17). Исследуются два основных прикладных аспекта проблемы – характер разрушения преграды и определение сохранности проникающего тела.



$V=200 \text{ м/с}$, $t=53,9 \text{ мксек}$

Рис.17



$V=600 \text{ м/с}$, $t=34,0 \text{ мксек}$

Рис.18.

При исследовании косо́го проникания цилиндрического тела в мишень удалось обнаружить возможность самостоятельного выхода выбиваемой «пробки» после первого кратковременного взаимодействия тела с преградой (Рис.18). Такая возможность существует, если скорость тела превышает некоторое критическое значение, а углы встречи близки к нулю (под углом встречи понимается угол между вектором скорости тела и нормалью к мишени). Показано, что процесс разрушения мишени очень сильно зависит от угла встречи. Уже при углах больших 10° наблюдается лепестковый характер разрушения (Рис.19). В этих условиях часто используемый в приложениях приближенный механизм разрушения в виде выбиваемой «пробки» не наблюдается в расчетах.

Вторым важным прикладным вопросом в задачах проникания является методика определения сохранности и целостности проникающего тела. В данном параграфе приведено решение задачи расчета напряженно-деформированного состояния полого неоднородного тела с заполнителем при его косом проникании в мишень. Главной целью было создание эффективной методики расчета прочности проникающего тела с достаточно сложной геометрией корпуса и при наличии заполнителя из другого менее прочного материала. Для конкретного тела показано существование критической скорости взаимодействия, при превышении которой для всех реальных углов встречи с преградой неизбежно разрушение корпуса.

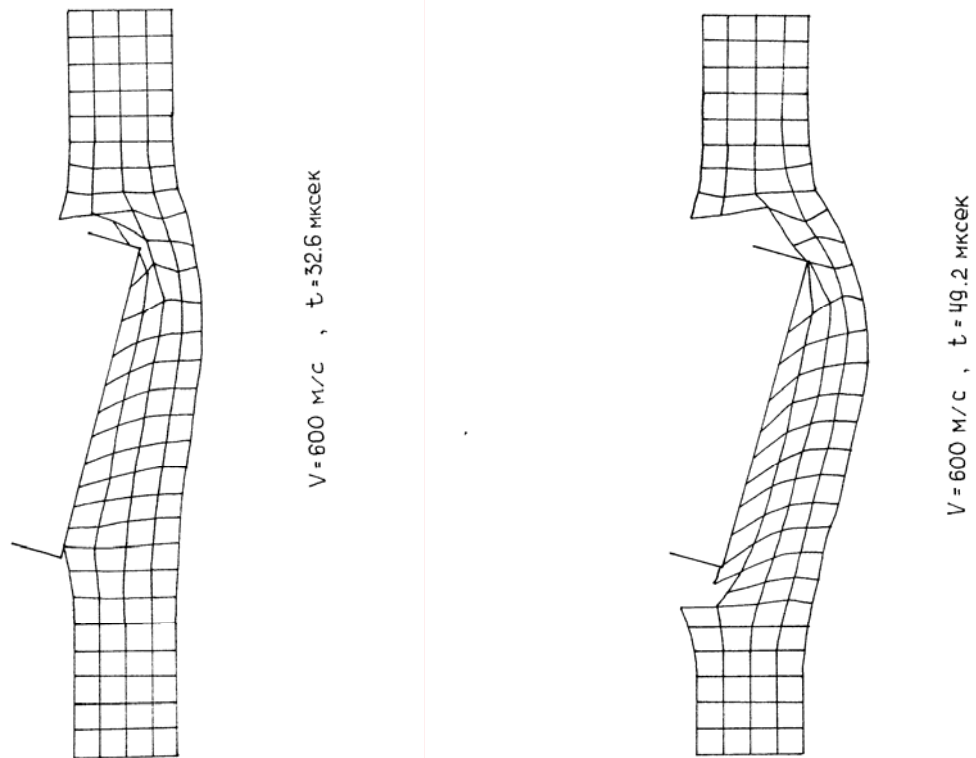
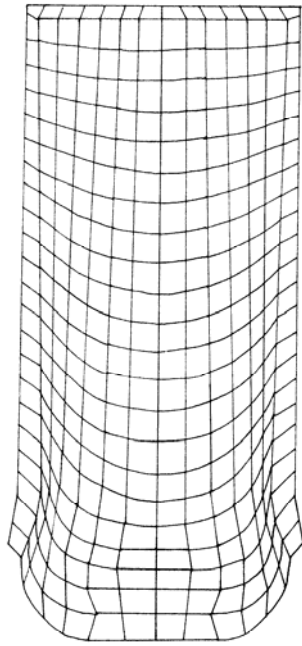
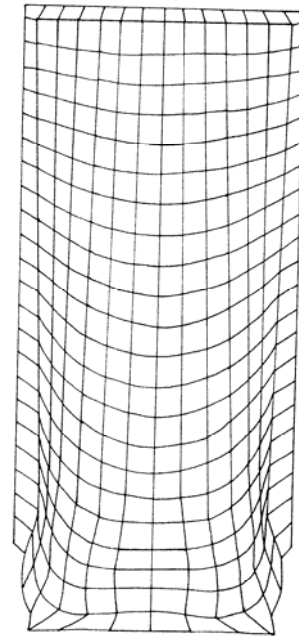


Рис.19



$V = 550 \text{ м/с}$, $\alpha = 0^\circ$, $t = 159.6 \text{ мксек}$

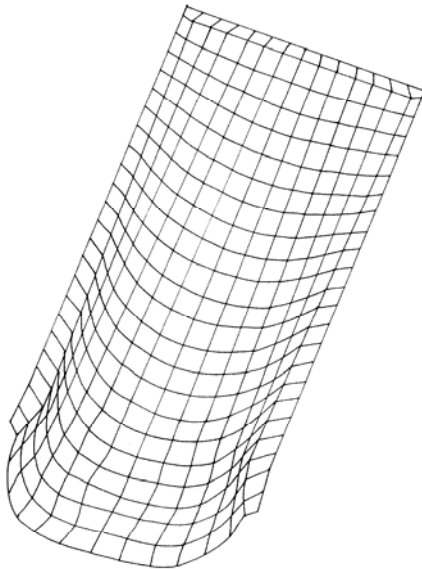
Рис.20



$V = 700 \text{ м/с}$, $\alpha = 0^\circ$, $t = 55.1 \text{ мксек}$

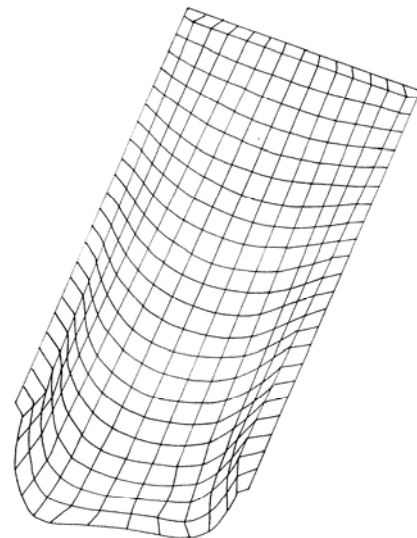
Рис.21

На Рис.20, Рис.21 показаны результаты нормального соударения со скоростями 550 м/с и 700 м/с . На Рис.22, Рис.23 показаны результаты наклонного (угол наклона оси тела к нормали поверхности преграды $\alpha = 20^\circ$) соударения со скоростями 600 м/с и 700 м/с .



$V = 600 \text{ м/с}$, $\alpha = 20^\circ$, $t = 109.4 \text{ мксек}$

Рис.22



$V = 700 \text{ м/с}$, $\alpha = 20^\circ$, $t = 41.4 \text{ мксек}$

Рис.23

При скорости 700 м/с при нормальном и косом соударении тело разрушилось. Критическая скорость в основном зависит от соотношения толщины головной части корпуса и преграды. Следует отметить, что расчетный характер разрушения корпуса – вдавливание головной части

внутри тела – также близок к типу разрушения, наблюдаемому в экспериментах.

В заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

В первой части работы (главы II – IV) аналитически исследована плоская задача движения твердого тела конечных размеров в деформируемой неограниченной и ограниченной среде во всем диапазоне скоростей движения. Исследован вклад трения и влияние свободной поверхности. В результате:

1. Получено аналитическое решение задачи о движении симметричного тела в неограниченной среде при отсутствии трения с дозвуковой скоростью, превышающей скорость поверхностных волн Рэлея.
2. Удалось в конечном виде найти решение задачи стационарного проникания симметричного тела в неограниченную упругую среду при наличии сухого трения.
3. Предложены и рассмотрены схемы хрупкого разрушения при внедрении тела со скоростью, меньшей, чем скорость волн Рэлея при отсутствии сил трения.
4. Предложена постановка и получено аналитическое решение задачи о внедрении симметричного тела в среду для случая вязкого разрушения.
5. Получено аналитическое решение задачи о движении симметричного тела с учетом трения при хрупком разрушении среды, сжатой давлением.
6. Получено аналитическое решение задачи о движении тела под углом атаки с учетом трения на поверхности контакта.
7. Поставлена и аналитически решена задача о разрушении упругого полупространства пластиной длины L , которая движется параллельно свободной поверхности на глубине h под углом атаки $\pm\gamma_0$ (отрезание слоя).

Во второй части работы (глава V) аналитически и численно исследована задача разрушения среды жидкостью. Решена задача гидравлического разрыва упругой среды с учетом прочности при разрушении и наличия области отставания жидкости от края трещины. Исследована задача о взаимодействии трещины гидравлического разрыва с естественным разломом пласта.

8. Получено аналитическое решение автомодельной задачи о раскрытии канала с упругими стенками при втекании в него вязкой жидкости.
9. Численно решена плоская задача о распространении в упругой среде трещины под действием давления находящейся в ней вязкой жидкости. Задача решена с учетом прочности среды при разрушении и с учетом области отставания фронта жидкости от края трещины.
10. Поставлена и исследована задача о взаимодействии трещины гидравлического разрыва с естественным разломом.

В третьей части работы (глава VI) предложены методики расчета задач нестационарного трехмерного взаимодействия упругопластических тел. Рассмотрены конкретные прикладные задачи штамповки взрывом и наклонного проникания.

11. Предложена и апробирована приближенная методика расчета на ЭВМ косоугольного ударного взаимодействия твердого тела с деформируемой пластиной.
12. Исследована задача штамповки пластины в жесткую форму при наличии и отсутствии воздушной прослойки между пластиной и формой.
13. Рассмотрена задача разрушения преграды жестким ударником при косом взаимодействии.
14. Решена трехмерная задача нестационарного взаимодействия неоднородного тела с жестко-пластической преградой.

Основные публикации по теме диссертации

1. Звягин А. В., Павленко А. Л. О движении тонких тел в линейно упругой среде // В сб. Газовая и волновая динамика, Вып. 2, 1979.
2. Звягин А. В. Дозвуковое движение твердого тела в упругой среде // Вестник МГУ. Матем. Механ. N3, 1979.
3. Звягин А. В., Павленко А. Л. Движение тел конечных размеров в упругой среде // Матер. Всес. конф. по мех. спл. сред, Ташкент. 1979.
4. Звягин А. В. Некоторые динамические задачи теории упругости // В сб. статей. Некоторые вопросы математики и механики. Изд. Моск. ун-та. 1981.
5. Звягин А. В. Дозвуковое движение жесткого тела в упругой среде со свободной поверхностью. // Всес. конф. по распротр. упругих и упруго-пластических волн, Фрунзе, 1983.
6. Звягин А. В. Дозвуковое движение жесткого тела в упругом полупространстве со свободной поверхностью // Взаимодействие волн в сплошных средах. Сборник статей. Изд. МГУ, 1984.
7. Звягин А. В. К вопросу наклонного проникания тел в грунт. // Проблемы динамики взаимодействующих сред. Изд. АН Арм. ССР. 1984.
8. Звягин А. В., Сагомоян А. Я. Косой удар по пластине из идеально пластического материала. Изв. АН СССР, МТТ, №1, 1985, с. 159-164.
9. Богданов В. И., Звягин А. В. Штамповка взрывом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1990. N 2.
10. Звягин А. В., Богданов В. А. Метание пластины взрывом Вестник Моск. Университета, Мат., мех., N 2. 1991.
11. Звягин А. В., Богданов В. А. Численное исследование пространственного проникания жесткого тела в упругопластическую плиту. // Вестник Моск. университета, Мат., мех., N 4, 1993.
12. Богданов В. И., Звягин А. В. Взрывное метание пластины // В сб.: "Современные проблемы физики и ее приложений". Материалы Всесоюзной конференции. Москва. Апрель. 1990.
13. Звягин А. В. Влияние ориентации микротрещин на интенсивность напряжений в конце макротрещины // Материалы Межд. Симпозиума по проблемам деформируемых тел., Москва. МГУ. 2001.
14. Богданов А. В., Звягин А. В., Тьерсилен М. Взаимное влияние системы трещин на коэффициент интенсивности напряжений. // Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ. N 6. 2004.
15. Звягин А. В. Движение вязкой жидкости в канале с упругими стенками. // Вестник МГУ. Матем. Механ. . N 1. 2005

16. Богданов А. В., Звягин А. В. Взаимодействие трещины гидроразрыва с разломом. // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сб. статей к 75-летию Е. И. Шемякина. Под ред. Д. Д. Ивлева и Н. Ф. Морозова. – М.: Физматлит. 2006.
17. Звягин А. В. О расклинивании упругой среды. Газовая и волновая динамика. М.: 2005.
18. Звягин А. В. Движение тонкого жесткого тела в упругой среде. // Вестник МГУ. Матем. Механ. 2005. N 5.
19. Звягин А. В., Богданов А. В. Взаимодействие трещины гидроразрыва с разломом. // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научн. конф., Секц. механика, Изд. Московского ун - та, 2005.
20. Звягин А. В. Движение тела в упругой среде при наличии трения // Вестник МГУ. Матем. Механ. 2006. N 5.
21. Zvyagin A.V. About wedging of an elastic half-space near a free surface // V International Congress on mathematical modeling. Dubna. 2002.
22. Zvyagin A.V., Bogdanov A.V. Influence of cracks on the stress intensity coefficients. // V International Congress on mathematical modeling. Dubna. 2002
23. Smirnov N.N., Kiselev A.B., Nikitin V.F., Zvyaguin A.V., Thiercelin M., Legros J.C. Hydraulic filtration and fracturing in porous medium. // Proceedings of the 2nd International Conference on Thermal Engineering Theory and Applications, Alain, United Arab Emirates, 2006.